ACTA ARITHMETICA
LIII (1990)

Экстремальные двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве

В. И. Берник, Э. И. Ковалевская (Минск)

Памяти
Владимира Геннадиевича Спринджука
посвящается

1. В метрической теории диофантовых приближений зависимых величин получен новый класс двумерных экстремальных многообразий $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \subset \boldsymbol{R}^4$. Доказательство основывается на сведении к совместным приближениям и дальнейшей линеаризации полученной системы. Следствием результата является доказательство гипотезы М. М. Скриганова [4] о конечности числа лакун в спектре двумерного оператора Шредингера для почти всех (в смысле меры Лебега) точек $\boldsymbol{R}^2$.

Условимся в обозначениях: $E = [0, 1) \times [0, 1)$, $K = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2)$ — прямоугольники в $\boldsymbol{R}^2$; ε, ε_1, ε_2 — положительные произвольно малые действительные числа; $0 \neq (a_1, \ldots, a_n) \in \boldsymbol{Z}^n$, $a = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$, $\|\alpha\|$ — расстояние от действительного α до ближайшего целого. В качестве меры берем меру Лебега в $\boldsymbol{R}^2$, $|A|$ — мера измеримого множества A; $\bar{x} = (x_1, x_2)$ — точка из $\boldsymbol{R}^2$; $x \sim y$ означает, что x эквивалентно y; $x \ll y$ равносильно $x = O(y)$; $x \asymp y$ равносильно одновременному выполнению $x \ll y$ и $y \ll x$.

Пусть функции $f_i(\bar{x}), f_{ij}(\bar{x})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ определены в K. Напомним определения. Поверхность $F(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})) \subset \boldsymbol{R}^n$ называется экстремальной ([6], с. 65), если неравенство

$$\|a_1 f_1(\bar{x}) + \ldots + a_n f_n(\bar{x})\| < a^{-n-\varepsilon}$$

имеет бесконечно много целых решений $(a_1, \ldots, a_n)$ только для $\bar{x}$ из множества меры нуль.

Многообразия $F_i = (f_{i1}(\bar{x}), \ldots, f_{in}(\bar{x})) \subset \boldsymbol{R}^n$ $(i = 1, 2)$ называются совместно экстремальными [2], если система неравенств

$$\begin{cases} \|a_1 f_{11}(\bar{x}) + \ldots + a_n f_{1n}(\bar{x})\| < a^{-n/2-\varepsilon}, \\ \|a_1 f_{21}(\bar{x}) + \ldots + a_n f_{2n}(\bar{x})\| < a^{-n/2-\varepsilon}, \end{cases}$$

имеет бесконечно много целых решений $(a_1, \dots, a_n)$ только для $\bar{x}$ из множества меры нуль.

Введем класс функций D, состоящий из пар функций $(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы в K;

2) для почти всех $\bar{x} \in K$ выполняется

$$\Delta(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \partial^2 f_1/\partial x_1^2 & \partial^2 f_1/\partial x_1 \partial x_2 \\ \partial^2 f_2/\partial x_1^2 & \partial^2 f_2/\partial x_1 \partial x_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

3) пусть при замене переменных

$$y_i = \partial f_i(\bar{x})/\partial x_1 \quad (i = 1, 2) \tag{1}$$

прямоугольник K переходит во множество $f(K) \subset \boldsymbol{R}^2$, функции $\partial f_i(\bar{x})/\partial x_2$ переходят в функции $g_i(\bar{y})$ $(i = 1, 2)$, удовлетворяющие условиям: для почти всех $\bar{y} = (y_1, y_2) \in f(K)$ выполняется

$$W_i(\bar{y}) = \begin{vmatrix} \partial g_1/\partial y_i & \partial g_2/\partial y_i \\ \partial^2 g_1/\partial y_i^2 & \partial^2 g_2/\partial y_i^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$I(\bar{y}) = \begin{vmatrix} \partial g_1/\partial y_1 & \partial g_2/\partial y_1 \\ \partial g_1/\partial y_2 & \partial g_2/\partial y_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\partial g_1/\partial y_2 \neq 0, \quad \partial g_2/\partial y_1 \neq 0, \tag{2}$$

$$\partial^2 g_i/\partial y_i^2 \neq 0 \quad (i = 1 \text{ или } 2), \tag{3}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{(\partial g_2/\partial y_2 - \partial g_1/\partial y_1)^2}{4\partial g_1/\partial y_2} \neq 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{(\partial g_1/\partial y_1 - \partial g_2/\partial y_2)^2}{4\partial g_2/\partial y_1} \neq 0;$$

4) при любых фиксированных целых $a_1, \dots, a_n$ и фиксированных $\bar{x}_0 \in K$, $\bar{y}_0 \in f(K)$ любые интервалы $I(x_{01}) \subseteq [\alpha_2, \beta_2)$, $I(x_{02}) \subseteq [\alpha_1, \beta_1)$ конечной длины можно разбить на конечное, не зависящее от $a_1, \dots, a_4$ число подынтервалов, в каждом из которых функции

$$a_1 x_{01} + a_2 x_2 + a_3 f_1(x_{01}, x_2) + a_4 f_2(x_{01}, x_2),$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_{02} + a_3 f_1(x_1, x_{02}) + a_4 f_2(x_1, x_{02})$$

монотонны;

5) при обозначениях

$$G(\bar{y}) = a_1 g_1(\bar{y}) + a_2 g_2(\bar{y}) \tag{4}$$

для результанта $R(P, Q, \bar{y})$ многочленов

$$P(v) = v^2 \psi_2(\bar{y}) + v\psi_1(\bar{y}) + \psi_0(\bar{y}),$$
$$Q(v) = v^3 \varphi_3(\bar{y}) + v^2 \varphi_2(\bar{y}) + v\varphi_1(\bar{y}) + \varphi_0(\bar{y}),$$

где

$$\psi_2(\bar{y}) = -\partial g_1/\partial y_2, \quad \psi_1(\bar{y}) = \partial g_1/\partial y_1 - \partial g_2/\partial y_2, \quad \psi_0(\bar{y}) = \partial g_2/\partial y_1, \tag{5}$$

$\varphi_j(\bar{y})$ — коэффициент при a_1^j $(0 \leqslant j \leqslant 3)$ в выражении

$$(\partial^2 G(\bar{y})/\partial y_1^2)(\partial G(\bar{y})/\partial y_2)^2 + (2\partial^2 G(\bar{y})/\partial y_1 \partial y_2)(\partial G(\bar{y})/\partial y_1)(\partial G(\bar{y})/\partial y_2) + (\partial^2 G(\bar{y})/\partial y_2^2)(\partial G(\bar{y})/\partial y_1)^2, \tag{6}$$

причем

$$\varphi_3(\bar{y}) \neq 0 \quad \text{для почти всех} \quad \bar{y} \in f(K), \tag{7}$$

выполняется условие

$$R(P, Q, \bar{y}) \neq 0 \quad \text{для почти всех} \quad \bar{y} \in f(K);$$

6) выполняются условия 5) при следующих изменениях: в соотношениях (5)–(7) переменные y_1, y_2 и функции g_1, g_2 меняются местами; $\tilde{\varphi}_j(\bar{y})$ — коэффициент при a_2^j $(0 \leqslant j \leqslant 3)$ в (6), где сделаны указанные перестановки; $R(\tilde{P}, \tilde{Q}, \bar{y})$ — результант многочленов $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, полученных при указанных перестановках, и $R(\tilde{P}, \tilde{Q}, \bar{y}) \neq 0$ для почти всех $\bar{y} \in f(K)$.

