MATHEMATICAL MODELS AND METHODS
IN MECHANICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 15
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1985

О ПРИВОДИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ

Киев, Институт Математики АН УССР

1. Вводные замечания

В своих лекциях я хочу остановиться на некоторых сравнительно недавно полученных результатах, относящихся к развитию метода усреднения по Н. Н. Боголюбову [3] и применению идеи этого метода к чрезвычайно важной задаче о декомпозиции систем нелинейных дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и уравнений в частных производных), содержащих малый параметр.

Прежде всего мне прийдется кратко остановиться на методе усреднения в формулировке, предложенной Н. Н. Боголюбовым [3].

Как известно, метод усреднения первоначально возник в небесной механике и развитие его на первом этапе было, в основном, связано с задачами небесной механики, для решения которых применялись различные схемы усреднения (например, схемы Гаусса, Фату, Делоне–Хилла и др.). При этом основной прием метода усреднения заключался в том, что правые части сложных дифференциальных уравнений, описывающих колебания или вращение, заменялись „сглаженными", осредненными функциями, не содержащими явно времени t и быстро изменяющихся параметров системы. Получающиеся в результате усредненные уравнения либо точно интегрируются, либо упрощаются, что позволяет сделать важные выводы относительно изучаемого движения как качественного, так и количественного характера.

Однако, в теории нелинейных колебаний метод усреднения долгое время оставался неизвестным и только благодаря работам Ван-дер-

Поля и широкой их популяризации Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси было положено начало систематическому применению метода усреднения для исследования нелинейных колебательных процессов в радио- и электротехнике, механике.

Следует заметить, что еще в 1835 году М. В. Остроградский в заметке *О методе последовательных приближений*, рассматривая нелинейное уравнение с кубической характеристикой, получал в первом приближении тот же результат, что и методом усреднения.

И еще ранее в 1682 году Исаак Ньютон (см. *Математические начала натуральной философии*, книга V), исследуя движение маятника при сопротивлении, находит формулу, определяющую величину затухания малых колебаний маятника при любом законе сопротивления среды. Формула Ньютона всецело совпадает с первым приближением, получаемым с помощью метода усреднения.

Отметим, что в формулировке метода усреднения, данной Ван-дер-Полем, усредненные уравнения выводились с помощью рассуждений, далеко не строгих с математической точки зрения. Хотя метод этот и оказался плодотворным на первом этапе развития нелинейной механики, однако он не мог полностью удовлетворить ни запросам практики, ни тем минимальным требованиям в отношении убедительности и общности выводов, которые следует предъявлять к подлинно приближенному методу для того, чтобы иметь хотя бы некоторое представление о его степени точности и пределах применимости.

Правда, для частного случая периодических правых частей дифференциальных уравнений некоторые шаги в области математического обоснования были сделаны еще в 1928 году Фату и в 1934 году Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси.

Значительные результаты в развитии метода усреднения получены Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. В 1937 году они доказали применимость метода усреднения и в том случае, когда правые части усредняемых дифференциальных уравнений являются квазипериодическими функциями времени.

Создание же строгой теории метода усреднения принадлежит Н. Н. Боголюбову. Н. Н. Боголюбов показал, что метод усреднения органически связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей уравнений с произвольной степенью точности относительно малого параметра ε. При этом, исходя из тонких физических соображений, Н. Н. Боголюбов показал, как строить не только систему первого приближения (усредненную систему), но и усредненные системы высших приближений, решения которых аппроксимируют решения исходной (точной) системы с произвольной наперед заданной точностью.

2. Идея усреднения по Н. Н. Боголюбову

Остановлюсь кратко на идее усреднения, предложенной Н. Н. Боголюбовым, не вдаваясь в подробности, так как метод усреднения по Н. Н. Боголюбову подробно изложен в широко известных монографиях [5], [16].

Суть метода усреднения Н. Н. Боголюбова состоит в следующем.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{2.1}$$

где ε — малый положительный параметр, t — время, x — точки n-мерного эвклидова пространства E_n.

Уравнения, правая часть которых пропорциональна малому параметру, как известно, согласно Н. Н. Боголюбову, называются уравнениями в „стандартной форме". В системе (2.1) переменные x являются медленно меняющимися величинами.

При определенных ограничениях, налагаемых на правые части уравнения (2.1), заменой переменных согласно формулам

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \varepsilon^2 F_2(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^m F_m(t, \xi) \tag{2.2}$$

приводим уравнение (2.1) к следующему точному уравнению:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathscr{P}_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi). \tag{2.3}$$

Пренебрегая в уравнении (2.3) слагаемым $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi)$, мы получаем „усредненное" уравнение m-го приближения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathscr{P}_m(\xi). \tag{2.4}$$

При этом все функции $F_1(t, \xi), F_2(t, \xi), \ldots, F_m(t, \xi)$, входящие в правую часть замены (2.2), находятся элементарно; функции $X_0(\xi)$, $\mathscr{P}_2(\xi), \ldots, \mathscr{P}(\xi)$ определяются в результате усреднения правой части уравнения (2.1) после подстановки в нее выражения (2.2). Так, например,

$$X_0(\xi) = \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}, \qquad \mathscr{P}_2(\xi) = \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\}. \tag{2.5}$$

Сформулированный и развитый Н. Н. Боголюбовым метод усреднения применительно к уравнениям в стандартной форме получил в ряде работ Н. Н. Боголюбова строгое математическое обоснование. Это обоснование в основном сводится к решению следующих двух проблем:

1) определение условий, при которых разность между решением точной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi) \tag{2.6}$$

и решением соответствующей ей усредненной системы

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{2.7}$$

для достаточно малых значений параметра ε становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но конечном интервале времени;

2) установление соответствия между различными свойствами решений точных уравнений (2.6) и свойствами решений усредненных уравнений (2.7), зависящими от их поведения на бесконечном интервале времени, в частности, установление соответствия между периодическими решениями точной и усредненной систем и установление свойств притяжения ими близких решений.

В решении первой проблемы для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений в стандартной форме фундаментальное значение имеет классическая теорема Н. Н. Боголюбова, устанавливающая при достаточно общих условиях, налагаемых на правые части системы (2.6), оценку разности $|x(t)-\xi(t)|$ на сколь угодно большом, однако, конечном интервале времени. При этом для правых частей системы (2.6) должно существовать только среднее

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t, \xi)dt \to X_0(\xi). \tag{2.8}$$

Эта теорема дала возможность существенно расширить область применения метода усреднения и получила большое развитие и обобщение в работах многих авторов. [1]

3. Формализм метода усреднения по Н. Н. Боголюбову

Остановлюсь теперь на формализме метода усреднения, согласно Н. Н. Боголюбову приводящего к усредненным уравнениям в первом и во втором приближении. При этом я буду придерживаться изложения автора метода [3].

В дальнейшем для упрощения выкладок будем обозначать совокупность n величин $x_1, \ldots, x_n$ одной буквой x и в уравнении (2.6) x и X рассматривать как точки n-мерного эвклидова пространства E_n.

---

[1] См. библиографию, например, в [16].

Тогда формулы дифференцирования сложных функций

$$\frac{dF_k(t, x_1, \ldots, x_n)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_q} \cdot \frac{dx_q}{dt} \tag{3.1}$$

можно записать следующим образом:

$$\frac{dF(t, x)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}\right) F(t, x), \tag{3.2}$$

где $\partial F/\partial x$ трактуется как матрица $\|\partial F_k/\partial x_q\|$ приложенная к вектору dx/dt, и $(dx/dt\ \partial/\partial x)$ — как операторное скалярное произведение

$$\sum_{q=1}^{n} \frac{dx_q}{dt} \frac{\partial}{\partial x_q}. \tag{3.3}$$

Очевидно, применение указанной матрично-векторной системы обозначений не требует особых пояснений и представляет значительное преимущество в отношении сокращения записи.

Пусть, далее, $F(x, t)$ — сумма вида

$$F(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} F_\nu(x). \tag{3.4}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} &\underset{t}{M}\{F(t, x)\} = F_0(x), \\ &\tilde{F}(t, x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} F_\nu(x), \\ &\tilde{\tilde{F}}(t, x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} F_\nu(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

и т. д., получим тождественно

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{F}}}{\partial t} = \tilde{F}, \qquad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F - \underset{t}{M}\{F\}. \tag{3.6}$$

Оператор $\sim$ будем называть *интегрирующим оператором*, $\underset{t}{M}$ — *оператор усреднения при постоянных* x или *оператором усреднения по явно содержащемуся времени.*

Перейду к физическим предпосылкам метода усреднения и строгой его формулировке.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.6), где ε — малый положительный параметр и выражения $X(t, x)$ как функции времени t представляются суммами вида

$$X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(x). \tag{3.7}$$

Форма приближенного решения системы уравнений (2.6) может быть найдена, или, лучше сказать, угадана, с помощью совершенно интуитивных соображений, а именно: так как первые производные dx/dt пропорциональны малому параметру, естественно считать x медленно изменяющимися величинами. Поэтому представим x как суперпозицию плавно изменяющегося члена ξ и суммы малых вибрационных членов и, ввиду малости последних, в правой части уравнения (2.6) в первом приближении положим $x = \xi$. Учитывая выражение (3.7), получим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \sum_{\nu} e^{i\nu t} X^{\nu}(\xi) \tag{3.8}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi). \tag{3.9}$$

Сумма, стоящая в правой части уравнений (3.9), состоит из малых синусоидальных колебательных слагаемых. Считая, что эти синусоидальные колебательные члены вызывают лишь малые вибрации x около ξ и не оказывают влияния на систематическое изменение x (отсутствует резонанс!), пренебрегая ими, приходим к уравнениям первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon \underset{t}{M} \{X(t, \xi)\}. \tag{3.10}$$

Для получения второго приближения в выражении x необходимо принять во внимание также и вибрационные члены; учитывая в уравнении (3.9) слагаемое $\varepsilon e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi)$, как вызывающее в решении колебания вида

$$\frac{\varepsilon e^{i\nu t}}{i\nu} X_{\nu}(\xi),$$

приходим к приближенному выражению

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_{\nu}(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi). \tag{3.11}$$

Подставляя выражение (3.11) в уравнения (2.6), имеем

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X\left(t,\ \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\ \xi)\right), \tag{3.12}$$

т. е. $\frac{dx}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\left\{X\left(t,\ \xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\ \xi)\right)\right\} +$ малые синусоидальные колебательные члены.

Отсюда, пренебрегая влиянием синусоидальных колебательных членов на систематическое изменение ξ, получаем уравнение второго приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\left\{X\left(t,\ \xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\ \xi)\right)\right\}$$

или, с точностью до величин второго порядка малости включительно относительно ε,

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\left\{X(t,\ \xi) + \varepsilon\left(\tilde{X}(t,\ \xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\ \xi)\right\} \tag{3.13}$$

и т. д.

Приведенные рассуждения, очевидно, не могут претендовать на какую-либо убедительность: против них, в первую очередь, может быть выдвинуто хотя бы то возражение, что при составлении усредненных уравнений (3.10) в уравнениях (2.6) отбрасывались члены того же порядка малости, что и оставленный член $\varepsilon X_0(\xi)$. Однако, всем этим рассуждениям нетрудно придать вполне обоснованную форму и показать, что в действительности, применяя усреднение, в преобразованных уравнениях пренебрегаем величинами высшего порядка малости.

4. Построение первого приближения

Совершим в уравнениях (2.6) замену переменных с помощью формул

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\ \xi), \tag{4.1}$$

где ξ будем рассматривать как новые неизвестные.

Выражения (4.1) рассматриваются здесь не как приближенное решение системы (2.6), а как формулы замены переменных.

Дифференцируя выражения (4.1), имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}. \tag{4.2}$$

Учитывая тождественные соотношения (3.6) интегрирующего оператора, имеем

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} = X(t, \xi) - X_0(\xi).$$

Подставляя выражения (4.1) и (4.2) в уравнение (2.6), получаем

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t, \xi) - \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon X\{t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)\}$$

или

$$\left\{E + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\} \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \left\{X\left(t, \xi + \varepsilon X(t, \xi)\right) - X(t, \xi)\right\}, \tag{4.3}$$

где E — единичная матрица.

Умножая соотношение (4.3) слева на выражение

$$\left\{E + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} \tag{4.4}$$

для новых неизвестных ξ получаем уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \left\{E + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} X_0(\xi) + \varepsilon \left\{E + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} \left\{X\left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)\right) - X(t,\xi)\right\}. \tag{4.5}$$

Далее, разлагая выражение (4.4) в ряд по степеням параметра ε, имеем

$$\left\{E + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}\right\}^{-1} = E - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \ldots, \tag{4.6}$$

где символ ε^m обозначает величины порядка малости не ниже ε^m. Принимая во внимание разложение (4.6), уравнение (4.5) можем представить в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{4.7}$$

или, более подробно,

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \ldots. \tag{4.8}$$

Пренебрегая в системе уравнений (4.8) величинами второго порядка малости, получим так называемые уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi). \tag{4.9}$$

Итак, если ξ удовлетворяют уравнениям (4.7) (точным уравнениям), правая часть которых отличается от правой части уравнений первого приближения (4.9) на величины второго порядка малости, то выражение

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi) \tag{4.10}$$

представляет точное решение рассматриваемой системы уравнений (2.6). Поэтому в качестве первого приближения можем принять

$$x = \xi, \tag{4.11}$$

взяв за ξ решение уравнения первого приближения (4.9).

Выражение (4.10), в котором ξ удовлетворяет уравнениям (4.9), будем называть *улучшенным первым приближением*.

Подставляя улучшенное первое приближение (4.10) в точные уравнения (2.6), нетрудно убедиться, что это приближение удовлетворяет им с точностью до величин второго порядка малости.

Возвращаясь к уравнениям (4.9), заметим, что согласно определению оператора усреднения

$$X_0(\xi) = \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\},$$

и, следовательно, уравнения первого приближения могут быть представлены в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}. \tag{4.12}$$

Таким образом, уравнения первого приближения (4.12) получаются из точных уравнений (2.6) путем усреднения последних по явно содержащемуся времени t. При выполнении усреднения ξ трактуются как постоянные.

5. Построение второго приближения

Изложим метод построения решений уравнений (2.6) во втором приближении, основанный также на применении принципа усреднения.

Прежде всего заметим, что при построении первого приближения путем замены переменных (4.10) уравнения (2.6) были преобразованы к уравнениям (4.7)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \ldots$$

Для получения второго приближения найдем замену переменных, аналогичную замене (4.10), преобразующую переменную x к переменной ξ, удовлетворяющей уравнению (точному)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}(\xi) + \varepsilon^3 \ldots \tag{5.1}$$

Чтобы прийти к этой замене переменных наиболее естественным путем, найдем выражение

$$x = \Phi(t, \xi, \varepsilon), \tag{5.2}$$

которое для ξ, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}(\xi), \tag{5.3}$$

удовлетворяло бы уравнению (2.6) с точностью до величин порядка малости ε^3.

Так как при ξ, определяемой из уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

выражение

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$$

удовлетворяет уравнению (2.6) с точностью до величин порядка малости ε^2, то решение (5.2) будем отыскивать в форме

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi), \tag{5.4}$$

где $F(t, \xi)$ представляется суммами

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_\mu(\xi). \tag{5.5}$$

Подставляя значения x согласно выражениям (5.4) в правую часть системы (2.6), имеем

$$\varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \ldots \tag{5.6}$$

С другой стороны, дифференцируя выражение (5.4) и принимая при этом во внимание уравнения (5.3), находим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon^3 \ldots, \tag{5.7}$$

так как

$$\frac{\partial X}{\partial t} = X(t, \xi) - X_0(\xi).$$

Для того чтобы правые части выражений (5.6) и (5.7) были равны с точностью до величин порядка малости ε^3, необходимо подобрать находящиеся в нашем распоряжении функции $\mathscr{P}(\xi)$ и $F(t, \xi)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$(5.8)\qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) - \mathscr{P}(\xi).$$

Соотношение (5.8) будет выполняться, если

$$(5.9)\qquad \mathscr{P}(\xi) = F_0(\xi) = \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(\xi, t) - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi)\right\} =$$

$$= \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\}$$

и

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu \neq 0} \frac{e^{i\mu t}}{i\mu} F_\mu(\xi) = \left(\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right)^{\tilde{}} - \frac{\partial \tilde{\tilde{X}}}{\partial \xi} X_0(\xi).$$

Итак, резюмируя, можем утверждать, что при ξ, определяемой уравнением

$$(5.10)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\},$$

выражение

$$(5.11)\qquad x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\left(X(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right)^{\tilde{}} - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{\tilde{X}}}{\partial \xi} X_0(\xi)$$

удовлетворяет уравнению (2.6) с точностью до величин порядка ε^3.

Как и в рассмотренном нами случае получения первого приближения легко показать, что если рассматривать выражение (5.11) не как приближенное решение уравнения (2.6), а как формулу замены переменных, преобразующую неизвестную x, определяемую точным уравнением к новой неизвестной ξ, то она будет удовлетворять уравнению вида

$$(5.12)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\} + \varepsilon^3 \ldots,$$

которое отличается от уравнения (5.10) величинами, пропорциональными ε^3. Итак, если ξ удовлетворяет уравнению (5.12), правая часть которого отличается от правой части уравнения (5.10) на величины порядка малости ε^3, то выражение (5.11) представляет точное решение уравнения (2.6.)

В качестве второго приближения примем выражение

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \tag{5.13}$$

где ξ определяется уравнением (5.10). Иначе говоря, за второе приближение принимаем форму улучшенного первого приближения, в которой ξ удовлетворяет уравнению уже не первого, а второго приближения.

Сделаем подытаживающие замечания относительно образования высших приближений.

Пусть общее уравнение в стандартной форме имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 X_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^m X_{m-1}(t, x), \tag{5.14}$$

где $X_k(t, x)$ — некоторые тригонометрические суммы того же типа, что и (3.7).

Для получения m-го приближения рассмотрим выражение

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \varepsilon^2 F_2(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^m F_m(t, \xi), \tag{5.15}$$

в котором $F_k(t, \xi)$ — суммы вида

$$\sum_{\mu \neq 0} e^{i\mu t} F_{k\mu}(\xi)$$

и переменная ξ — решение уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathscr{P}_1(\xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathscr{P}_m(\xi). \tag{5.16}$$

Подставляя выражение (5.15) в уравнение (5.14), учитывая при этом (5.16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε до m-го порядка включительно, подбираем $F_1(t, \xi), \ldots, F_m(t, \xi)$ и $\mathscr{P}_1(\xi), \ldots$ $\ldots, \mathscr{P}_m(\xi)$ так, чтобы выражение (5.15) удовлетворяло уравнению (5.14) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}.

Если теперь, определив $F_1(t, \xi), \ldots, F_m(t, \xi)$ и $\mathscr{P}_1(\xi), \ldots, \mathscr{P}_m(\xi)$, рассматривать выражение (5.15) как некоторую формулу замены переменных, преобразующую неизвестную x к новой неизвестной ξ, то для этой новой переменной получим уравнение (точное!)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathscr{P}_1(\xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathscr{P}_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi, \varepsilon), \tag{5.17}$$

правая часть которого состоит из „интегрируемой" части и возмущения $\varepsilon^{m+1}R(t, \xi, \varepsilon)$, являющегося величиной порядка ε^{m+1}. При этом, если переменная ξ удовлетворяет уравнению (5.17) (отличающемуся от уравнения (5.16) на величины порядка малости ε^{m+1}), то выражение (5.15) представляет собой точное решение уравнения (5.14).

Поэтому в качестве m-го приближения решения уравнения (5.14) может быт принято выражение

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^{m-1}F_{m-1}(t, \xi), \tag{5.18}$$

в котором ξ определяется уравнением m-го приближения (5.16). Для такого ξ формула (5.15) представляет улучшенное m-ое приближение, удовлетворяющее точному уравнению (5.14) с погрешностью порядка ε^{m+1}.

Заметим, что высшие приближения применяются обычно при общетеоретических рассуждениях и анализе качественных свойств, для фактического же построения решений они применяются редко ввиду быстрого возрастания сложности их фактического построения.

6. Некоторые обобщения метода усреднения (¹)

Асимптотические методы нелинейной механики, в том числе методы теории возмущений, находящие широкое применение при решении самых разнообразных задач, предполагают известной некоторую эталонную систему уравнений, с решением которой сопоставляется решение исходной точной системы уравнений.

Обычно эталонные системы могут быть получены из точных систем уравнений, если положить в последних равным нулю некоторый параметр ε (вообще говоря, малый), который характеризует возмущение исследуемой системы. Таким образом, в этом случае эталонная система дифференциальных уравнений описывает невозмущенное движение, а исходная точная система ($\varepsilon \neq 0$) описывает возмущенное движение.

В ряде случаев метод предполагает конструирование эталонной системы. Так, в изложенном нами методе усреднения путем усреднения системы уравнений в стандартной форме мы конструируем эталонную (усредненную) систему.

(¹) Содержание п. 6–11 впервые было изложено в июне 1980 г. в Италии на конференции-школе в Тренто, посвященной нелинейным дифференциальным уравнениям, инвариантности, устойчивости и бифуркациям.

Итак, метод усреднения, развитый Н. Н. Боголюбовым, предполагает для дифференциального уравнения в стандартной форме

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F(t, y), \tag{6.1}$$

где y — n-мерный вектор, ε — малый положительный параметр, введение замены переменных

$$y = x + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \ldots, \tag{6.2}$$

приводящей систему (6.1) к виду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \mathscr{P}_1(x) + \varepsilon^2 \mathscr{P}_2(x) + \ldots \tag{6.3}$$

При этом первое слагаемое в правой части уравнения (1.3) получается с помощью операции усреднения

$$\mathscr{P}_1(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x)\, dt. \tag{6.4}$$

Упрощенная система (6.3) (эталонная) более проста для исследования, например, уже потому, что не содержит в правых частях переменной t.

Идеи, заложенные в методе усреднения Н. Н. Боголюбова могут быть обобщены в следующем направлении.

