Discrépance quadratique de la suite de van der Corput et de sa symétrique

par

HENRI FAURE (Marseille)

1. Introduction

1.1. Soit une suite infinie $X = (x_i)_{i \geq 1}$ à valeurs dans $[0, 1]$. Pour un entier $N \geq 1$ et pour $\alpha \in [0, 1]$, on désigne par $A(\alpha, N, X)$ le nombre d'indices $i \leq N$ tels que $x_i \in [0, \alpha[$; on définit le *reste* ou *écart* de la suite par $E(\alpha, N, X) = A(\alpha, N, X) - \alpha N$.

La *discrépance quadratique* de la suite X est alors

$$T(N, X) = \left(\int_0^1 (E(\alpha, N, X))^2 d\alpha \right)^{1/2}.$$

D'après le théorème de Roth [9], on montre [4] qu'il existe une constante d ($d \geq (2^{16} \log 2)^{-1}$) telle que pour toute suite infinie X on ait, pour une infinité de N , $T^2(N, X) \geq d \log N$. Si on pose $t(X) = \limsup_{N \rightarrow \infty} (T^2(N, X) / \log N)$, on a donc $t(X) \geq d$ pour toute suite X .

Pour la suite ω de van der Corput (voir 3 ci-après), on sait depuis Haber [3] que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} (T(N, \omega) / \log N) = 1/(6 \log 2).$$

Mais c'est Proinov [5, 6] qui a récemment obtenu l'ordre exact de croissance pour la discrépance quadratique: Soit α à quotients partiels bornés; alors la suite $\tilde{\sigma}_\alpha = (\{\alpha\}, \{-\alpha\}, \{2\alpha\}, \{-2\alpha\}, \dots)$, suite symétrique déduite de la suite $\sigma_\alpha = (\{n\alpha\})_{n \geq 1}$, vérifie

$$T^2(N, \tilde{\sigma}_\alpha) \leq C_\alpha \log N \quad \text{pour tout } N$$

($\{\alpha\}$ désigne la partie fractionnaire de α). C'est avec $\alpha_0 = (\sqrt{5}-1)/2$ que Proinov obtient les meilleures estimations: $T^2(N, \tilde{\sigma}_{\alpha_0}) \leq 100 \log N$, ce qui revient à $t(\tilde{\sigma}_{\alpha_0}) \leq 100$ dans [5], amélioré en $t(\tilde{\sigma}_{\alpha_0}) \leq 9.152$ dans [7].

1.2. L'objet de ce travail est l'étude précise de la discrépance quadratique de la suite de van der Corput ω et de la suite symétrique associée $\tilde{\omega}$. Nous obtenons ainsi:

— Pour la suite de van der Corput, une formule originale reliant discrédance quadratique et discrédance extrême (Théorème 1), ce qui permet d'affiner le résultat de Haber (Théorème 2).

— Pour la suite symétrique $\tilde{\omega}$, une formule exacte pour la discrédance quadratique sous forme de série (Théorème 3). Nous en déduisons son comportement asymptotique précis:

$$0.089 < t(\tilde{\omega}) < 0.103.$$

On voit que la majoration est près de cent fois plus faible que celle de Proinov. De plus nous avons la minoration $\frac{421}{6750 \log 2} = .089\dots$, que nous conjecturons être la valeur exacte de $t(\tilde{\omega})$. Ainsi de nouveau, on retrouve la parenté entre les suites $(n\alpha)$ et les suites de van der Corput, avec un comportement meilleur et plus précis pour ces dernières. En dimension supérieure à un, nous n'avons pour l'instant aucun résultat, de même qu'en dimension un pour les suites de van der Corput généralisées [2].

Signalons pour terminer le travail récent [8] de Proinov et Grozdanov sur $\tilde{\omega}$, qui leur permet d'obtenir la majoration $t(\tilde{\omega}) < 1.443$, mais aucune minoration spécifique (hormis celle de Roth).