Отметим, что класс D достаточно широк, и, несмотря на громоздкое определение, условия 1)–6) легко проверяются.

Кроме того, заметим, что любую двумерную поверхность $F(\bar{x}) \in \boldsymbol{R}^4$ путем замены переменных можно представить в виде $F(\bar{x}) = (x_1, x_2, f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$. Доказана

Теорема. *Пусть функции $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x})$ принадлежат классу D, четырежды непрерывно дифференцируемы в K и такие, что 1, $x_1, x_2, f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$ линейно независимы над $\boldsymbol{Q}$. Тогда поверхность $F(\bar{x}) = (x_1, x_2, f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$ экстремальна в $\boldsymbol{R}^4$.*

2. Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 3$, $f_1(\bar{x}) = x_1, f_2(\bar{x}) = x_2, f_3(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})$ дважды непрерывно дифференцируемые в K функции, линейно независимые вместе с 1 над $\boldsymbol{Q}$. Двумерная поверхность $F(\bar{x})$ экстремальна, если*

1) поверхности $\partial F_k/\partial x_1 = (\partial f_3(\bar{x})/\partial x_1, \dots, \partial f_k(\bar{x})/\partial x_1)$, $\partial F_k/\partial x_2 = (\partial f_3(\bar{x})/\partial x_2, \dots, \partial f_k(\bar{x})/\partial x_2)$ совместно экстремальны для всех k $(3 \leqslant k \leqslant n)$,

2) выполняется условие 4) в определении класса функций D.

Доказательство см. в [1].

Лемма 2. *Пусть a_1, a_2 — целые числа, $|a_2| \geqslant |a_1|$, $\beta > 0$ — действительное число. Функции $g_1(\bar{y}), g_2(\bar{y})$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы в K. Пусть для $\bar{y} \in K$ выполняется: $|W_i(\bar{y})| > \beta$ $(i = 1, 2)$,*

$$|I(y)| > \beta, \tag{8}$$

где $W_i(\bar y)$, $I(\bar y)$ *определены в условии* 3) *для класса функций* D. *Положим*

$$\eta = \max\left[\sup_{\bar y\in K}|\partial g_1(\bar y)/\partial y_1|,\ \sup_{\bar y\in K}|\partial g_1(\bar y)/\partial y_2|\right], \tag{9}$$

$$\eta_i = \max\left[\sup_{\bar y\in K}|\partial g_1(\bar y)/\partial y_i|,\ \sup_{\bar y\in K}|\partial^2 g_1(\bar y)/\partial y_i^2|\right] \quad (i=1,2). \tag{10}$$

Тогда для функции $G(\bar y) = a_1 g_1(\bar y) + a_2 g_2(\bar y)$ *в каждой точке* $\bar y\in K$ *выполняется*

$$\max(|\partial G(\bar y)/\partial y_1|,\ |\partial G(\bar y)/\partial y_2|) > \beta|a_2|/2\eta, \tag{11}$$

$$\max(|\partial G(\bar y)/\partial y_i|,\ |\partial^2 G(\bar y)/\partial y_i^2|) > \beta|a_2|/2\eta_i \quad (i=1,2). \tag{12}$$

Доказательство. Докажем (11). Предположим противное. Пусть существует такое $\bar y_0\in K$, что выполняется неравенство, противоположное (11). Числа a_1, a_2 являются решением системы

$$a_1\partial g_1(\bar y_0)/\partial y_1 + a_2\partial g_2(\bar y_0)/\partial y_1 = \partial G(\bar y_0)/\partial y_1,$$

$$a_1\partial g_1(\bar y_0)/\partial y_2 + a_2\partial g_2(\bar y_0)/\partial y_2 = \partial G(\bar y_0)/\partial y_2.$$

Разрешая систему относительно a_2, в силу условий (8), (9) и $|a_2|\geqslant|a_1|$ получим

$$|a_2| = \begin{vmatrix} \partial g_1(\bar y_0)/\partial y_1 & \partial G(\bar y_0)/\partial y_1 \\ \partial g_1(\bar y_0)/\partial y_2 & \partial G(\bar y_0)/\partial y_2 \end{vmatrix} \cdot |I(\bar y_0)|^{-1} < \beta|a_2|(2\eta)^{-1}2\eta\beta^{-1} = |a_2|.$$

Полученное противоречие доказывает (11). Аналогично доказывается (12).

Лемма 3. *Пусть* $\delta>0$, $\delta_1>0$ — *действительные числа, функция* $f(x)$ *определена и* n *раз непрерывно дифференцируема на* (a,b), *причем* $|f^{(n)}(x)|>\delta$ *для всех* $x\in(a,b)$. *Пусть* $X_n(f)=\{x\in(a,b)\colon |f(x)|<\delta_1\}$. *Тогда*

$$|X_n(f)| < (2\delta_1\delta^{-1})^{1/n}.$$

Доказательство совпадает с доказательством леммы 4 в [3].

Лемма 4. *Пусть*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{4} a_j x^{4-j}, \quad Q(x) = \sum_{j=1}^{3} b_j x^{3-j}$$

— *многочлены с действительными коэффициентами*, $a_1\neq 0$, $b_1\neq 0$, $R(P,Q)$ — *результант многочленов* $P(x)$, $Q(x)$. *Пусть*

$$d_1 = (\max_{1\leqslant j\leqslant 4}|a_j|)\cdot|a_1|^{-1}+1, \quad d_2 = (\max_{1\leqslant j\leqslant 3}|b_j|)\cdot|b_1|^{-1}+1,$$

$$d = \max(2d_1, 2d_2, |a_1|, |b_1|), \quad \nu>0,\ \varepsilon_1>0,$$

$$\nu < \min(|b_3 - b_2^2/2b_1|,\ \varepsilon_1^3 2^{10} d^{20}\min(|a_1|, |b_1|)). \tag{13}$$

Тогда если

$$|R(P,Q)| > \varepsilon_1, \tag{14}$$

то система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < \nu, \\ |Q(x)| < \nu \end{cases} \tag{15}$$

не имеет решений в действительных числах x.