Пусть дана некоторая возмущенная система

$$\Phi_0 y + \varepsilon \Phi_1 y = 0, \tag{6.5}$$

где Φ_0, Φ_1 — дифференциальные операторы в обыкновенных или частных производных. Требуется с помощью специальным образом сконструированной замены переменных

$$y = x + \varepsilon F_1(x) + \varepsilon^2 F_2(x) + \ldots \tag{6.6}$$

спроектировать возмущенную систему (6.5) на систему

$$\Phi_0 x + \varepsilon \Phi_{10} x + \varepsilon^2 \Phi_{20} x + \ldots = 0, \tag{6.7}$$

которая обладает рядом специальных свойств.

Так, например, система (6.7) может обладать интегральным многообразием $\mathfrak{M}$ меньшей размерности, чем все фазовое пространство системы (6.7). В этом случае процесс высокой размерности может быть сведен к последовательности некоторых процессов более низкой размерности. ([1]) Эта задача имеет очень важное значение в связи с высокими порядками систем встречающихся на практике.

([1]) Этому вопросу посвящены многие работы, в том числе наши работы [13], [17], [18].

В последнее время в указанном направлении обобщения метода усреднения выполнен ряд интересных работ. Это прежде всего метод усреднения с использованием рядов и преобразований Ли [7]. Здесь система вида

$$\frac{dy}{dt} = F(y, \varepsilon), \tag{6.8}$$

где

$$F(y, \varepsilon) = \sum_m \frac{\varepsilon^m}{m!} F_m(y), \qquad F_m(y) = \left.\frac{\partial^m F}{\partial \varepsilon^m}\right|_{\varepsilon=0},$$

y, F — векторы, с помощью почти тождественного преобразования

$$y = x + \varepsilon Q_1(x) + \varepsilon^2 Q_2(x) + \ldots \tag{6.9}$$

преобразуется к системе

$$\frac{dx}{dt} = \sum_m \frac{\varepsilon^m}{m!} \mathscr{Y}_m(x), \tag{6.10}$$

где $\mathscr{Y}_m(x)$ — вектор-функции, содержащие только медленно меняющиеся члены.

В качестве второго примера усреднения, обеспечивающего получение усредненных уравнений специального вида, рассмотрим задачу об усреднении для системы уравнений в канонической форме [24].

Допустим исходные точные уравнения в стандартном виде можно записать в гамильтоновой форме

$$\frac{dq_k}{dt} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{6.11}$$

$H = H(p_i, q_i, t)$ — гамильтониан, являющийся периодической функцией t с периодом 2π.

Если мы, согласно обычным правилам, усредним правые части системы (6.11), то получим усредненные уравнения, которые в общем случаэ не будут иметь формы канонических уравнений Гамильтона и, следовательно, для них мы не сможем сразу найти первый интеграл. Однако, можно усреднение в системах (6.11) производить специальным образом исходя не из уравнений в стандартной форме (6.11), а непосредственно из соответствующего им гамильтониана

$$\varepsilon H(p_i, q_i, t). \tag{6.12}$$

Разработанная методика, заключающаяся в том, что находится производящая функция $S(\mathscr{P}_i, q_i, t)$, дающая такое преобразование канонических переменных p_i, q_i к новым переменным $\mathscr{P}_i, Q_i$ согласнс общеизвестным формулам

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{P}_i}, \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \varepsilon H(p_i, q_i, t) = \varepsilon H'(\mathcal{P}_i, Q_i), \tag{6.14}$$

в результате которого преобразованный гамильтониан $\varepsilon H'(\mathcal{P}_i, Q_i)$ уже не зависит явно от времени. Здесь, как производящая функция S, так и выражение для преобразованного гамильтониана $H'(\mathcal{P}_i, Q_i)$ отыскиваются в виде рядов, расположенных по степеням

$$S = S_0 + \varepsilon S_1(q_i, \mathcal{P}_i, t) + \varepsilon^2 S_2(q_i, \mathcal{P}_i, t) + \ldots, \tag{6.15}$$

$$H'(\mathcal{P}_i, Q_i) = H_1(\mathcal{P}_i, Q_i) + \varepsilon^2 H_2(\mathcal{P}_i, Q_i) + \ldots, \tag{6.16}$$

где $S_0 = \sum q_i \mathcal{P}_i$ — тождественное преобразование.

В результате мы можем написать систему усредненных уравнений (с любой степенью точности)

$$\frac{dQ_i}{dt} = \varepsilon \frac{\partial H'}{\partial \mathcal{P}_i}, \qquad \frac{d\mathcal{P}_i}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{6.17}$$

соответствующую системе точных уравнений (системе (6.11), в которой p_i, q_i заменены на $\mathcal{P}_i, Q_i$ согласно формулам (6.13)).

Для усреднения системы (6.17) мы также, как и для системы (6.11) можем сразу получить первый интеграл.

Развивая методы Крылова–Боголюбова в работе [20], А. Повзнером был предложен метод исследования систем с малым параметром вида

$$\varepsilon^p \frac{dy_k}{dt} = f_k(y) + \varepsilon \tilde{f}_k(y) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.18}$$

являющийся аналогом шредингеровской теории возмущений для линейных операторов. В работе [20] вместо уравнения (6.18) изучается одно дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\varepsilon^p \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} [f_k(y) + \varepsilon \tilde{f}_k(y)] \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0, \tag{6.19}$$

которое, как известно, эквивалентно системе уравнений (6.18) в смысле отыскания общих решений.

Задача состоит в том, чтобы с помощью асимптотической замены вида

$$y = x + \varepsilon Q_1(x) + \varepsilon^2 Q_2(x) + \ldots \tag{6.20}$$

преобразовать уравнение (6.19) к уравнению более простой структуры. Поскольку преобразование (6.20) не зависит от переменной t, то вместо оператора, образующего уравнение (6.19) можно ограничиться рассмотрением следующего дифференциального оператора:

$$Y = Y_0 + \varepsilon \tilde{Y}_1, \tag{6.21}$$

где

$$Y_0 = \sum_k f_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k}, \qquad \tilde{Y}_1 = \sum_k \tilde{f}_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k}. \tag{6.22}$$

В качестве преобразования (6.20) выбирается однопараметрическая (по ε) группа преобразований

$$y = [\exp - \varepsilon S]x, \qquad S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots \tag{6.23}$$

Здесь операторы $S_1, S_2, \ldots$ — линейные дифференциальные операторы первого порядка с неопределенными коэффициентами.

Оператор (6.21) после преобразования (6.23) должен иметь следующий вид

$$Y = Y_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots, \tag{6.24}$$

где дифференциальные операторы H_1, H_2, H_3 определяются из условия коммутативности с оператором Y_0. Задача о нахождении операторов $H_1, H_2, H_3, \ldots$ и $S_1, S_2, \ldots$ (коэффициентов замены (6.23)) решается на основе спектральной теории дифференциальных операторов первого порядка.

Очевидно, что основная идея и алгоритм метода усреднения Н. Н. Боголюбова проектирования возмущенной системы (6.5) на невозмущенную (6.7) выходит далеко за рамки исследования чисто колебательных процессов. При этом можно интересоваться не только аналитическими свойствами интегрального многообразия невозмущенной системы (6.7) и не только с точки зрения числа параметров, описывающих это интегральное многообразие, но и другими структурными свойствами многообразия (т. е. свойствами, не зависящими от выбора системы координат).

Ниже мы остановимся на развитии алгоритма усреднения Н. Н. Боголюбова в следующем направлении: поставим задачу о проектировании некоторой алгебры дифференциальных операторов первого порядка β' на алгебру β, получаемую из первой при нулевом значении параметра ε.

Как будет нами показано, эта постановка равносильна задаче о возмущении для системы уравнений в частных производных достаточно общего вида, для которой интегральное многообразие нулевого приближения обладает специальными свойствами.

Частным, но очень важным, случаем поставленной выше задачи, является задача о декомпозиции (расщеплении), состоящая в том, чтобы решение системы дифференциальных уравнений высокого порядка заменить последовательным решением систем меньшей размерности. Декомпозиция представляет особый интерес в случае, когда получаемые подсистемы возможно решить.

В ряде конкретных систем можно встретить случаи, когда отдельные функциональные устройства (входящие в состав сложной системы) работают не независимо, что соответствовало бы полной приводимости исходной системы, а взаимосвязаны. При этом даже малое взаимодействие с течением времени может привести к качественному изменению поведения решения всей системы в целом. Вот здесь мы и обнаруживаем малый параметр ε и вынуждены анализировать влияние малых возмущений, малой связи и т. п.

Подобные задачи широко встречаются в теории автоматического регулирования, в экономике, в задачах, связанных с планированием и управлением производственными процессами и т. д.

7. Постановка основной задачи

Пусть имеется некоторая пфаффова система

$$
\begin{aligned}
&\omega_1(d) = \omega_{11}dy_1 + \ldots + \omega_{1k}dy_k + \ldots + \omega_{1n}dy_n = 0,\\
&\omega_2(d) = \omega_{21}dy_1 + \ldots + \omega_{2k}dy_k + \ldots + \omega_{2n}dy_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\omega_k(d) = \omega_{k1}dy_1 + \ldots + \omega_{kk}dy_k + \ldots + \omega_{kn}dy_n = 0,
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

определенная в пространстве $R^{(n)}$ переменных $y_1, \ldots, y_n$. Выделим в пространстве $R^{(n)}$ некоторую область Ψ и предположим, что коэффициенты $\omega_{ij}(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ системы (7.1) являются голоморфными функциями y в окрестности любой точки рассматриваемой области Ψ.

Предположим, что пфаффова система (7.1) в области Ψ обладает интегральным многообразием $\mathfrak{M}_m$ размерности m, на котором все формы системы (7.1) тождественно обращаются в нуль. Размерность многообразия $\mathfrak{M}_m$ может варьироваться от 1 до n-1. Кроме размерности интегральное многообразие может характеризоваться рядом других свойств, которые будут являться основным объектом нашего рассмотрения, например, инвариантностью относительно некоторых групповых преобразований, или расщепляемостью по переменным, или свойством компактности, или каким-либо другим свойством.

Наряду с системой (7.1) рассмотрим систему — возмущенную пфаффову систему

$$
(7.2)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1(d) &= \omega_{11}+\varepsilon\tilde{\omega}_{11})dy_1 + \ldots + (\omega_{1n}+\varepsilon\tilde{\omega}_{1n})dy_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tilde{\omega}_k(d) &= (\omega_{k1}+\varepsilon\tilde{\omega}_{k1})dy_1 + \ldots + (\omega_{kn}+\varepsilon\tilde{\omega}_{kn})dy_n = 0.
\end{aligned}
$$

Возникает вопрос о близости свойств интегрального многообразия исходной системы (7.1) $\mathfrak{M}_m$ и возмущенной системы (7.2) $\mathfrak{M}^\varepsilon_m$ при малых значениях ε. Это типичная задача теории возмущений.

Системы (7.1), (7.2) эквивалентны соответствующим дифференциальным уравнениям в частных производных. Задача нахождения интегрального многообразия равносильна задаче Коши со специальным образом выбранными начальными условиями.

Другая важная особенность пфаффовых систем заключается в том, что эти системы позволяют единообразным методом исследовать смешанные системы, состоящие из обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных, что тоже является полезным при решении практических задач.

Переменные $y_1, \ldots, y_n$ входят в приведенные выше пфаффовы системы равноправным образом. Удобнее (и это естественно для прикладных задач) ввести в рассмотрение зависимые и независимые переменные.

Пусть ранг системы (7.1) (соответственно (7.2)) в области Ψ равен k, т. е., например,

$$
\det\begin{pmatrix}\omega_{11}, \ldots \omega_{1k}\\ \omega_{k1}, \ldots \omega_{kk}\end{pmatrix} \neq 0
$$

ни в какой точке области Ψ. Тогда примем в качестве независимых переменных переменные $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n$, а в качестве зависимых — $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Если разрешить системы (7.1), (7.2) относительно дифференциалов зависимых переменных, то получим специальную пфаффову систему

$$
(7.3)\qquad
\begin{aligned}
dy_1 &= q_{11}dy_{k+1} + \ldots + q_{1n-k}dy_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dy_k &= q_{k1}dy_{k+1} + \ldots + q_{kn-k}dy_n
\end{aligned}
$$

и соответствующую ей возмущенную систему

$$
(7.4)\qquad
\begin{aligned}
dy_1 &= (q_{11}+\varepsilon\tilde{q}_{11})dy_{k+1} + \ldots + (q_{1n-k}+\varepsilon\tilde{q}_{1n-k})dy_n,\\
dy_k &= (q_{k1}+\varepsilon\tilde{q}_{k1})dy_{k+1} + \ldots + (q_{kn-k}+\varepsilon\tilde{q}_{kn-k})dy_n.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим теперь некоторую функцию f, заданную на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_{n-k}$ системы (7.3), т. е. f — функция переменных $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющих системе (7.3), и вычислим дифференциал от этой функции

$$(7.5)\qquad df = \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial f}{\partial y_{k+1}} dy_{k+1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} dy_n.$$

Подставив в равенство (7.5) значения дифференциалов из уравнений (7.3) можем написать

$$(7.6)\qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial y_{k+1}} + q_{11}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + q_{k1}\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) dy_{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_n} + q_{1n-k}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + q_{kn-k}\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) dy_n.$$

Обозначим дифференциальные операторы первого порядка в правых частях (7.6) через $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \ldots, \hat{Y}_{n-k}$ и предположим, что совокупность этих операторов линейно несвязна. Тогда очевидно, что совокупность дифференциальных операторов

$$(7.7)\qquad \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_k}, \qquad \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_{n-k}$$

является полной. То есть любая скобка Пуассона от этих операторов линейно выражается через дифференциальные операторы этой совокупности.

Введем обозначения

$$(7.8)\qquad Y_{0i} = \frac{\partial}{\partial y_i} + q_{1i}\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + q_{ki}\frac{\partial}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{Y}_i$$
$$(i = 1, \ldots, n-k),$$

тогда выражение (7.6) может быть представлено в следующем виде

$$(7.9)\qquad df = Y_{01} f dy_{k+1} + \ldots + Y_{0n-k} f dy_n.$$

Положим теперь, что в (7.9) f поочередно принимает значения $y_1, \ldots, y_k$. Тогда, очевидно, что пфаффовы уравнения (7.3) можно записать с использованием операторов $Y_{01}, \ldots, Y_{0n-k}$ в виде

$$(7.10)\qquad dy_i = Y_{01} y_i dy_{k+1} + \ldots + Y_{0n-k} y_i dy_n \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Совершенно аналогично, вводя операторы

$$(7.11)\qquad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + (q_{1i} + \varepsilon\tilde{q}_{1i})\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + (q_{ki} + \varepsilon\tilde{q}_{ki})\frac{\partial}{\partial y_k}$$
$$(i = 1, \ldots, k),$$

перепишем возмущенные пфаффовы уравнения (2.4) в виде

$$(7.12)\qquad dy_i = Y_1 y_i dy_{k+1} + \ldots + Y_{n-k} y_i dy_n \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Оказывается, что наиболее полно свойства интегрального многообразия пфаффовой системы (7.10), которые представляют для нас наибольший интерес, как раз учитываются структурой дифференциальных операторов (7.8). Точнее, алгеброй β дифференциальных операторов, порождаемых операторами (7.7). Алгебра β может быть компактной или декомпозируемой в прямую сумму подалгебр (приводимой), или обладать какими-либо другими свойствами в соответствии со структурой интегрального многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Таким образом, будем считать, что операторы Y_{0i} нулевого приближения возмущенной системы (7.12) (т. е. операторы невозмущенной системы (7.10)) обладают некоторым специальным свойством. Этот факт можно сформулировать как принадлежность оператора Y_{0i} к алгебре β. Вообще, если в дальнейшем говорится, что некоторый дифференциальный оператор X принадлежит алгебре β — $X \in \beta$, то имеется ввиду, что он обладает интересующим нас свойством, характерным для всех элементов из β.

Сделаем теперь в возмущенном дифференциальном операторе (7.11) замену переменных, обратимую в области Ψ и представляемую в виде некоторых формальных асимптотических рядов по параметру ε:

$$(7.13)\qquad y = x + \varepsilon\psi_1(x) + \varepsilon^2\psi_2(x) + \ldots,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор новых переменных.

После замены дифференциальные операторы (7.11) принимают следующий вид

$$(7.14)\qquad Y_i = \sum_{s=1}^{n} \left(Y_i(x_s)\right)^{\sim} \frac{\partial}{\partial x_s}.$$

Знак „~" над функцией $Y_i(x_s)$ обозначает результат подстановки в эту функцию значений y согласно соотношениям (7.13).

И вот основная задача состоит в следующем: пользуясь произволом выбора замены (7.13), так распорядиться неопределенными функциями $\psi_i(x) (i = 1, 2, \ldots)$, чтобы преобразованные возмущенные операторы Y_i (7.14) принадлежали алгебре β. Иначе говоря задача заключается в проектировании операторов Y_i (7.11) на алгебру β.

Составим теперь с помощью операторов (7.13) пфаффову систему для новых переменных x:

$$(7.15)\qquad dx_i = (Y_i x_i) dx_{k+1} + \ldots + (Y_{n-k} x_i) dx_n \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Интегральное многообразие этой системы

(7.16) $$x_i = \varphi_i(x_{k+1}, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

в силу принадлежности операторов $Y_i (i = 1, \ldots, n-k)$ к алгебре β, обладает свойствами, характерными для интегрального многообразия невозмущенной системы (системы нулевого приближения) (7.10).

Если подставить в интегральное многообразие (7.16) значения $x_i (i = 1, \ldots, n)$, определенные из формул (7.13), то получим

(7.17) $$x_i(\varepsilon, y) = \varphi_i\big(\varepsilon, x_{k+1}(\varepsilon, y), \ldots, x_n(\varepsilon, y)\big) \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Разрешая (7.17) относительно $y_1, y_2, \ldots, y_k$ окончательно получим асимптотическое представление для многообразия возмущенной системы (7.12)

(7.18) $$y_i = \psi_i(\varepsilon, y_{k+1}, \ldots, y_n).$$

8. Алгоритм асимптотического расщепления

Остановимся теперь подробно на изложении алгоритма асимптотического расщепления. Рассмотрим алгебру β дифференциальных операторов (характеризующих невозмущенную систему $\varepsilon = 0$), порождаемую следующими базисными элементами:

(8.1) $$Y_{0i} = a_{i1}(y)\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + a_{in}(y)\frac{\partial}{\partial y_n} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $a_{ij}(y)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — голоморфные функции переменных $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ в области Ψ. Здесь удобнее не делать различия между зависимыми и независимыми переменными. Совокупность операторов Y_{0i} считаем линейно независимой в области Ψ.

Для возмущенных операторов примем обозначения

(8.2) $$Y_i = Y_{0i} + \varepsilon \tilde{Y}_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$\tilde{Y}_i = \tilde{a}_{i1}(y)\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \tilde{a}_{in}(y)\frac{\partial}{\partial y_n},$$

$\tilde{a}_{ij}(y)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — голоморфные функции переменных в области Ψ, ε — малый положительный параметр.

Обозначим через β' алгебру, порождаемую возмущенными операторами (8.2).

Поставим сперва задачу о нахождении обратимой в области Ψ замены переменных

(8.3) $$y = x + \varepsilon F_1(x) + \varepsilon^2 F_2(x) + \ldots,$$

где x, y — n-мерные векторы, F_1, F_2 — векторные функции этих переменных, которая преобразует дифференциальные операторы (8.2) к виду

$$Y_i = (Y_{0i} + \varepsilon Y_{1i} + \varepsilon^2 Y_{2i} + \ldots) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{8.4}$$

где Y_{1i}, Y_{2i} принадлежат уже алгебре β, а, следовательно, и вся сумма в правой части (8.4) принадлежит алгебре β.

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы первого порядка

$$S_i = \sum_j s_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Коэффициенты этих операторов будем считать пока неопределенными голоморфными функциями от переменных x в области Ψ.

Замену переменных (8.3) будем разыскивать в виде экспоненциальной функции от некоторого асимптотического ряда по параметру ε:

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \ldots, \tag{8.5}$$

т. е. в форме

$$y = \exp(-\varepsilon S) x = \left(1 - \frac{1}{1!} \varepsilon S + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 S^2 + \ldots\right) x \text{ [1]}. \tag{8.6}$$

Подберем теперь так неопределенные коэффициенты операторов $S_i (i = 1, 2, \ldots)$, чтобы решить поставленную задачу.

Вид замены (8.6) не случаен и предопределен теми важными для наших рассмотрений свойствами, которыми эта замена обладает. Как известно, любой дифференциальный оператор первого порядка (в рассматриваемом случае Y_i) в случае замены (8.6) преобразуется следующим образом:

$$Y_i = Y_{0i} - \varepsilon S \,\Big]\, Y_i + \varepsilon^2 \frac{1}{2!} S \,\Big]^2\, Y_i + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{8.7}$$

Здесь для скобок Пуассона введены сокращенные обозначения:

$$Y]X = YX - XY = [YX], \qquad Y]^2 X = [Y[Y, X]], \ldots$$

Важной особенностью преобразования (8.6) является то обстоятельство, что в нулевом приближении (т. е. при $\varepsilon = 0$) преобразуемый оператор инвариантен относительно замены. Другими словами — меняются обозначения переменных y на x без изменения вида функции. Этот

---

(1) Замена переменных типа (8.6) и ее свойства рассматривались Дж. Е. Кэмпбеллом [8].

факт отмечен индексом x при нулевом члене Y_{ix} разложения оператора Y_i по степеням ε.

Подставим теперь в соотношения (8.7) вместо Y_i его значение из формулы (8.2) и вместо S — его асимптотическое представление (8.5). После ряда элементарных выкладок получим для коэффициентов при степенях параметра ε следующие выражения:

$$\varepsilon^0:\ Y_{0i} = a_{i1}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_{in}(x)\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{8.8}$$

$$\varepsilon^1:\ Y_{0i}]S_1 + \tilde{Y}_i, \tag{8.9}$$

$$\varepsilon^2:\ Y_{0i}]S_2 - S_1]\tilde{Y}_i + \tfrac{1}{2}S_1]^2 Y_{0i}, \tag{8.10}$$

. . . .

$$\varepsilon^p:\ Y_{0i}]S_p + F_p(\tilde{Y}_i, Y_{0i}, S_1, \ldots, S_{p-1}), \tag{8.11}$$

где F_p — известная функция после того, как найдены $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$.

