74. *Diophantine approximations on manifolds*, Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie, Groupe d'Etudes sur les Problèmes Diophantiens, 1979/1980, 5.1–5.15.
75. *Reducibility of polynomials and rational points on algebraic curves*, Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie, Groupe d'Etudes sur les Problèmes Diophantiens, 1979/1980, 6.1–6.21.
76. *Приводимость многочленов и рациональные точки на алгебраических кривых*, Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 6, 1327–1330.
77. *Достижения и проблемы теории диофантовых приближений*, Успехи матем. наук, 1980, т. 35, № 4, 3–68.
78. *Reducibility of polynomials and rational points on algebraic curves*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou, Birkhäuser, Boston, Inc., 1980, 287–309.
79. *Диофантовы уравнения с неизвестными простыми числами*, Труды мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. М., 1981, т. 158. Аналитическая теория чисел, математический анализ и их приложения, 180–196.
80. *Метрическая теория чисел*, Мат. энциклопедия, Сов. энциклопедия, М., 1982, т. 3, 662–666.
81. *Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных*, Наука, Москва, 1982, 288с.
82. *Арифметические свойства алгебраических степенных рядов. Теория трансцендентных чисел и ее приложения: Всесоюз. конф. 2–4 февр.*, МГУ, М., 1983, 124–125.
83. *Arithmetic specializations in polynomials*, J. Reine Angew. Math., 1983, Band 340, 26–52.
84. *Арифметические и алгоритмические проблемы разложения многочленов на множители. Всесоюзная конференция „Теория чисел и ее приложения" 17–19 сент. 1985 г.*, Тбилиси, 1985, 237.
85. *Диофантовы приближения к значениям алгебраических функций*, Докл. АН БССР, 1985, т. 29, № 2, 101–103.
86. *Арифметические специализации в полях обращения многочленов*, Докл. АН БССР, 1986, т. 30, № 7, 581–584.
87. *Theory of arithmetic specializations*, New Advances in Transcendence Theory, Cambridge University Press, 1988, 366–374.

Поступило 11.4.1988 (1811)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1989)

О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов

В. И. Берник (Минск)

Памяти В. Г. Спринджука посвящается

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $H = H(P) = \max\limits_{0 \le i \le n} |a_i|$ высота $P(x)$. В 1932 году Малер [12] высказал предположение, согласно которого неравенство

$$|P(x)| < H^{-n-\varepsilon} \tag{1}$$

при любом $\varepsilon > 0$ имеет для почти всех $x \in \boldsymbol{R}$ лишь конечное число решений в полиномах $P(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$. Это предположение было доказано в 1964 году Спринджуком [7]–[10]. Через два года А. Бэйкер [11] доказал, что меру нуль имеет множество тех x для которых бесконечно часто выполняется неравенство

$$|P(x)| < \Psi^n(H). \tag{2}$$

Условия, налагаемые на функцию $\Psi(x)$ следующие: $\Psi(x)$ монотонно убывает и

$$\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty.$$

В этой же работе ставится гипотеза, доказательству которой посвящена настоящая работа.

Теорема. *Неравенство*

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H) \tag{3}$$

имеет для почти всех x лишь конечное число решений.

Заметим, что к моменту написания работы [11] эту гипотезу можно было доказать при $n = 1, 2, 3$. Метод, с помощью которого получена теорема позволяет доказать, что неравенство

$$|P(z)| < H^{-(n-2)/2}\Psi^{1/2}(H) \tag{4}$$

имеет для почти всех $z \in \boldsymbol{C}$ лишь конечное число решений в $P(z) \in \boldsymbol{Z}[z]$. Пусть $G(h)$ множество целочисленных полиномов $P(z) \in \boldsymbol{Z}[z]$ с условием $H(P) \leqslant h$ и при фиксированном $P(z)$ пусть $\mu(P)$ множество z, $|z| < s$, для которых выполняется неравенство (4). Тогда нетрудно показать, что если $a_n = H(P)$ и $|A|$ — мера Лебега множества A, то

$$|\mu(P)| > n^{-2}(s+1)^{-n+1}H^{-n}\Psi(H),$$

$$\sum_{P \in G(h)} |\mu(P)| > n^{-2}(s+1)^{-n+1} \sum_{H \leqslant h} \Psi(H). \tag{5}$$

Полученное неравенство с учетом факта „равномерного" распределения алгебраических чисел показывает, что вероятно при $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty$ неравенство (4) имеет для почти всех z бесконечное число решений. Аналогичное соображение можно применить и к неравенству (3), однако получить в этом случае неравенство (5) гораздо труднее. Разница в правых частях неравенств (2), (3) становится особенно наглядной, если положить $\Psi(H) = H^{-1}\ln^{-1-\varepsilon}H$. Краткое изложение данной статьи дано в [5].

Приведем несколько вспомогательных лемм, на которых будут базироваться дальнейшие рассуждения. Для их формулировки нам удобно ввести некоторые понятия и определения.