1.3. Énoncé des théorèmes. La suite ω de van der Corput est définie par

$$\omega(i) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) 2^{-j-1} \quad \text{avec} \quad i-1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) 2^j,$$

développement en base 2 de $i-1$ ($a_j(i) = 0$ ou 1). La suite $\tilde{\omega}$ symétrique est définie par $\tilde{\omega}(i) = \omega((i+1)/2)$ si i est impair, et $\tilde{\omega}(i) = 1 - \omega(i/2)$ si i est pair.

Soit φ la fonction de période 1 définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = \min(x, 1-x)$.

THÉORÈME 1. Pour tout $N \geq 1$, on a la formule

$$4T^2(N, \omega) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(N/2^j) \right)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^2(N/2^j).$$

On sait que la discrédance extrême de ω est $D(N, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(N/2^j)$ [1],

d'où en posant

$$\Delta(N, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^2(N/2^j),$$

on obtient le corollaire:

COROLLAIRE. Pour tout $N \geq 1$, on a

$$4T^2(N, \omega) = D^2(N, \omega) + \Delta(N, \omega).$$

On en déduit le comportement asymptotique de $T^2(N, \omega)$:

THÉORÈME 2. (i) Pour tout $N \geq 1$, on a

$$T^2(N, \omega) \leq \left(\frac{\log N}{6 \log 2} \right)^2 + \left(\frac{11}{3} + \frac{2 \log 3}{\log 2} \right) \frac{\log N}{36 \log 2} + \frac{1}{3};$$

$$(ii) \limsup_{N \rightarrow \infty} \left(T^2(N, \omega) - \left(\frac{\log N}{6 \log 2} \right)^2 - \left(\frac{11}{3} + \frac{2 \log 3}{\log 2} \right) \frac{\log N}{36 \log 2} \right) = \frac{7}{81} + \frac{11 \log 3}{108 \log 2} + \left(\frac{\log 3}{6 \log 2} \right)^2.$$

Ce qui redonne évidemment le résultat de Haber [3].

Au passage, on est amené à montrer que $\Delta(2N) = \Delta(N)$ et $\Delta(2N+1) = \frac{1}{2}(\Delta(N) + \Delta(N+1) + \frac{1}{3})$, relations analogues à celles montrées pour D dans [1].

THÉORÈME 3. Pour tout $N \geq 1$, on a la formule

$$T^2(N, \tilde{\omega}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^2(N/2^j) (1 - 2\varphi(2^j \omega(N+1))).$$

COROLLAIRE. Si n et N vérifient $N < 2^n$, on a

$$T^2(N, \tilde{\omega}) = \sum_{j=1}^n \varphi^2(N/2^j) (1 - 2\varphi(2^j \omega(N+1))) + \frac{N^2}{3 \times 4^n}.$$

Remarque. Si $N = \sum_{i=0}^{\infty} N_i 2^i$ est le développement en base 2 de N , on a, pour tout $j \geq 1$,

$$1 - 2\varphi(2^j \omega(N+1)) = (-1)^{N_j} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{N_j+h} / 2^{h+1},$$

quantité notée $\theta_j(N)$ dans la suite pour simplifier les écritures; cette formule facilite l'étude asymptotique conduisant au théorème 4.

THÉORÈME 4. On a la formule et l'encadrement:

$$t(\tilde{\omega}) = \inf_{n \geq 1} \max_{1 \leq N \leq 2^n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi^2 \left(\frac{N}{2^j} \right) (1 - 2\varphi(2^j \omega(N+1))) \right) / \log 2,$$

$$.089\dots = \frac{421}{6750 \log 2} \leq t(\tilde{\omega}) < .103.$$

Les formules des théorèmes 1 et 3 permettent le calcul rapide à la machine des discrédances; c'est grâce à ces possibilités numériques que nous avons obtenu l'encadrement ci-dessus et que nous conjecturons la valeur .089... pour $t(\tilde{\omega})$. Néanmoins l'étude asymptotique exacte de $T^2(N, \tilde{\omega})$ semble assez compliquée en raison de la complexité des quantités mises en jeu.