Пусть P обозначает проектор на алгебру β, т. е. если $Y \notin \beta$, то $PY \in \beta$.

Потребуем теперь, чтобы преобразованный возмущенный оператор (8.2) порождал также алгебру β. В этом случае операторы $S_1, S_2, \ldots$ должны быть определены из следующей системы дифференциальных уравнений

$$Y_{0i}]S_1 = -\tilde{Y}_i + P\tilde{Y}_i, \tag{8.12}$$

$$Y_{0i}]S_2 = +S_1]\tilde{Y}_i - \tfrac{1}{2}S_1]^2 Y_{0i} - P\{S_1]\tilde{Y}_i - \tfrac{1}{2}S_1]^2 Y_{0i}\}, \tag{8.13}$$

. . . .

$$Y_{0i}]S_p = -F_p(\tilde{Y}_i, Y_{0i}, S_1, \ldots, S_{p-1}) + PF_p(\tilde{Y}_i, Y_{0i}, S_1, \ldots, S_{p-1}). \tag{8.14}$$

После определения из системы (8.12)–(8.14) операторов $S_1, S_2, \ldots$ асимптотическое разложение исходного дифференциального оператора Y_i (8.7) приобретает следующий вид:

$$Y_i = Y_{0i} + \varepsilon P\tilde{Y}_i + \varepsilon^2 PS_1]\tilde{Y}_i + \ldots + \varepsilon^p PF_p(\tilde{Y}_i, Y_{0i}, S_1, \ldots, S_{p-1}) + \ldots, \tag{8.15}$$

где $Y_i \in \beta$ и, следовательно, решена поставленная задача проектирования алгебры операторов β' на β. Далее подставляя значения найденных из системы (8.12)–(8.14) дифференциальных операторов $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$ в выражение (8.6) находим приводящее преобразование в явном виде.

9. Пример. Уравнение Ван-дер-Поля

В качестве первого примера применения изложенной выше теории рассмотрим систему, описываемую уравнением Ван-дер-Поля с дополнительным членом, соответствующим периодическому воздействию:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} + u = \mathscr{B}\cos\nu t + \mathscr{B}_0, \tag{9.1}$$

где ε — малая положительная величина, $\mathscr{B}\cos\nu t + \mathscr{B}_0$ — внешняя сила, содержащая постоянную составляющую.

В автоколебательных системах, описываемых таким уравнением, в зависимости от соотношения между собственной частотой и частотой внешнего возбуждения можно ожидать появления почти периодического колебания, могут возникнуть биения, явления захватывания частоты (ультрагармонические или субгармонические захватывания), при условии, что указанные частоты не очень отличаются друг от друга, может наступить явление синхронизации (гармоническое захватывание).(1)

Вводя в уравнении (9.1) вместо u новую переменную $v = u - \mathscr{B}_0$, мы приводим уравнение (9.1) к следующему виду

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \mu(1-\beta v-\gamma v^2)\frac{dv}{dt} + v = \mathscr{B}\cos\nu t, \tag{9.2}$$

где введены обозначения:

$$\mu = (1-\mathscr{B}_0^2)\varepsilon, \qquad \beta = \frac{2\mathscr{B}_0}{1-\mathscr{B}_0^2}, \qquad \gamma = \frac{1}{1-\mathscr{B}_0^2}.$$

Поскольку система, описываемая уравнением (9.2), является автоколебательной, то μ должно быть положительным и следовательно $\mathscr{B}_0^2 < 1$.

В случае гармонического захватывания (вынуждающая частота близка к единице) решение уравнения (9.2) обычно ищется в виде

$$v(t) = b_1(t)\sin\nu t + b_2(t)\cos\nu t. \tag{9.3}$$

Если ожидается появление ультрагармонического или субгармонического захватывания (частота захватываемого колебания в целое число раз больше или меньше вынуждающей частоты ν), то решение уравнения (9.2) обычно ищется в виде

$$v(t) = \frac{\mathscr{B}}{1-\nu^2}\cos\nu t + b_1(t)\sin n\nu t + b_2(t)\cos n\nu t, \tag{9.4}$$

(1) Подробный анализ всех этих колебаний можно найти в [23].

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ для ультрагармонических колебаний, $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ для субгармонических колебаний.

Рассмотрим сперва случай $\mathscr{B} = \mathscr{B}_0 = 0$, т. е. однородное уравнение Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} + u = 0. \tag{9.5}$$

Вводя вместо u и du/dt новые переменные b_1 и b_2 согласно следующим формулам замены переменных

$$\begin{aligned} u &= b_1\cos t + b_2\sin t, \\ \frac{du}{dt} &= -b_1\sin t + b_2\cos t \end{aligned} \tag{9.6}$$

и усредняя полученные относительно новых переменных b_1, b_2 уравнения в стандартной форме приходим к следующей системе уравнений (с точносттью до величин порядка ε^2 включительно):

$$\begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)b_1 + \frac{\varepsilon^2}{8}\left(1-\frac{3}{2}r^2+\frac{11}{32}r^4\right)b_2, \\ \frac{db_2}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)b_2 - \frac{\varepsilon^2}{8}\left(1-\frac{3}{2}r^2+\frac{11}{32}r^4\right)b_1, \end{aligned}$$

где обозначено $r^2 = b_1^2 + b_2^2$.

Эта система после очевидной замены переменных $\tau = \varepsilon t$, $r^2 = x_1$, $b_2^2/b_1^2 = x_2$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \left(1-\frac{x_1}{4}\right)x_1, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{8}\left(1-\frac{3}{2}x_1+\frac{11}{32}x_1^2\right)(1+x_2^2). \end{aligned} \tag{9.7}$$

При $\varepsilon = 0$ в системе (9.7) переменные разделяются.

Совершим разделение переменных с точностью до величин порядка ε включительно согласно изложенной выше теории.

Вместо системы (9.7) мы можем написать эквивалентное ей дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \left(1-\frac{x_1}{4}\right)x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\varepsilon}{8}\left(1-\frac{3}{2}x_1+\frac{11}{32}x_1^2\right)(1+x_2^2)\frac{\partial f}{\partial x_2}. \tag{9.8}$$

Тогда операторы (8.1) и (8.2) имеют следующий вид

$$Y = Y_0 + \varepsilon\tilde{Y}, \tag{9.9}$$

где

$$Y_0 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{x_1}{4}\right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \tag{9.10}$$

$$\tilde{Y} = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{3}{2} x_1 + \frac{11}{32} x_1^2\right)(1 + x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{9.11}$$

При $\varepsilon = 0$ оператор (9.9) $Y = Y_0$ принадлежит алгебре β и порождает систему с разделенными переменными. Найдем замену переменных, преобразующую оператор (9.9) ($\varepsilon \neq 0$) к виду, порождающему систему с разделенными переменными с точностью до величин порядка ε включительно.

Для этого ищем замену в виде

$$x = \exp(-\varepsilon S) z, \tag{9.12}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2)$,

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \ldots \tag{9.13}$$

$S_1, S_2, S_3, \ldots$ — линейные дифференциальные операторы первого порядка с неопределенными коэффициентами.

Подставляя (9.12) и (9.13) в (9.9) мы получим для Y следующее выражение:

$$Y_z = Y_{0z} + \varepsilon\{Y_{0z}]S_1 + \tilde{Y}_z\} + \varepsilon^2\{S_2]Y_{0z} - S_1]\tilde{Y}_z + \\ + \tfrac{1}{2} S_1]^2 Y_{0z}\} + \ldots, \tag{9.14}$$

где индекс z указывает на то, что вместо x везде сделан переход к новой переменной z. При этом очевидно имеем (с точностью до величин порядка ε)

$$Y_{0z} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{z_1}{4}\right) z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \tag{9.15}$$

$$\tilde{Y}_z = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{3}{2} z_1 + \frac{11}{32} z_1^2\right)(1 + z_2^2) \frac{\partial}{\partial z_2}. \tag{9.16}$$

Пусть теперь P — проектор на алгебру β (алгебру, свойством которой является расщепляемость), тогда, полагая

$$P\tilde{Y}_z = -\frac{1}{8}(1 + z_2^2) \frac{\partial}{\partial z_2}, \tag{9.17}$$

уравнение (8.12)

$$Y_{0z}]S_1 = -\tilde{Y}_z + P\tilde{Y}_z \tag{9.18}$$

принимает следующий вид

$$Y_{0z}]S_1 = -\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}z_1 - \frac{11}{32}z_1^2\right)(1+z_2^2)\frac{\partial}{\partial z_2}. \tag{9.19}$$

Выберем теперь и качестве базисных операторов

$$Z_1 = \left(1-\frac{z_1}{4}\right)z_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Z_2 = \frac{\partial}{\partial z_2}, \tag{9.20}$$

(эти операторы должны коммутировать между собой) и оператор S, будем разыскивать в виде

$$S_1 = \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2, \tag{9.21}$$

где γ_1 и γ_2 —неизвестные скалярные функции переменных z_1, z_2 (γ_i не должно зависеть от τ, так как правые части системы (9.7) не зависят от τ).

Подставляя в (9.19) значение S_1 согласно формуле (9.21) и раскладывая правую часть (9.19) по базисным операторам (9.20), получим

$$Y_{0z}\gamma_1 Z_1 + Y_{0z}Z_2 = -\tfrac{1}{8}(\tfrac{3}{2}z_1 - \tfrac{11}{32}z_1^2)(1+z_2^2)Z_2. \tag{9.22}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных операторах получим систему дифференциальных уравнений для определения γ_1 и γ_2:

$$\begin{aligned} Y_{0z}\gamma_1 &= 0 \\ Y_{0z}\gamma_2 &= -\tfrac{1}{8}(\tfrac{3}{2}z_1 - \tfrac{11}{32}z_1^2)(1+z_2^2). \end{aligned} \tag{9.23}$$

Каждое уравнение системы (9.23) решается независимо. Из первого находим

$$\gamma_1 \equiv 0. \tag{9.24}$$

Для определения γ_2 имеем уравнение

$$\left(1-\frac{z_1}{4}\right)z_1\frac{\partial\gamma_2}{\partial z_1} = -\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}z_1 - \frac{11}{32}z_1^2\right)(1+z_2^2), \tag{9.25}$$

откуда получаем

$$\gamma_2 = (1+z_2^2)\int^{z_1}\frac{-\frac{1}{8}(\frac{3}{2}z_1 - \frac{11}{32}z_1^2)}{(1-\frac{1}{4}z_1)z_1}\,dz_1 + C_{\gamma_2} \tag{9.26}$$

C_{γ_2} — произвольная постоянная.

Подставляя значение γ_1 и γ_2 согласно формулам (9.24) и (9.26) в правую часть выражения (9.21) находим для оператора S_1 следующее выражение

$$S_1 = \left\{(1+z_2^2)\int^{z_1} \frac{-(\frac{3}{2}z_1 - \frac{11}{32}z_1^2)}{2(4-z_1)z_1}dz_1 + C_{\gamma_2}\right\}\frac{\partial}{\partial z_2}. \tag{9.27}$$

Подставляя теперь (9.27) в замену переменных (9.12)

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-\varepsilon S_1+\varepsilon^2\ldots)z_1,\\ x_2 &= (1-\varepsilon S_1+\varepsilon^2\ldots)z_2, \end{aligned} \tag{9.28}$$

окончательно находим:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1+\varepsilon^2\ldots,\\ x_2 &= z_2+\varepsilon(1+z_2^2)\int^{z_1}\frac{(\frac{3}{2}z_1-\frac{11}{32}z_1^2)}{2(4-z_1)z_1}dz_1+\varepsilon C_{\gamma_2}+\varepsilon^2\ldots \end{aligned} \tag{9.29}$$

После замены переменных оператор (9.14) принимает следующий вид

$$Y_z = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left(1-\frac{z_1}{4}\right)z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\varepsilon}{8}(1+z_2^2)\frac{\partial}{\partial z_2} + \varepsilon^2\ldots, \tag{9.30}$$

а уравнение (9.8)

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} + \left(1-\frac{z_1}{4}\right)z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} - \frac{\varepsilon}{8}(1+z_2^2)\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \tag{9.31}$$

и, следовательно, соответствующая (9.31) система обыкновенных дифференциальных уравнений будет иметь следующий вид (новые переменные z_1, z_2 разделены с точностью до величин порядка ε включительно)

$$\frac{dz_1}{d\tau} = \left(1-\frac{z_1}{4}\right)z_1, \qquad \frac{dz_2}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{8}(1+z_2^2). \tag{9.32}$$

Легко видеть, что произведя в уравнениях (9.7) замену переменных согласно формулам (9.29) мы с точностью до величин порядка ε включительно получим систему (9.32).

Рассмотрим теперь случай периодического воздействия на систему, описываемую уравнением Ван-дер-Поля.

Положим в уравнении (9.1) $\mathcal{B} = \varepsilon E$, $\mathcal{B}_0 = 0$, получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} + u = \varepsilon E\cos\nu t. \tag{9.33}$$

Переходя к новым переменным b_1 и b_2 с помощью замены переменных

$$x = b_1\cos\nu t + b_2\sin\nu t,\qquad \frac{dx}{dt} = -b_1\nu\sin\nu t + b_2\nu\cos\nu t \tag{9.34}$$

и, усредняя получаемые уравнения в стандартной форме, находим систему

$$\begin{aligned}\frac{db_1}{dt} &= \Delta b_2 + \frac{\varepsilon}{2}\left\{b_1\left(1-\frac{r^2}{4}\right) + \frac{E}{\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right) - \frac{\Delta}{4\nu}b_1r^2\right\} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{8\nu}\left\{b_2(1+4\nu\Delta^2) - \frac{3E}{2\nu}b_1b_2 + \frac{11}{32}b_2r^4 - \frac{3}{2}b_2r^2\right\},\\ \frac{db_2}{dt} &= -\Delta b_1 + \frac{\varepsilon}{2}\left\{b_2\left(1-\frac{r^2}{4}\right) - \frac{\Delta}{4\nu}b_2r^2\right\} - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{8\nu}\left\{b_1(1+4\nu\Delta^2) + \frac{E}{\nu}\left(1-\frac{5b_1^2-b_2^2}{4}\right) + \frac{11}{32}b_1r^4 - \frac{3}{2}b_1r^2\right\},\end{aligned} \tag{9.35}$$

где обозначено $2(\nu^2-1)/\nu = \Delta$, $b_1^2+b_2^2 = r^2$.

Введем, как и выше, новые переменные x , x_2 согласно формулам

$$b_1^2+b_2^2 = r^2 = x_1,\qquad \frac{b_2}{b_1} = x_2 \tag{9.36}$$

и, следовательно,

$$b_1 = \sqrt{\frac{x_1}{1+x_2^2}},\qquad b_2 = x_2\sqrt{\frac{x_1}{1+x_2^2}}. \tag{9.37}$$

Подставляя (9.37) в уравнения (9.35), после элементарных выкладок, получим:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \varepsilon\left\{\left[1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\Delta}{\nu}\right)x_1\right]x_1 + \frac{E}{\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{\frac{x_1}{1+x_2^2}}\right\} - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2E}{16\nu^2}(x_1+4)x_2\sqrt{\frac{x_1}{1+x_2^2}},\end{aligned}$$

$$(9.38)\quad \frac{dx_2}{dt} = -\Delta(1+x_2^2) - \frac{\varepsilon}{2\nu} E\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right) x_2 \sqrt{\frac{1-x_2^2}{x_1}} - \\ -\frac{\varepsilon^2}{8\nu}\left\{(1+4\nu\Delta^2)(1+x_2^2) + \frac{11}{32} x_1^2(1+x_2^2) - \frac{3}{2} x_1(1+x_2^2) + \right. \\ \left. + \frac{E}{4\nu}\left[\frac{4-5x_1}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{1+x_2^2}} + \frac{4x_2 - 7x_2^2 x_1}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2^2+1}}\right]\right\}.$$

При $E = 0$, $\nu = 1$ система (9.38) переходит в систему (9.8).

Очевидно, что возмущенный оператор (8.2), соответствующий системе уравнений (9.38), имеет следующий вид

$$(9.39)\qquad Y = Y_0 + \varepsilon \tilde{Y}_1 + \varepsilon^2 \tilde{Y}_2,$$

где

$$(9.40)\qquad Y_0 = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta(1+x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$(9.41)\quad \tilde{Y}_1 = \left\{\left[1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\Delta}{\nu}\right)x_1\right]x_1 + \frac{E}{\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{\frac{x_1}{1+x_2^2}}\right\}\frac{\partial}{\partial x_1} - \\ - \frac{E}{2\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right)x_2\sqrt{\frac{1+x_2^2}{x_1}}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$(9.42)\qquad \tilde{Y}_2 = c_1(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + c_2(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

где $c_1(x_1, x_2)$, $c_2(x_1, x_2)$ — соответственно коэффициенты при ε^2 в правых частях уравнений (9.38).

Оператор (9.40) принадлежит алгебре β и порождает систему с разделенными переменными. Приступим к определению замены переменных преобразующей, оператор Y.

Для этого, как и выше ищем замену переменных в виде

$$(9.43)\qquad \begin{gathered} x = \exp(-\varepsilon S)z, \\ x = (x_1, x_2), \qquad z = (z_1, z_2), \qquad S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots \end{gathered}$$

и определяем S_1 из уравнения (8.12)

$$(9.44)\qquad Y_{0z}]S_1 = -\tilde{Y}_{1z} + P\tilde{Y}_{1z}.$$

Выпишем оператор $\tilde{Y}_{1z}$:

$$Y_{1z} = \left\{\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\Delta}{\nu}\right)z_1\right]z_1 + \frac{E}{\nu}\left(1 + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\left(1 - \frac{z_2^2}{2} + \right.\right. \tag{9.45}$$

$$\left.\left. + \frac{3}{8}z_2^4 \ldots\right)\right\}\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{E}{2\nu}\left(1 + \frac{\Delta}{2\nu}\right)z_2\sqrt{\frac{1+z_2^2}{z_1}}\frac{\partial}{\partial z_2} + \varepsilon \ldots$$

Выберем $P\tilde{Y}_{1z}$ в виде

$$P\tilde{Y}_{1z} = \left\{\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\Delta}{\nu}\right)z_1\right]z_1 + \frac{E}{\nu}\left(1 + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\right\}\frac{\partial}{\partial z_1} - \tag{9.46}$$

$$- \frac{E}{2\nu}\left(1 + \frac{\Delta}{2\nu}\right)z_2\sqrt{\frac{1+z_2^2}{z_1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2},$$

и разложим оператор $-\tilde{Y}_{1z} + P\tilde{Y}_{1z}$ по базисным операторам Z_{1z} и Z_{2z}

$$Z_{1z} = \frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad Z_{2z} = -\Delta(1+z_2^2)\frac{\partial}{\partial z_2}. \tag{9.47}$$

Находим

$$-\tilde{Y}_{1z} + P\tilde{Y}_{1z} = -\frac{E}{\nu}\left(1 + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\left(-\frac{z_2^2}{2} + \frac{3}{8}z_2^4 \ldots\right)\frac{\partial}{\partial z_1}. \tag{9.48}$$

Оператор S_1 ищем в виде

$$S_1 = \gamma_1(z_1, z_2)Z_{1z} + \gamma_2(z_1, z_2)Z_{2z}. \tag{9.49}$$

Подставляя (9.48) и (9.49) в уравнение (9.44) получим

$$Y_{0z}]\gamma_1 Z_{1z} + Y_{0z}]\gamma_2 Z_{2z} = c(z_1, z_2)Z_{1z}, \tag{9.50}$$

где обозначено

$$c(z_1, z_2) = -\frac{E}{\nu}\left(1 + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\left(-\frac{z_2^2}{2} + \frac{3}{8}z_2^4 \ldots\right). \tag{9.51}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных операторах, находим

$$\begin{aligned} Y_{0z}\gamma_1 &= c(z_1, z_2), \\ Y_{0z}\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \tag{9.52}$$

Из (9.52) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_2(z_1, z_2) &= 0, \\ \gamma_1(z_1, z_2) &= \frac{E}{\Delta\nu}\left(1 + \frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\int\frac{-\frac{1}{2}z_2^2 + \frac{3}{8}z_2^4 \ldots}{(1+z_2^2)}dz_2 + C_{\gamma_1} \end{aligned} \tag{9.53}$$

и, следовательно,

$$S_1 = \left\{ \frac{E}{\Delta\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\int \frac{-\frac{1}{2}z_2^2+\frac{3}{8}z_2^4\ldots}{(1+z_2^2)}\,dz_2 + \varepsilon C_{\gamma_1} \right\} \frac{\partial}{\partial z_1}. \tag{9.54}$$

После этого находим окончательные выражения для замены переменных (9.28):

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - \varepsilon\frac{E}{2\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\int \frac{-\frac{1}{2}z_2^2+\frac{3}{8}z_2^4\ldots}{(1+z_2^2)}\,dz_2 + \varepsilon C_{\gamma_1}, \\ x_2 &= z_2, \end{aligned} \tag{9.55}$$

которая преобразует систему (9.38) с точностью до величин порядка ε включительно к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \varepsilon\left\{\left[1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\Delta}{\nu}\right)z_1\right]z_1 + \frac{E}{\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right)\sqrt{z_1}\right\}, \\ \frac{dz_2}{dt} &= -\Delta(1+z_2^2) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{E}{\nu}\left(1+\frac{\Delta}{2\nu}\right)z_2\sqrt{\frac{1+z_2^2}{z_1}}. \end{aligned} \tag{9.56}$$

Таким образом, в данном случае у нас полного расщепления нет. В преобразованной системе (9.56) первое уравнение зависит только от z_1 и может быть проинтегрировано независимо.

Продолжая изложенный процесс, мы можем определить S_2 и произвести разделение переменных с точностью до величин порядка ε^2 включительно.

10. Пример. Расщепление системы уравнений движения летательного аппарата

В качестве второго конкретного примера рассмотрим задачу об асимптотическом расщеплении возмущенного движения летательного аппарата. Предположим, что летательный аппарат самолетного типа имеет вертикальную плоскость симметрии xOy_1. Неподвижную систему координат земную обозначим $\mathscr{A}x_3y_3z_3$. Систему координат, связанную с летательным аппаратом, обозначим $Ox_1y_1z_1$, полускоростную систему обозначим $Ox^*y^*z^*$.