Доказательство. Если $Q(x)$ не имеет действительных корней, то в силу (13) лемма верна. Пусть β_1, β_2 — действительные корни $Q(x)$; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — корни $P(x)$, и α_1 — действительный корень. Предположим противное, т.е. что (15) имеет решение в $\boldsymbol{R}$. По определению

$$R(P,Q) = a_1^2 b_1^3 \prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{3}(\alpha_j-\beta_i). \tag{16}$$

Для корней многочлена известна оценка

$$|\alpha_j|\leqslant d_1, \quad |\beta_i|\leqslant d_2 \quad (1\leqslant j\leqslant 3;\ i=1,2). \tag{17}$$

Пусть β_1 — ближайший к α_1 корень. Тогда из (14), (16), (17) получаем

$$|\alpha_1-\beta_1| > \varepsilon_1 2^5 d^{10}. \tag{18}$$

По лемме 3 длина $l(\alpha_1)$ интервала, содержащего α_1 и точки, удовлетворяющие 1-му неравенству в (15), и длина $l(\beta_1)$ интервала, содержащего β_1 и точки, удовлетворяющие 2-му неравенству в (15), оцениваются следующим образом:

$$l(\alpha_1) < (2\nu|3a_1|^{-1})^{1/3}, \quad l(\beta_1) < (\nu|b_1|^{-1})^{1/2}.$$

Ясно, что если

$$|\alpha_1-\beta_1| < (l(\alpha_1)+l(\beta_1))/2, \tag{19}$$

то система (15) выполняется. В силу (13) неравенства (18), (19) противоречивы. Аналогично рассуждаем, если α_2,α_3 — также действительные корни.

Лемма 5. *Пусть на интервале* (a,b) *действительные функции* $f_1(x),\dots,f_n(x)$ *непрерывно дифференцируемы* $n-1$ *раз, и пусть вронскианы*

$$W(f_1,\dots,f_l) = \det(f_j^{(i)}(x))_{\substack{0\leqslant i\leqslant l-1\\ 1\leqslant j\leqslant l}} \quad (l=1,2,\dots,n)$$

не обращаются в нуль на (a,b). *Тогда любая линейная комбинация* $c_1f_1(x)+\dots+c_nf_n(x)$ *с действительными* $c_1,\dots,c_n$ *в совокупности отличными от нуля, имеет меньше чем* n *нулей на* (a,b).

Доказательство см. в [5], с. 216–217.

Лемма 6. *Пусть функция $f(x)$ определена и трижды непрерывно дифференцируема на (a, b). Пусть $f''(x) \neq 0$ почти всюду на (a, b). Тогда неравенство*

$$\max(\|ax\|, \|af(x)\|) < a^{-1/2-\varepsilon}$$

имеет бесконечно много целых решений $a > 0$ только для x из множества меры нуль.

Доказательство см. в [7].

3. Для доказательства теоремы сначала используем лемму 1. В силу леммы 1 и условий теоремы достаточно установить совместную экстремальность двух систем многообразий: 1) $\partial F/\partial x_1 = (\partial f_1(\bar{x})/\partial x_1, \partial f_2(\bar{x})/\partial x_1)$, $\partial F/\partial x_2 = (\partial f_1(\bar{x})/\partial x_2, \partial f_2(\bar{x})/\partial x_2)$ и 2) $\partial f_1(\bar{x})/\partial x_1$, $\partial f_1(\bar{x})/\partial x_2$ или $\partial f_2(\bar{x})/\partial x_1$, $\partial f_2(\bar{x})/\partial x_2$. Для этого рассмотрим две системы неравенств

$$(20)\qquad \begin{cases} \|a_1\partial f_1(\bar{x})/\partial x_1 + a_2\partial f_2(\bar{x})/\partial x_1\| < a^{-1-\varepsilon}, \\ \|a_1\partial f_1(\bar{x})/\partial x_2 + a_2\partial f_2(\bar{x})/\partial x_2\| < a^{-1-\varepsilon}, \end{cases}$$

$$(21)\qquad \begin{cases} \|a\partial f_1(\bar{x})/\partial x_1\| < a^{-1/2-\varepsilon}, \\ \|a\partial f_1(\bar{x})/\partial x_2\| < a^{-1/2-\varepsilon}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \|a\partial f_2(\bar{x})/\partial x_1\| < a^{-1/2-\varepsilon}, \\ \|a\partial f_2(\bar{x})/\partial x_2\| < a^{-1/2-\varepsilon}. \end{cases}$$

Используя соображения теории меры, применяемые в теории экстремальных многообразий ([6], с. 85–87), достаточно доказать теорему для $\bar{x}\in E$, $\bar{y}\in E$ при условиях, что

$$(22)\qquad |\Delta(\bar{x})| > \varepsilon_1, \quad |I(\bar{y})| > \varepsilon_1, \quad |W_i(\bar{y})| > \varepsilon_1 \quad (i = 1, 2),$$

$$(23)\qquad \left|\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{(\partial g_2/\partial y_2 - \partial g_1/\partial y_1)^2}{4\partial g_1/\partial y_2}\right| > \varepsilon_1, \quad \left|\frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{(\partial g_1/\partial y_1 - \partial g_2/\partial y_2)^2}{4\partial g_2/\partial y_1}\right| > \varepsilon_1,$$

$$(24)\qquad |\partial g_1/\partial y_2| > \varepsilon_1, \quad |\partial g_2/\partial y_1| > \varepsilon_1,$$

$$(25)\qquad |\varphi_3(\bar{y})| > \varepsilon_1, \quad |R(P, Q, \bar{y})| > \varepsilon_1, \quad |\tilde{\varphi}_3(\bar{y})| > \varepsilon_1, \quad |R(\tilde{P}, \tilde{Q}, \bar{y})| > \varepsilon_1,$$

где ε_1 определяется в начале. Кроме того, по лемме 5 из (24), условий для $W_i(\bar{y})$ в (22) $(i = 1, 2)$, обозначений (4) получим, что каждая из функций $\partial G(y_1, y_{02})/\partial y_1$, $\partial G(y_{01}, y_2)/\partial y_2$ как функция одной переменной при фиксированной второй переменной имеет на $[0, 1)$ не более двух нулей. Тогда в силу тех же метрических соображений можно считать, что

$$(26)\qquad |\partial G(\bar{y})/\partial y_1| > \varepsilon_1, \quad |\partial G(\bar{y})/\partial y_2| > \varepsilon_1, \quad \bar{y}\in E.$$

Пусть в определении класса функций D выполняется условие (3) для $i = 1$. Сделаем замену переменных (1), что возможно в силу первого неравенства в (22) и возьмем в (21) систему для функции f_1. Тогда с учетом обозначений в классе D системы (20), (21) перейдут соответственно в

$$(27)\qquad \begin{cases} |a_1y_1 + a_2y_2 + a_3| < a^{-1-\varepsilon}, \\ |a_1g_1(\bar{y}) + a_2g_2(\bar{y}) + a_4| < a^{-1-\varepsilon}, \end{cases}$$

$$(28)\qquad \begin{cases} \|ay_1\| < a^{-1/2-\varepsilon}, \\ \|ag_1(\bar{y})\| < a^{-1/2-\varepsilon}, \end{cases}$$

причем функции $1, g_1(\bar{y}), g_2(\bar{y})$ линейно независимы над Q в силу второго неравенства из (22), и функции $g_1(\bar{y}), g_2(\bar{y})$ не являются линейными комбинациями переменных y_1, y_2 в силу условий на W_1, W_2 в (22).