Через $c(n)$ будем обозначать постоянные, зависящие только от n и некоторого положительного заранее фиксированного числа ε. Над $c(n)$ мы будем производить действия по формальным правилам $c(n)+c(n) = c(n)$, $c(n)\cdot c(n) = c(n)$, смысл которых состоит в том, что сумма и произведение есть снова некоторые функции, зависящие от n и ε.

Нетрудно доказать, что при условиях, налагаемых на $\Psi(H)$ при достаточно больших H можно считать $\Psi(H) < c(n)H^{-1}$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon d^{-1}$, где $d = d(n)$ достаточно большая величина. Пусть $T = [\varepsilon_1^{-1}]$.

Используя ставшие традиционными в данных задачах рассуждения, перейдем к рассмотрению неравенства (3) в неприводимых многочленах $P(x)$, которые удовлетворяют условию

$$a_n = H(P). \tag{6}$$

Оказывается ([10], [11]) этого достаточно для решения задачи в общем виде. Класс неприводимых многочленов $P(x)$ с условием (6) и $a_n = H$ обозначим через $P_n(H)$. Определим

$$P_n = \bigcup_{H=1}^{\infty} P_n(H). \tag{7}$$

Пусть $P(x) \in P_n(H)$ и $\varkappa_1 = \varkappa_1(P), \ldots, \varkappa_n = \varkappa_n(P)$ — корни $P(x)$. Нетрудно получить неравенство $|\varkappa_i| \leqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Произведем упорядочивание корней $\varkappa_i(P)$, как в [10]. Простоты ради будем считать далее $j = 1$.

Определим действительные числа μ_i и целые l_i из соотношений

$$|\varkappa_1 - \varkappa_i| = H^{-\mu_i}, \quad (l_i - 1)/T \leqslant \mu_i < l_i/T, \quad 2 \leqslant i \leqslant n. \tag{8}$$

Используя (8) с каждым многочленом $P(x) \in P_n(H)$ будем связывать целочисленный вектор $\bar{s} = (l_2, \ldots, l_n)$. Нетрудно доказать, [1], что число таких векторов конечно и зависит только от n и ε. Многочлены $P(x) \in P_n(H)$ с одним и тем же $\bar{s}$ объединим в подмножество $P_n(H, \bar{s})$, а $P(x) \in P_n$ в подмножество $P_n(\bar{s})$. Далее рассматриваем неравенство (3) только при $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$ и $P(x) \in P_n(\bar{s})$. Пусть далее

$$p_i(P) = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{9}$$

$$S(\varkappa_i) = \{\omega \in \boldsymbol{R}\colon \min_{1 \leqslant j \leqslant n} |\omega - \varkappa_j| = |\omega - \varkappa_i|\}.$$

Лемма 1. *Пусть $P(x) \in P_n(H)$ и $\omega \in S(\varkappa_1)$. Тогда*

$$|\omega - \varkappa_1| \leqslant 2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_1)|}, \tag{10}$$

$$|\omega - \varkappa_1| \leqslant \min_{2 \leqslant j \leqslant n} \left(2^{n-j} \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_1)|} |\varkappa_1 - \varkappa_2| \ldots |\varkappa_1 - \varkappa_j|\right)^{1/j}. \tag{11}$$

Лемма 1 доказана в [1].

Лемма 2. *Пусть $\delta > 0$ — некоторое вещественное число, s_1 и s_2 натуральные числа, $H = H(s_1, s_2, \delta)$ — достаточно большое натуральное число. Пусть далее $P(x)$ и $Q(x)$ целочисленные взаимнопростые многочлены,*

$$\deg P(x) \leqslant s_1, \quad \deg Q(x) \leqslant s_2, \quad H(P) = H^{\nu_1}, \quad H(Q) = H^{\nu_2}.$$

Тогда если для всех ω из некоторого интервала I, $|I| = H^{-\eta}$, $\eta > 0$ выполняются неравенства

$$|P(\omega)| < H^{-\tau_1}, \quad |Q(\omega)| < H^{-\tau_2},$$

$$\min(\tau_1 + \nu_1, \tau_2 + \nu_2) = \mu,$$

то

$$\mu + 2\max(\mu - \eta, 0) \leqslant \nu_1 s_2 + \nu_2 s_1 + \delta. \tag{12}$$

Лемма 2 незначительно отличается от леммы 12 из работы [4]. Очевидные изменения надо внести в формулы (44), (45) этой работы.

Лемма 3. *Пусть $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$. Тогда*

$$|P^{(l)}(\varkappa_1)| < c(n) H^{1 - p_l + (n-l)\varepsilon_1}, \quad l = 1, \ldots, n-1.$$

Лемма 3 доказана в [1].

Лемма 4. *Пусть* $P_1(x), \ldots, P_k(x) \in \mathbf{R}[x]$ — *полиномы. Тогда*

$$c_1(n)H(P_1) \ldots H(P_k) < H(P_1 \ldots P_k) < c_2(n)H(P_1) \ldots H(P_k).$$

Лемма 4 доказана в [5].