Уравнения движения относительно полускоростной системы координат содержат 13 переменных.

Продольные переменные: V — скорость центра тяжести относительно воздуха, θ — угол наклона траектории к горизонту, ω_z — проекция вектора угловой скорости на ось Oz, ϑ — угол тангажа, x — координата центра тяжести вдоль оси Ox_1, H — высота полета, m — масса летательного аппарата.

Боковые переменные: Ψ — угол поворота траектории, ω_x — проекция вектора угловой скорости на ось Ox_1, ω_y — проекция вектора угловой скорости на ось Oy_1, ψ — угол рыскания, γ — угол крена летательного аппарата, z — координата вдоль оси Oz_1.

Продольное движение летательного аппарата складывается из поступательного движения центра тяжести вдоль осей Ox_1, Oy_1 (т. е. в плоскости симметрии Ox_1y_1) и вращательного движения относительно оси Oz_1. Боковое движение состоит из поступательного движения центра тяжести летательного аппарата вдоль оси Oz_1 и вращательных движений относительно осей Ox_1 и Oy_1. Общее движение летательного аппарата складывается из указанных двух движений, причем между ними в общем случае происходит взаимное влияние.

Учитывая приведенные выше обозначения, уравнения движения летательного аппарата записываются в виде (см., например, [12]): семь уравнений, содержащих параметры продольного движения

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = F_v(V,\theta,\vartheta,H,m,\Psi,\psi,\gamma),\\
&\frac{d\theta}{dt} = F_\theta(V,\theta,\vartheta,H,m,\Psi,\psi,\gamma),\\
&\frac{d\omega_z}{dt} = F_{\omega_z}(V,\theta,\omega_z,\vartheta,H,\Psi,\omega_x,\omega_y,\psi,\gamma),\\
&\frac{d\vartheta}{dt} = F_\vartheta(\omega_z,\omega_y,\gamma),\\
&\frac{dx}{dt} = F_x(V,\theta,\Psi),\\
&\frac{dH}{dt} = F_H(V,\theta),\\
&\frac{dm}{dt} = F_m(V,H,t),
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

и шесть уравнений, содержащих параметры бокового движения

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\Psi}{dt} = F_\Psi(V,\theta,\vartheta,H,m,\Psi,\psi,\gamma),\\
&\frac{d\omega_x}{dt} = F_{\omega_x}(V,\theta,\omega_z,\vartheta,H,\Psi,\omega_x,\omega_y,\psi,\gamma),\\
&\frac{d\omega_y}{dt} = F_{\omega_y}(V,\theta,\omega_z,\vartheta,H,\Psi,\omega_x,\omega_y,\psi,\gamma),
\end{aligned}
$$

$$\frac{d\psi}{dt} = F_\psi(\omega_z, \vartheta, \omega_y, \gamma), \tag{10.2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = F_\gamma(\omega_z, \vartheta, \omega_x, \omega_y, \gamma)$$

$$\frac{dz}{dt} = F_z(V, \theta, \Psi).$$

В системе уравнений (10.1)–(10.2) введены следующие обозначения:

$$F_V = \frac{P}{m}\cos\alpha\cos\beta - \frac{X}{m} - \frac{G}{m}\sin\theta,$$

$$F_\theta = \frac{P}{mV}(\sin\alpha\cdot\cos\gamma_c + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma_c) - \frac{Y}{mV}\cos\gamma_c -$$

$$- \frac{Z}{mV}\sin\gamma_c - \frac{G}{mV}\cos\theta, \tag{10.3}$$

$$F_{\omega_z} = \frac{M_z}{I_z} - \frac{I_y - I_x}{I_z}\omega_x\omega_y,$$

$$F_\vartheta = \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma,$$

$$F_x = V\cos\theta\cos\Psi,$$

$$F_H = V\sin\theta,$$

$$F_m = -m_c(V, H, t).$$

$$F_\Psi = -\frac{P}{mV\cos\theta}(\sin\alpha\sin\gamma_c - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_c) -$$

$$- \frac{Y}{mV\cos\theta}\sin\gamma_c - \frac{Z}{mV\cos\theta}\cos\gamma_c,$$

$$F_{\omega_x} = \frac{M_x}{I_x} - \frac{I_z - I_y}{I_x}\omega_y\omega_z,$$

$$F_{\omega_y} = \frac{M_y}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y}\omega_z\omega_x, \tag{10.4}$$

$$F_\psi = \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma),$$

$$F_\gamma = \omega_x - \operatorname{tg}\vartheta(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma),$$

$$F_z = -V\cos\theta\sin\Psi,$$

где обозначено: P — сила тяги двигателя, X, Y, Z — проекции полной аэродинамической силы на скоростные оси, α, β — углы атаки и скольжения, γ_c — угол крена в скоростной системе координат, I_x, I_y, I_z — моменты инерции аппарата относительно осей, связанных с летательным аппаратом, M_x, M_y, M_z — проекции моментов внешних сил (момент крена, рыскания и тангажа) на эти оси, G — вес летательного аппарата.

Систему уравнений (10.1)-(10.2) мы в дальнейшем будем записывать в векторном виде

$$\frac{d\eta}{dt} = F(t, \eta) \tag{10.5}$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{13})$, $F = (F_{\eta_1}, F_{\eta_2}, \ldots, F_{\eta_{13}})$ — обозначают переменные и функции, стоящие в правых частях уравнений движения, в том же порядке, в котором они выше приведены.

Пусть теперь $\eta = \eta_*$ — некоторое программное движение летательного аппарата

$$\frac{d\eta_*}{dt} \equiv F(t, \eta_*). \tag{10.6}$$

Рассмотрим движение в окрестности этого программного движения

$$\eta = \eta_* + \varepsilon\Delta\eta, \tag{10.7}$$

где малый параметр $\varepsilon > 0$ характеризует малость возмущенного движения.

Подставляя (10.7) в уравнения (10.5) и принимая во внимание тождества (10.6), мы получим следующую систему уравнений возмущенного движения:

$$\frac{d\Delta\eta_i}{dt} = \sum_{j=1}^{13} \Delta\eta_j \frac{\partial F_{\eta_i}(t, \eta_*)}{\partial \eta_j} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{j=1}^{13} \Delta\eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right)^2 F_{\eta_i}(t, \eta_*) + \ldots \tag{10.8}$$

$$(i = 1, \ldots, 13).$$

Учитывая симметрию летательного аппарата относительно плоскости x_1Oy_1, функции зависящие от боковых значений параметров Ψ, $\omega_x, \omega_y, \Psi, \gamma$ можно считать четными функциями и, следовательно, разложения в ряд Тейлора этих функций не должны содержать нечетных степеней этих переменных. Кроме того, если в основном программном движении отсутствует скольжение, то $\beta_* = 0$.

Введем теперь сокращенную запись для следующих операторов

$$\sum \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta} = \Delta V \frac{\partial}{\partial V} + \Delta\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \Delta\omega_z \frac{\partial}{\partial\omega_z} + \Delta\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \Delta H \frac{\partial}{\partial H} + \\ + \Delta m \frac{\partial}{\partial m} + \Delta\Psi \frac{\partial}{\partial\Psi} + \Delta\omega_x \frac{\partial}{\partial\omega_x} + \Delta\omega_y \frac{\partial}{\partial\omega_y} + \Delta\psi \frac{\partial}{\partial\psi} + \Delta\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}, \tag{10.9}$$

$$\sum_{n} \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta} = \Delta V \frac{\partial}{\partial V} + \Delta\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \Delta\omega_z \frac{\partial}{\partial\omega_z} + \Delta\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \\ + \Delta H \frac{\partial}{\partial H} + \Delta m \frac{\partial}{\partial m}, \tag{10.10}$$

$$\sum_{б} \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta} = \Delta\Psi \frac{\partial}{\partial\Psi} + \Delta\omega_x \frac{\partial}{\partial\omega_x} + \Delta\omega_y \frac{\partial}{\partial\omega_y} + \Delta\psi \frac{\partial}{\partial\psi} + \Delta\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}. \tag{10.11}$$

Оператор (10.9) содержит все переменные, от которых могут зависеть правые части уравнений (10.1)–(10.2). Операторы (10.10) и (10.11) содержат соответственно переменные продольного и бокового движения.

Запись

$$\left(\sum \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) F \tag{10.12}$$

обозначает результат вычисления производных от функции F и подстановка вместо переменных η параметров невозмущенного движения η_*. Введя эти обозначения и учитывая высказанные выше соображения, мы можем систему уравнений (10.8) записать в следующем сокращенном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\eta_i}{dt} &= \left(\sum_{n} \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_{\eta_i} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_{\eta_i} + \varepsilon^2 \ldots \quad (i = 1, \ldots, 7,) \\ \frac{d\Delta\eta_j}{dt} &= \left(\sum_{б} \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_{\eta_j} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum \Delta\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_{\eta_j} + \varepsilon^2 \ldots \quad (j = 8, \ldots, 13). \end{aligned} \tag{10.13}$$

В линейном приближении, т. е. при $\varepsilon = 0$, система (5.13) расщепляется на две подсистемы, описывающие независимо друг от друга продольное движение и боковое движение. Произведем асимптотическое расщепление возмущенной системы (10.13) согласно изложенному методу.

Уравнение в частных производных, соответствующее системе (10.13) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{7}\left(\sum \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)F_{\eta_i}\frac{\partial f}{\partial\eta_i} + \sum_{j=8}^{13}\left(\sum_{\delta}\Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)F_{\eta_j}\frac{\partial f}{\partial\eta_j} + \tag{10.14}$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\left\{\sum_{i=1}^{7}\left(\sum \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_{\eta_i}\frac{\partial f}{\partial\eta_i} + \sum_{j=8}^{13}\left(\sum \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_{\eta_j}\frac{\partial f}{\partial\eta_j}\right\} = 0.$$

Соответствующий (10.14) оператор имеет следующий вид

$$Y = Y_0 + \varepsilon\tilde{Y}, \tag{10.15}$$

где

$$Y_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{7}\left(\sum_{n} \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)F_{\eta_i}\frac{\partial}{\partial\eta_i} + \sum_{j=8}^{13}\left(\sum_{\delta}\Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)F_{\eta_j}\frac{\partial}{\partial\eta_j}, \tag{10.16}$$

$$\tilde{Y} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}\left(\sum \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_{\eta_i}\frac{\partial}{\partial\eta_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=8}^{13}\left(\sum \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 F_{\eta_j}\frac{\partial}{\partial\eta_j}. \tag{10.17}$$

Согласно общей теории введем вместо η новые переменные $\bar{\eta}$ с помощью формул

$$\eta = \exp(-\varepsilon S)\bar{\eta}, \tag{10.18}$$

где

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \ldots \tag{10.19}$$

После замены (10.18) оператор (10.15) принимает следующий вид

$$Y_{\bar{\eta}} = Y_{0\bar{\eta}} + \{Y_{0\bar{\eta}}]S_1 + \tilde{Y}\} + \varepsilon^2\ldots, \tag{10.20}$$

где индекс $\bar{\eta}$ означает, что мы везде перешли к новым переменным $\bar{\eta}$.

Оператор S_1 находим из уравнения (8.12)

$$Y_{0\eta}]S_1 = -\tilde{Y}_\eta + P\tilde{Y}_\eta, \tag{10.21}$$

где $P\tilde{Y}_{\bar{\eta}}$ проекция оператора $\tilde{Y}_{\bar{\eta}}$ на алгебру β:

$$P\tilde{Y}_{\bar{\eta}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}\left(\sum_{n} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_i}\frac{\partial}{\partial\eta_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=8}^{13}\left(\sum_{\delta}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\eta_j}\frac{\partial}{\partial\eta_j}. \tag{10.22}$$

Для правой части уравнения (10.21) получаем выражение

$$-\tilde{Y}_{\bar{\eta}}+P\tilde{Y}_{\bar{\eta}} = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}\left[\left(\sum_{n}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_i}-\left(\sum\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_i}\right]\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_i}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{j=8}^{13}\left[\left(\sum_{\delta}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_j}-\left(\sum\Delta\eta\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_j}\right]\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_j}. \tag{10.23}$$

Оператор S_1 разыскиваем в виде

$$S_1 = \sum_{\chi}^{13}\gamma_\chi Z_\chi, \tag{10.24}$$

где $Z_\chi(\chi = 1, \ldots, 13)$ базисные операторы

$$Z_\chi = \frac{\partial}{\partial\eta_\chi} \qquad (\chi = 1, \ldots, 13). \tag{10.25}$$

Подставляя (10.25), (10.24) и (10.23) в уравнение после ряда преобразований находим систему уравнений для определения функций $\gamma_1, \ldots, \gamma_{13}$:

$$\begin{aligned} Y\gamma_1 &= \sum_{\chi=1}^{7}\gamma_\chi Z_\chi\left(\sum_{n}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)F_{\bar{\eta}_1}+\left(\sum\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y\gamma_7 &= \sum_{\chi=1}^{7}\gamma_\chi Z_\chi\left(\sum_{n}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)F_{\bar{\eta}_1}+\left(\sum\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_7}; \end{aligned} \tag{10.26}$$

$$\begin{aligned} Y\gamma_8 &= \sum_{\chi=8}^{13}\gamma_\chi Z_\chi\left(\sum_{\delta}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)F_{\bar{\eta}_8}+\left(\sum\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_8},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y\gamma_{13} &= \sum_{\chi=8}^{13}\gamma_\chi Z_\chi\left(\sum_{\delta}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)F_{\bar{\eta}_{13}}+\left(\sum\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_{13}}. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Система уравнений (10.26) содержит только неизвестные переменные $\gamma_1, \ldots, \gamma_7$, а система (10.27) — переменные $\gamma_8, \ldots, \gamma_{13}$.

Интегрирование системы (10.27) эквивалентно решению уравнения

$$Yf = \left\{\sum_{\varkappa=1}^{7} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{n} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_1} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_1}\right\}\frac{\partial f}{\partial\gamma_1} + \ldots$$
$$\ldots + \left\{\sum_{\varkappa=1}^{7} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{n} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_7} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_7}\right\}\frac{\partial f}{\partial\gamma_7} +$$
$$+ \left\{\sum_{\varkappa=8}^{13} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{\delta} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_8} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_8}\right\}\frac{\partial f}{\partial\gamma_8} + \ldots$$
$$\ldots + \left\{\sum_{\varkappa=8}^{13} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{\delta} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_{13}} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_{13}}\right\}\frac{\partial f}{\partial\gamma_{13}}. \tag{10.28}$$

В свою очередь интегрирование этого уравнения эквивалентно интегрированию следующих систем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\bar{\eta}_i}{dt} &= \left(\sum_{n} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_i} \qquad (i = 1, \ldots, 7), \\ \frac{d\Delta\bar{\eta}_j}{dt} &= \left(\sum_{\delta} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_j} \qquad (j = 8, \ldots, 13), \end{aligned} \tag{10.29}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \sum_{\varkappa=1}^{7} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{n} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_1} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\gamma_7}{dt} &= \sum_{\varkappa=1}^{7} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{n} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_7} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_7}; \end{aligned} \tag{10.30}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_8}{dt} &= \sum_{\varkappa=8}^{13} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{\delta} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_8} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_8}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\gamma_{13}}{dt} &= \sum_{\varkappa=8}^{13} \gamma_\varkappa Z_\varkappa \left(\sum_{\delta} \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right) F_{\bar{\eta}_{13}} + \left(\sum \Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_{13}}. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Таким образом, для определения $\gamma_1, \ldots, \gamma_{13}$ мы получили систему, состоящую из трех, интегрируемых независимо друг от друга, систем.

Система (10.29) это система нулевого приближения, о которой мы уже говорили выше. Она расщепляется на две независимые друг от друга системы. Найдя решение системы (10.29) и подставив его в системы (10.30) и (10.31), мы получаем две системы обыкновенных дифференциальных уравнений (неоднородных) с переменными коэффициентами, интегрируемые независимо. Проинтегрировав эти системы, мы тем самым найдем выражение для оператора S_1 и преобразование (10.18) (с точностью до величин порядка ε включительно) имеет вид:

$$\eta_i = \left(1-\varepsilon\sum_{\varkappa=1}^{13}\gamma_\varkappa\frac{\partial}{\partial\eta_\varkappa}\right)\bar{\eta}_i \qquad (i=1,\ldots,13). \tag{10.32}$$

После этого исходная система (10.13) расщепляется на две независимо интегрируемые системы (с точностью до величин порядка ε включительно) и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\bar{\eta}_i}{dt} &= \left(\sum_{n}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)+\varepsilon\left(\sum_{n}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_i} \qquad (i=1,\ldots,7),\\ \frac{d\Delta\bar{\eta}_j}{dt} &= \left(\sum_{\delta}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)F_{\bar{\eta}_j}+\varepsilon\left(\sum_{\delta}\Delta\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right)^2 F_{\bar{\eta}_j} \qquad (j=8,\ldots,13). \end{aligned} \tag{10.33}$$

11. Пример. Гиперболическая система нелинейных уравнений

Рассмотрим еще один конкретный пример: гиперболическую систему нелинейных уравнений с частными производными. Среди этих систем наиболее изученными являются системы квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Как известно ([22]), такие системы описывают неустановившиеся одномерные и сверхзвуковые двумерные установившиеся течения сжимаемых газов и жидкостей.

Остановимся на рассмотрении уравнений описывающих изоэнтропическое течение политропного газа ([22]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t}+(\alpha s+\beta r)\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\nu(\gamma-1)(r^2-s^2)}{4x},\\ \frac{\partial r}{\partial t}+(\alpha r+\beta s)\frac{\partial r}{\partial x} &= -\frac{\nu(\gamma-1)(r^2-s^2)}{4x}, \end{aligned} \tag{11.1}$$

где введены следующие обозначения:

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\gamma-1}{4}>\frac{1}{2}>0, \qquad \beta=\frac{1}{2}-\frac{\gamma-1}{4}, \tag{11.2}$$

переменные r, s — инварианты Римана

$$\begin{aligned} s &= u-\varphi(\varrho) = u-\frac{2}{\gamma-1}c,\\ r &= u+\varphi(\varrho) = u+\frac{2}{\gamma-1}c, \end{aligned} \tag{11.3}$$

выраженные через параметры движения: u — скорость течения, ϱ — плотность, величина $c = c(\varrho, S_0)$ — носит название скорости звука, S — энтропия,

$$\varphi(\varrho) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{c_0}{\varrho} d\varrho = c_0 \ln \frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{11.4}$$

$\gamma = c_p/c_v > 1$ — показатель в формуле, характеризующей давление политропного газа

$$p = \frac{A^2(S)}{\gamma} \varrho^{\gamma}, \tag{11.5}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = A^2(S)\varrho^{\gamma-1} = c^2, \qquad \text{где} \quad c(\varrho, S) = A(S)\varrho^{(\gamma-1)/2}, \tag{11.6}$$

c_p и c_v — коэффициенты, характеризующие уравнения состояния идеального газа.

Параметр ν характеризует плоскую симметрию течения газа. Полагая в уравнениях (6.1) $\nu = 0$, мы получаем плоско-симметричные уравнения движения

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial r}{\partial x} = 0. \tag{11.7}$$

Если, кроме того, показатель в формуле (11.5), характеризующей давление политропного газа, $\gamma = 3$, то уравнения разделяются на два независимых квазилинейных уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} + r\frac{\partial r}{\partial x} = 0. \tag{11.8}$$

Рассмотрим уравнения движения, близкие к уравнениям (11.8) — плоско-симметричным и разделенным (подробно это рассмотрение проведено А. К. Лопатиным). Для этого положим

$$\nu = \varepsilon, \qquad \gamma = 3 + \varepsilon\Delta\gamma, \qquad 0 < \varepsilon < 1. \tag{11.9}$$

Подставляя значения ν и γ согласно формулам (11.9) в уравнения (11.1) получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial s}{\partial x} &= \varepsilon F_1(x, r, s), \\ \frac{\partial r}{\partial t} + r\frac{\partial r}{\partial x} &= \varepsilon F_2(x, r, s), \end{aligned} \tag{11.10}$$

где обозначено

$$
(11.11)\qquad
\begin{aligned}
F_1(x, r, s) &= \frac{r^2-s^2}{2x} - \frac{\Delta\gamma}{4}(s-r)\frac{\partial s}{\partial x} + \varepsilon\Delta\gamma\frac{r^2-s^2}{4x},\\
F_2(x, r, s) &= -\frac{r^2-s^2}{2x} - \frac{\Delta\gamma}{4}(r-s)\frac{\partial r}{\partial x} - \varepsilon\Delta\gamma\frac{r^2-s^2}{4x}.
\end{aligned}
$$

Система (11.10) представляет собой возмущенную систему, которая в нулевом приближении (при $\varepsilon = 0$) распадается на две независимые системы (11.8).

Для удобства введем в дальнейшем следующие обозначения: $t = x_1$, $x = x_2$, $s = z_1$, $r = z_2$,

$$
(11.12)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = u_1,\\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = u_2.
\end{aligned}
$$

Тогда в новых переменных система (11.10) запишется следующим образом

$$
(11.13)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial z_1}{\partial x_1} &= -u_1z_1+\varepsilon F_1, & \frac{\partial z_2}{\partial x_1} &= -u_2z_2+\varepsilon F_2,\\
\frac{\partial z_1}{\partial x_2} &= u_1, & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} &= u_2.
\end{aligned}
$$

Систему уравнений (11.13) можно заменить следующей системой в полных дифференциалах

$$
(11.14)\qquad
\begin{aligned}
dz_1 &= (-u_1z_1+\varepsilon F_1)dx_1+u_1dx_2,\\
dz_2 &= (-u_2z_2+\varepsilon F_2)dx_1+u_2dx_2.
\end{aligned}
$$

Как известно, уравнения (11.14) в свою очередь вполне определяются линейными операторами

$$
(11.15)\qquad
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + (-u_1z_1+\varepsilon F_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (-u_2z_2+\varepsilon F_2)\frac{\partial}{\partial z_2},\\
Y_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + u_1\frac{\partial}{\partial z_1} + u_2\frac{\partial}{\partial z_2},
\end{aligned}
$$

которые можно записать в виде

$$
(11.16)\qquad Y_1 = Y_{10}+\varepsilon\tilde{Y}_1, \qquad Y_2 = Y_{20},
$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
Y_{10} &= \frac{\partial}{\partial x_1} - u_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - u_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\
Y_{20} &= \frac{\partial}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \qquad (11.17)\\
\bar{Y}_1 &= F_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.
\end{aligned}
$$

Поставим перед собой задачу расщепления системы операторов (11.16). Для сокращения записи введем обозначения

$$(11.18) \qquad \eta_1 = x_1, \ \eta_2 = x_2, \ \eta_3 = z_1, \ \eta_4 = z_2, \ \eta_5 = u_1, \ \eta_6 = u_2.$$

В соответствии с общей теорией, изложенной нами ранее в операторах (11.16) сделаем замену переменных согласно формулам

$$(11.19) \qquad \eta = \exp(-\varepsilon S)\bar{\eta},$$

где

$$(11.20) \qquad S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \ldots,$$

$$(11.21) \qquad S_i = \sum_{j=1}^{6} S_{ij}(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$S_{ij}(\eta)$ — неопределенные пока функции.