Сначала рассмотрим (27). Зафиксируем a и найдем меру $\mu(a)$ тех $\bar{y}\in E$, для которых выполняется (27). Если установить, что $\sum_a \mu(a) < \infty$, то из леммы Бореля–Кантелли будет следовать совместная экстремальность многообразий $\partial F/\partial x_1$, $\partial F/\partial x_2$.

Переходим к отысканию $\mu(a)$. Зафиксируем a_1, a_2, a_3, a_4 и положим $a = |a_2|$. Найдем меру $\mu = \mu(a_1, \ldots, a_4)$ тех $\bar{y}\in E$, для которых выполняется (27) при взятых $a_1, \ldots, a_4$. Заметим, что из (27) следует: $|a_3| \ll a$, $|a_4| \ll a$. Положим

$$(29)\qquad \tau = \max_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\left(\sup_{\bar{y}\in E}|\partial g_j(\bar{y})/\partial y_i|, \sup_{\bar{y}\in E}|\partial^2 g_j(\bar{y})/\partial y_i\partial y_j|\right), \qquad \varrho = \varepsilon_1/8\tau^2.$$

Рассмотрим ϱ-разбиение E на квадраты со стороной длины ϱ: $E = \sum E_l$, $|E_l| \leqslant \varrho^2$. Зафиксируем l и проведем дальнейшие рассуждения для одного E_l. Положим

$$(30)\qquad G_a(\bar{y}) = a_1g_1(\bar{y}) + a_2g_2(\bar{y}) + a_4.$$

Заметим, что в силу (4) имеем $\partial G_a(\bar{y})/\partial y_i = \partial G(\bar{y})/\partial y_i$ $(i = 1, 2)$. Опишем область изменения переменных $\bar{y}\in E_l$, удовлетворяющих (27). Первое неравенство в (27) определяет полоску L_1, ограниченную прямыми

$$(31)\qquad y_2 = (-a_1y_1 - a_3 \pm a^{-1-\varepsilon})/a.$$

Ширина полоски l_1 по оси $0y_2$ равна

$$(32)\qquad l_1 = 2a^{-2-\varepsilon}.$$

Второе неравенство в (27) определяет в E_l криволинейную полоску L_2, связанную с функциями $y_2 = y_2(y_1)$, $y_1 = y_1(y_2)$, неявно заданными в силу условия (26) уравнением

$$(33)\qquad G_a(\bar{y}) = a_1g_1(\bar{y}) + a_2g_2(\bar{y}) + a_4 = 0.$$

В пересечении полосок L_1, L_2 получается криволинейный параллелограмм $ABCD$, все внутренние точки которого удовлетворяют (27). Так как рассмотрение ведется с точностью до множеств меры нуль, то, уменьшив длины сторон на ε, получим параллелограмм, все точки которого удовлетворяют (27). Обозначим его снова через $ABCD$.

Найдем l_2 — ширину полоски L_2 по оси $0y_1$. Для этого произведем сечение $ABCD$ прямой, параллельной $0y_1$. Тогда длина наибольшего получившегося в сечении отрезка KS равна l_2. Найдем $l_2 = |KS|$. Обозначим координаты $K = (y_{1K}, y_{2K})$, $S = (y_{1S}, y_{2K})$. Из условия (22): $|W_1(\bar{y})| > \varepsilon_1$, по лемме 2 в силу обозначения (10) имеем (12) при $\beta = \varepsilon_1$, т.е.

$$M(\bar{y}) = \max\left(|\partial G_a(\bar{y})/\partial y_1|, |\partial^2 G_a(\bar{y})/\partial y_1^2|\right) > a\varepsilon_1/2\eta, \quad \bar{y} \in E_l. \tag{34}$$

Пусть в некоторой точке $\bar{y}_0 = (y_{01}, y_{02}) \in E_l$ выполняется

$$M(\bar{y}_0) = |\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_1|.$$

Тогда из (34) с учетом (29) получим

$$|\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_1| > a\varepsilon_1/2\eta_1 > a\varepsilon_1/2\tau. \tag{35}$$

Из формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$\partial G_a(\bar{y})/\partial y_1 = \partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_1 + \sum_{i=1}^{2} \left(\partial^2 G_a(\bar{\xi}_1)/\partial y_1 \partial y_i\right)(y_i - y_{0i}),$$

где

$$\bar{\xi}_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}), \quad \xi_{1i} = y_{0i} + \theta_i(y_{0i} - y_i), \quad |\theta_i| < 1 \quad (i = 1, 2),$$

обозначений (29), (30), оценки

$$\left|\sum_{i=1}^{2} \left(\partial^2 G_a(\bar{\xi})/\partial y_1 \partial y_i\right)(y_i - y_{0i})\right| \leqslant 2a\tau\varrho = a\varepsilon_1/4\tau$$

и из (35) находим

$$|\partial G_a(\bar{y})/\partial y_1| > a\varepsilon_1/4\tau, \quad \bar{y} \in E_l. \tag{36}$$

Следовательно, из (27), (30), (36), по теореме конечных приращений Лагранжа при $\xi = y_{1K} + \theta(y_{1S} - y_{1K})$, $0 < \theta < 1$, находим

$$\begin{aligned} l_2 = |KS| &= |y_{1K} - y_{1S}| \\ &= |G_a(y_{1K}, y_{2K}) - G_a(y_{1S}, y_{2K})| |\partial G_a(\xi, y_{2K})/\partial y_1|^{-1} \\ &\ll a^{-1-\varepsilon} a^{-1} = a^{-2-\varepsilon}. \end{aligned} \tag{37}$$

Если в E_l нет такой точки $\bar{y}_0$, для которой выполняется (35), то из (34) следует

$$|\partial^2 G_a(\bar{y})/\partial y_1^2| > a\varepsilon_1/2\eta_1, \quad \bar{y} \in E_l.$$

Тогда из (27), (30) и предыдущего неравенства по лемме 3 получим

$$l_2 = |y_{1K} - y_{1S}| \ll (a^{-1-\varepsilon} a^{-1})^{1/2} = a^{-1-\varepsilon/2}. \tag{38}$$

Таким образом, из (37), (38) имеем

$$l_2 \ll a^{-1-\varepsilon/2}. \tag{39}$$

Теперь найдем длины интервалов, в которых изменяются переменные y_1, y_2, удовлетворяющие (27). Вершины параллелограмма $ABCD$ обозначим так, чтобы для проекций диагоналей AC и BD на ось $0y_1$ выполнялось неравенство: $\text{пр.}_{0y_1}AC \geqslant \text{пр.}_{0y_1}BD$. Тогда с учетом (39)

$$\text{пр.}_{0y_1}AC \leqslant 2\ \text{пр.}_{0y_1}AB + l_2 \ll 2\text{пр.}_{0y_1}AB + a^{-1-\varepsilon/2}. \tag{40}$$

Так как $|a_1| \leqslant a$, то величина угла наклона α прямых (31) к оси $0y_1$ не превосходит $\pi/4$. Поэтому с учетом (32) получим:

1) если $\text{пр.}_{0y_2}AC \geqslant \text{пр.}_{0y_2}BD$, то

$$\text{пр.}_{0y_2}AC \leqslant \text{пр.}_{0y_1}AC + l_1 = \text{пр.}_{0y_1}AC + 2a^{-2-\varepsilon}; \tag{41}$$

2) если $\text{пр.}_{0y_2}AC < \text{пр.}_{0y_2}BD$, то

$$\text{пр.}_{0y_2}BD \leqslant \text{пр.}_{0y_1}AC + l_1 = \text{пр.}_{0y_1}AC + 2a^{-2-\varepsilon}. \tag{42}$$

Найдем $\text{пр.}_{0y_1}AB$. Вернемся к уравнению (33), определяющему неявные функции $y_1 = y_1(y_2)$, $y_2 = y_2(y_1)$. Из (26) и теоремы о производной неявной функции следует, что

$$\begin{aligned} y_2'(y_1) &= -(\partial G_a/\partial y_1)/(\partial G_a/\partial y_2), \\ y_2''(y_1) &= -\left[\partial^2 G_a/\partial y_1^2 + (2\partial^2 G_a/\partial y_1 \partial y_2)\, y_2'(y_1)\right. \\ &\quad \left. + (\partial^2 G_a/\partial y_2^2)(y_2'(y_1))^2/(\partial G_a/\partial y_2)\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Аналогичный вид имеют формулы для $y_1'(y_2)$, $y_1''(y_2)$: в них переменные y_1, y_2 меняются местами.

По лемме 2 из второго неравенства в (22) и обозначения (9) получим (11), где $\beta = \varepsilon_1$, т.е.

$$M_1(\bar{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2}\left(|\partial G_a(\bar{y})/\partial y_i|\right) > a\varepsilon_1/2\eta. \tag{44}$$

Возможны два случая.

1. Пусть в некоторой точке $\bar{y}_0 \in E_l$ выполняется

$$M_1(\bar{y}_0) = |\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_2|. \tag{45}$$

Тогда, рассуждая, как при получении (36) из (35), находим

$$|\partial G_a(\bar{y})/\partial y_2| > a\varepsilon_1/4\tau, \quad \bar{y} \in E_l. \tag{46}$$

Следовательно, если (45), то из (46), (30), (29) получим

$$a\varepsilon_1/4\tau < |\partial G_a(\bar{y})/\partial y_2| < 2a\tau, \quad \bar{y} \in E_l,$$

и можно считать, что в криволинейном параллелограмме $ABCD$ дуги AB и CD задаются уравнениями $y_2 = y_2(y_1)$, $y_2 = y_2(y_1 - l_2)$ соответственно.

Если дуга AB выпукла вниз, то сравним угловые коэффициенты наклона к оси $0y_1$ касательной AB_1 к дуге AB в точке A и прямых (31), а также учтем кривизну k кривой $y_2 = y_2(y_1)$, связанную с $y_2''(y_1)$ формулой: $k = y_2''[1+(y_2')^2]^{-3/2}$. Для этого рассмотрим систему неравенств

$$\left\{\begin{aligned}&|y_2'(y_1)-a_1/a| < v4\tau/\varepsilon_1,\\&|y_2''(y_1)| < v(4\tau)^3/\varepsilon_1^3,\end{aligned}\right. \tag{47}$$

где τ определено в (29), $v > 0$ определяется ниже. Если дуга AB выпукла вверх, то вместо AB_1 будем рассматривать касательную A_1B к дуге AB в точке B и проводить исследование аналогично. Подставляя (43) в (47) и учитывая (46), получим

$$\begin{aligned}&|-a^2\psi_2(\bar{y})+a_1a\psi_1(\bar{y})+a^2\psi_0(\bar{y})| < va^2,\\&|a_1^3\varphi_3(\bar{y})+a_1^2a\varphi_2(\bar{y})+a_1a^2\varphi_1(\bar{y})+a^3\varphi_0(\bar{y})| < va^3,\end{aligned} \tag{48}$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2(y_1))$, $\psi_i(\bar{y})$, $\varphi_j(\bar{y})$ $(0 \leqslant i \leqslant 2, 0 \leqslant j \leqslant 3)$ — соответственно коэффициенты многочленов P, Q в условии 5) для класса функций D; абсолютная постоянная выбирается так, чтобы выполнялось неравенство (13) для взятых P, Q. Разделим первое неравенство (48) на a^2, второе — на a^3. Получим

$$\left\{\begin{aligned}&|\psi_2(\bar{y})v^2+\psi_1(\bar{y})v+\psi_0(\bar{y})| < v,\\&|\varphi_3(\bar{y})v^3+\varphi_2(\bar{y})v^2+\varphi_1(\bar{y})v+\varphi_0(\bar{y})| < v.\end{aligned}\right. \tag{49}$$

Из первых двух неравенств в (25) по лемме 4 получаем, что система (49), а, следовательно, и (47) несовместна. Таким образом, либо

$$|y_2'(y_1)-a_1/a| \geqslant 4v\tau/\varepsilon_1 = v_1, \tag{50}$$

либо

$$|y_2''(y_1)| \geqslant v(4\tau)^3/\varepsilon_1^3 = v_2. \tag{51}$$

Так как ε_1 — произвольно малое число, то в силу (13) v, v_1 также малые величины. Пусть в точке A выполняется (50). Рассмотрим прямоугольный треугольник AB_1K, где B_1 — точка пересечения касательной AB_1, с прямой BC, определенной в (31), K — точка пересечения перпендикуляра B_1K, проведенного из точки B_1 ко второй прямой AD, определенной в (31). Пусть α_1 — угол наклона касательной AB_1 к оси $0y_1$, α — угол наклона прямых (31) к оси $0y_1$, $\gamma = \alpha_1-\alpha$. Тогда неравенство (50) означает, что

$$|\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha| > v_1.$$

Пусть $0 \leqslant \alpha < \alpha_1 < \pi/2$. Рассмотрим два случая.

1) $\alpha_1 \leqslant \pi/4$. По формуле Тейлора в форме Лагранжа имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha+\gamma/\cos^2\xi, \quad \text{где} \quad \xi = \alpha+\theta(\alpha_1-\alpha) < \alpha_1.$$

Следовательно, $\gamma > v_1\cos^2\xi > v_1/2$.

2) $\alpha_1 > \pi/4$. Так как $|\operatorname{tg}\alpha| = |a_1/a| \leqslant 1$, то при взятом α_1, наименьшее значение для γ получается при $\alpha = \pi/4$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\pi/4+v_1 = 1+v_1$, $\alpha_1 > \operatorname{arctg}(1+v_1)$, и по формуле Тейлора в форме Лагранжа, примененной к функции $\operatorname{arctg}(1+v_1)$, получим

$$\alpha_1 > \pi/4+v_1/\sqrt{1+(1+\theta v_1)^2} > \pi/4+v_1/2.$$

Следовательно, $\gamma > \alpha_1-\alpha > v_1/2$.

