ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯМИ

А. А. ЧИКРИЙ

Институт кибернетики АН УССР, Киев, СССР

Работа посвящена изложению конструктивных методов решения квазилинейных дифференциальных игр сближения с терминальным множеством, представляющим собой объединение конечного числа выпуклых множеств.

В § 1 рассмотрен метод преследования по позиции, связанный со временем первого поглощения. Содержательно достаточные условия завершения преследования означают единственность точки экстремального прицеливания по Н. Н. Красовскому [6], [7] для каждой встречающейся позиции. На примере иллюстрируется эффект группового преследования: каждый из преследователей, действуя самостоятельно, ловит убегающего, но преследуя вместе они достигают цели за меньшее время.

В § 2 предлагается некоторая общая схема, позволяющая единым способом получить аналоги прямых методов Л. С. Понтрягина [9], [10] и метода Б. Н. Пшеничного [11] в случае нескольких преследователей.

В § 4 излагается новый эффективный метод преследования несколькими объектами и его модификации, позволяющие в явном виде вычислять управления преследования, оценивать время преследования и получить геометрически наглядные достаточные (а иногда и необходимые) условия окончания игры. При этом охватывается ситуация, когда каждый из преследователей не может догнать убегающего, действуя совместно они эту задачу успешно решают (§ 5).

На возможность применения разработанных методов к игровым задачам с запаздыванием информации и фазовыми ограничениями указывается в §§ 3, 6.

Основные положения иллюстрируются на модельных примерах „Простое движение“, „Контрольный пример Л. С. Понтрягина“, „Мальчик и крокодил“, „Лев и человек“ [1], [8], [13].

Ряд вспомогательных утверждений приводится без доказательств. Основные же утверждения либо строго обоснованы, либо доказательства проводятся аналогично приведенным схемам.

§ 1. Время первого поглощения

Пусть движение вектора z в конечномерном евклидовом пространстве E^n описывается квазилинейным дифференциальным уравнением

$$(1.1) \quad \dot{z} = Az + \varphi(u, v), \quad u \in U, \quad v \in V,$$

где A постоянная квадратная матрица порядка n , $\varphi(u, v)$ — непрерывная по совокупности аргументов функция, U и V компакты из пространства E^n . Терминальное множество M является объединением множеств $M_1^*, \dots, M_r^*$, причем каждое из множеств M_i^* представлено в виде $M_i^* = M_i^0 + M_i$, где M_i^0 — линейные подпространства из пространства E^n , а M_i — выпуклые замкнутые множества, принадлежащие L_i — ортогональным дополнениям к подпространствам M_i^0 в E^n .

Цель первого игрока (u) привести траекторию системы (1.1) на множество M за конечное время при заданном начальном положении. Второй игрок (v) ему противодействует.

Поскольку применяемые в дальнейшем стратегии для каждого из формулируемых результатов различны, то они будут определены позже. Сейчас же проведем некоторые вспомогательные построения и конструкции.

Обозначим через π_i оператор ортогонального проектирования из пространства E^n на подпространство L_i и рассмотрим два множества

$$\mathfrak{A} = \{a: a = (a_1, \dots, a_r), a_i \in E^1, \sum_{i=1}^r a_i = 1, a_i \geq 0\},$$

$$\Psi = \{p: p = (p_1, \dots, p_r), p_i \in L_i, \|p_i\| = 1\}.$$

Для $p \in \Psi$, $a \in \mathfrak{A}$ рассмотрим функцию

$$(1.2) \quad W(t, z, a, p) = \sum_{i=1}^r a_i (\Phi^*(t) p_i, z) + \int_0^t \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^r (a_i \Phi^*(\tau) p_i, \varphi(u, v)) d\tau,$$

где $\Phi^*(t)$ — матрица сопряженная к фундаментальной матрице однородной системы (1.1).

Далее, положим

$$\mu(t, z, a, p) = W(t, z, a, p) + \sum_{i=1}^r a_i C_{M_i}(-p_i).$$

Здесь $C_{M_i}(p_i)$ — опорная функция множества M_i . И, наконец, введем функции

$$\lambda(t, z) = \min_{p \in P} \max_{a \in A} \mu(t, z, a, p),$$

$$\lambda^*(t, z) = \max_{a \in A} \min_{p \in P} \mu(t, z, a, p).$$

Для дальнейших построений введем вспомогательную функцию

$$\lambda_0(t, z) = \min_{\alpha(\cdot)} \max_{i=1, \dots, \nu} \lambda_i(t, z, v(\cdot)),$$

где

$$\lambda_i(t, z, v(\cdot)) = \min_{\|p_i\|=1} [W(t, z, p_i, v(\cdot)) + C_{M_i}(-p_i)],$$

$$W(t, z, p_i, v(\cdot)) = (\Phi^*(t) p_i, z) + \int_0^t \max_{u \in U} (\Phi^*(t-\tau) p_i, \varphi(u, v(\tau))) d\tau.$$

Здесь $v(\cdot)$ — произвольная измеримая на интервале $[0, t]$ функция, принимающая в каждый момент значения из множества V .

Легко видеть, что $z \notin M$ тогда и только тогда, когда $\lambda_0(0, z) < 0$.

Условие 1.1. Отображение $\varphi(U, v)$, $v \in V$, является выпуклозначным.

Обозначим

$$K(M_i) = \{p_i: C_{M_i}(p_i) < \infty\}, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Условие 1.2. Множества $K(M_i)$, $i = 1, \dots, \nu$, непусты и замкнуты, а функции $C_{M_i}(p_i)$ непрерывны на $K(M_i)$.

Пусть $T_0(z)$ — точная нижняя грань корней уравнения $\lambda_0(t, z) = 0$, $t \geq 0$. Нижеследующая лемма раскрывает содержательный смысл функции $T_0(z)$.

Лемма 1.1. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2 и $T = T_0(z^0) < +\infty$. Тогда для любого измеримого управления второго игрока $v(t)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$, существует такое измеримое управление $u(t)$, $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$, первого игрока, что $z(T) \in M$, где $z(t)$, $t \geq 0$, соответствующее $u(t)$ и $v(t)$ решение системы (1.1). Если же $0 \leq t_* < T$, то всегда найдется такое управление $v(t)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, t_*]$ что $z(t_*) \notin M$ какое бы измеримое управление $u(t)$, $u(t) \in U$, $t \in [0, t_*]$, ни применял первый игрок.

Замечание 1.1. Функция $T_0(z)$ дает наименьшее время, удовлетворяющее условиям леммы 1.1. В случае $\nu = 1$ ее называют временем первого поглощения, а функцию — $\lambda_0(t, z)$ программным максимумом

[6], [7]. В случае разделенных движений преследователей и убегающего и $M_i = \{0\}$, $i = 1, \dots, \nu$, функция $T_0(z)$ содержательно означает тот первый момент, когда объединение областей достижимости преследователей полностью покрывает область достижимости убегающего.

Установим соотношения между функциями $\lambda(t, z)$, $\lambda^*(t, z)$, $\lambda_0(t, z)$. Прежде всего имеет место очевидное неравенство

$$\lambda(t, z) \geq \lambda^*(t, z) \quad \text{для всех } t \geq 0, z \in E^n.$$

Лемма 1.2. Пусть выполнено условие 1.2. Тогда имеет место неравенство

$$\lambda_0(t, z) \geq \lambda^*(t, z), \quad t \geq 0, \quad z \in E^n.$$

Лемма 1.3. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2. Тогда неравенство

$$\lambda(t, z) \leq \lambda_0(t, z)$$

имеет место для $t \geq 0$, $z \in E^n$, для которых $\lambda_0(t, z) \leq 0$. При этом если $\varphi(u, v) = u - v$, то

$$\lambda(t, z) = \lambda_0(t, z)$$

при условии, что $\lambda_0(t, z) \leq 0$.

Лемма 1.4. Пусть выполнены условия 1.1, 1.2 и функция

$$\beta(\alpha, p, t) = \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \Phi^*(t) p_i, \varphi(u, v))$$

выпукла по p , $p \in \Psi$, при любых $t \geq 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$.

Тогда, если $\lambda(t, z) \leq 0$, то

$$\lambda^*(t, z) = \lambda(t, z).$$

Положим для $p_i \in L_i$, $i = 1, \dots, \nu$,

$$W(t, z, p_i) = (\Phi^*(t) p_i, z) + \int_0^t \min_{v \in V} \max_{u \in U} (\Phi^*(\tau) p_i, \varphi(u, v)) d\tau,$$

$$\lambda_i(t, z) = \min_{\|p_i\|=1} [W(t, z, p_i) + C_{M_i}(-p_i)].$$

Лемма 1.5. Имеет место неравенство

$$(1.3) \quad \lambda^*(t, z) \geq \max_{i=1, \dots, \nu} \lambda_i(t, z), \quad t \geq 0, \quad z \in E^n.$$

Исследуем некоторые аналитические свойства функций $\lambda(t, z)$ и $\lambda^*(t, z)$. Для этого воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

Лемма 1.6 [11]. Пусть $\psi(x, y): E^n \times E^s \rightarrow E^1$, $y \in Y \subset E^s$, где Y — компакт, непрерывная функция по x и $y \in Y$, а $\nabla_x \psi(x, y)$ — непрерывна по x и y , $\varphi(x) = \min_{y \in Y} \psi(x, y)$.