После преобразования (11.19) операторы (11.16) принимают следующий вид

$$
(11.22) \qquad
\begin{aligned}
\bar{Y}_1 &= \bar{Y}_{10} + \varepsilon(\bar{Y}_{10}]S_1 + \bar{\bar{Y}}_1) + \varepsilon^2 \ldots, \\
\bar{Y}_2 &= \bar{Y}_{20} + \varepsilon(\bar{Y}_{20}]S_1) + \varepsilon^2 \ldots,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\bar{Y}_{10} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} - \bar{u}_1 \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \bar{u}_2 \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}, \\
\bar{Y}_{20} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}, \\
\bar{\bar{Y}}_1 &= \bar{F}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \bar{F}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}, \qquad (11.23)\\
\bar{F}_1 &= \frac{\bar{z}_2^2 - \bar{z}_1^2}{2\bar{x}_2} - \frac{\Delta\gamma}{4}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\bar{u}_1, \\
\bar{F}_2 &= -\frac{\bar{z}_2^2 - \bar{z}_1^2}{2\bar{x}_2} - \frac{\Delta\gamma}{4}(\bar{z}_{.} - \bar{z}_1)\bar{u}_2.
\end{aligned}
$$

Обозначая, как и ранее, через P проектор на алгебру β нулевого приближения, имеем

$$(11.24)\quad P\bar{\bar{Y}}_1 = -\left(\frac{\bar{z}_1^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_1\bar{u}_1\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \left(\frac{\bar{z}_2^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_2\bar{u}_2\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}.$$

Для асимптотического расщепления операторов (11.22) в первом приближении необходимо решить систему уравнений

$$(11.25)\qquad \bar{Y}_{10}]S_1 = -\bar{\bar{Y}}_1 + P\bar{\bar{Y}}_1, \qquad \bar{Y}_{20}]S_1 = 0,$$

где

$$(11.26)\qquad -\bar{\bar{Y}}_1 + P\bar{\bar{Y}}_1 = -\left(\frac{\bar{z}_2^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_2\bar{u}_1\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \left(\frac{\bar{z}_1^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_1\bar{u}_2\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}.$$

Далее мы выбираем следующую систему базисных операторов

$$X_{11} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1},\quad X_{21} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2},\quad X_{31} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1},\quad X_{41} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2},\quad X_{51} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1},$$

$$(11.27)\qquad X_{61} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_2},$$

$$X_{12} = \varphi\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1},\quad X_{22} = \varphi\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2},\quad X_{32} = \varphi\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1},\quad X_{42} = \varphi\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2},\quad X_{52} = \varphi\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1},$$

$$X_{62} = \varphi\frac{\partial}{\partial \bar{u}_2}.$$

где

$$\varphi = \frac{\ln \bar{z}_2}{\bar{u}_2}.$$

Оператор S_1 будем разыскивать в виде суммы

$$(11.28)\qquad S_1 = \sum_{\sigma=1}^{6}\gamma_{\sigma 1}X_{\sigma 1} + \sum_{\sigma=1}^{6}\gamma_{\sigma 2}X_{\sigma 2}.$$

Подставляя (11.26), (11.27) и (11.28) в систему уравнений (11.25) получим

$$(11.29)\qquad \bar{Y}_{i0}]\left(\sum_{\sigma=1}^{6}\gamma_{\sigma 1}X_{\sigma 1} + \sum_{\sigma=1}^{6}\gamma_{\sigma 2}X_{\sigma 2}\right) = \sum_{\sigma=1}^{6}a_{\sigma i}X_{\sigma i}, \qquad (i = 1, 2),$$

где

$$a_{11} = 0, \qquad a_{21} = 0, \qquad a_{31} = -\left(\frac{\bar{z}_2^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_2\bar{u}_2\right),$$

$$a_{41} = -\left(\frac{\bar{z}_1^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_1\bar{u}_2\right), \qquad a_{51} = 0, \qquad a_{61} = 0,$$

$$a_{\sigma 2} = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, 6).$$

Система (11.29) после ряда выкладок сводится к обобщенной системе Якоби, после чего, воспользовавшись теорией Э. Картана, можно доказать ее разрешимость. Найдя ее решение

$$\gamma_{\sigma i} = \gamma_{\sigma i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \qquad (\sigma, i = 1, 2), \tag{11.30}$$

мы тем самым получаем явное выражение для замены (11.19) с точностью до величин порядка ε включительно

$$\eta = \left[1 - \varepsilon \sum_{\sigma=1}^{6} (\gamma_{\sigma 1}(\bar{\eta}) X_{\sigma 1} + \gamma_{\sigma 2}(\bar{\eta}) X_{\sigma 2}\right] \bar{\eta}, \tag{11.31}$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_6)$ обозначают переменные (11.18). После этого операторы (11.22) с точностью до величин порядка ε включительно принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} - \left[\bar{u}_1\bar{z}_1 + \varepsilon\left(\frac{\bar{z}_1^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_1\bar{u}_1\right)\right]\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \\ &\quad - \left[\bar{u}_2\bar{z}_2 + \varepsilon\left(\frac{\bar{z}_2^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_2\bar{u}_2\right)\right]\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}, \\ \bar{Y}_2 &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + \bar{u}_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \bar{u}_2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}. \end{aligned} \tag{11.32}$$

Соответствующая (11.14) преобразованная система в полных дифференциалах (с точностью до величин порядка ε) будет

$$\begin{aligned} d\bar{z}_1 &= \left[-\bar{u}_1\bar{z}_1 - \varepsilon\left(\frac{\bar{z}_1^2}{2\bar{x}_{\cdot}} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_1\bar{u}_1\right)\right] d\bar{x}_1 + \bar{u}_1 d\bar{x}_2, \\ d\bar{z}_2 &= \left[-\bar{u}_2\bar{z}_2 - \varepsilon\left(\frac{\bar{z}_2^2}{2\bar{x}_2} + \frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_2\bar{u}_2\right)\right] d\bar{x}_1 + \bar{u}_2 d\bar{x}_2. \end{aligned} \tag{11.33}$$

Согласно уравнениям (11.33) видно, что исходная система в полных дифференциалах расщепилась в первом приближении на два независимых друг от друга уравнения в полных дифференциалах.

В заключение приведем расщепленную систему в первом приближении, соответствующую системе уравнений в частных производных (6.10):

$$(11.34)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\bar{z}_1}{\partial\bar{x}_1}+\bar{z}_1\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial\bar{x}_2} &= -\varepsilon\left(\frac{\bar{z}_1^2}{2\bar{x}_2}+\frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_1\frac{\partial\bar{z}_1}{\partial\bar{x}_2}\right),\\ \frac{\partial\bar{z}_2}{\partial\bar{x}_1}+\bar{z}_2\frac{\partial z_2}{\partial x_2} &= -\varepsilon\left(\frac{\bar{z}_2^2}{2\bar{x}_2}+\frac{\Delta\gamma}{4}\bar{z}_2\frac{\partial\bar{z}_2}{\partial\bar{x}_2}\right). \end{aligned}$$

Заканчивая, я хочу подчеркнуть, что моей целью являлось обратить внимание на еще далеко не в полной мере раскрытые возможности групповой классификации дифференциальных уравнений (на основании общей теории локальных групп Ли, теории инвариантов и инвариантных многообразий), содержащих малый параметр, и проиллюстрировать это на конкретных примерах. Я не ставил своей задачей изложение важных и тонких моментов общей теории групп Ли преобразований и алгебр Ли операторов, которые лежат на стыке алгебры и математического анализа. Подробному анализу этой теории и применению ее к групповой классификации дифференциальных уравнений посвящена специальная литература, например, фундаментальная монография Л. В. Овсянникова [19].

12. Метод ускоренной сходимости(¹)

Остановимся еще на одном методе, позволяющем во многих случаях эффективно и качественно исследовать нелинейную систему, содержащую малый параметр, в частности, решить задачу о построении общего решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности квазипериодического решения, задачу о приводимости системы с квазипериодическими коэффициентами и ряд других важных для механики задач.

Рассмотрение этого метода уместно, так как он тесно связан с идеями усреднения в интерпретации Н. Н. Боголюбова.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$(12.1)\qquad \frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

где, как и выше, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства E_n; t — время; ε — малый положительный параметр.

(¹) Этот метод хорошо изложен в монографии [6], изложения которой мы придерживаемся.

Произведя в уравнении (12.1) замену переменных согласно формулам

$$x = \xi + \varepsilon F^{(1)}(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^m F^{(m)}(t, \xi), \tag{12.2}$$

при соответствующем подборе функций $F^{(1)}(t, \xi), \ldots, F^{(m)}(t, \xi)$, как это было нами указано ранее, получаем уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathscr{P}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 \mathscr{P}^{(2)}(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathscr{P}^{(m)}(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi, \varepsilon), \tag{12.3}$$

состоящее из „интегрируемой" части и возмущения $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi, \varepsilon)$, являющегося величиной порядка ε^{m+1}. При этом если, переменная ξ удовлетворяет уравнению (12.3), то выражение (12.2) представляет собой точное решение уравнения (12.1). Отбрасывая в правой части уравнения (12.3) последнее слагаемое, мы получаем, как это уже указывалось в начале наших лекций, усредненное уравнение m-го приближения. При этом заметим, что функции

$$F^{(1)}(t, \xi), \ldots, F^{(m)}(t, \xi) \quad \text{и} \quad \mathscr{P}^{(1)}(\xi), \ldots, \mathscr{P}^{(m)}(\xi)$$

определяются, исходя из известных выражений для $X(t, \xi)$, так, чтобы ряды (12.2) удовлетворяли уравнениям (12.1) с точностью до величин порядка ε^{m+1}.

Естественно возникает вопрос о дальнейшем развитии этого метода. Устремим в выражениях (12.2) m к бесконечности. Если ряды (12.2) окажутся сходящимися, то в этом случае система (12.1) сведется к „интегрируемой" системе

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathscr{P}(\xi, \varepsilon). \tag{12.4}$$

Однако, это совершить невозможно для большинства практических задач — для случаев, когда $X(t, x)$ являются периодическими или тем более квазипериодическими функциями по t. В этих случаях в формулах (12.2) появляются, как правило, малые делители, и ряды (12.2) расходятся.

Поэтому идея сведения „неинтегрируемой" системы (12.1) к „интегрируемой" (12.4) долгое время оставалась нерешенной и только в последнее время Н. Н. Боголюбову [4] удалось, на основании работ А. Н. Колмогорова [9], [10] и В. И. Арнольда [1], [2], разработать новый вариант метода последовательных замен переменных, развивающий и обобщающий метод последовательных замен, предложенный еще в 1934 году Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [11] и являвшийся частным случаем метода усреднения по Н. Н. Боголюбову.

Существенным элементом нового варианта последовательных замен, предложенного Н. Н. Боголюбовым [4] является идея последовательных замен А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда, обеспечивающая ускоренную сходимость.

Для уяснения этого вопроса рассмотрим консервативную динамическую систему, определяемую каноническими уравнениями

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\
&\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad (p = p_1, \ldots, p_n;\ q = q_1, \ldots, q_n)
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

с аналитической функцией Гамильтона $H(p, q, \varepsilon)$ периодической по q с периодом 2π. Предположим, что система (12.5) отличается от интегрируемой малым возмущением, т. е. гамильтониан ее представляется в виде

$$
H(p, q, \varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) + \ldots \tag{12.6}
$$

Подставляя выражение (12.6) в уравнения (12.5), получаем систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt} = -\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial q} + \ldots, \\
&\frac{dq}{dt} = \omega(p) + \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial q} + \ldots \qquad \left(\omega(p) = \frac{\partial H_0}{\partial p}\right).
\end{aligned}
\tag{12.7}
$$

Произведем теперь в системе (12.7) каноническое преобразование

$$
\begin{aligned}
p &= p' + \varepsilon\frac{\partial S(p', q)}{\partial q}, \\
q' &= q + \varepsilon\frac{\partial S(p', q)}{\partial p'},
\end{aligned}
\tag{12.8}
$$

приводящее гамильтониан $H(p, q, \varepsilon)$ к виду

$$
H(p, q, \varepsilon) = H_0'(p', \varepsilon) + \varepsilon^2 H_1'(p', q') + \ldots, \tag{12.9}
$$

а уравнение (12.7) к системе

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp'}{dt} = -\varepsilon^2\frac{\partial H_1'}{\partial q'} + \ldots, \\
&\frac{dq'}{dt} = \omega'(p') + \varepsilon^2\frac{\partial H_1'}{\partial p'} + \ldots \qquad \left(\omega'(p') = \frac{\partial H_0(p', 0)}{\partial p'}\right).
\end{aligned}
\tag{12.10}
$$

Совершив теперь в системе (12.10) преобразование того же типа, что и замена (12.8), приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp''}{dt} = -\varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial q''} + \ldots, \\
(12.11) \qquad & \\
&\frac{dq''}{dt} = \omega''(p'') + \varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial p''} + \ldots
\end{aligned}
$$

и т. д., при этом порядки малости „неинтегрируемых" добавок в правых частях получаемых уравнений будут соответственно пропорциональны $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \ldots, \varepsilon^{2s}$.

Приведенный здесь процесс последовательных преобразований содержит существенно новый элемент исследования, заключающийся в том, что для получения аппроксимационного процесса мы не улучшаем преобразование (12.8), дополняя его членами высшего порядка малости, как это было сделано Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [11] в 1934 году, а совершаем повторное применение такого же преобразования.

Возникающая здесь „ускоренная сходимость" процесса характерна для ньютоновского метода касательных. И эта „ускоренная сходимость", при соответствующем подборе параметров, подавляет влияние малых знаменателей, появляющихся в формулах замены переменных (12.8). Как известно ([6]), с помощью приведенной идеи „ускоренной" сходимости Н. Н. Боголюбовым было доказано существование квазипериодического решения для системы .

$$
(12.12) \qquad \frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \varphi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega.
$$

Эта теорема нам в дальнейшем понадобится, поэтому приведем здесь ее формулировку (без доказательства), а также некоторые вспомогательные определения.

Будем в дальнейшем рассматривать следующую норму

$$
(12.13) \qquad \|h\| = \sup_{\substack{k=1,\ldots,n \\ 0\leqslant t<\infty}} |e^{Ht} h_k| e^{\alpha t},
$$

где H — матрица, рассматриваемая в системе (12.12) и удовлетворяющая условию

$$
(12.14) \qquad |e^{Ht}| \leqslant P e^{-\alpha t}
$$

для $t \geqslant 0, \alpha > 0, P = \mathrm{const} > 1$.

Очевидно, что норма (12.13) удовлетворяет неравенству

$$|h| \leqslant \|h\| < P|h|. \tag{12.15}$$

Имеет место следующая теорема Н. Н. Боголюбова [6].

Теорема 1. *Пусть относительно системы уравнений* (12.12) *выполняются следующие условия:*

1) *Функции* $F(h, \varphi)$ *в области*

$$\|h\| \leqslant \eta, \qquad |\mathrm{Im}\varphi| \leqslant \varrho \tag{12.16}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\|F(h, \varphi)\| \leqslant N, \qquad n\left\|\frac{\partial F(h, \varphi)}{\partial h_q}\right\| \leqslant L, \tag{12.17}$$

где η, ϱ, N, L — *некоторые постоянные, для которых*

$$\frac{N}{a} \leqslant \eta, \qquad L \leqslant \frac{a}{2}. \tag{12.18}$$

2) *Все собственные значения матрицы* H *имеют отрицательные, вещественные части и, следовательно, имеет место неравенство*

$$|e^{Ht}| \leqslant Pe^{-at}, \tag{12.19}$$

где $P = \mathrm{const} \geqslant 1, t \geqslant 0, a > 0$.

Тогда система уравнений (12.12) *допускает существование единственного интегрального многообразия*

$$h = S(\varphi), \tag{12.20}$$

где $S(\varphi)$ — *периодическая по* φ *периода* 2π *функция, удовлетворяющая неравенству*

$$\|S(\varphi)\| \leqslant \frac{N}{a} \quad \text{для} \quad |\mathrm{Im}\varphi| \leqslant \varrho. \tag{12.21}$$

Если для любого решения, не лежащего на многообразии, при $t = t_0$ *начальные значения* h_0, φ_0 *удовлетворяют условиям*

$$\|h_0\| \leqslant \eta, \qquad |\mathrm{Im}\varphi_0| \leqslant \varrho,$$

то для любых $t \geqslant t_0$ *выполняется неравенство*

$$\|h_t - S(\varphi_t)\| \leqslant 2\eta e^{-at/2}, \qquad t \geqslant 0 \tag{12.22}$$

при этом

$$|h_t| \leqslant \eta, \qquad t \geqslant 0.$$

Рассматривая более общую систему уравнений, чем система (12.12) и вводя в ней для удобства доказательства поправку на частоту, Н. Н. Боголюбовым доказано существование квазипериодического решения для системы

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi, \Delta), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta). \end{aligned} \tag{12.23}$$

Высказанное утверждение сводится к следующей теореме ([6]).

Теорема 2 (Н. Н. Боголюбова). *Если в уравнениях* (12.23) *функции* $F(h, \varphi, \Delta)$ *и* $f(h, \varphi, \Delta)$ *удовлетворяют всем необходимым условиям (которые мы здесь не приводим), то эти уравнения при соответствующем выборе* Δ *имеют квазипериодическое решение с частотами* ω *вида*

$$\begin{aligned} h_\tau &= S^{(\infty)}(\theta_0 + \omega t), \\ \varphi_\tau &= \theta_0 + \omega t + \Phi^{(\infty)}\big(S(\theta_0 + \omega t),\, \theta_0 + \omega t,\, 0\big). \end{aligned} \tag{12.24}$$

Если h_t, φ_t — любые решения системы (12.23), начальные значения которых h_0, φ_0 удовлетворяют условиям

$$|h_0| \leqslant \frac{\eta}{2}, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi_0| \leqslant \frac{\varrho}{2}\left(1 - \frac{1}{2m}\right),$$

то h_t и φ_t асимптотически приближаются к этому квазипериодическому решению.

При этом показано, что соответствующей заменой

$$\varphi = \theta + \Phi^{(\infty)}(h, \varphi, 0)$$

при $\Delta = \mathscr{D}^{(\infty)}(0)$ система (12.23) приводится к виду (12.12).

13. Построение общего решения. Постановка задачи

Перейдем теперь к решению основной нашей задачи — построению общего решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности квазипериодического решения.

При решении многих задач нелинейной механики мы приходим к рассмотрению системы дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр,

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \varepsilon). \tag{13.1}$$

В ряде случаев вместо переменных $x = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ удобно вводить новые переменные $h = (h_1, \ldots, h_n)$ и $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ таким образом, чтобы система (13.1) свелась к виду

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \varphi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \nu + f(h, \varphi). \tag{13.2}$$

Как упоминалось выше, при определенных условиях, накладываемых на правые части системы (13.2), для нее можно найти семейство квазипериодических решений

$$h = S^{(\infty)}(\theta + \omega t), \quad \varphi = \theta + \omega t + \Phi^{(\infty)}\big(S(\theta + \omega t), \theta + \omega t, 0\big), \tag{13.3}$$

в окрестности которого система уравнений (13.2) приводится к виду

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \varphi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \tag{13.4}$$

Для упрощения выкладок предположим, что H — постоянная матрица, собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части, $F(h, \varphi) = \big(F_1(h, \varphi), \ldots, F_n(h, \varphi)\big)$ — достаточно малая аналитическая вектор-функция комплексных аргументов $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ в области

$$|h| \leqslant \eta, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho \tag{13.5}$$

периодическая по φ с периодом 2π, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — действительные частоты, удовлетворяющие условию

$$|(k, \omega)| \leqslant K|k|^{-m+1}, \tag{13.6}$$

где, как и ранее, m — размерность пространства ω, $(k, \omega) = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_m\omega_m$, $|k| = |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_m|$, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — любые целые числа.

Введем еще одно упрощение — будем предполагать, что n-мерная квадратная матрица H в системе (13.4) вырождается в вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ и предположим, что все β имеют отрицательные действительные части. Тогда система уравнений (13.4) примет вид

$$\frac{dh}{dt} = \beta h + F(h, \varphi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \tag{13.7}$$

Для построения решений системы (13.7) применим изложенный выше метод последовательных замен. При преобразовании системы (13.7) в ней будут изменяться не только функции $F(h, \varphi)$, но и β, которые в пределе будут стремиться к определенным значениям, обозначаемым нами через $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — „истинным" коэффициентам линейной системы, которую мы получим в результате преобразования, системы (13.7).

