[3] W. F. Eberlein, *A note on Fourier–Stieltjes transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 310–312.
[4] L. Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach, New York 1966.
[5] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience, New York 1967.

Received May 23, 1983 (1891)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXX. (1984)

Über Umkehrbedingungen bei gewöhnlicher und absoluter Limitierung

von

H. TIETZ (Stuttgart)

Abstract. It is known that if one of the conditions (1) to (3) [(5) to (7_∞)] is a Tauberian condition [absolute Tauberian condition] for a summability method V of a very general class, then each of these conditions is a Tauberian condition [absolute Tauberian condition] for V. It is the purpose of this paper to show that in this context (1) to (3) [(5) to (7_∞)] can be replaced by (1) to (4) [(5) to (8_∞)].

1. Einleitung. Bei gegebener Reihe $\sum a_n$ mit komplexen Gliedern sei

$$\delta_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ka_k \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Wir betrachten die vier Aussagen

(1) $$na_n = o(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

(2) $$\delta_n = o(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

(3) $$\sum (-1)^n na_n \text{ konvergiert},$$

(4) $$\sum (-1)^n \delta_n \text{ konvergiert}.$$

Mit den Bezeichnungen aus Nr. 2 gilt: Ist V ein permanentes Verfahren zur Summierung von Reihen $\sum a_n$ und ist (1) eine TB für V, so ist auch (2) eine TB für V. Dies wurde zum Beispiel in [9] gezeigt. (Wegen Verallgemeinerungen und Varianten vergleiche man [9], [10], [16] sowie Stieglitz [12], Leviatan [7], Kangro [5] und Sõrmus [14].) Umgekehrt ist wegen der Permanenz des Cesàro-Verfahrens (der Ordnung 1) mit (2) stets auch (1) eine TB für V. Nun zeigte Goes [3], 4.6, durch Anwendung eines Darstellungssatzes für Zahlenfolgen, die einer gewissen Wachstumsbedingung genügen, dass (2) auch eine TB für V ist, wenn nur (3) eine solche ist, und natürlich ebenso umgekehrt. Damit liegt die Frage nahe, ob (3) genau dann eine TB für V ist, wenn auch (4) eine TB für V ist. Dies ist der Fall (Satz. 2.1).

Wir verwenden jetzt auch die Bezeichnungen aus Nr. 3 und betrachten vier andere Aussagen.

(5) $\{na_n\} \in bv$,

(6) $\{\delta_n\} \in bv$,

(7_α) $\{na_n\} \in q^\alpha$,

(8_α) $\{\delta_n\} \in q^\alpha$.

Ist V ein absolut permanentes Verfahren zur Summierung von Reihen $\sum a_n$, und ist (5) eine ATB für V, so ist auch (6) eine ATB für V. Dies ergibt sich aus [15], Satz 3.3 oder Satz 3.6. Umgekehrt ist wegen der absoluten Permanenz des Cesàro-Verfahrens mit (6) stets auch (5) eine ATB für V. Nun zeigte Buntinas [1], Theorem 11, durch Anwendung eines Approximationssatzes für Abelsche Mittel, dass (6) auch eine ATB für V ist, wenn nur (7_α) eine solche ist. Da nach Dawson [2], Lemma 2,

(9) $$q^\alpha \supset q^{\alpha+1} \quad \text{für jedes } \alpha \in N$$

gilt (den entsprechenden Satz für $c_0 \cap Q^\alpha$ beweist schon Orlicz [11]), ist somit (6) genau dann eine ATB für V, wenn (7_α) für irgendein (und damit jedes) $\alpha \in N_\infty$ eine ATB für V ist. Für $\alpha = 2$ hatte dies zuvor Goes [4], Satz 3.6, bewiesen. Damit liegt jetzt die Frage nahe, ob mit (7_α) auch (8_α) eine ATB für V ist und umgekehrt. Dies ist der Fall (Satz 3.1). Wegen (9) ist dann (7_α) für irgendein (und damit jedes) $\alpha \in N_\infty$ genau dann eine ATB für V, wenn (8_α) für irgendein (und damit jedes) $\alpha \in N_\infty$ eine ATB für V ist.