Лемма 5. *Пусть* $I \subset \mathbf{R}$ — *некоторый интервал и* $B \subset I$ *измеримое множество действительных чисел,* $|B| > c(n)|I|$. *Пусть далее для всех* $\omega \in B$ *выполняется неравенство* $|P(\omega)| < H^{-w}$, $w > 0$, $\deg P(\omega) \leqslant n$. *Тогда для всех* $\omega \in I$ *верно неравенство*

$$|P(\omega)| < c(n)H^{-w}.$$

Лемма 5 доказана в [4].

Лемма 6. *Для каждого положительного целого* H *через* $\mathscr{U}(H)$ *обозначим конечное множество вещественных замкнутых интервалов. Пусть* $\mathscr{Y}(H)$ *обозначает подмножество* $\mathscr{U}(H)$ *такое, что для каждого* $I \in \mathscr{Y}(H)$ *существует* $J \in I$, $J \in \mathscr{U}(H)$, *для которого*

$$|I \cap J| \geqslant \tfrac{1}{2}|I|.$$

Пусть $V(H)$ *обозначает объединение точек интервалов* I *из* $\mathscr{Y}(H)$ *и пусть* $v(H)$ *обозначает объединение интервалов* $I \cap J$, *где* $I \in \mathscr{Y}(H)$ *и* $J \neq I$, $J \in \mathscr{U}(H)$. *Далее, пусть* W *и* w *обозначают множества точек, содержащихся в бесконечно многих* $V(H)$ *и в бесконечно многих* $v(H)$ *соответственно. Тогда если* w *имеет нулевую меру, то и* W *также имеет нулевую меру.*

Лемма 6 доказана в [11].

Лемма 7. *Неравенство*

$$|P(\omega)| < H^{-(n-1)-\delta} \tag{13}$$

при любом $\delta > 0$ *имеет для почти всех* ω *лишь конечное число решений в приводимых целочисленных многочленах степени не выше* n.

Доказательство. Будем рассматривать только $\omega \in S(\varkappa_j)$ при фиксированном j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Обозначим через $S(n)$ множество таких ω, для которых неравенство (13) выполняется бесконечно часто. Пусть $M(H)$ — множество многочленов $P(x)$ с условием $H(P) = H$, $H > H_0(\delta)$. Положим

$$M_t = \bigcup_{2^t \leqslant H < 2^{t+1}} M(H), \qquad M = \bigcup_t M_t, \qquad t > c(n)\ln H_0(\delta).$$

Если для $P(x) \in M_t$ неравенство (13) выполняется для всех x из некоторого интервала $S(P)$, то по лемме 4 существует многочлен $d(x)$, делящий $P(x)$, который на множестве $S_1(P)$, $|S_1(P)| > (1/n)|S(P)|$ удовлетворяет неравенству

$$|d(x)| < c(n)H(d)^{-n+1-\delta}, \qquad \deg d \leqslant n-1. \tag{14}$$

По лемме 5 неравенство (14) выполняется для всех $x \in S(P)$ разве что с другой величиной $c(n)$. Рассмотрим три возникающие возможности.

(а) Если $H(d) > 2^{t\varepsilon/2(n+1)n^2}$, то используя теорему Спринджука [10], заключаем, что множество $S = \bigcup_{P \in M} S(P)$ может быть покрыто системой интервалов с суммарной длиной не превосходящей любого наперед заданного положительного числа.

(б) Если

$$H(d) \leqslant 2^{t\varepsilon/2(n+1)n^2}, \qquad |d(\omega)| < 2^{-t\varepsilon/n} \tag{15}$$

на множестве $B_1(P)$, $|B_1(P)| > (1/n)|S(P)|$, то опять применим лемму 5 и получим для $\omega \in S(P)$

$$|d(\omega)| < c(n)2^{-t\varepsilon/n}. \tag{16}$$

Применим лемму 5. Получим, что $|S(P)| < c(n)2^{-t\varepsilon/n^2}$. Поскольку число многочленов $d(\omega)$ с условием $H(d) \leqslant 2^{t\varepsilon/2(n+1)n^2}$ не превосходит $c(n)2^{t\varepsilon/2n^2}$, то

$$\sum_{d,\, H(d) \leqslant 2^{t\varepsilon/2(n+1)n^2}} |S(P)| < c(n)2^{-t\varepsilon/2n^2}.$$

Так как ряд $\sum_t 2^{-t\lambda}$ сходится при $\lambda > 0$, то лемма доказана.

(в) Осталось предположить, что неравенство (15) не выполняется на множестве $B_1(P)$ с условием $|B_1(P)| > (1/n)S(P)$. Тогда на множестве $B_2(P) = S(P) \setminus B_1(P)$, $|B_2(P)| > \frac{1}{2}|S(P)|$ выполняется неравенство $|d(\omega)| > 2^{-t\varepsilon/n}$. Положим $P_1(\omega) = P(\omega)d^{-1}(\omega)$. Из (13), используя леммы 4 и 5, получим

$$|P_1(\omega)| < c(n)H^{-n-1-\frac{n-1}{n}\delta}, \qquad c(n)2^{\frac{t(1-\varepsilon)}{n^3}} < H(P_1) < 2^{t+1}.$$

Далее рассуждаем как в (а). Лемма доказана.