Тогда функция $\varphi(x)$ дифференцируема по любому направлению l и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \min_{y \in R(x)} (\nabla_x \psi(x, y), l),$$

где

$$R(x) = \{y: y \in Y, \varphi(x) = \psi(x, y)\}.$$

Есть в некоторой окрестности точки x^0 множество $R(x)$ состоит из единственного вектора $y(x)$, то $y(x)$ непрерывно зависит от x , в этой окрестности $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема по x и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nabla_x \psi(x, y(x)).$$

Лемма 1.7 [3]. Пусть $f(x, y, z): E^n \times E^s \times E^r \rightarrow E^1$ непрерывная по совокупности переменных функция, $\nabla_x f(x, y, z)$ — непрерывна по x, y, z , Y и Z — компакты из E^s и E^r соответственно. Пусть

$$\psi(x, y) = \max_{z \in Z} f(x, y, z), \quad \varphi(x) = \min_{y \in Y} \psi(x, y),$$

а

$$Q(x, y) = \{z: z \in Z, f(x, y, z) = \psi(x, y)\}.$$

Если отображение $Q(x, y)$ непрерывно по y на множестве $R(x)$, то функция $\varphi(x)$ дифференцируема по любому направлению l и

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial l} = \min_{y \in R(x)} \max_{z \in Q(x, y)} (\nabla_x f(x, y, z), l).$$

Рассмотрим следующие многозначные отображения:

$$\Psi(t, z) = \{p \in \Psi: \lambda(t, z) = \max_{a \in \mathfrak{A}} \mu(t, z, a, p)\},$$

$$\mathfrak{A}(t, z, p) = \{a \in \mathfrak{A}: \mu(t, z, a, p) = \max_{a \in \mathfrak{A}} \mu(t, z, a, p)\},$$

$$\Psi^*(t, z, a) = \{p \in \Psi: \mu(t, z, a, p) = \min_{p \in \Psi} \mu(t, z, a, p)\},$$

$$\mathfrak{A}^*(t, z) = \{a \in \mathfrak{A}: \lambda^*(t, z) = \min_{p \in \Psi} \mu(t, z, a, p)\}.$$

Условие 1.3. Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, z, p)$ непрерывно по p на множестве $\Psi(t, z)$.

Условие 1.4. Многозначное отображение $\Psi^*(t, z, a)$ непрерывно по a на множестве $\mathfrak{A}^*(t, z)$.

Пусть $l' = (l, \Delta)$, где l — n -мерный вектор, а Δ число. Из леммы 1.7 при выполнении условий 1.3, 1.4 получим формулы

$$(1.4) \quad \frac{\partial \lambda(t, z)}{\partial l'} = \min_{p \in \Psi(t, z)} \max_{a \in \mathfrak{A}(l, z, p)} \left[(\nabla_z \mu(t, z, a, p), l) + \Delta \frac{\partial}{\partial t} \mu(t, z, a, p) \right],$$

(1.5)

$$\frac{\partial \lambda^*(t, z)}{\partial l'} = \max_{a \in \mathfrak{A}^*(t, z)} \min_{p \in \Psi^*(t, z, a)} \left[(\nabla_z \mu(t, z, a, p), l) + \Delta \frac{\partial}{\partial t} \mu(t, z, a, p) \right].$$

Из выражения (1.2) следует, что

$$(1.6) \quad \nabla_z \mu(t, z, a, p) = \sum_{i=1}^r a_i \Phi^*(t) p_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(t, z, a, p) = \sum_{i=1}^r a_i (\Phi^*(t) p_i, Az) + \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^r (a_i \Phi^*(t) p_i, \varphi(u, v)).$$

Обозначим через $T(z)$ и $T^*(z)$ первые положительные корни уравнений $\lambda(t, z) = 0$ и $\lambda^*(t, z) = 0$, $t \geq 0$. Пусть $\mathfrak{M}(t, z^0)$ — множество достижимости системы (1.1) за время t из начального положения z^0 при всевозможных измеримых управлениях $u(\tau) \in U$, $v(\tau) \in V$, $0 \leq \tau \leq t$,

$$\mathfrak{M}(t, z^0) = \Phi(t)z^0 + \int_0^t \Phi(\tau) \varphi(U, V) d\tau$$

и положим

$$\mathfrak{M}_T(z^0) = \bigcup_{t=0}^T \mathfrak{M}(t, z^0).$$

В ходе игры первый игрок использует позиционные контрстратегии [7], второй выбирает произвольные измеримые функции.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2 и для каждой точки z_1 такой, что $T(z_1) \leq T(z^0) < \infty$, $z_1 \in \mathfrak{M}_{T(z^0)}(z^0)$, выполнены условия:

(а) Множество $\Psi(t, z)$ состоит из единственного вектора $p(t, z)$ для всех t и z из некоторой окрестности $\{T(z_1), z_1\}$;

(б) множество $\mathfrak{A}(t, z, p(t, z))$ состоит из единственного вектора $a(t, z)$ для всех t и z из указанной окрестности;

(в) функция

$$\sum_{i=1}^r a_i(t, z) (\Phi^*(t) p_i(t, z), \varphi(u, v))$$

достигает своего максимума по u на единственном векторе $u(t, z, v)$ для всех t и z из указанной ранее окрестности и $v \in V$.

Тогда из точки z^0 игру (1.1) можно закончить за время, не превосходящее числа $T(z^0)$.

Доказательство. Пусть начальная точка z^0 такая, что $0 < T(z^0) < \infty$. По условиям теоремы в окрестности $\{T(z^0), z^0\}$ однозначно определены функции $p(t, z)$ и $a(t, z)$. Из леммы 1.6 следует, что $p(t, z)$ и $a(t, z)$ непрерывно зависят от t и z . Условие (в) однозначно определяет функцию $u(t, z, v)$, которая в силу леммы 1.6 непрерывно зависит от t и z из окрестности $\{T(z^0), z^0\}$ и $v \in V$.

Пусть $v(t)$ — произвольная измеримая функция со значениями из множества V . Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \dot{T} &= -1, \\ \dot{z} &= Az + \varphi(u(T, z, v(t)), v(t)), \\ z(0) &= z^0, \quad T(0) = T(z^0). \end{aligned}$$

Так как функция $u(t, z, v)$ непрерывна по переменным, а функция $\varphi(u, v)$ также непрерывна по u и v , то функция $\varphi(u(T, z, v(t)), v(t))$ непрерывна по z и измерима по t [5]. Из [11] следует, что система (1.1) имеет решение $z(t)$, $T(t)$, продолжаемое до границы области $\{T(z^0), z^0\}$. Это решение, вообще говоря, не единственно. Пусть $[0, t_1]$ — максимальный интервал его существования. Покажем, что

$$T(z^0) - t_1 \geq T(z(t_1)).$$

Для этого вычислим производную от функции $\lambda(t, z)$ вдоль траекторий системы (1.1).

Из леммы 1.7 и формул (1.4), (1.5), (1.6) следует, что в области $\{T(z^0), z^0\}$ функция $\lambda(t, z)$ имеет непрерывные частные производные, которые даются выражениями

$$\begin{aligned} \nabla_z \lambda(t, z) &= \sum_{i=1}^r a_i(t, z) \Phi^*(t) p_i(t, z), \\ \frac{\partial}{\partial t} \lambda(t, z) &= \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^r a_i(t, z) (\Phi^*(t) p_i(t, z), Az + \varphi(u, v)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda(T(t), z(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r a_i(T(t), z(t)) \Phi^*(T(t)) p_i(T(t), z(t)), Az(t) + \right. \\ &+ \left. \varphi(u(T(t), z(t), v(t)), v(t)) - \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^r a_i(T(t), z(t)) (\Phi^*(T(t)) p_i(T(t), z(t)), \right. \\ &\quad \left. \left. Az(t) + \varphi(u, v) \right) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вдоль траекторий (1.1) функция $\lambda(T(t), z(t))$ не убывает. Учитывая, что $\lambda(T(z^0), z^0) = 0$, получим неравенство

$$\lambda(T(z^0) - t, z(t)) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$(1.8) \quad T(z(t)) \leq T(z^0) - t, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Начиная с точки $z_1 = z(t_1)$, можно построить траекторию $z(t)$ с начальными условиями $z(t_1) = z_1$, $T(t_1) = T(z(t_1))$ и так далее. Следовательно, функция $T(z(t))$ обратится в нуль не позже, чем в момент $T = T(z^0)$. В силу леммы 1.4

$$T(z(t)) \geq T_0(z(t))$$

и, следовательно, существует момент t_* , $t_* \leq T(z^0)$ такой, что $T_0(z(t_*)) = 0$. А поскольку $\lambda_0(0, z(t_*)) = 0$, то $z(t_*) \in M$.