Если $3\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $\pi/2 < \alpha_1 < \alpha$, то, рассуждая аналогично на интервалах $3\pi/4 \leqslant \alpha$, $\pi/2 < \alpha_1 < 3\pi/4$, получим $\gamma > v_1/2$. Таким образом,

$$\sin\gamma \geqslant \sin(v_1/2). \tag{52}$$

Теперь, учитывая (32), (52), получим

$$\begin{aligned}\text{пр.}_{0y_1}AB = |y_{1B}-y_{1A}| \leqslant \text{пр.}_{0y_1}AB_1 = |y_{1B}-y_{1A}| < |AB_1|\\= |B_1K|/\sin\gamma < l_1/\sin(v_1/2) \ll a^{-2-\varepsilon}.\end{aligned} \tag{53}$$

Если в точке A не выполняется (50), то выполняется (51). Возьмем

$$\delta(a) = a^{-1-\varepsilon/2} \tag{54}$$

и разобьем множество значений функции $r(y_1) = y_2'(y_1)-a_1/a$ на два множества:

$$Y_1(a) = \{y_1\colon |r(y_1)| < \delta(a)\}, \quad Y_2(a) = \{y_1\colon |r(y_1)| \geqslant \delta(a)\}.$$

Это соответствует делению дуги AB на две дуги: AM и MB. Тогда по теореме конечных приращений Лагранжа, примененной к функции $r(y_1)$, в силу (51), (54) получим

$$\text{пр.}_{0y_1}AM = |Y_1(a)| \leqslant \delta(a)/v_2 \ll a^{-1-\varepsilon/2}. \tag{55}$$

Проекция дуги MB на ось $0y_1$ определяется аналогично (53), при этом v_1 заменяется на $\delta(a)$ и учитывается, что $\sin\delta(a) \sim \delta(a)$ при $a \to \infty$, т.е. в силу (54) находим

$$\text{пр.}_{0y_1}MB \ll a^{-2-\varepsilon}/\sin(0{,}5\delta(a)) \ll a^{-2-\varepsilon}/\delta(a) = a^{-1-\varepsilon/2}. \tag{56}$$

Из (53), (55), (56) получаем

$$\text{пр.}_{0y_1}AB \ll a^{-1-\varepsilon/2}. \tag{57}$$

Возвращаясь к (40)–(42), в силу (53), (57) получим, что для параллелограмма $ABCD$ длины интервалов, в которых изменяются переменные y_1, y_2, оцениваются величиной $a^{-1-\varepsilon/2}$, т.е.

$$|y_{1C}-y_{1A}| \ll a^{-1-\varepsilon/2}, \quad \max(|y_{2C}-y_{2A}|, |y_{2B}-y_{2D}|) \ll a^{-1-\varepsilon/2}. \tag{58}$$

2. Пусть равенство (45) не выполняется ни для одной точки $\bar{y} \in E_l$. Тогда из (44) находим

$$(59)\qquad \begin{cases} |\partial G_a(\bar{y})/\partial y_1| > a\varepsilon_1/2\eta, \\ |\partial G_a(\bar{y})/\partial y_2| \leqslant a\varepsilon_1/2\eta, \end{cases} \quad \bar{y} \in E_l.$$

Если в условиях (59) выполняется

$$(60)\qquad a\varepsilon_1/2\eta c < |\partial G_a(\bar{y})/\partial y_2|$$

при некоторой постоянной величине $c > 1$, то проводим все предыдущие рассуждения и получаем (58).

Если в условиях (59) выполняется

$$(61)\qquad |\partial G_a(\bar{y})/\partial y_2| < a\varepsilon_1/2\eta c,$$

где $c > c_0$, $c_0 > 0$ — достаточно большая абсолютная постоянная, то из (43), (59), (61) находим $|y_2'(y_1)| > c > c_0$, т.е. угол α_1 — угол наклона касательной AB_1 к оси $0y_1$, близок к $\pi/2$. Тогда для угла γ, $\gamma = \alpha_1 - \alpha$ выполняется оценка $\gamma > \pi/6$ и для прямоугольного треугольника AB_1K, как в (53), получим

$$\text{пр.}_{0y_1} AB_1 \leqslant |AB_1| = |B_1K|/\sin\gamma < l_1/\sin\pi/6 \ll a^{-2-\varepsilon}.$$

Отсюда по формулам (40)–(42) получим (58). Итак, в (58) дана оценка для области, в которой изменяются переменные $\bar{y} \in E_l$, удовлетворяющие (27), т.е. для параллелограмма $ABCD$.

Теперь произведем линеаризацию второго неравенства в (27), т.е. заменим его на неравенство, где переменные y_1, y_2 входят линейно. Возьмем точки $\bar{y}$, $\bar{y}_0$ из $ABCD$. Тогда в обозначениях (30) по формуле Тейлора в форме Лагранжа имеем

$$(62)\qquad G_a(\bar{y}) = G_a(\bar{y}_0) + \sum_{i=1}^{2} (\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_i)(y_i - y_{0i}) + R_a(\bar{y}, \bar{y}_0),$$

где

$$R_a(\bar{y}, \bar{y}_0) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} (\partial^2 G_a(\xi)/\partial y_i \partial y_j)(y_i - y_{0i})(y_j - y_{0j})/2,$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_i = y_{0i} + \theta_i(y_i - y_{0i}), \qquad |\theta_i| < 1 \qquad (i = 1, 2).$$

Из (30), (58) находим

$$(63)\qquad |R_a(\bar{y}, \bar{y}_0)| \ll a^{-1-\varepsilon}.$$

Так как $\bar{y}$, $\bar{y}_0$ взяты в $ABCD$, то

$$(64)\qquad |G_a(\bar{y})| < a^{-1-\varepsilon}, \qquad |G_a(\bar{y}_0)| < a^{-1-\varepsilon}.$$

Из (62)–(64) получим

$$\Big|\sum_{i=1}^{2} (\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_i)(y_i - y_{0i})\Big| \ll a^{-1-\varepsilon}.$$

Следовательно, если точки $\bar{y}$, $\bar{y}_0$ удовлетворяют (27), то они удовлетворяют системе

$$(65)\qquad \begin{cases} |a_1 y_1 + a y_2 + a_3| < a^{-1-\varepsilon}, \\ |(\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_1)(y_1 - y_{01}) + (\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_2)(y_2 - y_{02})| \ll a^{-1-\varepsilon}. \end{cases}$$

В дальнейшем для краткости вместо $\partial G_a(\bar{y}_0)/\partial y_i$ будем писать $\partial G_a/\partial y_i$ $(i = 1, 2)$.