2. Gewöhnliche Summierung. Bei allen auftretenden Folgen und Reihen soll, wenn nichts Besonderes gesagt ist, der Index von 0 an laufen. Wir betrachten in dieser Arbeit ausschliesslich solche Verfahren V zur Summierung von Reihen mit komplexen Gliedern, die entweder durch eine (gewöhnliche) Matrix (v_{nk}) $(n, k = 0, 1, \ldots)$ oder durch eine "Matrix" (v_{xk}) $(x_0 < x < \infty;\ k = 0, 1, \ldots)$ mit stetigem "Zeilenindex" definiert sind (vgl. [18], **4**). Die Reihe $\sum a_n$ heisst *V-summierbar zum Wert s* (V-$\sum a_n = s$), wenn die Folge $\{y_n\}$ mit $y_n := \sum_{k=0}^{\infty} v_{nk} a_k$ und der Grenzwert $s := \lim_{n\to\infty} y_n$ bzw. die Funktion y mit $y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} v_{xk} a_k$ $(x_0 < x < \infty)$ und der Grenzwert $s := \lim_{x\to\infty} y(x)$ existieren. Das Verfahren V heisst *permanent*, wenn aus $\sum a_n = s$ stets V-$\sum a_n = s$ folgt. Eine Bedingung für die Reihenglieder a_n heisst eine *Tauber-Bedingung* (TB) *für* V, wenn aus V-$\sum a_n = s$, zusammen mit dieser Bedingung, stets $\sum a_n = s$ folgt. Alle im folgenden ohne Definition verwendeten Begriffe aus der Limitierungstheorie findet man in [18].

Satz 2.1. *Ist V permanent, so ist* (3) *genau dann eine* TB *für* V, *wenn* (4) *eine* TB *für* V *ist.*

Beweis. Ist (3) eine TB für V, dann, nach dem in Nr. 1 erwähnten Resultat von Goes [3], auch (2) und somit erst recht die stärkere Bedingung (4).

Um zu zeigen, dass mit (4) auch (3) eine TB für V ist, genügt es zu beweisen, dass (4) aus (3) folgt, was gleichbedeutend ist mit

(10) $$\sum (-1)^n x_n \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum (-1)^n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ konvergiert}.$$

Nun ist für jedes $m = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{m} d_{mk} (-1)^k x_k$$

mit

$$d_{mk} := \sum_{n=k}^{m} (-1)^{n+k} \frac{1}{n+1} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant k \leqslant m,$$

weshalb wir zum Beweis von (10) nur zeigen müssen, dass die untere Dreiecksmatrix $D = (d_{mk})$ jede konvergente Reihe in eine konvergente Folge überführt, was genau dann der Fall ist, wenn die beiden Bedingungen

(11) $$\lim_{m\to\infty} d_{mk} \text{ existiert für alle } k,$$

(12) $$\sup_m \sum_{k=0}^{m} |d_{mk} - d_{m,k+1}| < \infty$$

erfüllt sind (vgl. [13], **14**). Davon ist (11) klar. Ferner ist

$$d_{mk} - d_{m,k+1} = \sum_{n=k}^{m-1} \frac{(-1)^{n+k}}{(n+1)(n+2)} + \frac{(-1)^{m+k}}{m+1} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant k \leqslant m$$

und damit

$$|d_{mk} - d_{m,k+1}| < \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{m+1} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant k \leqslant m,$$

woraus (12) folgt. Zum Beweis von (10) hätten wir auch so schliessen können: Die untere Dreiecksmatrix $B = (b_{nk})$ sei definiert durch $b_{nk} := (-1)^k$ für $0 \leqslant k \leqslant n$, und es sei $A := BC$, wobei C die Cesàro-Matrix ist. Dann ist (10) gleichbedeutend mit $c_B \subset c_A$, wenn c_A und c_B die Wirkfelder von A und B sind. Nun ist $c_B \subset c_A$ äquivalent dazu, dass die Matrix AB^{-1} konvergenztreu ist (vgl. [18], **35**. I). Dies noch zu zeigen, verlangt ähnliche Rechnungen wie oben.