Следствие 1.1. Пусть выполнены условия 1.1, 1.2 и для каждой точки z_1 такой, что $T(z_1) \leq T(z^0) < \infty$, $z_1 \in \mathcal{M}_{T(z^0)}(z^0)$, выполнено условие (а) теоремы 1.1 и существует такое α_0 , $\alpha_0 \in \mathcal{A}(T(z_1), z_1, p(T(z_1), z_1))$, что функция

$$\sum_{i=1}^r \alpha_{0i} (\Phi^*(t) p_i(t, z), \varphi(u, v))$$

достигает своего максимума по u на единственном векторе $u(t, z, v)$ для всех t и z из окрестности $\{T(z_1), z_1\}$ и $v \in V$.

Тогда из точки z^0 игру (1.1) можно закончить за время, не превосходящее числа $T(z^0)$.

Замечание 1.2. Единственность по u в следствии 1.1 также не обязательна. Однако при этом доказательство должно опираться на решение уравнений в контингенциях [7].

Замечание 1.3. Из доказательства теоремы 1.1 и следствия 1.1 следует, что в условии (а) единственность должна быть лишь по тем компонентам $p_i(t, z)$, которые соответствуют ненулевым числам α_{0i} , $i = 1, \dots, r$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2 и для каждой точки z_1 такой, что $T^*(z_1) \leq T^*(z^0) < \infty$, $z_1 \in \mathcal{M}_{T^*(z^0)}(z^0)$, выполнены условия:

(а) множество $\mathcal{A}^*(t, z)$ состоит из единственного вектора $a^*(t, z)$ для всех t и z из некоторой окрестности $\{T^*(z_1), z_1\}$;

(б) множество $\Psi^*(t, z, a^*(t, z))$ состоит из единственного вектора $p^*(t, z)$ для всех t и z из указанной окрестности;

(в) функция

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^*(t, z) (\Phi^*(t) p_i(t, z), \varphi(u, v))$$

достигает своего максимума по u на единственном векторе $u(t, z, v)$ для всех t и z из указанной ранее окрестности и $v \in V$.

Тогда из точки z^0 игру (1.1) можно закончить за время не превосходящее числа $T^*(z^0)$.

Следствие 1.2. Пусть выполнены условия 1.1 и 1.2 и для каждой точки z_1 такой, что $T^*(z_1) \leq T^*(z^0) < \infty$, $z_1 \in \mathcal{M}_{T^*(z^0)}(z^0)$, с некоторым $\alpha_0^* \in \mathcal{U}^*(T^*(z_1), z_1)$ выполнены условия:

(а) множество $\Psi^*(t, z, \alpha_0^*)$ состоит из единственного вектора $p^*(t, z)$ для всех t и z из некоторой окрестности $\{T^*(z_1), z_1\}$;

(б) функция

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{0i}^* (\Phi^*(t) p_i^*(t, z), \varphi(u, v))$$

достигает своего максимума по u на единственном векторе $u(t, z, v)$ для всех t и z из указанной окрестности и $v \in V$.

Тогда из точки z^0 игру (1.1) можно закончить за время, не превосходящее числа $T^*(z^0)$.

Ниже приводится пример задачи преследования несколькими управляемыми объектами, иллюстрирующий следующую ситуацию: каждый преследователь, действуя самостоятельно, может поймать убегающего за конечное время, однако преследуя группой они добьются поимки раньше (в лемме 1.5 выполняется строгое неравенство).

Пример (простое движение). Движение преследователей и убегающего описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, \quad \|u_i\| \leq a, \quad i = 1, 2, \quad x_i \in E^n, \quad n \geq 2, \quad a > 1, \\ \dot{y} &= v, \quad \|v\| \leq 1, \quad y \in E^n. \end{aligned}$$

Преследование заканчивается в тот момент времени, когда выполнено одно из равенств

$$\|x_i(t) - y(t)\| = \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Начальные положения преследователей и убегающего удовлетворяют следующим условиям:

$$(1) \quad \|x_1^0 - y^0\| = \|x_2^0 - y^0\|,$$

$$(2) \quad \varepsilon > 1/2 \|x_1^0 - x_2^0\|,$$

$$(3) \quad \frac{x_1^0 - y^0}{\|x_1^0 - y^0\|} \neq \frac{x_2^0 - y^0}{\|x_2^0 - y^0\|}.$$

§ 2. Аналоги прямых методов Л. С. Понтрягина

В этом параграфе предлагается некоторый общий подход, позволяющий получить аналоги прямых методов Л. С. Понтрягина в случае нескольких преследователей, а также некоторые результаты близкие к изложениям в § 1, но выраженные в терминах выпуклозначных отображений.

Для $a \in \mathfrak{A}$ образуем многозначное отображение

$$M(a) = a_1 M_1 \times \dots \times a_r M_r,$$

со значениями в 2^L , где $L = L_1 \times \dots \times L_r$, является прямым произведением подпространств L_i .

Обозначим для $r \geq 0$, $a \in \mathfrak{A}$

$$\hat{W}_1(r, a) = \bigcap_{v \in V} \bigcup_{u \in U} (a_1 \pi_1 \Phi(r) \varphi(u, v), \dots, a_r \pi_r \Phi(r) \varphi(u, v))$$

и положим

$$W_1(r, a) = -M(a) + \int_0^t \hat{W}_1(r, a) dr,$$

где $\int_0^t \hat{W}_1(r, a) dr$ представляет собой совокупность векторов вида $x = \int_0^t w(r) dr$, где $w(r)$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $w(r) \in \hat{W}_1(r, a)$ при $r \in [0, t]$.

Легко видеть, что при $\nu = 1$ получаем множество $W_1(r)$ являющееся основным в построениях первого прямого метода Л. С. Понтрягина [9].

Далее, пусть $0 = t_0 \leq \dots \leq t_k = t$ — произвольное разбиение отрезка $[0, t]$. В L определим индуктивно множества $A_{i+1}(a)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $a \in \mathfrak{A}$:

$$A_{i+1}(a) = \bigcap_{v(r)} \left[A_i(a) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bigcup_{u \in U} (a_1 \pi_1 \Phi(r) \varphi(u, v(r)), \dots, a_r \pi_r \Phi(r) \varphi(u, v(r))) dr, \right.$$

$$A_0(a) = -M(a).$$

Пересечение берется по всевозможным измеримым функциям $v(r)$ со значениями из V для $r \in [t_i, t_{i+1}]$. Предел множества $A_k(a)$ при безграничном измельчении отрезка $[0, t]$ обозначим $W_2(t, a)$. Нетрудно видеть, что при $\nu = 1$ отсюда получим известную конструкцию альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина [10].

Для $t \geq 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$ введем многозначное отображение

$$W_3(t, \alpha) = \bigcap_{v(r)} \left(-M(\alpha) + \int_0^t \bigcup_{u \in U} (a_1 \pi_1 \Phi(r) \varphi(u, v(r)), \dots, a, \pi, \Phi(r) \varphi(u, v(r))) dr. \right.$$

При $\nu = 1$ получим отображение, связанное со временем первого поглощения [11].

Нетрудно убедиться в справедливости следующей цепочки включений:

$$W_1(t, \alpha) \subset W_2(t, \alpha) \subset W_3(t, \alpha)$$

при любых $t \geq 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$.

В дальнейшем будет предполагаться выполненным следующее условие.