Целесообразно находить a не по β и F, а, считая его заданным, определять некоторые поправки $\xi = \beta - a$ ($\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$), как функции a:

(13.8) $$\xi = \xi(a).$$

Вводя эти поправки в уравнения (13.7) получим

(13.9) $$\frac{dh}{dt} = (a+\xi)h + F(h, \varphi, \xi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

где $F(h, \varphi, \xi)$ — аналитическая функция комплексных аргументов h, φ, ξ в области

(13.10) $$|h| \leqslant \eta, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho, \qquad |\xi| \leqslant \sigma.$$

Задача состоит в том, чтобы для системы (13.9) найти такое аналитическое по g и φ преобразование

(13.11) $$h = g + V^{(\infty)}(g, \varphi)$$

и такое $\xi = \Xi^{(\infty)}$, при которых система (13.9) свелась бы к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

(13.12) $$\frac{dg}{dt} = ag, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Тогда, интегрируя систему (13.12), получим общее решение системы 13.9) в виде

(13.13) $$\begin{aligned} h &= Ce^{at} + V^{(\infty)}(Ce^{at}, \omega t + \theta_0), \\ \varphi &= \omega t + \theta_0, \end{aligned}$$

содержащее $n+m$ произвольных постоянных $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $\theta_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \ldots, \theta_{0m})$.

14. Вывод вспомогательных оценок

Для доказательства нашего утверждения о возможности построения преобразования (13.11), приводящего систему (13.9) к виду (13.12), нам потребуется прежде всего установить справедливость некоторых неравенств и доказать ряд промежуточных утверждений.

Прежде всего рассмотрим систему уравнений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \omega\right) + \frac{\partial u}{\partial h}\big(ah + F(h, \varphi, \xi)\big) = au + F^{(1)}(h, \varphi, \xi), \tag{14.1}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ F^{(1)} &= (F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \ldots, F_n^{(1)}), \\ F_{k_0}^{(1)}(h, \varphi, \xi) &= F_{k_0}(h, \varphi, \xi) - \sum_{s=1}^{n} \overline{\frac{\partial F_{k_0}(h, \varphi, \varepsilon)}{\partial h_s}}\Bigg|_{h=0} \cdot h_s \qquad (k_0 = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{14.2}$$

Очевидно, что $F^{(1)}(h, \varphi, \xi)$ не содержат $h = (h_1, \ldots, h_n)$ в первой степени с постоянным коэффициентом.

Докажем для системы (14.1) следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $F(h, \varphi, \xi)$ — аналитическая функция комплексных переменных h, φ, ξ в области*

$$|h| \leqslant \eta, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho, \qquad |\xi| < \sigma, \tag{14.3}$$

для которой в этой области справедливы неравенства

$$|F(h, \varphi, \xi)| \leqslant N, \qquad n\left|\frac{\partial F(h, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right| \leqslant L \qquad (q = 1, 2, \ldots, n), \tag{14.4}$$

где η, ϱ, N, L — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$L \leqslant \tfrac{1}{2}\bar{a}, \qquad N < \bar{a}(\eta - \varkappa), \qquad 0 \leqslant 2\varkappa < \eta, \qquad \bar{a} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} |\mathrm{Re}\, a_k|, \quad \varkappa < 1. \tag{14.5}$$

Кроме того, пусть $a_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ имеют отрицательные и различные вещественные части $|\mathrm{Re}\, a_k| = \bar{a}_k$, для которых выполняются неравенства

$$\sum_{k_0=1}^{n} l_k \bar{a}_k - \bar{a}_q \geqslant \gamma > 0 \tag{14.6}$$

для любого $q = 1, 2, \ldots, n$ и всех целых неотрицательных $l_1, \ldots, l_n$, для которых $l_1 + \ldots + l_n \geqslant 2$.

При этих условиях система (14.1) имеет периодическое по φ периода 2π решение

$$u(h, \varphi, \xi) = \sum_{k} \frac{F_k^{(1)}(\xi) e^{i(k,\varphi)}}{i(k, \omega) - a} + \int_{-\infty}^{0} e^{-at}\big[F^{(1)}(h_\tau, \varphi_\tau, \xi) - F^{(1)}\big(S(\varphi_\tau), \varphi_\tau, \xi\big)\big]\, d\tau, \tag{14.7}$$

где $\varphi_\tau = \varphi - \omega\tau$, h_τ — *решение уравнения*

(14.8) $$\frac{dh}{d\tau} = ah + F(h, \varphi_\tau, \xi)$$

при начальном условии $h_\tau|_{\tau=0} = h$; $S(\varphi)$ — *инвариантное многообразие системы уравнений* (13.7);

(14.9) $$F_k^{(1)}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} F^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big)e^{-i(k,\varphi)}d\varphi_1\ldots d\varphi_m.$$

Это решение (14.7) *аналитическое в области*

(14.10) $$|h| \leqslant \eta - 2\varkappa, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho - 2\varkappa, \qquad |\xi| \leqslant \sigma$$

и удовлетворяет неравенствам

(14.11) $$|u(h, \varphi, \xi)| \leqslant N\left\{\frac{8\eta n}{3\bar{a}\varkappa} + \frac{(\varkappa+\eta)(\bar{a}+e)^m}{\bar{a}\varkappa^{m+1}}\right\},$$
$$\sum\left|\frac{\partial u(h, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{8Nn^2\eta}{3\bar{a}\varkappa^2}.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что выражение (14.7) удовлетворяет уравнению (14.1).

Для этого представим функцию $F^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big)$ в виде ряда

(14.12) $$F^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big) = \sum_k F_k^{(1)}(\xi)e^{i(k,\varphi)}.$$

Обозначим

(14.13) $$\bar{F}^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big) = \sum_k \frac{F_k^{(1)}(\xi)e^{i(k,\varphi)}}{i(k, \omega) - a}.$$

Тогда имеем

(14.14) $$\frac{d\bar{F}^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big)}{dt} - a\bar{F}^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big) = F^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big).$$

Решение (14.7) представим в виде суммы

(14.15) $$u(h, \varphi, \xi) = u^{(1)}(\varphi, \xi) + u^{(2)}(h, \varphi, \xi).$$

Тогда согласно (14.7) и (14.3) имеем

(14.16) $$u^{(1)}(\varphi, \xi) = \bar{F}^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big),$$

(14.17) $$u^{(2)}(h, \varphi, \xi) = \int_{-\infty}^{0} e^{-a\tau}\big[F^{(1)}(h_\tau, \varphi_\tau, \xi) - F^{(1)}\big(S(\varphi_\tau), \varphi_\tau, \xi\big)\big]d\tau.$$

Дифференцируя выражение для $u^{(1)}(\varphi, \xi)$ (14.16) и принимая во внимание (14.14), убеждаемся, что

$$\text{(14.18)}\qquad \begin{gathered} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial h} = 0, \\ \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \varphi}, \omega\right) = \frac{du^{(1)}}{dt} = au^{(1)} + F^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big). \end{gathered}$$

Поэтому остается показать, что функция $u^{(2)}(h, \varphi, \xi)$, определяемая выражением (14.17), тождественно удовлетворяет уравнению

$$\text{(14.19)}\qquad \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \varphi}, \omega\right) + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial h}\big(ah + F(h, \varphi, \xi)\big) = \\ = au^{(2)} + F^{(1)}(h, \varphi, \xi) - F^{(1)}\big(S(\varphi), \varphi, \xi\big).$$

Для этого возьмем $\varphi_t = \varphi + \omega t$ и h_t как решения уравнения

$$\frac{dh_t}{dt} = ah_t + F(h_t, \varphi_t, \xi)$$

при начальном условии $t = 0, h_t = h$. Произведя в уравнении (14.19) замену $h = h_t, \varphi = \varphi_t$ приведем его к виду

$$\text{(14.20)}\qquad \frac{du^{(2)}(h_t, \varphi_t, \xi)}{dt} = au^{(2)}(h_t, \varphi_t, \xi) + F^{(1)}(h_t, \varphi_t, \xi) - F^{(1)}\big(S(\varphi_t), \varphi_t, \xi\big).$$

С другой стороны, подставляя в выражение (14.17) вместо h и φ h_t и φ_t, получим

$$\text{(14.21)}\qquad u^{(2)}(h_t, \varphi_t, \xi) = \\ = \int_{-\infty}^{0} e^{-a\tau}\big[F^{(1)}(h_{t+\tau}, \varphi_{t+\tau}, \xi) - F^{(1)}\big(S(\varphi_{t+\tau}), \varphi_{t+\tau}, \xi\big)\big]d\tau.$$

Положим теперь под знаком интеграла $t+\tau = z$, получим

$$\text{(14.22)}\qquad u^{(2)}(h_t, \varphi_t, \xi) = \int_{-\infty}^{t} e^{a(t-z)}\big[F^{(1)}(h_z, \varphi_z, \xi) - F^{(1)}\big(S(\varphi_z), \varphi_z, \xi\big)\big]dz.$$

Очевидно, что выражение (14.22) удовлетворяет уравнению (14.20) и, следовательно, (20.17) удовлетворяет уравнению (14.19). Таким образом, выражение (14.15), в котором $u^{(1)}(\varphi, \xi)$ определяется выражением (14.16), а $u^{(2)}(h, \varphi, \xi)$ выражением (14.17), удовлетворяет уравнению (14.1).

Приступим теперь к установлению оценок (14.11).

Рассмотрим область

$$\text{(14.23)}\qquad |h| \leqslant \eta - \varkappa, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho, \qquad |\xi| \leqslant \sigma.$$

В этой области согласно неравенствам (14.5)

$$|h_t| \leqslant \eta - \varkappa, \qquad |S(\varphi_t)| \leqslant \eta - \varkappa. \tag{14.24}$$

Напомним теперь известное положение теории аналитических функций.

Пусть $f(h)$ — аналитическая функция h в области $\sum_{\eta}(|h| \leqslant \eta)$, в которой

$$f(h) \leqslant N \qquad \text{для} \qquad |h| \leqslant \eta,$$

тогда, рассматривая для нее интеграл Коши

$$f(h) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - h},$$

нетрудно показать, что

$$\left|\frac{\partial f(h)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{N}{\eta - \eta_1} \qquad \text{для} \quad |h| \leqslant \eta_1 < \eta. \tag{14.25}$$

Поэтому, принимая во внимание неравенства (14.4) и (14.25), для функции $F^{(1)}(h, \varphi, \xi)$ в области (14.23) получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial F^{(1)}(h, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right| \leqslant \left|\frac{\partial F(h, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right| + \left|\left.\frac{\partial F(h, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right|_{h=0}\right| \leqslant \leqslant \frac{N}{\varkappa} + \frac{N}{\varkappa} = \frac{2N}{\varkappa}, \tag{14.26}$$

согласно которому можем написать

$$\left|F^{(1)}(h_\tau, \varphi_\tau, \xi) - F^{(1)}\left(S(\varphi_\tau), \varphi_\tau, \xi\right)\right| \leqslant \frac{2N\cdot n}{\varkappa}\,|h_\tau - S(\varphi_\tau)| \tag{14.27}$$

или, учитывая неравенство (12.22),

$$\left|F^{(1)}(h_\tau, \varphi_\tau, \xi) - F\left(S(\varphi_\tau), \varphi_\tau, \xi\right)\right| \leqslant \frac{4Nn\eta}{\varkappa} e^{-\bar{a}t/2}, \qquad t \geqslant 0. \tag{14.28}$$

Таким образом, в области (14.23) для $u^{(2)}(h, \varphi, \xi)$ получаем оценку

$$|u^{(2)}(h, \varphi, \xi)| \leqslant \frac{4Nn\eta}{\varkappa}\int_{-\infty}^{0} e^{-a\tau}\cdot e^{-\bar{a}\tau/2}d\tau \leqslant \frac{8Nn\eta}{3\bar{a}\varkappa}, \tag{14.29}$$

а в более узкой области (14.10)

$$\left|\frac{\partial u^{(2)}(h, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{8Nn\eta}{3\bar{a}\varkappa^2}. \tag{14.30}$$

Найдем теперь оценку для $u^{(1)}(\varphi, \xi)$. Согласно обозначениям (14.16) и (14.13) в области $|\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho - 2\varkappa$ имеем

$$|u^{(1)}(\varphi, \xi)| = \left| \sum_k \frac{F_k^{(1)}(\xi) e^{i(k,\varphi)}}{i(k, \omega) - a} \right| \leqslant \frac{1}{\bar{a}} \sum_k |F_k^{(1)}(\xi)| e^{(\varrho - 2\varkappa)|k|}, \tag{14.31}$$

где

$$F_k^{(1)}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F^{(1)}\big(S(\theta), \theta, \xi\big) e^{-i(k,\theta)} d\theta_1 \ldots d\theta_m = \tag{14.32}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F^{(1)}\big(S(\theta + i\varphi), \theta + i\varphi, \xi\big) e^{-i(k,\theta)} \cdot e^{(k,\varphi)} d\theta_1 \ldots d\theta_m.$$

В выражении (14.23) положим $\varphi_k = -\varrho \,\mathrm{sign}\, k$, тогда $(k, \varphi) = -\varrho |k|$, и из выражения (14.23) следует

$$|F_k^{(1)}(\xi)| \leqslant N\left(1 + \frac{\eta}{\varkappa}\right) e^{-\varrho|k|}. \tag{14.33}$$

Далее имеем

$$\sum_k e^{-\varrho|k|} = \left(1 + 2 \sum_{1 \leqslant q < \infty} e^{-q\varrho}\right)^m = \frac{(1 + e^{-\varrho})^m}{(1 - e^{-\varrho})^m},$$

но $1 - e^{-\varrho} > \varrho e^{-\varrho}$, а, следовательно,

$$\frac{1 + e^{-\varrho}}{1 - e^{-\varrho}} \leqslant \frac{1}{\varrho}(1 + e^{\varrho}) < \frac{1 + e}{\varrho}.$$

Таким образом, в области (14.10) окончательно получаем следующую оценку для $u^{(1)}(\varphi, \xi)$:

$$|u^{(1)}(\varphi, \xi)| \leqslant \frac{N(1 + \eta/\varkappa)(1 + e)^m}{\bar{a}\varkappa^m} = \frac{N(\varkappa + \eta)(1 + e)^m}{\bar{a}\varkappa^{m+1}}. \tag{14.34}$$

Эта оценка совместно с оценками (14.29) и (14.30) и дают искомую оценку (14.11).

15. Индуктивная теорема

При построении преобразования (13.11), приводящего систему уравнений (13.9) к интегрируемой системе (13.12), основное значение имеет следующая вспомогательная теорема.

Теорема 4. *Пусть для системы* (13.9), *где как и ранее* h, a, ξ — n-*мерные векторы*, $F(h, \varphi, \xi)$ — n-*мерная аналитическая вектор-функция комплексных переменных* h, φ, ξ, *достаточно малая при достаточно малых* h, $\mathrm{Im}\,\varphi$, ξ *и в области*

$$(15.1) \qquad |h| \leqslant \eta, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho, \qquad |\xi| \leqslant \sigma,$$

удовлетворяющая неравенствам

$$(15.2) \qquad |F(h, \varphi, \xi)| \leqslant N, \qquad n\left|\frac{\partial F(h, \varphi, \xi)}{\partial h_a}\right| \leqslant L,$$

при этом константы N, L, η, σ *связаны соотношениями*

$$(15.3) \qquad \frac{N}{\varkappa} \leqslant \frac{\sigma}{4n}, \qquad \frac{nN}{\varkappa} \leqslant L \leqslant \frac{\bar{a}}{2}, \qquad \frac{N}{\bar{a}} \leqslant \eta - \varkappa,$$

$$(15.4) \qquad \frac{NQ(\eta, \varkappa)}{\bar{a}\varkappa^{2n+4}} \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant 2\varkappa \leqslant \eta, \qquad \varkappa < 1,$$

$$(15.5) \qquad Q(\eta, \varkappa) = \frac{16n^2\eta\varkappa^{2n+1}}{3}(\eta+\varkappa) + \\ + \left[\frac{8\eta n}{3} + \frac{(\eta+\varkappa)(1+e)^m}{\varkappa^m}\right]\left(4 + \frac{n}{1-1/(2n)}\right)\varkappa^{2n+2}.$$

Кроме того, предположим, что a *имеют отрицательные и различные действительные части и удовлетворяют неравенствам* (14.6), *а* $\bar{a}$ — *положительная постоянная, удовлетворяющая условию*

$$|e^{at}| \leqslant \tfrac{1}{2}\bar{a}t.$$

Тогда имеется аналитическое преобразование

$$(15.6) \qquad h = h^{(1)} + u(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)}, \qquad \xi = \xi(\xi^{(1)}),$$

приводящее систему (13.9) *к виду*

$$(15.7) \qquad \frac{dh^{(1)}}{dt} = (a + \xi^{(1)})h^{(1)} + F_1(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)}), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega;$$

при этом $\xi(\xi^{(1)})$ *и* $F_1(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)})$ — *аналитические функции* $h^{(1)}$, φ, $\xi^{(1)}$, *для которых в области*

$$(15.8) \qquad |h| \leqslant \eta - 2\varkappa, \qquad |\mathrm{Im}\,\varphi| \leqslant \varrho, \qquad |\xi^{(1)}| \leqslant \frac{N}{\varkappa}$$

справедливы неравенства

$$|\xi(\xi^{(1)})-\xi^{(1)}|\leqslant\frac{N}{\varkappa},$$

$$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi(\xi^{(1)})}{\partial\xi_q^{(1)}}\right|\leqslant 1+\frac{4N}{\varkappa\sigma_2}\leqslant 2,$$

$$|u(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)})|\leqslant\frac{Na(\eta,\varkappa)}{\bar{a}\varkappa^{2n+1}}\leqslant\frac{\varkappa}{n},$$

$$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial u(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)})}{\partial h_q^{(1)}}\right|\leqslant\frac{NQ(\eta,\varkappa)}{2\bar{a}\varkappa^{2n+1}}\leqslant\frac{1}{2}, \tag{15.9}$$

$$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial u(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)})}{\partial\xi_q}\right|\leqslant\frac{Nna(\eta,\varkappa)}{\bar{a}\sigma_2\varkappa^{2n+1}\big(1-1/(2n)\big)},$$

$$|F_1(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)})|\leqslant N_1,$$

$$n\left|\frac{\partial F_1(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)})}{\partial h_q^{(1)}}\right|\leqslant L_1,$$

где

$$N_1=\frac{N^2Q(\eta,\varkappa)}{\bar{a}\varkappa^{2n+4}},\qquad L_1=\frac{nNQ(\eta,\varkappa)}{\bar{a}\varkappa^{2n+4}}\leqslant\frac{\bar{a}}{2}, \tag{15.10}$$

$$a(\eta,\varkappa)=\frac{8\eta n}{3}\varkappa^{2n}+\frac{(\eta+\varkappa)(1+e)^m}{\varkappa^m}\cdot\varkappa^{2n}. \tag{15.11}$$

Доказательство. Прежде всего приведем систему (13.9) к виду, в котором вектор-функция $F(h,\varphi,\xi)$ будет величиной второго порядка малости. Для этого выберем преобразование $h\to h^{(1)}$ в виде

$$h=h^{(1)}+u(h^{(1)},\varphi,\xi), \tag{15.12}$$

где $u(h^{(1)},\varphi,\xi)$ — функция, определяемая выражением (14.7). Подставляя выражение (15.12) в систему уравнений (13.9), получаем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi},\omega\right)+\left(E+\frac{\partial u}{\partial h^{(1)}}\right)\frac{dh^{(1)}}{dt}=(a+\xi)(h^{(1)}+u)+F(h^{(1)}+u,\varphi,\xi). \tag{15.13}$$

Учитывая, что $u(h^{(1)},\varphi,\xi)$ удовлетворяют системе (14.1) и, принимая во внимание обозначение (14.2), мы можем написать вместо

(15.13) следующее уравнение:

$$(15.14)\qquad \left(E+\frac{\partial u}{\partial h^{(1)}}\right)\left(\frac{dh^{(1)}}{dt}-ah^{(1)}\right)=$$

$$=\xi^{(1)}h^{(1)}+\xi u+F(h^{(1)}+u,\varphi,\xi)-F(h^{(1)},\varphi,\xi)+\frac{du}{dh^{(1)}}F(h^{(1)},\varphi,\xi),$$

где обозначено

$$(15.15)\qquad \xi^{(1)}=\xi+\sum_{s=1}^{n}\overline{\frac{\partial F(h,\varphi,\xi)}{\partial h_s}}\Bigg|_{h=0}.$$

Разрешая систему (15.14) относительно $\frac{dh^{(1)}}{dt}-ah^{(1)}$, получим

$$(15.16)\qquad \frac{dh^{(1)}}{dt}=(a+\xi^{(1)})h^{(1)}+F_1(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)}),$$

где обозначено

$$(15.17)\qquad F_1(h^{(1)},\varphi,\xi)=\left[\left(E+\frac{\partial u}{\partial h^{(1)}}\right)^{-1}-E\right]\xi^{(1)}h^{(1)}+$$

$$+\left(E+\frac{\partial u}{\partial h^{(1)}}\right)^{-1}\left[\xi u+F(h^{(1)}+u,\varphi,\xi)-F(h^{(1)},\varphi,\xi)+\frac{\partial u}{\partial h^{(1)}}F(h^{(1)},\varphi,\xi)\right].$$

Прежде, чем перейти к оценке выражения для $F_1(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)})$ (15.17), рассмотрим зависимость ξ от $\xi^{(1)}$, определяемую выражением (15.15). Обозначим

$$(15.18)\qquad b(\xi)=\{b_{k_0}(\xi)\}=\left[\sum_{s=1}^{n}\overline{\frac{\partial F_{k_0}(h,\varphi,\xi)}{\partial h_s}}\Bigg|_{h=0}\right]\qquad (k_0=1,2,\ldots,n).$$

Согласно условиям доказываемой теоремы $b(\xi)$ является аналитической функцией ξ при $|\xi|\leqslant\sigma$ и удовлетворяет неравенству

$$(15.19)\qquad |b(\xi)|\leqslant\frac{N}{\varkappa},$$

так как на основании (14.4) и (14.25) $\left|\frac{\partial F}{\partial h_q}\right|\leqslant\frac{N}{\varkappa}$ при $|h|\leqslant\eta-\varkappa$. Поэтому для $\frac{\partial b(\xi)}{\partial\xi_q}$ справедливо неравенство

$$(15.20)\qquad \sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial b(\xi)}{\partial\xi_q}\right|\leqslant\frac{2Nn}{\sigma\varkappa}\leqslant\frac{1}{2}\qquad\text{при}\quad |\xi|\leqslant\frac{\sigma}{2},$$

благодаря которому уравнение

$$\xi+b(\xi)=\xi^{(1)} \tag{15.21}$$

разрешимо относительно ξ и $\xi=\xi(\xi^{(1)})$ — аналитическая функция $\xi^{(1)}$ в области

$$|\xi^{(1)}|<\frac{N}{\varkappa}. \tag{15.22}$$

Более того, ввиду соотношений (15.19) и (15.21) в области (15.22) справедливы неравенства

$$|\xi(\xi^{(1)})|\leqslant\frac{2N}{\varkappa}<\frac{\sigma}{2n}\leqslant\frac{\sigma}{2}.$$

Введем еще некоторые оценки для ξ. Дифференцируя уравнение (15.21), имеем

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_q^{(1)}}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial b_k(\xi)}{\partial\xi_r}\cdot\frac{\partial\xi_r}{\partial\xi_q^{(1)}}=\delta_{kq}=\begin{cases}1, & k=q,\\ 0, & k\neq q,\end{cases}$$

откуда, принимая во внимание (15.20), находим

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_k^{(1)}}\leqslant\delta_{kq}+\frac{2N}{\sigma\varkappa}\sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi_r}{\partial\xi_q^{(1)}}\right|, \tag{15.23}$$

или, суммируя по k, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_q^{(1)}}\right|\leqslant1+\frac{2Nn}{\varkappa\sigma}\sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi_r}{\partial\xi_q^{(1)}}\right|$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_q^{(1)}}\right|\leqslant\frac{1}{1-2Nn/(\varkappa\sigma)}\leqslant2$$

согласно неравенству (15.20).