3. Absolute Summierung. Es sei $N := \{1, 2, \ldots\}$, $N_\infty := N \cup \{\infty\}$, c der Raum aller konvergenten und m der Raum aller beschränkten Folgen $\{x_n\}$ komplexer Zahlen sowie

$$q^\alpha := c \cap Q^\alpha = m \cap Q^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in N$$

mit

$$Q^\alpha := \left\{\{x_n\}: \sum \binom{n+\alpha-1}{n} |\Delta^\alpha x_n| < \infty\right\},$$

$$\Delta^\alpha x_n := \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{n+k} \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Dann ist $q^1 = Q^1 =:$ bv, der Raum aller Folgen von beschränkter Variation. Nach Dawson [2] ist $\{x_n\}$ genau dann aus q^α, wenn jede der Folgen $\{\mathrm{Re}\, x_n\}$ und $\{\mathrm{Im}\, x_n\}$ als Differenz zweier Folgen aus

$$m^\alpha := m \cap \{\{y_n\}: \Delta^\alpha y_n \geqslant 0 \text{ für } n = 0, 1, \ldots\}$$

darstellbar ist. (Den entsprechenden Satz für $c_0 \cap Q^\alpha$ beweist schon Orlicz [11], Hilfssatz 2.) Eine Folge $\{y_n\}$ reeller Zahlen heisst *vollmonoton* (*totalmonoton*), wenn $\Delta^\alpha y_n \geqslant 0$ für alle $\alpha \in N$ und alle $n = 0, 1, \ldots$ gilt. Schliesslich sei q^∞ der Raum aller Folgen $\{x_n\}$, für die $\{\mathrm{Re}\, x_n\}$ und $\{\mathrm{Im}\, x_n\}$ als Differenz zweier beschränkter vollmonotoner Folgen darstellbar sind.

Die jetzt betrachteten Verfahren V sind wie in Nr. 2 definiert. Die Reihe $\sum a_n$ heisst *absolut V-summierbar zum Wert s* ($|V|$-$\sum a_n = s$), wenn neben V-$\sum a_n = s$ noch $\{y_n\} \in$ bv bzw. y von beschränkter Variation auf (x_0, ∞) gilt. Das Verfahren V heisst *absolut permanent*, wenn aus $\sum a_n = s$ und $\sum |a_n| < \infty$ stets $|V|$-$\sum a_n = s$ folgt. Eine Bedingung für die Reihenglieder a_n heisst eine *absolute Tauber-Bedingung* (ATB) *für V*, wenn aus $|V|$-$\sum a_n = s$, zusammen mit dieser Bedingung, stets $\sum a_n = s$ und $\sum |a_n| < \infty$ folgt.

Satz 3.1. *Ist V absolut permanent, so ist* (7_∞) *genau dann eine* ATB *für V, wenn* (8_∞) *eine* ATB *für V ist.*

Beweis. Wir dürfen uns, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, auf Reihen mit reellen Gliedern beschränken.

Ist (7_∞) eine ATB für V, dann, nach dem in Nr. 1 erwähnten Resultat von Buntinas [1], auch (6) und somit erst recht die, nach (9), stärkere Bedingung (8_∞).

Man kann diesen Teil von Satz 3.1, ohne Verwendung des Resultats von Buntinas, auch so beweisen: Es sei $\sum a_n$ eine Reihe, für die $|V|$-$\sum a_n = s$ ist und für die (8_∞) gilt. Aus (8_∞) folgt (6), d.h., $\sum |\delta_n - \delta_{n-1}| < \infty$ $(\delta_{-1} := 0)$. Mit $d := \sum (\delta_{n-1} - \delta_n)$ ist, wegen der absoluten Permanenz von V, dann $|V|$-$\sum (\delta_{n-1} - \delta_n) = d$, zusammen mit $|V|$-$\sum a_n = s$ also $|V|$-$\sum (a_n + \delta_{n-1} - \delta_n) = s + d$. Aus

$$a_n = \delta_n - \delta_{n-1} + \frac{1}{n}\delta_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

erhalten wir damit

$$|V|\text{-}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\delta_n\right) = s + d.$$

Für die Glieder der in der Klammer stehenden $|V|$-summierbaren Reihe ist wegen (8_∞) aber (7_∞), die vorausgesetzte ATB für V, erfüllt. Somit ist

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\delta_n = s + d \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|\delta_n| < \infty.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\sum a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n - \delta_{n-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\delta_n = s$$

sowie $\sum |a_n| < \infty$.

Um zu zeigen, dass mit (8_∞) auch (7_∞) eine ATB für V ist, genügt es zu beweisen, dass (8_∞) aus (7_∞) folgt. Erfüllt $\sum a_n$ die Bedingung (7_∞), so gibt es zwei beschränkte vollmonotone Folgen $\{y_n\}$ und $\{z_n\}$ mit $na_n = y_n - z_n$ für $n = 0, 1, \ldots$ Hieraus folgt, nach Vasić, Kečkić, Lacković und Mitrović [17], dass auch die beiden Folgen

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y_k\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z_k\right\}$$

beschränkt und vollmonoton sind. (Wegen Verallgemeinerungen dieses Resultats vergleiche man etwa Kotkowski und Waszak [6] oder Lupaş [8].) Dies ist aber äquivalent zu (8_∞).