Доказательство гипотезы мы разобъем на несколько этапов.

Предложение 1. *Если*

$$n-1+2n\varepsilon_1 < l_2T^{-1}+p_1, \tag{17}$$

то неравенство (3) *имеет для почти всех* x *лишь конечное число решений.*

Доказательство предложения 1 при $l_2T^{-1}+p_1 > n$ проведено в [10]. Поэтому будем считать, что

$$n-1+2n\varepsilon_1 < l_2T^{-1}+p_1 < n. \tag{18}$$

Воспользуемся неравенством $\Psi(H) < H^{-1}$ [2]. Тогда (3) примет вид

$$|P(\omega)| < H^{-n}. \tag{19}$$

Определим

$$P_t(\bar{s}) = \bigcup_{2^t \leqslant H < 2^{t+1}} P_n(H, \bar{s}).$$

Из неравенства (11) при $j = n$ заключаем, что все $\omega \in \mathbf{R}$, для которых выполняется неравенство (19) находятся внутри интервала $[-3, 3]$. Разобъем его на равные интервалы I длиной $|I| = H^{-\sigma}$, $\sigma = n+1-p_1-0{,}5\varepsilon_1$. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *принадлежит интервалу* I, если существует $\omega \in I$, что $|P(\omega)| < H^{-n}$. Пусть каждому интервалу I принадлежит не более одного многочлена $P(\omega) \in P_t(\bar{s})$. Тогда из (9) и (10) заключаем, что $\tau(P)$ — мера тех $\omega \in S(\varkappa_1)$, для которых выполняется неравенство (19), не превосходит $c(n)2^{-t(n+1-p_1)}$. Число многочленов не превышает количество интервалов I. Отсюда и из (18) получаем

$$\sum_{P(x)\in P_t(\bar{s})} \tau(p) < c(n)\sum_t 2^{t(-n-1+p_1+n+1-p_1-0{,}5\varepsilon_1)} < c(n)\sum_t 2^{-0{,}5t\varepsilon_1} < \infty.$$

Применив известную лемму Бореля–Кантелли, получаем доказательство предложения 1. Теперь предположим, что существуют такие интервалы I, которым принадлежат два или более многочленов $P(\omega) \in P_t(\bar{s})$. Покажем, что в этом случае проходим к противоречию. Пусть $P(x)$, $Q(x) \in I$, тогда существуют такие точки ω_1, $\omega_2 \in I$, что

$$\max(|P(\omega_1)|, |P(\omega_2)|) < H^{-n}. \tag{20}$$

Пусть $\varkappa_1(P)$ и $\varkappa_1(Q)$ ближайшие к ω_1 и ω_2 корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Из (20) и (10) получаем

$$\max(|\omega_1-\varkappa_1(P)|, |\omega_2-\varkappa_1(Q)|) < c(n)H^{-n-1+p_1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)| &\leqslant |\varkappa_1(P)-\omega_1|+|\omega_1-\omega_2|+|\omega_2-\varkappa_1(Q)| \\ &< c(n)(H^{-n-1+p_1}+H^{-\sigma}) < c(n)H^{-\sigma}. \end{aligned} \tag{21}$$

Оценим разность $|\varkappa_1(P)-\varkappa_i(Q)|$, $i = 2, \ldots, n$, учитывая что по (18) $l_2T^{-1}-\varepsilon_1 < n+1-p_1$.

$$\begin{aligned} |\varkappa_1(P)-\varkappa_i(Q)| &< |\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)|+|\varkappa_1(Q)-\varkappa_i(Q)| \\ &< c(n)(H^{-\sigma}+H^{-l_2T^{-1}+\varepsilon_1}) < c(n)H^{-l_2T^{-1}+\varepsilon_1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из (21) и (22) получаем

$$\prod_{i=1}^{n} |\varkappa_1(P)-\varkappa_i(Q)| < c(n)H^{-\sigma-p_1+(n-1)\varepsilon_1}. \tag{23}$$

Аналогично оценим

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} |\varkappa_2(P)-\varkappa_i(Q)| &< c(n)\prod_{i=1}^{n}\left(|\varkappa_2(P)-\varkappa_1(P)|+|\varkappa_1(P)-\varkappa_1(Q)|+|\varkappa_1(Q)-\varkappa_i(Q)|\right) \\ &< c(n)H^{-l_2T^{-1}-p_1+n\varepsilon_1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ из $P_t(\bar{s})$ они не имеют общих корней и модуль их результанта $|R(P, Q)| \geqslant 1$. Из (23), (24)

$$\begin{aligned} 1 \leqslant |R(P, Q)| &< c(n)2^{2tn}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\varkappa_i(P)-\varkappa_j(Q)| \\ &< c(n)2^{t(2n-\sigma-l_2T^{-1}-2p_1+(2n-1)\varepsilon_1)} < c(n)2^{-t\varepsilon_1/2}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство при больших t противоречиво, что показывает, что интервалы I, которым принадлежит более одного многочлена не существуют.