Условие 2.1. Множества $K(M_i)$, $i = 1, \dots, \nu$, непусты и замкнуты, а функции $C_{W_j(t, \alpha)}(p)$ непрерывны по совокупности (t, α, p) и непрерывно дифференцируемы по t для всех

$$(t, \alpha, p) \in [0, \infty) \times \mathcal{A} \times K(M_1) \times \dots \times K(M_\nu).$$

Обозначим

$$\eta(t, \alpha, z) = (a_1 \pi_1 \Phi(t) z, \dots, a, \pi, \Phi(t) z)$$

и рассмотрим функции

$$\mu_j(t, z, \alpha, p) = C_{W_j(t, \alpha)}(p) + (p, \eta(t, z, \alpha)),$$

$$\lambda_j(t, z) = \min_{p \in \Psi} \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \mu_j(t, z, \alpha, p),$$

$$\lambda_j^*(t, z) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \min_{p \in \Psi} \mu_j(t, z, \alpha, p), \quad j = 1, 2, 3.$$

Через $T_j(z)$ и $T_j^*(z)$ обозначим точную нижнюю грань корней уравнения $\lambda_j(t, z) = 0$, $t \geq 0$ и, соответственно, $\lambda_j^*(t, z) = 0$, $t \geq 0$. Если таких корней нет, то положим $T_j(z) = \infty$, $T_j^*(z) = \infty$. Имеют место неравенства

$$T_1(z) \geq T_2(z) \geq T_3(z), \quad T_1^*(z) \geq T_2^*(z) \geq T_3^*(z),$$

$$T_j^*(z) \geq T_j(z), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$T_3(z) \geq T(z), \quad T_3^*(z) \geq T^*(z).$$

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия 1.1 и 2.1. Тогда

$$T_j(z) = T_j^*(z), \quad j = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$\Psi_j(t, z) = \{p \in \Psi: \lambda_j(t, z) = \max_{a \in \mathfrak{A}} \mu_j(t, z, a, p)\},$$

$$\mathfrak{U}_j(t, z, p) = \{a \in \mathfrak{A}: \mu_j(t, z, a, p) = \max_{a \in \mathfrak{A}} \mu_j(t, z, a, p)\},$$

$$\Psi_j^*(t, z, a) = \{p \in \Psi: \mu_j(t, z, a, p) = \min_{p \in \Psi} \mu_j(t, z, a, p)\},$$

$$\mathfrak{U}_j^*(t, z) = \{a \in \mathfrak{A}: \lambda_j^*(t, z) = \min_{p \in \Psi} \mu_j(t, z, a, p)\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия 1.1 и 2.1 и для каждой точки z_1 такой, что $T_j(z_1) \leq T_j(z^0) < \infty$, $z_1 \in \mathfrak{M}_{T_j(z^0)}(z^0)$, выполнены условия:

(а) множество $\Psi_j(t, z)$ состоит из единственного вектора $p^j(t, z)$ для всех t и z из некоторой окрестности $\{T_j(z_1), z_1\}$;

(б) множество $\mathfrak{U}_j(t, z, p^j(t, z))$ состоит из единственного вектора $a^j(t, z)$ для всех t и z из указанной окрестности;

(в) функция

$$\sum_{i=1}^r a_i^j(t, z) (\Phi^*(t) p_i^j(t, z), \varphi(u, v))$$

достигает своего максимума по u на единственном векторе $u^j(t, z, v)$ для всех t и z из указанной ранее окрестности и $v \in V$.

Тогда из точки z^0 игру (1.1) можно закончить за время, не превосходящее числа $T_j(z^0)$, $j = 1, 2, 3$.

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $j = 1$. Пусть начальная точка z^0 такая, что $0 < T_1(z^0) < \infty$. В силу предположения теоремы в окрестности $\{T_1(z^0), z^0\}$ однозначно определены функции $p^1(t, z)$, $a^1(t, z)$ и $u^1(t, z, v)$, $v \in V$, которые согласно лемме 1.6 непрерывно зависят от своих аргументов.

Пусть $v(t)$ — произвольная измеримая функция со значениями из множества V . Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= -1, \\ (2.1) \quad \dot{z} &= Az + \varphi(u(T_1, z, v(t)), v(t)), \\ z(0) &= z^0, \quad T_1(0) = T_1(z^0), \end{aligned}$$

где функция $\varphi(u(T_1, z, v(t)), v(t))$ непрерывна по z и измерима по t .

Из [11] следует, что система (2.1) имеет решение $z(t)$, $T_1(t)$, продолжаемое до границы области $\{T_1(z^0), z^0\}$. Это решение, вообще говоря, не единственно. Пусть $[0, t_1]$ — максимальный интервал его существования. Покажем, что

$$T_1(z^0) - t_1 \geq T_1(z(t_1)).$$

Для этого вычислим производную от функции $\lambda_1(t, z)$ вдоль траектории системы (1.1).

Из леммы 1.7 и формул (1.4), (1.5), (1.6) следует, что в области $\{T_1(z^0), z^0\}$ функция $\lambda_1(t, z)$ имеет непрерывные частные производные, которые даются выражениями

$$\nabla_s \lambda_1(t, z) = \sum_{i=1}^r a_i^1(t, z) \Phi^*(t) p_i^1(t, z),$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \lambda_1(t, z) = \frac{d}{dt} C_{W_1(t, a)}(p) \Big|_{\substack{a=a^1(t, z) \\ p=p^1(t, z)}} + \sum_{i=1}^r a_i^1(t, z) (\Phi^*(t) p_i^1(t, z), Az).$$

Поскольку для каждого $a \in \mathfrak{A}$

$$W_1(t, a) \subset \bigcap_{v(r)} \left[W_1(t - \delta, a) + \int_{t-\delta}^t \bigcup_{u \in U} (a_1 \pi_1 \Phi(r) \varphi(u, v(r)), \dots, a_r \pi_r \Phi(r) \varphi(u, v(r))) dr \right],$$

где $\delta > 0$, то в силу условия 1.1 отсюда следует

$$C_{W_1(t, a)}(p) \leq C_{W_1(t-\delta, a)}(p) + \int_{t-\delta}^t \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^r a_i (\Phi^*(r) p_i, \varphi(u, v)) dr$$

для всех $p \in \Psi$. В результате имеем неравенство

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} C_{W_1(t, a)}(p) \leq \min_{v \in V} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^r a_i (\Phi^*(t) p_i, \varphi(u, v))$$

для всех $a \in \mathfrak{A}$, $p \in \Psi$.

Учитывая соотношения (2.2) в выражении для полной производной функции $\lambda_1(t, z)$ вдоль траекторий системы (1.1), а также неравенство (2.3), получим

$$\frac{d}{dt} \lambda_1(T_1(t), z(t)) \geq 0$$

или

$$\lambda_1(T_1(z^0) - t, z(t)) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$T_1(z(t)) \leq T_1(z^0) - t, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны заключительной части доказательства теоремы 1.1.

При $j = 2, 3$ также имеет место неравенство типа (2.3), а остальные рассуждения полностью совпадают с приведенным доказательством.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия 1.1 и 2.1 и для каждой точки z_1 такой, что $T_j^*(z_1) \leq T_j^*(z^0) < \infty$, $z_1 \in \mathcal{M}_{T_j^*(z^0)}(z^0)$, выполнены условия:

(а) множество $\mathcal{U}_j^*(t, z)$ состоит из единственного вектора $a^{*j}(t, z)$ для всех t и z из некоторой окрестности $\{T_j^*(z_1), z_1\}$;

(б) множество $\mathcal{P}_j^*(t, z, a^{*j}(t, z))$ состоит из единственного вектора $p^{*j}(t, z)$ для всех t и z из указанной окрестности;

(в) функция

$$\sum_{i=1}^r a_i^{*j}(t, z) (\Phi^*(t) p_i^{*j}(t, z), \varphi(u, v))$$

достигает своего максимума по u на единственном векторе $u^j(t, z, v)$ для всех t и z из указанной ранее окрестности и $v \in V$.

Тогда из точки z^0 игру (1.1) можно закончить за время, не превосходящее числа $T_j^*(z^0)$, $j = 1, 2, 3$.

Остановимся на обсуждении теорем 2.1, 2.2 и их возможных усилениях и обобщениях, не формулируя строго результаты.

Во-первых, условия (б) теоремы 2.1 и (а) теоремы 2.2 могут быть ослаблены (единственность по a необязательна) аналогично тому, как это делается в следствиях 1.1, 1.2.

Во-вторых, в условиях (а) теоремы 2.1 и (б) теоремы 2.2 соответствующие множества должны иметь единственными лишь те компоненты вектора p , которые соответствуют ненулевым компонентам a .

В-третьих, единственность по u в условиях (в) также не обязательна. Однако в этом случае следует рассматривать траектории игры как решение уравнений в контингенциях [7]. Заметим, что если $\varphi(u, v) = u + v$, то управления преследователей зависят лишь от позиции.

§ 3. Запаздывание информации и фазовые ограничения

В этом параграфе будет указано на возможность применения разработанных подходов к изучению одного класса игр с неполной информацией, а именно, с постоянным запаздыванием информации о состоянии, а также к играм с фазовыми ограничениями на состояние убегающего. Важность таких задач для практики подчеркивалась еще в монографии [1].

Пусть в дифференциальной игре (1.1) $\varphi(u, v) = u + v$. Будем предполагать следующее. В каждый момент t , $t \geq 0$, первому игроку

известно состояние $z(t-\tau)$, где $\tau > 0$ — величина запаздывания информации о состоянии по времени, а также собственное управление $u(\theta)$, $t-\tau \leq \theta \leq t$, в прошлом. Началом игры будем считать момент $t = 0$. Состояние игры в момент t определяет вектор

$$\tilde{z}(t) = \Phi(t+\tau)z(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t \Phi(t-\theta)u(\theta)d\theta.$$

Требуется найти достаточные условия окончания игры за конечное время из заданного начального состояния $\tilde{z}(0) = \tilde{z}^0$. При этом управление первого игрока должно строиться на основании указанной информации.