Literatur

[1] M. Buntinas, *Approximation by Abel means and Tauberian theorems in sequence spaces*, Studia Math. 74 (1982), 19–32.

[2] D. F. Dawson, *Variation properties of sequences*, Mat. Vesnik 6 (21) (1969), 437–441.

[3] G. Goes, *Bounded variation sequences of order k and the representation of null sequences*, J. Reine Angew. Math. 253 (1972), 152–161.

[4] — *Summen von FK-Räumen. Funktionale Abschnittskonvergenz und Umkehrsätze*, Tôhoku Math. J. (2) 26 (1974), 487–504.

[5] G. Kangro, *Über die Schwächung der Tauber-Bedingungen*, Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs.-Mat. 19 (1970), 24–33 [Russisch].

[6] B. Kotkowski and A. Waszak, *An application of Abel's transformation*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 630 (1978), 203–210.

[7] D. Leviatan, *Remarks on some Tauberian theorems of Meyer-König, Tietz and Stieglitz*, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 126–132.

[8] A. Lupaş, *On convexity preserving matrix transformations*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 666 (1979), 189–191.

[9] W. Meyer-König und H. Tietz, *Über die Limitierungsumkehrsätze vom Typ o*, Studia Math. 31 (1968), 205–216.

[10] —, — *Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie*, Arch. Math. (Brno) 5 (1969), 177–186.

[11] W. Orlicz, *Über k-fach monotone Folgen*, Studia Math. 6 (1936), 149–159.

[12] M. Stieglitz, *Über ausgezeichnete Tauber-Matrizen*, Arch. Math. (Brno) 5 (1969), 227–233.

[13] M. Stieglitz und H. Tietz, *Matrixtransformationen von Folgenräumen. Eine Ergebnisübersicht*, Math. Z. 154 (1977), 1–16.
[14] T. Sõrmus, *Eine Methode zur Schwächung der o-Tauber-Bedingung in die o-Bedingung*, Tartu Riikl. Ül. Toimetised 596 (1982), 75–89 [Russisch].
[15] H. Tietz, *Über absolute Tauber-Bedingungen*, Math. Z. 113 (1970), 136–144.
[16] – *Permanenz- und Taubersätze bei pV-Summierung*, J. Reine Angew. Math. 260 (1973), 151–177.
[17] P. M. Vasić, J. D. Kečkić, I. B. Lacković and Ž. M. Mitrović, *Some properties of arithmetic means of real sequences*, Mat. Vesnik 9 (24) (1972), 205–212.
[18] K. Zeller und W. Beekmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970.

UNIVERSITÄT STUTTGART, MATHEMATISCHES INSTITUT A
Pfaffenwaldring 57, D 7000 Stuttgart-80
Bundesrepublik Deutschland

Received April 28, 1983 (1884)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXX. (1984)

Entropy numbers of r-nuclear operators in Banach spaces of type q

by

THOMAS KÜHN (Jena)

Abstract. It is shown that the entropy numbers of r-nuclear operators mapping a Banach space whose dual has type q into a Banach space of type p, belong to the Lorentz sequence space $l_{s,r}$, where $0<r<1$, $1 \leqslant p, q \leqslant 2$ and $1/s = 1+1/r-1/p-1/q$. This extends results of Carl and König.

0. Introduction. The entropy numbers describe the "degree of compactness" of bounded linear operators, but, moreover, they are also a powerful tool for the investigation of eigenvalue problems, cf. [6]. Therefore during the last few years a lot of results concerning entropy numbers of certain classes of operators has been established. We only remind of diagonal operators between Lorentz sequence spaces or embedding maps between Besov function spaces.

Recently Carl [4] considered operators S admitting a factorization through l_1:

$$\begin{tikzcd} l_q \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "D"'] & & X \\ & l_1 \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

where B is a bounded and D a diagonal operator. Supposing that X is of some type p, he characterized these operators in terms of their entropy numbers.

In the present paper we deal with the "dual" situation of operators T factorizing through l_∞,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "B"'] & & l_q \\ & l_\infty \arrow[ur, "D"'] & \end{tikzcd}$$