Поэтому неравенство (15.23) можно записать в виде

$$\left|\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_q^{(1)}}\right|\leqslant\delta_{kq}+\frac{4N}{\varkappa\sigma}. \tag{15.24}$$

Суммируя неравенство (15.24) по q, находим

$$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_q^{(1)}}\right|\leqslant1+\frac{4Nn}{\varkappa\sigma}\leqslant2. \tag{15.25}$$

На основании (15.21) и (15.19) имеем также

$$(15.26)\qquad |\xi(\xi^{(1)})-\xi^{(1)}|\leqslant\frac{N}{\varkappa}.$$

Остановимся теперь на оценке функции $u(h^{(1)},\varphi,\xi^{(1)}) = u\big(h^{(1)},\varphi,\ \xi(\xi^{(1)})\big)$, входящей в формулу замены переменных (15.6). Согласно теореме 3 и обозначениям (15.11) и (15.5) в области

$$(15.27)\qquad |h^{(1)}|\leqslant\eta-2\varkappa,\qquad |\mathrm{Im}|\leqslant\varrho-2\varkappa,\qquad |\xi|\leqslant\sigma$$

имеем неравенства

$$(15.28)\qquad |u(h^{(1)},\varphi,\ \xi^{(1)})|\leqslant\frac{Na(\eta,\varkappa)}{\bar a\varkappa^{2n+1}}\leqslant\frac{\varkappa}{n}\cdot\frac{NQ(\eta,\varkappa)}{\bar a\varkappa^{2(n+2)}}\leqslant\frac{\varkappa}{n},$$

$$\sum_{(a,q)}\left|\frac{\partial u_a(h^{(1)},\varphi,\ \xi^{(1)})}{\partial h_q^{(1)}}\right|\leqslant\frac{8Nn^2\eta}{3\bar a\varkappa^2}<\frac{NQ(\eta,\varkappa)}{2\bar a\varkappa^{2n+4}}\leqslant\frac{1}{2},$$

а также

$$(15.29)\qquad \left|\frac{\partial u(h^{(1)},\varphi,\ \xi^{(1)})}{\partial\xi_q}\right|\leqslant\frac{Na(\eta,\varkappa)}{\bar a\varkappa^{2n+1}\sigma\big(1-1/(2n)\big)}\qquad (q=1,2,\ldots,n)$$

при

$$(15.30)\qquad |h^{(1)}|\leqslant\eta-2\varkappa,\qquad |\mathrm{Im}\varphi|\leqslant\varrho-2\varkappa,\qquad |\xi|\leqslant\frac{\sigma}{2n}.$$

Рассмотрим теперь функцию $F_1(h^{(1)},\varphi,\ \xi^{(1)})$. Согласно представлению (15.17) она определена и аналитична в области (15.8). Перейдем к оценке этой функции.

Заметим, что при выполнении условия

$$\sum_q |a_{kq}|\leqslant d\leqslant\frac{1}{2},$$

рассматривая систему уравнений

$$y_k+\sum_q a_{kq}y_q=z_k$$

или в сокращенной записи

$$y=(1+a)^{-1}z,$$

нетрудно получить следующие оценки

$$(15.31)\qquad |(1+a)^{-1}-1|\leqslant\frac{d}{1-d}\leqslant 2d,$$

$$(15.32)\qquad |(1+a)^{-1}|\leqslant 2.$$

Поэтому, учитывая неравенство (15.28), имеем

$$
\left|\left(E+\frac{\partial u}{\partial h^{(1)}}\right)^{-1}-E\right| \leqslant 2\left|\sum_q \frac{\partial u}{\partial h_q^{(1)}}\right| \leqslant \frac{16Nn^2\eta}{3\bar{a}\varkappa^2},
$$

(15.33)

$$
\left|\left(E+\frac{\partial u}{\partial h^{(1)}}\right)^{-1}\right| \leqslant 2.
$$

Для $h^{(1)}$, φ, $\xi^{(1)}$, находящихся в области (15.30), получим неравенства

$$
|F(h^{(1)}+u, \varphi, \xi^{(1)})-F(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)})| \leqslant \sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial F(\tilde{h}^{(1)}, \varphi, \xi)}{\partial h_q^{(1)}}\right|,
$$

$$
|u| \leqslant \sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial F(\tilde{h}, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right| \cdot \frac{Na(\eta, \varkappa)}{\bar{a}\varkappa^{2n+1}},
$$

где $\tilde{h}$ — некоторые значения h в интервале $(h^{(1)}, h^{(1)}+u)$.

В области (15.30)

$$
|\tilde{h}| \leqslant |h^{(1)}|+|u| \leqslant \eta-2\varkappa+\frac{\varkappa}{n},
$$

так что

$$
\left|\frac{\partial F(\tilde{h}, \varphi, \xi)}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{N}{2\varkappa\big(1-1/(2n)\big)} = \frac{Nn}{\varkappa(2n-1)}
$$

и, следовательно, окончательно получаем

$$
|F(h^{(1)}+u, \varphi, \xi^{(1)})-F(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)})| < \frac{N^2n^2a(\eta, \varkappa)}{\varkappa(2n-1)\bar{a}\varkappa^{2n+1}}. \tag{15.34}
$$

Неравенство (15.33) приводят к окончательной оценке

$$
|F_1(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)})| \leqslant \frac{16Nn^2\eta}{3\bar{a}\varkappa^2}\cdot\frac{N}{\varkappa}\cdot\eta+
$$

$$
+2\left[\frac{2N}{\varkappa}\cdot\frac{Na(\eta, \varkappa)}{\bar{a}\varkappa^{2n+1}}+\frac{N^2n^2a(\eta, \varkappa)}{\varkappa(2n-1)a\varkappa^{2n+1}}+\frac{8Nn^2\varkappa}{3\bar{a}\varkappa^2}\cdot N\right] = \frac{N^2Q(\eta, \varkappa)}{\bar{a}\varkappa^{2n+4}},
$$

что и завершает доказательство теоремы 4.

16. Итерационный процесс

На основании доказанной индуктивной теоремы 4 построим итерационный процесс с „ускоренной" сходимостью. Для этого в уравнениях (13.9)

$$(16.1)\qquad \frac{dh}{dt} = (a+\xi)h + F(h, \varphi, \xi), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

положим

$$(16.2)\qquad h = h^{(1)} + u^{(1)}(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)}), \qquad \xi = \xi(\xi^{(1)}),$$

где $u^{(1)}(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)})$, $\xi(\xi^{(1)})$ определяются согласно выражению (14.7) и уравнению (15.21).

Тогда уравнения (16.1) примут вид

$$(16.3)\qquad \frac{dh^{(1)}}{dt} = (a+\xi^{(1)})h^{(1)} + F_1(h^{(1)}, \varphi, \xi^{(1)}), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

К этим уравнениям опять применим преобразование вида (16.2), однако, построенное, исходя из правых частей уже системы (16.3):

$$(16.4)\qquad h^{(1)} = h^{(2)} + u^{(2)}(h^{(2)}, \varphi, \xi^{(2)}), \qquad \xi^{(1)} = \xi^{(1)}(\xi^{(2)}).$$

В результате получим систему

$$(16.5)\qquad \frac{dh^{(2)}}{dt} = (a+\xi^{(2)})h^{(2)} + F_2(h^{(2)}, \varphi, \xi^{(2)}), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

и т. д.

Продолжая указанный процесс, на s-ом шаге совершим преобразование

$$(16.6)\qquad h^{(s-1)} = h^{(s)} + u^{(s)}(h^{(s)}, \varphi, \xi^{(s)}), \qquad \xi^{(s-1)} = \xi^{(s-1)}(\xi^{(s)})$$

и получим уравнения

$$(16.7)\qquad \frac{dh^{(s)}}{dt} = (a+\xi^{(s)})h^{(s)} + F_s(h^{(s)}, \varphi, \xi^{(s)}), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Очевидно, на каждом этапе итерационного процесса необходимо обеспечить выполнение условий, гарантирующих применимость индуктивной теоремы. Для этого предположим, что система (16.1) удовлетворяет условиям теоремы 3 и, кроме того, выполняются неравенства

$$(16.8)\qquad \frac{N}{\bar{a}} \leqslant \frac{\eta}{2}, \qquad \frac{nN}{\varkappa} \leqslant \frac{\bar{a}}{2}, \qquad \frac{NQ(\eta, \varkappa)}{\bar{a}}\left(\frac{1}{\gamma^{2n+4}}\right)^2 \leqslant r_0 < 1,$$

где

$$\gamma = \frac{\eta}{\eta+4}, \qquad \frac{N}{\gamma} \leqslant \frac{\sigma}{4n}, \qquad \gamma^{2n+3}\cdot r_0 \leqslant \frac{1}{4n}, \qquad \frac{\gamma^{2n+4}}{2}\sum_{s=0}^{\infty} r_0^{2^s} < \ln\frac{3}{2}.$$

При построении итерационного процесса на s-ом шаге рассмотрим область

$$
(16.9) \qquad \begin{aligned} |h| &\leqslant \eta_s = \eta - 2(\varkappa_0+\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_{s-1}), \\ |\operatorname{Im}\varphi| &\leqslant \varrho_s = \varrho - 2(\varkappa_0+\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_{s-1}) \end{aligned}
$$

здесь $\varkappa_s = \gamma^{s+1}$ и γ определяется из соотношения

$$
2(\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^s+\ldots) = \frac{2\gamma}{1-\gamma} = \frac{\eta}{2}.
$$

Покажем, что в области (16.9) справедливы неравенства

$$
(16.10) \qquad \begin{aligned} &|F_s(h^{(s)}, \varphi, \xi^{(s)})| \leqslant N_s, \\ &\left|\xi^{(\nu)}(\xi^{(\nu-1)}(\ldots\xi^{(s)}\ldots))\right| < \frac{N_{\nu-1}}{\varkappa_\nu - 1}, \\ &n\left|\frac{\partial F_s(h^{(s)}, \varphi, \xi^{(s)})}{\partial h_q}\right| \leqslant L_s, \end{aligned}
$$

где

$$
(16.11) \qquad N_s = \frac{\bar{a} r_0^{2^s}}{Q(\eta, \varkappa)}\cdot\gamma^{(s+2)(2n+4)}, \qquad L_s = \frac{nN_{s-1}}{\varkappa_{s-1}}.
$$

Действительно для $s = 1$ неравенства (16.10) выполняются согласно теореме 3 и условиям (16.8).

Предположим, что они выполняются для $1 \leqslant s \leqslant s_0$ и покажем их справедливость для $s = s_0+1$.

Заменяя в неравенствах (15.3) и (15.4) $\eta, \varkappa, N$ на $\eta_{s_0}, \varkappa_{s_0}, N_{s_0}$, приходим к соотношениям

$$
(16.12) \qquad \begin{gathered} \frac{N_{s_0}}{\varkappa_{s_0}} \leqslant \frac{1}{4n}\cdot\frac{N_{s_0-1}}{\varkappa_{s_0-1}}, \qquad L_{s_0} = \frac{nN_{s_0-1}}{\varkappa_{s_0-1}} \leqslant \frac{\bar{a}}{2}, \qquad \frac{N_{s_0}}{\bar{a}} \leqslant \eta_{s_0} - \varkappa_{s_0}, \\ \frac{N_{s_0}Q(\eta_{s_0}, \varkappa_{s_0})}{\bar{a}\varkappa_{s_0}^{2n+4}} \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant 2\varkappa_{s_0} < \eta_{s_0}, \qquad \varkappa_{s_0} < 1. \end{gathered}
$$

Покажем, что эти неравенства действительно выполняются при условиях (16.8) и обозначениях (16.11).

Очевидно, имеем

$$
(16.13) \qquad \frac{N_{s_0}/\varkappa_{s_0}}{N_{s_0-1}/\varkappa_{s_0-1}} = \frac{N_{s_0}\gamma^{s_0-1}}{N_{s_0-1}\gamma^{s_0}} = r_0^2\gamma^{2n+3} \leqslant \frac{1}{4n}.
$$

Далее, если $\frac{nN}{\varkappa} \leqslant \frac{\bar{a}}{2}$, то и

$$L_{s_0} = \frac{nN_{s_0-1}}{\varkappa_{s_0-1}} \leqslant \frac{\bar{a}}{2}, \tag{16.14}$$

где N_{s_0-1} определяется согласно формуле (16.11).

Так как согласно неравенствам (16.8) и формуле (16.11) при $s = 0$ $(N = N_0)$ имеем

$$\frac{N}{\bar{a}} = \frac{r_0 \gamma^{2(2n+4)}}{Q(\eta, \gamma)} \leqslant \frac{\eta}{2} \qquad (\varkappa = \gamma),$$

то

$$\frac{N_{s_0}}{\bar{a}} = \frac{r_0^{2^{s_0}} \gamma^{(s_0+2)(2n+4)}}{Q(\eta, \gamma)} < \frac{\eta}{2} < \eta_{s_0} - \varkappa_{s_0}, \tag{16.15}$$

потому что $\eta_{s_0} > \frac{1}{2}\eta + \varkappa_{s_0}$ согласно (16.9).

Далее, убеждаемся, что

$$\frac{N_{s_0} \cdot Q(\eta_{s_0}, \varkappa_{s_0})}{\bar{a}\varkappa^{2n+4}} = \frac{N_{s_0} \cdot Q(\eta_{s_0}, \gamma^{s_0+1})}{\bar{a}\gamma^{(s_0+1)(2n+4)}} \leqslant \frac{N_{s_0} Q(\eta, \gamma)}{\bar{a}\gamma^{(s_0+1)(2n+4)}} = \tag{16.16}$$

$$= r_0^{2^{s_0}} \gamma^{(2n+4)} < \frac{1}{4n} < 1,$$

и, следовательно, в области

$$|h| \leqslant \eta_{s_0}, \qquad |\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \varrho, \qquad |\xi^{(s_0)}| \leqslant \frac{N_{s_0-1}}{\varkappa_{s_0-1}} \tag{16.17}$$

справедливы все неравенства, необходимые для применения индуктивной теоремы 4.

Это позволяет воспользоваться всеми оценками индуктивной теоремы для перехода от s_0 к s_0+1. Согласно этим оценкам для следующего шага в более узкой области

$$|h| \leqslant \eta_{s_0} - 2\varkappa_{s_0}, \qquad |\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \varrho, \qquad |\xi^{(s_0+1)}| \leqslant \frac{N_{s_0}}{\varkappa_{s_0}} \tag{16.18}$$

справедливы неравенства

$$|F_{s_0+1}(h^{(s_0+1)}, \varphi, \xi^{(s_0+1)})| \leqslant \frac{N_{s_0}^2 Q(\eta_{s_0}, \varkappa_{s_0})}{\bar{a}\varkappa_{s_0}^{2n+4}} \leqslant \frac{N_{s_0}^2 Q(\eta, \gamma)}{\bar{a}\gamma^{(s_0+1)(2n+4)}} < \tag{16.19}$$

$$< \frac{\bar{a}}{Q(\eta, \gamma)} r_0^{2^{s_0+1}} \cdot \gamma^{(s_0+1)(2n+4)} = N_{s_0+1}$$

и

$$(16.20)\qquad n\left|\frac{\partial F_{s_0}(h,\varphi,\xi^{(s_0+1)})}{\partial h_q}\right| \leqslant \frac{nN_{s_0}}{\varkappa_{s_0}} = L_{s_0+1}.$$

Кроме того, поскольку $\xi^{(s_0)}(\xi^{(s_0+1)})$ — решения уравнения

$$(16.21)\qquad \xi^{(s_0)} + b^{(s_0)}(\xi^{(s_0)}) = \xi^{(s_0+1)},$$

где

$$b^{(s_0)}(\xi) = \{b_k^{(s_0)}(\xi)\} = \sum_{s=1}^{n} \overline{\frac{\partial F_{ks_0}(h,\varphi,\xi)}{\partial h_s}}\Bigg|_{h=0} \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

то

$$|\xi^{(s_0)}(\xi^{(s_0+1)})| \leqslant |\xi^{(s_0+1)}| + |b^{(s_0)}(\xi^{(s_0)})|.$$

Принимая во внимание, что в области (16.17)

$$(16.22)\qquad |b_q^{(s_0)}(\xi^{(s_0)})| = \left|\sum_{s=1}^{n} \overline{\frac{\partial F_{qs_0}(h,\varphi,\xi^{(s_0)})}{\partial h_s}}\Bigg|_{h=0}\right| \leqslant \frac{N_{s_0}}{\varkappa_{s_0}} \qquad (q=1,2,\ldots n),$$

получаем

$$(16.23)\qquad |\xi^{(s_0)}(\xi^{(s_0+1)})| \leqslant 2\frac{N_{s_0}}{\varkappa_{s_0}}.$$

Отсюда, учитывая выражение (16.13), окончательно найдем

$$(16.24)\qquad |\xi^{(s_0)}(\xi^{(s_0+1)})| \leqslant \frac{1}{2n}\frac{N_{s_0-1}}{\varkappa_{s_0-1}} < \frac{N_{s_0-1}}{\varkappa_{s_0-1}}$$

при

$$|\xi^{(s_0+1)}| \leqslant \frac{N_{s_0}}{\varkappa_{s_0}}.$$

Следовательно, для любых ν имеем

$$(16.25)\qquad |\xi^{(\nu)}(\xi^{(\nu+1)}\ldots(\xi^{(s_0+1)}))| < \frac{N_{\nu-1}}{\varkappa_{\nu-1}},$$

где следует положить $N_{-1} = \sigma$, $\varkappa_{-1} = 1$.

Таким образом, доказана применимость индуктивной теоремы 4 для перехода от $s = s_0$ к $s = (s_0+1)$-му шагу итерации. Так как на каждом шаге итерационного процесса справедливы все оценки теоремы 4, то ими можем воспользоваться для доказательства сходимости приведенного итерационного процесса.

Для этого выразим h и ξ через $h^{(s)}$ и $\xi^{(s)}$. Согласно формулам замены переменных (16.6) имеем

$$
(16.26)\qquad
\begin{aligned}
h &= h^{(s)} + V^{(s)}(h^{(s)}, \varphi, \xi^{(s)}),\\
\xi &= \xi\left(\xi^{(1)}\left(\xi^{(2)}(\ldots \xi^{(s)})\right)\right) = \Xi^{(s)}(\xi^{(s)}).
\end{aligned}
$$

Очевидно, тождественно

$$
(16.27)\qquad
\begin{aligned}
&\Xi^{(s)}\left(\xi^{(s)}(\xi^{(s+1)})\right) = \Xi^{(s+1)}(\xi^{(s+1)}),\\
&V^{(s+1)}(h, \varphi, \xi^{(s+1)}) = u^{(s+1)}(h, \varphi, \xi^{(s+1)}) +\\
&\qquad + V^{(s)}\left(h + u^{(s+1)}(h, \varphi, \xi^{(s+1)}),\ \xi^{(s)}(\xi^{(s+1)})\right).
\end{aligned}
$$

Найдем оценки для выражений (10.27) и их производных.

Рассматривая уравнение (16.21) и учитывая соотношения (16.10) и (16.11), в результате получим

$$
(16.28)\qquad
\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi}{\partial\xi_q^{(s)}}\right| &= \sum_{q_1=1}^{n}\left|\frac{\partial\xi}{\partial\xi_{q_1}^{(1)}}\right|\cdot\left|\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\xi_{q_2}^{(2)}}\right|\ldots\left|\sum_{q_s=1}^{n}\frac{\partial\xi^{(s-1)}}{\partial\xi_{q_s}^{(s)}}\right| \leqslant\\
&\leqslant\left(1+\frac{4Nn}{\sigma\gamma}\right)\left(1+\frac{4N_1 n}{N\gamma}\right)\ldots\left(1+\frac{4N_{s-1}\cdot n}{N_{s-2}\gamma}\right)\leqslant\\
&\leqslant 4\prod_{1\leqslant p\leqslant\infty}\left(1+r_0^{2^p-1}\right) = c(r_0)
\end{aligned}
$$

при

$$
|\xi^{(s)}| \leqslant \frac{N_{s-1}}{2\varkappa_{s-1}}.
$$

Следовательно, для всех s справедливо неравенство

$$
\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial\Xi^{(s)}(\xi^{(s)})}{\partial\xi_q^{(s)}}\right| \leqslant c(r_0),
$$

благодаря которому

$$
(16.29)\qquad
\begin{aligned}
&|\Xi^{(s+k)}(0) - \Xi^{(s)}(0)| \leqslant \sum_{p=1}^{k}|\Xi^{(s+p)}(0) - \Xi^{(s+p-1)}(0)| =\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left|\Xi^{(s+p-1)}\left(\xi^{(s+p-1)}(0)\right) - \Xi^{(s+p-1)}(0)\right| \leqslant c(r_0)\sum_{p=1}^{k}|\Xi^{(s+p-1)}(0)| \leqslant\\
&\leqslant c(r_0)\sum_{p=1}^{k}\frac{N_{s+p-2}}{\varkappa_{s+p-2}} \leqslant c(r_0)\frac{\bar a\sigma}{Q(\eta,\gamma)}\sum_{p=s+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}\right)^p =\\
&= \frac{c(r_0)\sigma\bar a}{\left(1-1/(4n)\right)Q(\eta,\gamma)}\left(\frac{1}{4n}\right)^{s+1}.
\end{aligned}
$$

Из неравенства (16.29) следует, что

(16.30) $$\Xi^{(s)}(0)\to\Xi^{(\infty)}(0) \quad \text{при} \quad s\to\infty$$

причем

(16.31) $$|\Xi^{(\infty)}(0)-\Xi^{(s)}(0)|\leqslant\frac{c(r_0)\sigma\bar{a}}{Q(\eta,\gamma)\left(1-1/(4n)\right)}\cdot\left(\frac{1}{4n}\right)^{s+1}$$

Перейдем теперь к доказательству равномерной сходимости функций $V^{(s)}(h,\varphi,\xi^{(s)})$.