Предложение 2. *Если*

$$2-\varepsilon/2 \leqslant l_2T^{-1}+p_1 \leqslant n-1+2n\varepsilon_1, \tag{26}$$

то неравенство (3) *имеет для почти всех* x *лишь конечное число решений.*

Доказательство. От неравенства (3) снова перейдем к неравенству (17). Положим

$$k = n+1-l_2T^{-1}+p_1. \tag{27}$$

Запишем k в виде $k = [k]+\{k\}$ и предположим, что

$$\varepsilon < \{k\}. \tag{28}$$

Тогда из (26)–(28) получаем $n-[k] \geqslant 2$. Разобъем $[-3, 3]$ на равные отрезки, длина каждого из которых равна $H^{-\sigma_1}$, $\sigma_1 = l_2T^{-1}-0{,}8\{k\}+(n+1)\varepsilon_1$. Пусть $\mathscr{P}(I)$ число многочленов, принадлежащих I. Если $|\mathscr{P}(I)| < c(n)H^{\nu}$, $\nu = [k]-1+0{,}2\{k\}-0{,}1\varepsilon$, то суммарная мера тех $\omega \in [-3, 3]$, для которых хотя бы при одном $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$ выполняется неравенство (19) оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned} &c(n)H^{-n-1+p_1}H^{l_2T^{-1}+0{,}8\{k\}+(n+1)\varepsilon_1}H^{[k]-1+0{,}2\{k\}-0{,}1\varepsilon} \\ &\qquad < c(n)H^{-1-0{,}1\varepsilon+(n+1)\varepsilon_1} < c(n)H^{-1-0{,}01\varepsilon}. \end{aligned}$$

Так как ряд $\sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{-1-0{,}01\varepsilon}$ сходится, то доказательство предложения 2 в этом случае закончено. Остается предположить, что существуют такие I, что

$$|\mathscr{P}(I)| > c(n)H^{[k]-1}H^{0{,}2\{k\}-0{,}1\varepsilon}.$$

Зафиксируем один из таких интервалов I и занумеруем $P_1(x), \ldots, P_{m_I}(x)$, принадлежащие I. Два таких многочлена

$$P_i(x) = Hx^n + a_{n-1}^{(i)}x^{n-1} + \ldots + a_1^{(i)}x + a_0^{(i)},$$
$$P_j(x) = Hx^n + a_{n-1}^{(j)}x^{n-1} + \ldots + a_1^{(j)}x + a_0^{(j)}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant m_I,$$

объединим в один и тот же класс, если

$$a_{n-1}^{(i)} = a_{n-1}^{(j)}, \quad \ldots, \quad a_{n-[k]+1}^{(i)} = a_{n-[k]+1}^{(j)}.$$

Применим принцип ящиков Дирихле. Так как число различных классов не превосходит $c(n)H^{[k]-1}$, то среди $c(n)H^{v}$ многочленов существует не менее $c(n)H^{0{,}2\{k\}-0{,}1\varepsilon}$, принадлежащих одному и тому же классу. Занумеруем эти многочлены $P_0(x), \ldots, P_{l_I}(x)$, $l_I = c(n)H^{0{,}2\{k\}-0{,}1\varepsilon}$ и образуем новые многочлены

$$t_1(x) = P_1(x) - P_0(x), \quad \ldots, \quad t_{l_I}(x) = P_{l_I}(x) - P_0(x).$$

Все многочлены $t_i(x)$ различны, имеют степень не выше $n-[k]$ и высоту не более $2H$. Разложим любой многочлен $P(x)$, принадлежащий I в ряд Тэйлора в окрестности корня $\varkappa_1(p)$

$$P(\omega) = P'(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1) + \tfrac{1}{2}P''(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)^2 + \ldots + (1/n!)P^{(n)}(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)^n. \tag{29}$$

Поскольку существует такая точка $\omega_0 \in I$, что $|P(\omega_0)| < c(n)H^{-n}$, то из (10) получаем

$$|\omega_0 - \varkappa_1| < c(n)H^{-n-1+p_1+(n-1)\varepsilon_1}. \tag{30}$$

Так как для $\omega \in I$ имеем $|\omega-\omega_0| \leqslant |I| = H^{-l_2T^{-1}-0{,}8\{k\}+(n+1)\varepsilon_1}$ и по (26) $l_2T^{-1}+p_1 \leqslant n-1+2n\varepsilon_1$, то для любой точки $\omega \in I$ получаем

$$|\omega - \varkappa_1| < c(n)H^{-l_2T^{-1}-0{,}8\{k\}+(n+1)\varepsilon_1}. \tag{31}$$