Рассмотрим множество

$$V(\tau) = \left\{ v: v = \int_0^\tau \Phi(\theta)v(\theta)d\theta, v(\theta) \in V \right\},$$

где $v(\theta)$, $\theta \in [0, \tau]$ — произвольные измеримые функции.

Далее, положим

$$\hat{M}_i = M_i^* \pi_i V(\tau), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Условие 3.1. Множества $\hat{M}_i$, $i = 1, \dots, \nu$, непусты.

Образует новое множество

$$(3.1) \quad \hat{M} = \bigcup_{i=1}^{\nu} \hat{M}_i^*, \quad \text{где} \quad \hat{M}_i^* = M_1^0 + \hat{M}_i,$$

и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(3.2) \quad \dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t) + u(t) + \Phi(\tau)v_*(t)$$

с начальным условием $\tilde{z}(0) = \tilde{z}^0$, $v_*(t) = v(t-\tau)$.

Лемма 3.1. Пусть выполнено условие 3.1. Если в некоторый конечный момент времени t_* $\tilde{z}(t_*) \in \hat{M}$, то $z(t_*) \in M$.

Таким образом, исследование игры с запаздыванием информации о состоянии свелось к исследованию некоторой эквивалентной игры (3.1), (3.2) с полной информацией, но другими уравнениями движения и другим терминальным множеством [4].

Для игры (3.1), (3.2) справедливы все результаты §§ 1, 2.

Остановимся на дифференциальных играх с фазовыми ограничениями. Пусть движения преследователей описываются дифференциальными уравнениями

$$(3.3) \quad \dot{x}_i = A_i x_i + u_i, \quad x_i \in E^{n_i}, \quad u_i \in U_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

где U_i — непустые компакты, A_i — квадратные матрицы порядка n_i , а убегающий движется согласно уравнению

$$(3.4) \quad \dot{y} = By + v, \quad y \in E^m, \quad v \in V,$$

где V — непустой компакт, B — квадратная матрица порядка m . При этом на состояние убегающего наложены линейные фазовые ограничения

$$(3.5) \quad N = \{y: (p_i, y) < W_i, \quad i = k+1, \dots, \nu\}.$$

Игра заканчивается, если в некоторый конечный момент времени либо пара (x_i, y) , $i = 1, \dots, k$, принадлежит множеству M_i^* , $M_i^* = M_i^0 + M_i$, где M_i^0 — линейное подпространство в E^{n_i+m} , а M_i — выпуклое замкнутое множество из ортогонального дополнения к M_i^0 в пространстве E^{n_i+m} , либо $y \notin N$.

Введем следующие обозначения:

для $i = 1, \dots, k$

$$z_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \varphi_i(u_i, v) = \begin{bmatrix} u_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix},$$

для $i = k+1, \dots, \nu$

$$z_i = y, \quad C_i = B, \quad \varphi_i(u_i, v) = v, \\ M_i^* = \{y: (p_i, y) = W_i\}.$$

Тогда дифференциальная игра (3.3), (3.4) с фазовыми ограничениями 3.5) сведется к игре

$$(3.6) \quad \dot{z}_i = C_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \quad i = 1, \dots, \nu,$$

без ограничений, в которой конец определяется с помощью принадлежности одного из z_i множеству M_i^* .

Но поскольку игра (3.6) представляет собой частный случай общей игры (1.1), то для нее справедливы все результаты §§ 1, 2.

§ 4. Эффективный метод преследования несколькими управляемыми объектами

Пусть движение объекта $z = (z_1, \dots, z_\nu)$, $z_i \in E^{n_i}$, в пространстве E^n описывается дифференциальными уравнениями

$$(4.1) \quad \dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \quad i = 1, \dots, \nu, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V,$$

где A_i — квадратные матрицы порядка n_i , $\varphi_i(u_i, v)$ — непрерывные по совокупности переменных вектор-функции, U_i и V — непустые компакты. Система (4.1) является частным случаем системы (1.1) и соответствует случаю разделенных движений преследователей. Терминальное множество M является объединением множеств $M_1^*, \dots, M_\nu^*$, каждое из которых представлено в виде $M_i^* = M_i^0 + M_i$, где M_i^0 — линей-

ные подпространства из E^{n_i} , а M_i — выпуклые замкнутые множества, принадлежащие L_i — ортогональным дополнениям к подпространству M_i^0 в E^{n_i} .

Игра заканчивается, если в некоторый конечный момент времени для некоторого i $z_i \in M_i^*$.

Будем говорить, что дифференциальная игра (4.1) *может быть закончена из начального положения* $z^0 = (z_1^0, \dots, z_v^0)$ за время $T = T(z^0)$, если существуют такие измеримые функции $u_i(t) = u_i(z_i^0, v(t)) \in U_i$, $t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, v$, что хотя бы для одного i решение системы

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i(t), v(t)), \quad z_i(0) = z_i^0, \quad i = 1, \dots, v,$$

$z_i(t)$ принадлежит множеству M_i^* в момент $t = T$ при любых измеримых функциях $v(t)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$.

А. Обозначим через π_i оператор ортогонального проектирования из E^{n_i} на L_i . Пусть $\omega_i(t, \tau)$, $i = 1, \dots, v$, $t \geq \tau > 0$ — некоторые измеримые числовые функции. Образует многозначные отображения

$$F_i(t, \tau, u_i, v) = \pi_i \Phi_i(t - \tau) \varphi_i(u_i, v) - \omega_i(t, \tau) M_i, \quad i = 1, \dots, v,$$

где $\Phi_i(t)$ — фундаментальные матрицы соответствующих однородных систем (4.1). Далее, положим

$$F_i(t, \tau, v) = \bigcup_{u_i \in U_i} F_i(t, \tau, u_i, v) = F_i(t, \tau, U_i, v),$$

$$F_i(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} F_i(t, \tau, U_i, v).$$

Условие 4.1. $F_i(t, \tau) \neq \emptyset$ для всех $t \geq \tau \geq 0$, $i = 1, \dots, v$.

Из условия 4.1 и ограничений на параметры игры (4.1) вытекает, что многозначные отображения $F_i(t, \tau)$ являются измеримыми по τ при фиксированном t и, следовательно, существуют измеримые по τ функции $\gamma_i(t, \tau)$, $\gamma_i(t, \tau) \in L_i$, $i = 1, \dots, v$, такие, что $\gamma_i(t, \tau) \in F_i(t, \tau)$ для $t \geq \tau \geq 0$, $i = 1, \dots, v$. Зафиксируем их и положим

$$\xi_i(t, z_i) = \pi_i \Phi_i(t) z_i + \int_0^t \gamma_i(t, \tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, v.$$

Рассмотрим функции

$$\varrho_i(t, \tau, z_i, v) = \max\{e_i: e_i \geq 0, \{F_i(t, \tau, U_i, v) - \gamma_i(t, \tau)\} \cap \{-e_i \xi_i(t, z_i)\} \neq \emptyset\},$$

$$(4.2) \quad \varrho(t, \tau, z, v, a) = \sum_{i=1}^v a_i \varrho_i(t, \tau, z_i, v),$$

$$\lambda(t, z) = 1 - \min_{v(\cdot)} \max_{a \in \mathfrak{A}} \int_0^t \varrho(t, \tau, z, v(\tau), a) d\tau.$$

Минимум берется по всевозможным измеримым на интервале $[0, t]$ функциям, принимающим значения из множества V .

Обозначим через $T(z)$ первый положительный корень уравнения $\lambda(t, z) = 0$. Если такого корня не существует, то положим $T(z) = \infty$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены следующие предположения:

(1) Существуют измеримые по τ неотрицательные функции $\omega_i(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, такие, что выполнено условие 4.1;

(2) Существуют измеримые по τ функции $\gamma_i(t, \tau)$, $\gamma_i(t, \tau) \in F_i(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, такие, что $T = T(z^0) < \infty$;

(3) Для всех $i = 1, \dots, n$ выполнено равенство

$$\int_0^T \omega_i(T, \tau) d\tau = 1.$$

Тогда дифференциальная игра (4.1) может быть закончена из заданного начального положения z^0 за время $T(z^0)$.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\tau \in [0, T]$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим функцию

$$\sigma(T, t, z^0, v(\cdot)) = 1 - \max_{a \in \mathbb{R}} \int_0^t \varrho_i(T, \tau, z^0, v(\tau), a) d\tau.$$

Поскольку $\sigma(T, 0, z^0, v(\cdot)) = 1$, то пока $\sigma(T, t, z^0, v(\cdot)) > 0$, будем выбирать управление $u_i(\tau)$, $u_i(\tau) \in U_i$, $0 \leq \tau \leq t$, и функции $m_i(\tau)$, $m_i(\tau) \in \omega_i(T, \tau)M_i$, из системы уравнений

$$(4.3) \quad \pi_i \Phi_i(T - \tau) \varphi_i(u_i(\tau), v(\tau)) - \gamma_i(T, \tau) - m_i(\tau) = \\ = -\varrho_i(T, \tau, z_i^0, v(\tau)) \xi_i(T, z_i^0),$$

где $\varrho_i(T, \tau, z_i^0, v)$ даются выражениями (4.2), $\gamma_i(t, \tau)$ — измеримые функции, существование которых предполагается в предположении 2.