Поскольку согласно оценкам индуктивной теоремы 4

(16.32) $$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(s+1)}}{\partial h_q}\right|\leqslant\frac{N_sQ(\eta_s,\varkappa_s)}{2\bar{a}\varkappa_s^{2n+1}}\leqslant\frac{1}{2}r_0^{2^s}\gamma^{2n+4}$$

из тождества (16.27) следует неравенство

(16.33) $$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s+1)}(h,\varphi,\xi^{(s+1)})}{\partial h_q}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}r_0^{2^s}\gamma^{2n+4}+\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s)}(h+u^{(s+1)},\varphi,\xi^{(s)})}{\partial h_q}\right|\left(1+\frac{1}{2}r_0^{2^s}\gamma^{2n+4}\right).$$

Решая неравенство (10.33) в области

$$|h|\leqslant\eta_s,\qquad |\mathrm{Im}\,\varphi|\leqslant\varrho,\qquad |\xi^{(s)}|\leqslant\frac{N_{s-1}}{\varkappa_{s-1}},$$

получаем

(16.34) $$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s)}(h,\varphi,\xi^{(s)})}{\partial h_q}\right|\leqslant\exp\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2}r_0^{2^p}\gamma^{2n+4}-1\leqslant\frac{1}{2}.$$

Оценим сумму

(16.35) $$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s)}(h,\varphi,\xi^{(s)})}{\partial \xi_q^{(s)}}\right|=y_s.$$

Дифференцируя тождества (16.27), найдем

(16.36) $$\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s+1)}(h,\varphi,\xi^{(s+1)})}{\partial \xi_q^{(s+1)}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(s+1)}(h,\varphi,\xi^{(s+1)})}{\partial \xi_q^{(s+1)}}\right|+\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s)}(h,\varphi,\xi^{(s+1)})}{\partial \xi_q^{(s)}}\right|\cdot\sum_{q_1=1}^{n}\left|\frac{\partial \xi^{(s)}(\xi^{(s+1)})}{\partial \xi_{q_1}^{(s+1)}}\right|+$$
$$+\sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s)}(h,\varphi,\xi^{(s+1)})}{\partial h_q}\right|\cdot\sum_{q_1=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(s+1)}(h,\varphi,\xi^{(s+1)})}{\partial \xi_{q_1}^{(s+1)}}\right|.$$

Согласно неравенствам (15.9), (16.8) и обозначению (16.11) имеем

$$(16.37)\qquad \sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(s+1)}(h,\varphi,\xi^{(s+1)})}{\partial \xi_q^{(s+1)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant r_0^{2^s-1}\cdot\gamma^{2n+3-2n(s+1)}\cdot\frac{na(\eta,\gamma)}{\bar a\left(1-1/(2n)\right)},\qquad s\geqslant 1,$$

$$(16.38)\qquad \sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial u^{(1)}(h,\varphi,\xi^{(1)})}{\partial \xi_q^{(1)}}\right| \leqslant \frac{Nna(\eta,\gamma)}{\bar a\sigma\gamma^{2n+1}\left(1-1/(2n)\right)},\qquad s=0.$$

Далее, учитывая обозначение (16.35), принимая во внимание оценки теоремы 4 и неравенство (16.28), согласно выражению (16.34) получаем неравенство

$$(16.39)\qquad y_{s+1}\leqslant \tfrac{3}{2}S_s+y_s(1+\nu_s),\qquad y_0\equiv 0;$$

здесь введены обозначения

$$(16.40)\qquad \begin{gathered}\nu_0=\frac{4Nn}{\sigma\gamma},\quad \nu_1=\frac{4N_1n}{N\gamma},\quad \ldots,\quad \nu_p=\frac{4Npn}{N_{p-1}\gamma},\quad p\geqslant 1,\\ S_0=\frac{Nna(\eta,\gamma)}{\bar a\sigma\gamma^{2n+1}\left(1-1/(4n)\right)},\quad \ldots,\quad S_p=r_0^{2^p-1}\gamma^{3-(2n+1)p}\frac{na(\eta,\gamma)}{\bar a\left(1-1/(2n)\right)}.\end{gathered}$$

Решая неравенство (16.39), приходим к оценке

$$(16.41)\qquad \sum_{q=1}^{n}\left|\frac{\partial V^{(s)}(h,\varphi,\xi^{(s)})}{\partial \xi_q^{(s)}}\right| < \frac{3}{2}\prod_{0<p<\infty}(1+\nu_p)\sum_{p=0}^{\infty}S_p\leqslant \frac{3}{2}c(r_0)\sum_{p=0}^{\infty}S_p=$$

$$=\frac{3c(r_0)na(\eta,\gamma)}{2\bar a\left(1-1/(2n)\right)}\left[\frac{N}{\sigma\gamma^{2n+1}}+\sum_{p=1}^{\infty}r_0^{2^p-1}\gamma^{3-(2n+1)s}\right]\equiv Y.$$

Поэтому согласно выражениям (16.27), (16.34), (16.35), (16.41) и оценкам теоремы 4 в области

$$(16.42)\qquad |h|\leqslant \tfrac{1}{2}\eta,\qquad |\mathrm{Im}\,\varphi|\leqslant \tfrac{1}{2}\varrho$$

справедливо неравенство

$$(16.43)\qquad |V^{(s+1)}(h,\varphi,0)-V^{(s)}(h,\varphi,0)|\leqslant$$

$$\leqslant |u^{(s+1)}(h,\varphi,0)|+\left|V^{(s)}\left(h+u^{(s+1)}(h,\varphi,0),\varphi,\xi^{(s)}(0)\right)-V^{(s)}(h,\varphi,0)\right|$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\frac{N_sa(\eta,\gamma)}{\bar a\gamma^{(2n+1)(s+1)}}+Y\frac{N_{s-1}}{\gamma^s}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{a(\eta,\gamma)}{Q(\eta,\gamma)}r_0^{2^s}\gamma^{(2n+4)+3(s+1)}+Y\frac{\bar a r_0^{2^s-1}}{Q(\eta,\gamma)}\gamma^{(2n+4)(s+1)-s}.$$

Таким образом, исходя из неравенств (16.43) и (16.41), в области (16.42) имеем

$$|V^{(s+k)}(h,\varphi,0)-V^{(s)}(h,\varphi,0)| \leqslant \frac{3a(\eta,\gamma)}{2Q(\eta,\gamma)}\gamma^{2n+4}\cdot\sum_{p=m}^{\infty} r_0^{2^p}\gamma^{3(p+1)}+$$
$$+\frac{3c(r_0)na(\eta,\gamma)}{2Q(\eta,\gamma)\big(1-1/(2n)\big)}\Big[\frac{N}{\sigma\gamma^{2n+1}}+\sum_{p=1}^{\infty} r_0^{2^p-1}\gamma^{3-(2n+1)p}\Big]\sum_{p=m}^{\infty} r_0^{2^p-1}\gamma^{(2n+4)(p+1)-p},$$

или, принимая во внимание соотношение

$$\frac{a(\eta,\gamma)}{Q(\eta,\gamma)}<\frac{\big(1-1/(2n)\big)n}{\gamma^2(n^2+4n-2)}$$

и учитывая, что $\dfrac{N}{\sigma}\leqslant\dfrac{\gamma}{4n}$, получаем

(16.44) $$|V^{(s+k)}(h,\varphi,0)-V^{(s)}(h,\varphi,0)| \leqslant \frac{3(1-\frac{1}{2})n}{2(n^2+4n-2)}\gamma^{2n+2}\sum_{p=m}^{\infty} r_0^{2^p}\gamma^{3(p+1)}+$$
$$+\frac{3c(r_0)n^2}{2(n^2+4n-2)}\Big[\frac{1}{4n\gamma^{2n+2}}+\sum_{p=1}^{\infty} r_0^{2^p-1}\gamma^{1-(2n+1)p}\Big]\gamma\sum_{p=m}^{\infty} r_0^{2^p-1}\gamma^{(2n+3)(p+1)}.$$

Из полученного неравенства (16.44) следует, что в области (16.42) имеет место равномерная сходимость функций

(16.45) $$V^{(s)}(h,\varphi,0)\to V^{(\infty)}(h,\varphi,0) \quad \text{при} \quad s\to\infty,$$

причем скорость сходимости характеризуется неравенством (16.44), в котором следует заменить $V^{(s+k)}(h,\varphi,0)$ на $V^{(\infty)}(h,\varphi,0)$.

17. Приводимость нелинейного уравнения

Перейдем к подведению итога полученных результатов. В системе

(17.1) $$\frac{dh}{dt}=(a+\xi)h+F(h,\varphi,\xi), \qquad \frac{d\varphi}{dt}=\omega$$

положим $\xi=\Xi^{(\infty)}(0)$. Тогда с помощью аналитической замены переменных

(17.2) $$h=g+V^{(\infty)}(g,\varphi,0)$$

в области

(17.3) $$|h|\leqslant\tfrac{1}{2}\eta, \qquad |\mathrm{Im}\varphi|\leqslant\tfrac{1}{2}\varrho$$

система уравнений (17.1) приводится к виду

$$\frac{dg}{dt} = ag, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \tag{17.4}$$

Интегрируя систему (17.4) найдем

$$g = Ce^{at}, \qquad \varphi = \omega t + \varphi_0, \tag{17.5}$$

где $C = (C_1, \ldots, C_n)$, $\varphi_0 = (\varphi_{01}, \ldots, \varphi_{0m})$ — постоянные интегрирования.

Подставляя значения g и φ в правую часть выражения (17.2), получаем общее решение исходной системы уравнений (17.1)

$$\begin{aligned} h &= Ce^{at} + V^{(\infty)}(Ce^{at}, \omega t + \varphi_0, 0), \\ \varphi &= \omega t + \varphi_0 \end{aligned} \tag{17.6}$$

зависящее от $n+m$ произвольных постоянных.

Полученный результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть для системы уравнений* (17.1) *функции* $F(h, \varphi, \xi)$ *и постоянные* a *удовлетворяют всем условиям доказанной нами теоремы* 4. *Пусть, кроме того, выполняются неравенства* (16.8) *и* $\xi = \Xi^{(\infty)}(0)$.

Тогда уравнения (17.1) *имеют общее решение вида* (17.6), *в котором функция* $V^{(\infty)}(h, \varphi, 0)$ — *аналитическая по* h, φ *в области* (17.3).

Возвратимся теперь к рассмотрению системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= (a+\xi)h + F(h, \varphi, \Delta, \xi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta, \xi). \end{aligned} \tag{17.7}$$

Предположим, что для этой системы выполняются все условия теоремы Н. Н. Боголюбова 2 и теоремы 4. Тогда согласно теореме 2 аналитическим относительно h и θ преобразованием

$$\varphi = \theta + \Phi^{(\infty)}(h, \theta, 0) \tag{17.8}$$

система (17.7) при $\Delta = \mathscr{D}^{(\infty)}(0)$ может быть приведена к виду

$$\frac{dh}{dt} = (a+\xi)h + F(h, \theta, \xi), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega, \tag{17.9}$$

где $F(h, \theta, \xi) = F\big(h, \theta + \Phi^{(\infty)}(h, \theta, 0), \mathscr{D}^{(\infty)}(0), \xi\big)$ — аналитическая функция h, θ, ξ в области

$$|h| \leqslant \tfrac{1}{2}\eta_1, \qquad |\mathrm{Im}\,\theta| \leqslant \tfrac{1}{2}\varrho_1, \qquad |\xi| \leqslant \sigma_1. \tag{17.10}$$

Положим $\eta = \frac{1}{2}\eta_1$, $\varrho = \frac{1}{2}\varrho_1$, тогда при $\xi = \Xi^{(\infty)}(0)$ система уравнений (17.9) заменой переменных

$$h = g + V^{(\infty)}(g, \theta, 0) \tag{17.11}$$

приведется к виду

$$\frac{dg}{dt} = ag, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega. \tag{17.12}$$

Объединяя эти замены переменных, видим, что система (17.7) при $\Delta = \mathscr{D}^{(\infty)}(0)$ и $\xi = \Xi^{(\infty)}(0)$ с помощью аналитической замены переменных

$$\begin{aligned} h &= g + V^{(\infty)}(g, \theta, 0), \\ \varphi &= \theta + \Phi^{(\infty)}\big(g + V^{(\infty)}(g, \theta, 0), \theta, 0\big) \end{aligned} \tag{17.13}$$

в области (17.3) преобразовывается к системе (17.12).

Интегрируя систему (17.12) и подставляя полученное решение в выражение (17.13), находим общее решение системы (17.7):

$$\begin{aligned} h_t &= Ce^{at} + V^{(\infty)}(Ce^{at}, \omega t + \theta_0, 0), \\ \varphi_t &= \omega t + \theta_0 + \Phi^{(\infty)}\big(Ce^{at} + V^{(\infty)}(Ce^{at}, \omega t + \theta_0, 0), \omega t + \theta_0, 0\big), \end{aligned} \tag{17.14}$$

где C и θ_0 — произвольные постоянные, которые должны принадлежать области

$$|C| \leqslant \frac{\eta}{2}, \qquad |\operatorname{Im}\theta_0| \leqslant \frac{\varrho}{2}\left(1 - \frac{1}{2m}\right). \tag{17.15}$$

Положив в выражениях (17.14) $C = 0$, получаем частное квазипериодическое решение с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$:

$$\begin{aligned} h(\omega t) &= V^{(\infty)}(0, \omega t + \theta_0, 0), \\ \varphi(\omega t) &= \omega t + \theta_0 + \Phi^{(\infty)}\big(V^{(\infty)}(0, \omega t + \theta_0, 0)\big) \end{aligned} \tag{17.16}$$

существование которого обыло установлено Н. Н. Боголюбовым в теореме 2.

Оценим теперь разность $|h_t - h(\omega t)|$, $|\varphi_t - \varphi(\omega t)|$. Согласно соотношениям (16.34), (16.45) в области (16.42)

$$\sum_{q=1}^{n} \left| \frac{\partial V^{(\infty)}}{\partial h_q} \right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{17.17}$$

и, следовательно, легко получаем

$$|h_t - h(\omega t)| \leqslant \frac{3}{2}|C| e^{-\bar{a}t} \tag{17.18}$$

для $|C| \leqslant \frac{1}{2}\eta$, $|\operatorname{Im}\theta_0| \leqslant \frac{1}{2}\varrho$.

Нетрудно также показать, что

$$|\varphi_t-\varphi(\omega t)| = \left|\Phi^{(\infty)}\left(Ce^{at}+V^{(\infty)}(Ce^{at},\ \omega t+\theta_0,\ 0),\ \omega t+\theta_0,\ 0\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi^{(\infty)}\left(V^{(\infty)}(0,\ \omega t+\theta_0,\ 0),\ \omega t+\theta_0,\ 0\right)\right| \leqslant \tfrac{3}{2}C_1(r_0)|C|e^{-\bar{a}t}$$

для

$$|C| \leqslant \frac{\eta}{2},\qquad |\mathrm{Im}\,\theta_0| \leqslant \frac{\varrho}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right).$$

Резюмируя изложенное выше, получаем следующую основную теорему.

Теорема 6. *Пусть для системы уравнений*

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= (a+\xi)h+F(h,\ \varphi,\ \Delta,\ \xi),\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega+\Delta+f(h,\ \varphi,\ \Delta,\ \xi)\end{aligned}\tag{17.19}$$

выполняются все условия теорем 2 и 4.

Тогда при соответствующем выборе $\Delta=\mathscr{D}_1^{(\infty)}(0)$ и $\xi=\Xi^{(\infty)}(0)$ заменой переменных

$$\begin{aligned}h &= g+V^{(\infty)}(g,\ \theta,\ 0),\\ \varphi &= \theta+\Phi^{(\infty)}\left(g,\ V^{(\infty)}(g,\ \theta,\ 0),\ \theta,\ 0\right)\end{aligned}\tag{17.20}$$

система (17.19) сводится к линейной системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dg}{dt}=ag,\qquad \frac{d\theta}{dt}=\omega,\tag{17.21}$$

после интегрирования которой общее решение исходной системы (17.19) будет иметь вид

$$\begin{aligned}h_t &= Ce^{at}+V^{(\infty)}(Ce^{at},\ \omega t+\theta_0,\ 0),\\ \varphi_t &= \omega t+\theta_0+\Phi^{(\infty)}\left(Ce^{at}+V^{(\infty)}(Ce^{at},\ \omega t+\theta_0,\ 0),\ \omega t+\theta_0,\ 0\right),\end{aligned}\tag{17.22}$$

где $n+m$ произвольных постоянных C, θ_0 принадлежат области

$$|C| \leqslant \frac{\eta}{2},\qquad |\mathrm{Im}\,\theta_0| \leqslant \frac{\varrho}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right).\tag{17.23}$$

С течением времени решение (17.14) приближается к стационарному квазипериодическому решению

$$\begin{aligned}h(\omega t) &= V^{(\infty)}(0,\ \omega t+\theta_0,\ 0),\\ \varphi(\omega t) &= \omega t+\theta_0+\Phi^{(\infty)}\left(V^{(\infty)}(0,\ \omega t+\theta_0,\ 0),\ \omega t+\theta_0,\ 0\right)\end{aligned}\tag{17.24}$$

где

$$|\operatorname{Im}\theta_0| \leqslant \frac{\varrho}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)$$

по закону

$$\begin{aligned} |h_t - h(\omega t)| &\leqslant \tfrac{3}{2}|C|e^{-\bar{\alpha}t}, \\ |\varphi_t - \varphi(\omega t)| &\leqslant \tfrac{3}{2}C_1(r_0)\,|C|e^{-\bar{\alpha}t}. \end{aligned} \tag{17.25}$$

Доказанная теорема о приводимости системы уравнений (17.19), а, следовательно, и системы (13.1) к уравнениям с постоянными коэффициентами (17.21) и о построении общего решения (17.22) в окрестности устойчивости стационарного квазипериодического решения (17.24) дает возможность исследовать поведение решений в окрестности квазипериодического решения и открывает перспективы дальнейшего исследования различных видов уравнений, содержащих малый параметр.

С помощью изложенного метода не представляет затруднений исследовать системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, поведение решений систем дифференциальных уравнений в окрестности инвариантных многообразий и др.

Литература

[1] В. И. Арнольд, *Малые знаменатели I. Об отображении окружности на себя*, Изв. АН СССР, Сер. матем. 25 (1961), 21–86.

[2] —, *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*, УМН 18 (1963), 91–192.

[3] Н. Н. Боголюбов, *Теория возмущений в нелинейной механике*, Сб. Ин-та строит. механики АН УССР 14 (1950).

[4] —, *О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики*, Тр. Первой летней математической школы 1 (1964), „Наукова думка", Киев 11–101.

[5] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, „Наука", Москва 1974.

[6] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, *Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике*, „Наукова думка", Киев 1968.

[7] A. A. Kamel, *Perturbation method in the theory of non-linear oscillations*, Celestial Mech. (3), 1970.

[8] J. E. Campbell, *Introductory Treatise on Lie's Theory of Finite Continuous Transformation Groups*, Clarendon Press, Oxford 1903.

[9] А. Н. Колмогоров, *Общая теория динамических систем и классическая механика*, Междунар. матем. конгресс в Амстердаме. Физматгиз, Москва 1961, 137–208.

[10] —, *О динамических системах с интегральным инвариантом на торе*, ДАН СССР 93 (1953), 763–766.

[11] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний*, Вид-во ВУАН, Киев 1934.

[12] А. А. Лебедев, Л. С. Чернобровкин, *Динамика полета*, ГНТИ, Оборонгиз, Москва 1962.

[13] А. К. Лопатин, *Асимптотическое расщепление систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности*, Сб. Кибернетика и вычислительная техника, вып. 39 „Наукова думка", Киев 1977.

[14] Ю. А. Митропольский, *О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода обеспечивающего ускоренную сходимость*, Укр. мат. журн. 16 (1964), 475–501.

[15] —, *Метод ускоренной сходимости в задачах нелинейной механики*, Funkcial. Ekvac. 9 (1966), 27–42.

[16] —, *Метод усреднения в нелинейной механике*, „Наукова думка", Киев 1971.

[17] Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин, *О преобразовании систем нелинейных дифференциальных уравнений к нормальной форме*, Республ. межведомственный сб. Математическая физика, вып. 4, „Наукова думка", Киев 1973.

[18] —, —, *Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений*, Ин-т математики, препринт 79.11, Киев 1979.

[19] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, „Наука", Москва 1978.

[20] A. Povzner, *Linear methods in problems of non-linear differential equations with small parameter*, Internat. J. Non-Linear Mech. 9 (1974).

[21] П. К. Рашевский, *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, ОГИЗ, Гостехиздат, Москва 1947.

[22] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений*, „Наука", Москва 1973.

[23] Chihiro Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, New York 1964.

[24] А. М. Федорченко, *Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний*, Укр. мат. журн. 9 (1957).

Presented to the semester .
Mathematical Models and Methods
in Mechanics