Используя лемму 3 имеем

$$|P'(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)| < c(n)H^{-(n-k)-0{,}8\{k\}+2(n+1)\varepsilon_1}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}|P''(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)^2| &< c(n)H^{1-p_2+(n-2)\varepsilon_1-2l_2T^{-1}}H^{-1{,}6\{k\}+2(n+1)\varepsilon_1} \\ &< c(n)H^{-(n-k)-0{,}8\{k\}+2(n+1)\varepsilon_1},\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}|P^{(i)}(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)^i| &< c(n)H^{1-p_i+(n-i)\varepsilon_1}H^{-0{,}8i\{k\}+i(n+1)\varepsilon_1} \\ &< c(n)H^{-(n-k)-0{,}8\{k\}+2(n+1)\varepsilon_1}.\end{aligned} \tag{34}$$

Из (29), (32)–(34) следует для $\omega \in I$

$$|P(\omega)| < c(n)H^{-(n-k)-0{,}8\{k\}+2(n+1)\varepsilon_1}. \tag{35}$$

Поскольку неравенство (35) выполняется для любого $P(x) \in P_n(H, \bar{s})$, принадлежащего I, то для любого многочлена $t_i(\omega)$, $1 \leqslant i \leqslant l_I$,

$$|t_i(\omega)| < c(n)H^{-(n-k)-0{,}8\{k\}+2(n+1)\varepsilon_1}. \tag{36}$$

Если все $t_i(\omega) = a_i t(\omega)$, $a_i \in \mathbf{Z}$ то среди $t_i(\omega)$ существует многочлен $z(t)$ высота которого не превосходит $c(n)H^{1-0{,}2\{k\}+0{,}1\varepsilon}$. Из (36) получаем

$$|z(t)| < c(n)H(z(t))^{-\frac{(n-k)+0{,}8\{k\}-2(n+1)\varepsilon_1}{1-0{,}2\{k\}+0{,}1\varepsilon}}. \tag{37}$$

Так как при выполнении (28)

$$\frac{n-k+0{,}8\{k\}-2(n+1)\varepsilon_1}{1-0{,}2\{k\}+0{,}1\varepsilon} > n-[k],$$

то по теореме Спринджука [10] такие интервалы I покрываются системой интервалов со сколь угодно малой мерой. Если среди $t_i(\omega)$ имеются приводимые, то применим лемму 7, поскольку $n-k+0{,}8\{k\}-2(n+1)\varepsilon_1 > n-[k]-1$. Если же среди l_I многочленов имеются хотя бы два без общих корней, то применим лемму 2. Здесь при условии (28) достаточно считать

$$\mu = n-k+0{,}8\{k\}-2(n+1)\varepsilon_1+1, \quad s_1 = s_2 = n-[k],$$
$$\eta = l_2T^{-1}+0{,}8\{k\}+(n+1)\varepsilon_1, \quad v_1 = v_2 = 1.$$

Получаем

$$l_2T^{-1}+3p_1+0{,}8\{k\}-4(n+1)\varepsilon_1 \leqslant 2l_2T^{-1}+2p_1-2+2\{k\}+\delta. \tag{38}$$

Поскольку $p_1 \geqslant l_2T^{-1}$, то при $\delta = \varepsilon$ неравенство (38) противоречиво. Случай

$$0 \leqslant \{k\} \leqslant \varepsilon \tag{39}$$

требует незначительных изменений, связанных с выбором параметров. Заметим, что из (39) и (26), (27) следует, что $[k] \geqslant 2$ и поэтому $n-[k]+1 \leqslant n-1$. Положим $\eta = l_2T^{-1}-0{,}8+(n+1)\varepsilon_1$, $v = [k]-1{,}8-0{,}1\varepsilon$ и проведем аналогичные рассуждения.

Предложение 3. *Если*

$$\varepsilon < l_2T^{-1}+p_1 < 2-\varepsilon/2 \tag{40}$$

то неравенство (3) *имеет для почти всех* x *лишь конечное число решений.*

Доказательство. Многочлены $P(x) = Hx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ из множества $P_n(H, \bar{s})$ объединим в один класс $P_n(H, \bar{s}, \bar{a})$, если они имеют один и тот же вектор $\bar{a} = (a_{n-1}, \ldots, a_2)$. Пусть $\sigma(P)$ — множество вещественных чисел ω, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega - \varkappa_1| < 2^n H^{-n+1} \Psi(H) |P'(\varkappa_1)|^{-1}, \tag{41}$$

а $\sigma_{n-2}(P)$ — множество вещественных ω, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega - \varkappa_1| < 2^n |P'(\varkappa_1)|^{-1} H^{-1}. \tag{42}$$