Заметим, что функции $\varrho_i(t, \tau, z_i, v)$ полунепрерывно снизу зависят от v . Поэтому $\varrho_i(T, \tau, z_i^0, v(\tau))$ измеримы по τ при любой измеримой функции $v(\tau)$. Таким образом, из условия 4.1 и леммы Филиппова [16] следует разрешимость системы (4.3) в классе измеримых функций $u_i(\tau)$ и $m_i(\tau)$.

Если для некоторого t_* , $t_* \in [0, T]$, $\sigma(T, t_*, z^0, v(\cdot)) = 0$, то в (4.3) положим $\varrho_i(T, \tau, z_i^0, v(\tau)) = 0$ для $\tau \in [t_*, T]$ и управления $u_i(\tau)$ и функции $m_i(\tau)$ на этом интервале будем выбирать из полученной в результате системы (4.3). Из условия (1), соотношений (4.3) и [16] следует возможность выбора функций $u_i(\tau)$ и $m_i(\tau)$ измеримыми на интервале $[t_*, T]$.

Из формулы Коши следует представление

$$(4.4) \quad \pi_i z_i(t) = \pi_i \Phi_i(t) z_i^0 + \int_0^t \pi_i \Phi_i(t-\tau) \varphi_i(u_i(\tau), v(\tau)) d\tau, \\ i = 1, \dots, \nu, \quad t \geq 0.$$

Прибавив и вычтя величины

$$\int_0^T \gamma_i(T, \tau) d\tau, \quad \int_0^T \omega_i(T, \tau) m_i(\tau) d\tau$$

к равенствам (4.4) при $t = T$ с соответствующими индексами и учитывая закон выбора управлений (4.3), получим

$$\pi_i z_i(T) - \int_0^T \omega_i(T, \tau) m_i(\tau) d\tau = \\ = \xi_i(T, z_i^0) \left(1 - \int_0^T \varrho_i(T, \tau, z_i^0, v(\tau)) d\tau \right), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Однако, легко видеть, что $\sigma(T, T, z^0, v(\cdot)) = 0$ в силу выбора управлений $u_i(\tau)$ и функций $m_i(\tau)$ из равенств (4.3), т.е. существует такой номер i_* , что

$$1 - \int_0^T \varrho_{i_*}(T, \tau, z_{i_*}^0, v(\tau)) d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\pi_{i_*} z_{i_*}(T) - \int_0^T \omega_{i_*}(T, \tau) m_{i_*}(\tau) d\tau = 0.$$

Но поскольку множество M_{i_*} выпукло, то в силу условия (3)

$$\int_0^T \omega_{i_*}(T, \tau) m_{i_*}(\tau) d\tau \in M_{i_*}$$

или $\pi_{i_*} z_{i_*}(T) \in M_{i_*}$, что и доказывает теорему.

Замечание 4.1. В качестве $\omega_i(t, \tau)$, $i = 1, \dots, \nu$, можно взять $1/t$. Тогда условие (3) в теореме 4.1 выполнено автоматически.

Следствие 4.1. Пусть в рамках данной схемы

$$\varrho(t, \tau, z^0, a) = \min_{v \in V} \varrho(t, \tau, z^0, v, a).$$

Если для некоторого $a \in \mathfrak{A}$ $\varrho(t, \tau, z^0, a) \geq \varrho > 0$ при любых $t \geq \tau \geq 0$, то существует положительный корень уравнения $\lambda(t, z) = 0$.

Лемма 4.1. Пусть выполнено условие 4.1 и отображения $\varphi_i(U_i, v)$, $i = 1, \dots, \nu$, $v \in V$, — выпуклозначны.

Тогда для функций $\varrho_i(t, \tau, z_i, v)$, задаваемых выражением (4.2), имеет место формула

$$(4.5) \quad \varrho_i(t, \tau, z_i, v) = \inf_{\substack{p \in L_i \\ (p, \xi_i(t, z_i)) = 1}} \{C_{U_i}(v, -\Phi_i^*(t-\tau)p) + (p, \gamma_i(t, \tau)) + \\ + \omega_i(t, \tau)C_{M_i}(p)\},$$

где $\gamma_i(t, \tau) \in F_i(t, \tau)$, $C_{U_i}(v, p) = \max_{u_i \in U_i} (p, \varphi_i(u_i, v))$, $t \geq \tau \geq 0$, $v \in V$.

Доказательство. Условие 4.1 эквивалентно следующему

$$0 \in \pi_i \Phi_i(t-\tau) \varphi_i(U_i, v) - \omega_i(t, \tau) M_i - \gamma_i(t, \tau) \quad \text{для всех } v \in V, \\ t \geq \tau \geq 0,$$

или

$$(4.6) \quad \{\pi_i \Phi_i(t-\tau) \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(t, \tau)\} \cap \omega_i(t, \tau) M_i \neq \emptyset \quad \text{для всех } v \in V, \\ t \geq \tau \geq 0.$$

В терминах опорных функций условие (4.6) эквивалентно следующему:

$$(4.7) \quad C_{U_i}(v, -\Phi_i^*(t-\tau)p) + (p, \gamma_i(t, \tau)) + \omega_i(t, \tau)C_{M_i}(p) \geq 0 \quad \text{для всех } p \in L_i.$$

Непустота пересечения в выражении (4.2) эквивалентна неравенству

$$-\varrho_i(\xi_i(t, z_i), p) + C_{U_i}(v, -\Phi_i^*(t-\tau)p) + (p, \gamma_i(t, \tau)) + \omega_i(t, \tau)C_{M_i}(p) \geq 0 \\ \forall p \in L_i$$

или

$$C_{U_i}(v, -\Phi_i^*(t-\tau)p) + (p, \gamma_i(t, \tau)) + \omega_i(t, \tau)C_{M_i}(p) \geq \varrho_i(p, \xi_i(t, z_i)) \\ \forall p \in L_i.$$

При $(p, \xi_i(t, z_i)) \leq 0$ в силу соотношения (4.7) это неравенство выполнено при любых положительных ϱ_i . Если же $(p, \xi_i(t, z_i)) > 0$, то положив $(p, \xi_i(t, z_i)) = 1$, получим

$$C_{U_i}(v, -\Phi_i^*(t-\tau)p) + (p, \gamma_i(t, \tau)) + \omega_i(t, \tau)C_{M_i}(p) \geq \varrho_i \quad \forall p \in L_i.$$

Отсюда и из выражения (4.2) следует формула (4.5).

Б. Рассмотрим несколько иной подход к решению дифференциальной игры (4.1). Введем многозначные отображения

$$F_i(t) = \bigcap_{v \in V} \pi_i \Phi_i(t) \varphi_i(U_i, v), \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Условие 4.2. $F_i(t) \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, \nu$, $t \geq 0$.

Положим

$$\hat{\xi}_i(t, z_i) = \pi_i \Phi_i(t) z_i + \int_0^t \gamma_i(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Обозначим

$$\hat{\rho}_i(t, \tau, z_i, v) = \max\{\rho_i: \rho_i \geq 0, \{\pi_i \Phi_i(t-\tau) \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(t-\tau)\} \cap \cap_{\rho_i} (M_i - \hat{\xi}_i(t, z_i)) \neq \emptyset\},$$

$$(4.8) \quad \hat{\rho}(t, \tau, z, v, \alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \hat{\rho}_i(t, \tau, z_i, v),$$

$$\hat{\lambda}(t, z) = 1 - \min_{v(\cdot)} \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_0^t \hat{\rho}(t, \tau, z, v(\tau), \alpha) d\tau.$$

Пусть $\hat{T}(z)$ — первый положительный корень уравнения $\hat{\lambda}(t, z) = 0$. Если положительного корня не существует, то положим $\hat{T}(z) = \infty$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнено условие 4.2 и существуют измеримые функции $\gamma_i(t)$, $\gamma_i(t) \in F_i(t)$, $i = 1, \dots, \nu$, $t \geq 0$, такие, что $\hat{T} = \hat{T}(z^0) < \infty$.