Пусть $\mu_1 = \mu_1(a_1, a, a_3, a_4)$ — мера тех $\bar{y} \in ABCD$, для которых при фиксированных a_1, a, a_3, a_4 выполняется (65). Тогда $\mu \leqslant \mu_1$. Найдем μ_1. Раньше установили, что первое неравенство в (65) определяет полоску L_1, ограниченную прямыми (31), причем ее ширина l_1 по оси $0y_2$ удовлетворяет (32). Второе неравенство в (65) определяет в E_l вторую полоску L_3, ограниченную прямыми

$$(66)\qquad y_2 = \{-(\partial G_a/\partial y_1) y_1 + (\partial G_a/\partial y_1) y_{01} + (\partial G_a/\partial y_2) y_{02}\}(\partial G_a/\partial y_2)^{-1}.$$

Эти же прямые можно записать другими уравнениями:

$$(67)\qquad y_1 = \{-(\partial G_a/\partial y_2) y_2 + (\partial G_a/\partial y_2) y_{01} + (\partial G_a/\partial y_1) y_{02}\}(\partial G_a/\partial y_1)^{-1}.$$

Оба уравнения определены в силу (26). Из (44) следует, что если выполняется (45), то ширина l_3 полоски L_3 по оси $0y_2$ в силу уравнения (66) равна

$$l_3 = |a^{-1-\varepsilon}(\partial G_a/\partial y_2)^{-1}| < a^{-2-\varepsilon} 2\eta/\varepsilon_1 \ll a^{-2-\varepsilon}.$$

Если (45) не выполняется ни для одной точки из $ABCD$, то в силу (44)

$$|\partial G_a/\partial y_1| > a\varepsilon_1/2\eta,$$

и ширина l_4 полоски L_3 по оси $0y_1$ в силу (67) равна

$$l_4 = |a^{-1-\varepsilon}(\partial G_a/\partial y_1)^{-1}| \ll a^{-2-\varepsilon}.$$

В пересечении полосок L_1, L_3 получается параллелограмм S, все внутренние точки которого удовлетворяют (65). Обозначим его вершины через A_1, B_1, C_1, D_1. Тогда $\mu_1 \leqslant |S|$. Найдем $|S|$. Пусть γ — острый угол между A_1B_1 и A_1D_1. Следовательно,

$$|S| = |A_1B_1| \cdot |A_1D_1| \sin\gamma.$$

Если h_1 и h_2 — соответственно расстояния между прямыми (31) и (66), то $h_1 \leqslant l_1 = 2a^{-2-\varepsilon}$, $h_2 \leqslant \max(2l_3, 2l_4) \ll a^{-2-\varepsilon}$. Поэтому

$$(68)\qquad \begin{gathered} |A_1B_1| = h_1/\sin\gamma \ll a^{-2-\varepsilon}/\sin\gamma, \qquad |A_1D_1| = h_2/\sin\gamma \ll a^{-2-\varepsilon}/\sin\gamma, \\ |S| \ll a^{-4-2\varepsilon}/\sin\gamma. \end{gathered}$$

Рассмотрим три случая.

1) $\gamma \geqslant \varepsilon$. Тогда в (68) получим $|S| \ll a^{-4-2\varepsilon}$. Следовательно, $\mu(a) \leqslant \mu_1 \ll a^{-4-2\varepsilon}$ и

$$\sum_{a_1, a, a_3, a_4} a^{-4-2\varepsilon} \ll \sum_a a^{-1-2\varepsilon} < \infty. \tag{69}$$

2) $0 < \gamma = a^{-r}$, где $r > 0$ — действительное число. Тогда $\gamma < \varepsilon$ при $a \geqslant a_0$, где a_0 — достаточно велико. Пусть α_1, α_2 — углы наклона к оси $0y_1$ соответственно прямых (31) и (66). Тогда $\gamma = |\alpha_2 - \alpha|$. Найдем

$$\begin{aligned} |\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha| &= |(\partial G_a/\partial y_1)/(\partial G_a/\partial y_2) - a_1/a| \\ &= |a_1^2\, \partial g_1/\partial y_2 + a_1 a[\partial g_2/\partial y_2 - \partial g_1/\partial y_1] - a^2 \partial g_2/\partial y_1| \\ &\quad \times |a[a_1(\partial g_1/\partial y_2) + a(\partial g_2/\partial y_1)]|^{-1}. \end{aligned} \tag{70}$$

В силу (44) здесь могут быть два случая:

I. Выполняется (45), т.е.

$$|\partial G_a/\partial y_2| > a\varepsilon/2\eta. \tag{71}$$

II. Неравенство (45) не выполняется ни для одной точки $\bar{y}_0 \in ABCD$. Тогда в силу (44) выполняется (59) при $\bar{y} = \bar{y}_0$. Если в условиях (59) имеем (60), то рассмотрение такого случая отнесем к I, так как постоянная величина c^{-1} не влияет на порядок оценок по параметру a. Если в условиях (59) выполняется (61), то $|\operatorname{tg}\alpha_2| > c > c_0$. Следовательно, угол α_2 близок к $\pi/2$. Учитывая, что $|\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 1$, получаем противоречие с выбором γ. Таким образом, осталось рассмотреть I.

Итак, пусть выполняется (71). Так как $\sin\gamma \sim \gamma$, $\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha \pm \gamma) - \operatorname{tg}\alpha \asymp \gamma$ при $\gamma \to 0$, то при $a \geqslant a_0$ заменим (68) неравенством

$$|S| \ll a^{-4-2\varepsilon}\gamma^{-1}, \tag{72}$$

а величину (70) будем сравнивать с γ. Пусть δ — действительное число, $0 < \delta < 2\varepsilon$. Для γ построим δ-сеть:

$$a^{-\delta k} \leqslant \gamma < a^{-\delta(k-1)}, \quad 1 \leqslant k \text{ — целое.} \tag{73}$$

В соответствии с (60), (73) найдем $N_1(a)$ — количество целых a_1, удовлетворяющих неравенству

$$\left\{\begin{aligned} &|a_1^2(\partial g_1/\partial y_2) + a_1 a(\partial g_2/\partial y_2 - \partial g_1/\partial y_1) - a^2\partial g_2/\partial y_1| \\ &\qquad \ll a^{-\delta(k-1)}|a(a_1 \partial g_1/\partial y_2 + a\partial g_2/\partial y_2)| \ll a^{2-\delta(k-1)} \\ &\text{или в более кратких обозначениях} \\ &\qquad |a_1^2\theta_1 + a_1\theta_2 + \theta_3| \ll a^{2-\delta_1}, \end{aligned}\right. \tag{74}$$

где

$$\theta_1 = \partial g_1/\partial y_2, \quad \theta_2 = a(\partial g_2/\partial y_2 - \partial g_1/\partial y_1), \quad \theta_3 = -a^2\partial g_2/\partial y_1, \tag{75}$$

$$\delta_1 = \delta(k-1). \tag{76}$$

Левая часть неравенства (74) задает параболу $v = v(a_1)$ с вершиной в точке с координатами

$$\begin{aligned} (b_1, b_2) &= (\theta_2/2\theta_1,\ \theta_3 - \theta_2^2/4\theta_1) \\ &= (-a(\partial g_2/\partial y_2 - \partial g_1/\partial y_1)(2\partial g_1/\partial y_2)^{-1}, \\ &\qquad -a^2[\partial g_2/\partial y_1 + (\partial g_2/\partial y_2 - \partial g_1/\partial y_1)^2(4\partial g_1/\partial y_1)^{-1}]). \end{aligned}$$