Ясно, что $\sigma(P) \subset \sigma_{n-2}(P)$. Из (10) получаем, что все $\omega \in S(\varkappa_1)$, удовлетворяющие неравенствам $|P(\omega)| < H^{-n+1}\Psi(H)$ и $|P(\omega)| < H^{-1}$ принадлежат множествам $\sigma(P)$ и $\sigma_{n-2}(P)$ соответственно. Пусть $\omega \in \sigma_{n-2}(P)$. Тогда

$$P(\omega) = (\omega - \varkappa_1) P'(\varkappa_1) + \tfrac{1}{2} P''(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^2 + \ldots + (1/n) P^{(n)}(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^n. \tag{43}$$

Далее имеем

$$|P'(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)| < 2^n H^{-1}, \tag{44}$$

$$|\tfrac{1}{2} P''(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^2| < c(n) H^{1 - p_2 - 2 + 2p_1 + 2(n-1)\varepsilon_1 - 2} < c(n) H^{p_1 + l_2 T^{-1} + 2(n-1)\varepsilon_1 - 3} < c(n) H^{-1-\varepsilon_1} \tag{45}$$

$$\left| \frac{1}{i!} P^{(i)}(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^i \right| < c(n) H^{1 - p_i - i + ip_1 + i(n\varepsilon_1 - 1)} < c(n) H^{-1-\varepsilon}. \tag{46}$$

Из неравенств (43)–(46) получаем при $\omega \in \sigma_{n-2}(P)$

$$|P(\omega)| < c(n) H^{-1}. \tag{47}$$

Интервал $\sigma_{n-2}(P)$ назовем несущественным, если в классе $P_n(H, \bar{s}, \bar{a})$ найдется такой многочлен $Q(x)$, что

$$|\sigma_{n-2}(P) \cap \sigma_{n-2}(Q)| \geqslant \tfrac{1}{2} |\sigma_{n-2}(P)|. \tag{48}$$

В противном случае интервал $\sigma_{n-2}(P)$ будем называть существенным.

Если интервал $\sigma_{n-2}(P)$ несущественный, то на интервале $J = \sigma_{n-2}(P) \cap \sigma_{n-2}(Q)$ многочлен

$$R(\omega) = P(\omega) - Q(\omega)$$

удовлетворяет условиям

$$|R(\omega)| < c(n) H^{-1}, \quad \deg R(\omega) = 1. \tag{49}$$

Так как длина интервала J не менее $c(n) H^{-1} |P'(\varkappa_1)|^{-1}$, то высота многочлена $R(\omega)$ удовлетворяет неравенству

$$H(R) < c(n) |P'(\varkappa_1)|. \tag{50}$$

Из (40), (49) и (50) получаем для всех $\omega \in J$

$$|R(\omega)| < c(n) H(R)^{-1-\varepsilon}.$$

По лемме 6 множество ω, попадающих в бесконечное число интервалов $\sigma_{n-2}(P)$ имеет меру нуль.

Если $\sigma_{n-2}(P)$ — существенный интервал, то каждая точка $\omega \in [-3, 3]$ принадлежит не более, чем трем существенным интервалам и поэтому

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{a})} |\sigma_{n-2}(P)| \leqslant 18.$$

Из неравенства $|\sigma(P)| \leqslant |\sigma_{n-2}(P)| H^{-n+2} \Psi(H)$ получаем

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{a})} |\sigma(P)| < c(n) H^{-n+2} \Psi(H),$$

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s})} |\sigma(P)| < c(n) \Psi(H).$$

Поскольку ряд $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$ сходится, то по лемме Бореля–Кантелли множество ω, попадающих в бесконечное число существенных областей $\sigma_{n-2}(P)$ имеет меру нуль.

Предложение 4. *Если*

$$l_2 T^{-1} + p_1 < \varepsilon,$$

то неравенство (3) *имеет для почти всех x лишь конечное число решений.*

Доказательство. Многочлены $P(x) = Hx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ из множества $P_n(H, \bar{s})$ объединим в один и тот же класс $P_n(H, \bar{s}, \bar{b})$, если они имеют один и тот же вектор $\bar{b} = (a_{n-1}, \ldots, a_1)$. Определим $\sigma_{n-1}(P)$ как множество действительных чисел ω, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega - \varkappa_1| < 2^{-n-1}(n+1)^{-1} |P'(\varkappa_1)|^{-1}. \tag{51}$$

Опять, как в (43) разложим $P(\omega)$ в ряд Тэйлора на интервале $\sigma_{n-1}(P)$ и оценим при $H > H_0(n, \varepsilon)$ каждое слагаемое разложения, используя неравенство $|P^{(i)}(\omega)| < i!\, 3^n (n+1) H$ для $\omega \in [-3, 3]$. Получим

$$|P'(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)| < 2^{-n-1}(n+1)^{-1}, \tag{52}$$

$$|\tfrac{1}{2} P''(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^2| < \tfrac{1}{2} 3^n \cdot 2!\, H \cdot 2^{-2n-2} |P'(\varkappa_1)|^{-2} < 2^{-n-1}(n+1)^{-1}, \tag{53}$$

$$\left| \frac{1}{i!} P^{(i)}(\varkappa_1)(\omega - \varkappa_1)^i \right| < 3^n (n+1) H \cdot 2^{-ni} H^{-i + i\varepsilon} n^{-i} < (n+1)^{-1} 2^{-n-1}. \tag{54}$$