Тогда дифференциальная игра (4.1) может быть закончена из заданного начального положения z^0 за время $\hat{T}(z^0)$.

ЛЕММА 4.2. Пусть выполнено условие 4.2 и отображения $\varphi_i(U_i, v)$, $i = 1, \dots, \nu$, $v \in V$ — выпуклозначны.

Тогда для функций $\hat{\rho}_i(t, \tau, z_i, v)$, задаваемых выражением (4.8), имеет место формула

$$\hat{\rho}_i(t, \tau, z_i, v) = \inf_{\substack{p \in L_i \\ -C_{M_i}(p) + (p, \hat{\xi}_i(t, z_i)) = 1}} \{C_{U_i}(v, -\Phi_i^*(t-\tau)p) + (p, \gamma_i(t-\tau))\},$$

где $\gamma_i(t) \in F_i(t)$, $t \geq \tau \geq 0$, $v \in V$.

Замечание 4.2. Пусть $M_i = \{0\}$, $i = 1, \dots, \nu$, $\varphi_i(u_i, v) = u_i - v$, а матрицы $\pi_i \Phi_i(\hat{T} - \tau)$ невырождены для всех $\tau \in [0, \hat{T}]$. Тогда

$$u_i(\tau) = [\pi_i \Phi_i(\hat{T} - \tau)]^{-1} \{ \pi_i \Phi_i(\hat{T} - \tau) v(\tau) + \gamma_i(\hat{T} - \tau) - \hat{\rho}_i(\hat{T}, \tau, z_i^0, v(\tau)) \hat{\xi}_i(\hat{T}, z_i^0) \}.$$

Если $\pi_i A_i = A_i \pi_i$, то управления u_i , $i = 1, \dots, \nu$, не зависят от $\hat{T}$.

В. Рассмотрим еще один подход для решения задачи (4.1). Во множествах M_i выберем некоторые точки m_i , $i = 1, \dots, \nu$, и зафиксируем их. Предполагая выполненным условие 4.2, выберем некоторые измеримые функции $\gamma_i(t)$, $\gamma_i(t) \in F_i(t)$, и положим

$$\tilde{\xi}_i(t, z_i) = \pi_i \Phi_i(t) z_i + \int_0^t \gamma_i(t-\tau) d\tau - m_i, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Далее, пусть

$$\tilde{\varrho}_i(t, \tau, z_i, v) = \max \{ \varrho: \varrho \geq 0, \{ \pi_i \Phi_i(t-\tau) \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(t-\tau) \} \cap \cap (-\varrho \tilde{\xi}_i(t, z_i)) \neq \emptyset \},$$

$$(4.9) \quad \tilde{\varrho}(t, \tau, z, v, \alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \tilde{\varrho}_i(t, \tau, z_i, v),$$

$$\tilde{\lambda}(t, z) = 1 - \min_{v(\cdot)} \max_{\alpha \in \mathbb{A}} \int_0^t \tilde{\varrho}(t, \tau, z, v(\tau), \alpha) d\tau.$$

Пусть $\tilde{T}(z)$ — первый положительный корень уравнения $\tilde{\lambda}(t, z) = 0$. Если положительного корня не существует, то положим $\tilde{T}(z) = \infty$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть выполнено условие 4.2 и существуют измеримые функции $\gamma_i(t)$, $\gamma_i(t) \in F_i(t)$, $i = 1, \dots, \nu$, $t \geq 0$ и точки $m_i, m_i \in M_i$, такие, что $\tilde{T} = \tilde{T}(z^0) < \infty$.

Тогда дифференциальная игра (4.1) может быть закончена из заданного начального положения z^0 за время $\tilde{T}$, причем существует такой номер i , что $\pi_i z_i(\tilde{T}) = m_i$.

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнено условие 4.2 и отображения $\varphi_i(U_i, v)$, $i = 1, \dots, \nu$, $v \in V$ — выпуклозначны.

Тогда для функций $\tilde{\varrho}_i(t, \tau, z_i, v)$, задаваемых выражением (4.9), имеет место формула

$$\tilde{\varrho}_i(t, \tau, z_i, v) = \inf_{\substack{p \in L_i \\ (p, \tilde{\xi}_i(t, z_i)) = 1}} \{ C_{U_i}(v, -\Phi_i^*(t-\tau)p) + (p, \gamma_i(t-\tau)) \},$$

где $\gamma_i(t) \in F_i(t)$, $t \geq 0$, $m_i \in M_i$, $i = 1, \dots, \nu$.

§ 5. Примеры

1. Преследование с простой матрицей. Конфликтноуправляемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -az_i + u_i - v, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad z_i \in E^s, \quad s \geq 1, \quad a \geq 0, \\ \|u_i\| &\leq 1, \quad \|v\| \leq 1, \quad z_i(0) = z_i^0. \end{aligned}$$

Терминальное множество определяется множествами

$$M_i^0: z_i = 0, \quad M_i = \{0\}, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Производя несложные вычисления по формулам § 4, получим следующие результаты:

$$\varrho_i(t, \tau, z_i, v) = e^{a(t-\tau)} \varrho_i(z_i, v),$$

где

$$\varrho_i(z_i, v) = \frac{1}{\|z_i\|^2} [(v, z_i) + \sqrt{(v, z_i)^2 + \|z_i\|^2 (1 - \|v\|^2)}], \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Положив $\varrho(z, a) = \min_{\|v\| \leq 1} [\sum_{i=1}^{\nu} a_i \varrho_i(z_i, v)]$, сформулируем утверждение.

Если для некоторого $a_* \in \mathfrak{A}$ $\varrho(z^0, a_*) > 0$, то $T(z^0) < \infty$. Справедливо и обратное. Это условие эквивалентно следующему:

$$0 \in \text{int co} \{z_i^0\},$$

нуль принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных положений. При этом

$$T(z^0) \leq \begin{cases} 1/a \ln \left(1 + \frac{a}{\varrho(z^0, a_*)} \right), & a \neq 0, \\ 1/\varrho(z^0, a_*), & a = 0, \end{cases}$$

управления преследователей имеют вид

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \varrho_i(z_i^0, v(\tau)) z_i^0, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

2. Простое движение с попаданием в ε -окрестность. Движение задается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= u_i - v, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad z_i \in E^s, \quad s \geq 1, \\ \|u_i\| &\leq 1, \quad \|v\| \leq 1, \quad z_i(0) = z_i^0. \end{aligned}$$

При этом

$$M_i^0: z_i = 0, \quad M_i: \|z_i\| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Необходимым и достаточным условием существования положительного корня уравнения $\hat{\lambda}(t, z^0) = 0$ является условие

$$\sigma = \min_{\|v\| \leq 1} \max_i [(v, z_i^0) + \varepsilon_i] > 0,$$

которое эквивалентно соотношению

$$0 \in \text{int co} \left\{ \bigcup_i (z_i^0 + \varepsilon_i S) \right\},$$

где S — единичный шар в E^s с центром в нуле. При этом $\hat{T}(z^0) = \sigma^{-1}$.

3. Контрольный пример Л. С. Понтрягина с одинаковым трением и равными управляющими силами. Уравнения конфликтноуправляемой системы следующие:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &= z_i^2, \\ \dot{z}_i^2 &= -a_i z_i^2 + u_i - v, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad a_i > 0, \\ z_i^1, z_i^2, u_i, v &\in E^s, \quad s \geq 1, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1, \\ M_i^0: z_i^1 &= 0, \quad M_i = \{0\}, \quad i = 1, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Пусть $z_i^* = z_i^{01} - (1/a_i)z_i^{02}$. Если

$$0 \in \text{int co}\{z_i^*\},$$

то уравнение $\lambda(t, z^0) = 0$ имеет положительный корень $T = T(z^0)$. При этом управления преследователей имеют вид

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \varrho_i(T, z_i^0, v(\tau)) \xi_i(T, z_i^0), \quad i = 1, \dots, \nu,$$

$$\begin{aligned} \varrho_i(t, z_i^0, v) &= \frac{\varrho_i(t, \tau, z_i^0, v)}{e_i^1(t - \tau)} = \\ &= \frac{1}{\|\xi_i(t, z_i^0)\|^2} \left[(v, \xi_i(t, z_i^0)) + \sqrt{(v, \xi_i(t, z_i^0))^2 + \|\xi_i(t, z_i^0)\|^2(1 - \|v\|^2)} \right], \\ e_i^1(t) &= \frac{e^{-a_i t} - 1}{-a_i}, \quad \xi_i(t, z_i^0) = z_i^{01} + e_i^1(t) z_i^{02}. \end{aligned}$$

4. Мальчик и крокодил. Пусть в примере 3 $a_i = 0$, $i = 1, \dots, \nu$. Положим

$$z_i^* = \begin{cases} \frac{z_i^{01}}{\|z_i^{01}\|}, & \text{если } z_i^{02} = 0, \\ \frac{z_i^{02}}{\|z_i^{02}\|}, & \text{если } z_i^{02} \neq 0. \end{cases}$$

Если $0 \in \text{int co}\{z_i^*\}$, то $T = T(z^0) < \infty$. Управления преследователей имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(\tau) &= v(\tau) - \varrho_i(T, z_i^0, v(\tau)) \xi_i(T, z_i^0), \quad i = 1, \dots, \nu, \\ \varrho_i(t, z_i^0, v) &= \frac{\varrho_i(t, \tau, z_i^0, v)}{t - \tau} = \\ &= \frac{1}{\|\xi_i(t, z_i^0)\|^2} \left[(v, \xi_i(t, z_i^0)) + \sqrt{(v, \xi_i(t, z_i^0))^2 + \|\xi_i(t, z_i^0)\|^2(1 - \|v\|^2)} \right], \\ \xi_i(t, z_i^0) &= z_i^{01} + t z_i^{02}. \end{aligned}$$

§ 6. Учет фазовых ограничений

Пусть задана дифференциальная игра (4.1), причем для $i = k+1, \dots, \nu$, $M_i = \{a_i\}$, где a_i — точка в L_i .