В силу (23) имеем $b_2 \asymp a^2$, поэтому парабола $v = v(a_1)$ и прямые $v = \pm c_1 a^{2-\delta_1}$, где $c_1 > 0$ — абсолютная постоянная, связанная со знаком $\ll$ в (74), пересекаются в четырех точках:

$$a_1^{(i)} = [-\theta_2 \pm \sqrt{\theta_2^2 - 4\theta_1(\theta_3 - c_1 a^{2-\delta_1})}]/2\theta_1 \qquad (i = 1, 2),$$

$$a_1^{(j)} = [-\theta_2 \pm \sqrt{\theta_2^2 - 4\theta_1(\theta_3 + c_1 a^{2-\delta_1})}]/2\theta_1 \qquad (j = 3, 4).$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_1(a) &= a_1^{(1)} - a_1^{(3)} + a_1^{(4)} - a_1^{(2)} \\ &= [\sqrt{\theta_2^2 - 4\theta_1(\theta_3 + c_1 a^{2-\delta_1})} - \sqrt{\theta_2^2 - 4\theta_1(\theta_3 - c_1 a^{2-\delta_1})}]/\theta_1 \\ &= 8c_1 a^{2-\delta_1}(\sqrt{\theta_2^2 - 4\theta_1\theta_3 - 4c_1\theta_1 a^{2-\delta_1}} + \sqrt{\theta_2^2 - 4\theta_1\theta_3 + 4c_1\theta_1 a^{2-\delta_1}})^{-1}. \end{aligned}$$

Учитывая обозначения (75), (76), получим

$$N_1(a) \ll \max(1, a^{1-\delta(k-1)}). \tag{77}$$

В (77) возьмем $1 \leqslant k \leqslant 1 + \delta^{-1}$. Тогда из (72), (73) находим

$$\mu \leqslant \mu_1 \leqslant |S| \ll a^{-4-2\varepsilon}a^{\delta k}.$$

Из (77) и условия $\delta < 2\varepsilon$ находим

$$\sum_{a, a_1, a_3, a_4} a^{-4-2\varepsilon+\delta k} \ll \sum_{a, a_3, a_4} a^{-3-2\varepsilon+\delta} < \infty. \tag{78}$$

Если в (77) имеем $k > 1 + [\delta^{-1}]$, где $[\delta^{-1}]$ означает целую часть δ^{-1}, то из (73) получим

$$\gamma < a^{-\delta(1+[\delta^{-1}])} < a^{-1-\varepsilon_2}, \tag{79}$$

следовательно, $N_1(a) \ll 1$. Обозначим это конечное множество значений a_1 через A. Покажем, что в этом случае существует не более одного целого значения $a_3 = a_3^0$, для которого выполняется (65). Заметим, что при фиксированных a_1, $a_2 = a$ и изменяющемся a_3 средние линии соседних полосок, определяемых первым неравенством в (65), сдвинуты относительно друг друга по оси $0y_2$ на величину

$$r = (-a_1 y_1 - a_3)a^{-1} - (-a_1 y_1 - a_3 - 1)a^{-1} = a^{-1},$$

и расстояние d между этими средними линиями равно

(80) $$d = \left(a\sqrt{1+(a_1/a)^2}\right)^{-1}.$$

Покажем, что полоска L_3, определяемая вторым уравнением в (65) при тех же фиксированных a_1, a_2, пересекает только одну из рассматриваемых средних линий. Предположим противное. Пусть полоска L_3 пересекает обе средние линии. Тогда из прямоугольного треугольника $A_2B_2C_2$, две вершины A_2, C_2 которого принадлежат одной средней линии, а третья вершина B_2 — второй, имеем $d = |B_2C_2| = |A_2B_2|\sin\gamma$, где A_2B_2 — гипотенуза. Заметим, что $|A_2B_2|$ меньше длины диагонали квадрата E_l, определенного выше, как квадрат со стороной длины ϱ, т.е. $|A_2B_2| \leqslant \varrho\sqrt{2}$. Тогда из (79), (80) при $a \geqslant a_0$ получим

$$(\sqrt{2}a)^{-1} \leqslant d \leqslant \varrho\sqrt{2}\sin\gamma \asymp \varrho\sqrt{2}\gamma \ll a^{-1-\varepsilon_2},$$

что противоречиво.

Итак, пусть рассматриваемые полоски пересекаются при $a_3 = a_3^0$. Полоску, определенную первым неравенством в (65) при $a_3 = a_3^0$ обозначим через $L_1(a_3^0)$. Тогда

$$S \subset L_1(a_3^0) \cap E_l, \qquad |S| \leqslant |L_1(a_3^0) \cap E_l| \leqslant 2\varrho\sqrt{2}/a^{2+\varepsilon} \ll a^{-2-\varepsilon}.$$

Следовательно,

(81) $$\sum_{a, a_4, a_1 \in A} a^{-2-\varepsilon} \ll \sum_{a, a_4} a^{-2-\varepsilon} < \infty.$$

3) $\gamma = 0$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha$ и $N_1(a) \leqslant 2$. Рассуждая, как в 2) после получения (79), находим, что существует не более одного значения a_3, для которого полоски L_1, L_2 пересекаются, т.е. получим (81).

Аналогично исследуется случай, когда $a = |a_1|$. При этом переменные y_1, y_2 и функции g_1, g_2 меняются местами.

Из (69), (78), (81) по лемме Бореля–Кантелли получим совместную экстремальность многообразий $\partial F/\partial x_1$, $\partial F/\partial x_2$.

Теперь рассмотрим систему (28). При фиксированном $y_2 \in [0, 1)$ система (28) в силу предположения, что условие (3) выполняется для $i = 1$, имеет по лемме 6 бесконечно много целых решений a только для множества меры нуль. Следовательно, мера множества $\bar{y} \in E$, для которых (28) имеет бесконечно много целых решений a, равна нулю, т.е. многообразия $\partial f_1/\partial x_1$, $\partial f_1/\partial x_2$ совместно экстремальны.

Аналогично устанавливается совместная экстремальность $\partial f_2(\bar{x})/\partial x_1$ и $\partial f_2(\bar{x})/\partial x_2$, когда (3) выполняется для $i = 2$.

Литература

[1] В. И. Берник, Э. И. Ковалевская, *Двумерные экстремальные поверхности при совместно экстремальных частных производных*, Математические заметки. (В печати).

[2] Э. И. Ковалевская, *Совместно экстремальные многообразия*, Математические заметки 41 (1987), стр. 3–8.

[3] А. С. Пяртли, *Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства*, Функциональный анализ и его приложения 3 (1969), стр. 59–62.

[4] М. М. Скриганов, *Строение спектра двумерного оператора Шредингера с периодическим потенциалом и некоторые арифметические свойства двумерных решеток*, Тр. МИ АН СССР им. В. А. Стеклова 158 (1981), стр. 163–174.

[5] В. Г. Спринджук, *Метод тригонометрических сумм в метрической теории диофантовых приближений зависимых величин*, ibid. 128 (1972), стр. 212–228.

[6] — *Метрическая теория диофантовых приближений*, Наука, Москва, 1977.

[7] W. Schmidt, *Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Grössen*, Monatsh. Math. 63 (1964), S. 154–166.

Поступило 17.6.1988 (1836)