Из (52)–(54) получаем

$$|P(\omega)| < 2^{-n-1}. \tag{55}$$

Теперь заметим, что

$$\sigma_{n-1}(P) \cap \sigma_{n-1}(Q) = \varnothing \tag{56}$$

для любых двух многочленов $P(x) \not\equiv Q(x)$ из класса $P_n(H, \bar{s}, \bar{b})$, так как в противном случае из (55) получили бы

$$1 \leqslant |R(\omega)| = |P(\omega) - Q(\omega)| \leqslant 2^{-n}.$$

Так как $|\sigma(P)| \leqslant |\sigma_{n-1}(P)| H^{-n+1} \Psi(H) 2^{-n-1}(n+1)^{-1}$,

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{b})} |\sigma_{n-1}(P)| \leqslant 6,$$

то последовательно имеем

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s})} |\sigma(P)| < c(n) \sum_{\bar{b}} \sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{b})} |\sigma_{n-1}(P)| H^{-n+1} \Psi(H) < c(n) \Psi(H).$$

Опять применим лемму Бореля–Кантелли.

Предложения 1–4, очевидно, доказывают теорему.

Литература

[1] В. И. Берник, *Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 44 (1) (1980), 24–25.

[2] — *О точном порядке приближения почти всех точек параболы*, Матем. заметки 26:5 (1979), 657–665.

[3] В. И. Берник, Ф. Ф. Желудевич, *О целочисленных многочленах, принимающих малые значения на некотором интервале*, Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук 3 (1981), 27–33.

[4] В. И. Берник, *Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений*, Acta Arith. 42 (1983), 219–253.

[5] — *Доказательство гипотезы А. Бэйкера в метрической теории трансцендентных чисел*, ДАН СССР 277:5 (1984), 1036–1039.

[6] А. О. Гельфонд, *Трансцендентные и алгебраические числа*, Гостехиздат, Москва 1952, 224 с.

[7] В. Г. Спринджук, *О гипотезе Малера*, ДАН СССР 154:4 (1964), 783–786.

[8] — *Еще о гипотезе Малера*, ДАН СССР 155:1 (1964), 54–56.

[9] — *Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 29 (2) (1965), 379–436.

[10] — *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Наука и техника, Минск 1967, 194 с.

[11] A. Baker, *On a theorem of Sprindžuk*, Proc. Royal Soc. London A 292 (1966), 92–104.

[12] K. Mahler, *Über das Mass der Menge aller S-Zahlen*, Math. Ann. 106 (1932), 131–139.

Поступило 19.8.1985
и в исправленной форме 23.10.1986 (1536)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1989)

Оценки числа нулей функций некоторых классов

Ю. В. Нестеренко (Москва)

Памяти В. Г. Спринджука посвящается

Пусть $\xi \in \boldsymbol{C}$ и $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ произвольные функции комплексного переменного, аналитические в точке ξ. Легко проверить, что для любых натуральных чисел n и h существует многочлен $P \in \boldsymbol{C}[z, x_1, \ldots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, $\deg_z P \leqslant n$, $\deg_{\bar{x}} P \leqslant h$ такой, что функция $R(z) = P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z))$ имеет в точке $z = \xi$ нуль кратности не меньшей, чем $\gamma_0(n+1)h^m$, где $\gamma_0 = 1/m!$. Кратность с которой в действительности начинается разложение в точке $z = \xi$ зависит от индивидуальных свойств функций $f_i(z)$. В частности, если функции алгебраически зависимы над $\boldsymbol{C}(z)$, то для достаточно больших n и h существует многочлен P такой, что $R(z) \equiv 0$. Если же функции $f_i(z)$ алгебраически независимы над $\boldsymbol{C}(z)$, то оценка сверху $\operatorname{ord}_\xi R(z)$ — кратности нуля функции $R(z)$ в точке $z = \xi$ через параметры n и h может служить мерой алгебраической независимости функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над $\boldsymbol{C}(z)$.

Целью статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — различные комплексные числа, функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\boldsymbol{C}(z)$, составляют решение системы дифференциальных уравнений*

$$(1) \qquad y_k' = q_{k0} + \sum_{i=1}^{m} q_{ki} y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \quad q_{ki} \in \boldsymbol{C}(z)$$

и аналитичны в точках $\xi_1, \ldots, \xi_q$. Тогда для каждого многочлена $P \in \boldsymbol{C}[z, x_1, \ldots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, имеет место неравенство

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z)) \leqslant \gamma_1 (\deg_z P + q)(\deg_{\bar{x}} P)^m,$$

где γ_1 — постоянная, зависящая только от системы (1) и функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$.

В 1977 г. в работе [3] был доказан и использовался для оценки меры