Будем говорить, что дифференциальная игра (4.1) *может быть закончена из заданного начального положения* z^0 не позже, чем за время $T = T(z^0)$, если существуют такие измеримые функции $u_i(t) = u_i(z_i^0, v(t)) \in U_i$, $t \in [0, T]$, что решения уравнений

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i(t), v(t)), \quad z_i(0) = z_i^0, \quad i = 1, \dots, \nu,$$

при некотором i попадают на множество M_i не позже, чем в момент $t = T$ при любых измеримых функциях $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$.

Пусть для $i = 1, \dots, k$ выполнено условие 4.1. Тогда существуют измеримые функции $\gamma_i(t, \tau)$, $\gamma_i(t, \tau) \in F_i(t, \tau)$, $i = 1, \dots, k$. Зафиксируем их и положим

$$\xi_i(t, z_i) = \begin{cases} \pi_i e^{A_i t} z_i + \int_0^t \gamma_i(t, \tau) d\tau, & i = 1, \dots, k, \\ \pi_i e^{A_i t} z_i, & i = k+1, \dots, \nu. \end{cases}$$

Далее, пусть для $i = 1, \dots, k$

$$\varrho_i(t, \tau, z_i, v) = \max\{\varrho \geq 0: -\varrho \xi_i(t, z_i) \in F_i(t, \tau, U_i, v) - \gamma_i(t, \tau)\},$$

для $i = k+1, \dots, \nu$

$$\varrho_i(t, \tau, z_i, v) = \max\{\varrho \geq 0: -\varrho (\xi_i(t, z_i) - a_i) \in F_i(t - \tau, U_i, v)\}.$$

Условие 6.1. Функции $\varrho_i(t, \tau, z_i, v) \equiv \varrho_i(\tau, z_i, v)$, $i = k+1, \dots, \nu$, т.е. $\varrho_i(t, \tau, z_i, v)$ не зависят от t .

Условие 6.1 выполнено, например, в случае, когда $\pi_i A_i = A_i \pi_i$ ($a_i = 0$) в частности, $A_i = \lambda_i I$, $i = k+1, \dots, \nu$, где I — единичная матрица [17], [18] или $A_i = 0$ ($a_i \neq 0$).

Положим

$$\varrho(t, \tau, z, v, a) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i \varrho_i(t, \tau, z_i, v),$$

где $a \in \mathcal{A}$ и рассмотрим функцию $\lambda(t, z)$ в нашем случае. Аналогично определим ее положительный корень $T(z)$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены следующие предположения:

(1) Существуют измеримые неотрицательные функции $\omega_i(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, такие, что выполнено условие 4.1;

(2) Выполнено условие 6.1 и существуют измеримые функции $\gamma_i(t, \tau)$, $\gamma_i(t, \tau) \in F_i(t, \tau)$, $i = 1, \dots, k$, такие, что $T = T(z^0) < \infty$, причем

$$\int_0^T \omega_i(T, \tau) d\tau = 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда дифференциальная игра (4.1) может быть закончена из заданного начального положения z^0 не позже, чем за время $T(z^0)$.

Если есть задача с фазовыми ограничениями на состояние убегающего (§ 3), то она укладывается в предложенную схему путем сведения к задаче без ограничений.

Пример. Движения преследователей и убегающего имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad x_i, u_i \in E^m, \quad i = 1, \dots, k, \\ \dot{y} &= v, \quad \|v\| \leq 1, \quad y, v \in E^m. \end{aligned}$$

Пусть $z_i = x_i - y$, $i = 1, \dots, k$. При этом $M_i^0 = \{z_i = 0\}$, $M_i = \{z_i: \|z_i\| \leq \varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i > 0$, фазовые ограничения имеют вид (3.5). Игра заканчивается, если либо $z_i \in M_i$, либо $y \in \partial N$. Нетрудно подсчитать, что

$$\varrho_i(z_i^0, v) = \frac{(v, z_i^0) + \varepsilon_i + \sqrt{[(v, z_i^0) + \varepsilon_i]^2 + (1 - \|v\|^2)(\|z_i^0\|^2 - \varepsilon_i^2)}}{\|z_i^0\|^2 - \varepsilon_i^2},$$

$$u_i(\tau) = \frac{v(\tau) - \varrho_i(z_i^0, v(\tau))z_i^0}{1 + \varepsilon_i \varrho_i(z_i^0, v(\tau))}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\varrho_i(z_i^0, v) = \frac{(p_i, v)}{W_i - (p_i, z_i^0)}, \quad i = k+1, \dots, \nu.$$

Достаточное условие окончания игры имеет вид

$$\varrho(z^0) = \max_{a \in \mathfrak{A}} \min_{\|v\| \leq 1} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \varrho_i(z_i^0, v) > 0.$$

При этом

$$T(z^0) \leq \varrho(z^0)^{-1}.$$

В частности, если $\nu = 1$, множество N — ограничено, то поимка возможна из любых начальных положений. Последнее является одним из решений известной задачи „Лев и человек“ [8]. Если N неограничено, то это соответствует решению задач „Крыса загнанная в угол“, „Игра с линией смерти“, „Патрулирование коридора“ [1].

Литература

- [1] Р. Айвекс, *Дифференциальные игры*, Мир, Москва 1967.
 - [2] Н. Л. Григоренко, *О задаче преследования несколькими управляемыми объектами*, ДАН СССР 249, 5 (1979).
 - [3] В. Ф. Демьянов, *Минимакс: дифференцируемость по направлениям*, Из-во ЛГУ, Москва 1974.
 - [4] Г. Ц. Дзюбенко, *Линейные дифференциальные игры с запаздыванием информации*, Кибернетика 6 (1973).
 - [5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, Москва 1974.
 - [6] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Наука, Москва 1970.
 - [7] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, Москва 1974.
 - [8] Д. И. Литлвуд, *Математическая смесь*, Физматгиз, Москва 1962.
 - [9] Л. С. Понтрягин, *О линейных дифференциальных играх, I*, ДАН СССР 174, 6 (1967).
 - [10] —, *О линейных дифференциальных играх, II*, ДАН СССР 174, 4 (1967).
 - [11] Б. П. Пшеничный, *Линейные дифференциальные игры*, Автоматика и телемеханика 1 (1968).
 - [12] —, *Простое преследование несколькими объектами*, Кибернетика 3 (1976).
 - [13] Б. Н. Пшеничный, А. А. Чикрий, И. С. Раппопорт, *Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями*, ДАН СССР 256, 3 (1981).
 - [14] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, Москва 1973.
 - [15] С. И. Тарлинский, *Об одной линейной дифференциальной игре сближения нескольких управляемых объектов*, ДАН СССР 230, 3 (1976).
 - [16] А. Ф. Филиппов, *О некоторых вопросах теории оптимального регулирования*, Вестник МГУ сер. мат., мех., физ., хим. 2 (1959).
 - [17] А. А. Чикрий, *Достаточные условия уклонения в нелинейных дифференциальных играх*, ДАН СССР 241, 3 (1978).
 - [18] —, *Об одном способе убегания от нескольких преследователей*, Автоматика и телемеханика 8 (1978).
 - [19] —, *Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками*, ДАН СССР 246, 6 (1979).
 - [20] —, *Квазилинейная задача сближения с участием нескольких лиц*, Прикладная математика и механика 3 (1979).
 - [21] —, *Дифференциальные игры нескольких лиц*, Кибернетика 4 (1979).
 - [22] А. А. Чикрий, И. С. Раппопорт, *Линейная задача преследования несколькими управляемыми объектами*, Кибернетика 3 (1978).
-