2. Démonstration du théorème 1. La démonstration est préparée par quatre lemmes qui serviront aussi à la démonstration du théorème 3.

2.1. LEMME. Soient n et N des entiers tels que $1 \leq N \leq 2^n$, et $\alpha \in [0, 1]$; alors

$$E(\alpha, N, \omega) = E(x(\alpha), N, \omega) + (x(\alpha) - \alpha)N$$

où $x(\alpha) = k/2^n$ avec k entier tel que $(k-1)/2^n < \alpha \leq k/2^n$.

Preuve. Les 2^n points de la suite de van der Corput sont répartis sur les 2^n subdivisions diadiques de $[0, 1]$; d'où $A(\alpha, N, \omega) = A(x(\alpha), N, \omega)$, d'où ce lemme qui permet de discrétiser l'écart.

2.2. LEMME. Les nombres $n, N, \alpha, x(\alpha)$ et k sont définis comme au lemme 2.1; considérons les développements en base 2 ($N_i = 0$ ou $1, k_i = 0$ ou 1):

$$N = \sum_{i=0}^n N_i 2^i, \quad k = \sum_{i=0}^n k_i 2^{n-i};$$

puis $\delta_n(n, \alpha, N) = \varepsilon_n(n, \alpha, N) = k_n$, et pour $1 \leq j < n$:

$$\delta_j(n, \alpha, N) = k_j + \delta_{j+1}(n, \alpha, N)/2 + (-1)^{N_j} \varepsilon_{j+1}(n, \alpha, N)/2,$$

$$\varepsilon_j(n, \alpha, N) = \delta_j(n, \alpha, N) \pmod{2}.$$

Alors $E(x(\alpha), N, \omega) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(n, \alpha, N) \varphi(N/2^j)$.

Remarques. 1) Les fonctions $\alpha \rightarrow \delta_j(n, \alpha, N)$ et $\varepsilon_j(n, \alpha, N)$ sont constantes sur $[(k-1)/2^n, k/2^n]$; elles seront notées $\delta_j(n, k, N)$ et $\varepsilon_j(n, k, N)$ ou simplement δ_j et ε_j si aucune confusion n'est à craindre.

2) Ce lemme est la partie fondamentale de ce paragraphe, conduisant à la formule du théorème 1; il est inspiré de la méthode de descente utilisée dans [1] et [2].

Preuve. La formule est évidente pour $N = 2^n$ et pour $k = 2^n$ (en ce cas, comme on le voit facilement, tous les ε_j sont nuls). La démonstration se fait de proche en proche pour j allant de n à 1: on remplace progressivement $E(k/2^n, N)$ par des écarts portant sur des intervalles de plus en plus grossiers et sur des nombres de points de plus en plus petits, les défauts étant mesurés par $\varepsilon_j \varphi(N/2^j)$.

Première étape: On pose $k' = (k + (-1)^{N_{n-1}} \varepsilon_n)/2$ et $N' = N - N_{n-1} 2^{n-1}$, moyennant quoi

$$E(k/2^n, N) = E(k'/2^{n-1}, N') + \varepsilon_n \varphi(N/2^n);$$

en effet, si k est pair, ε_n est nul et on a bien $E(k/2^n, N) = E(k'/2^{n-1}, N')$, égalité évidente si $N' = N$ et résultant de $E(k/2^n, 2^{n-1}) = 0$ si $N' = N - 2^{n-1}$ (cf.

lemme 3.3.3 [2]). Si k est impair, $\varepsilon_n = 1$, et on a ici

$$E(k/2^n, N) = E(k'/2^{n-1}, N') + N/2^n \quad \text{si } N' = N < 2^{n-1},$$

$$E(k/2^n, N) = E(k'/2^{n-1}, N') + 1 - N/2^n \quad \text{si } N' = N - 2^{n-1}$$

(car $E(k/2^n, 2^{n-1}) = 1/2$ et $N/2^n = N'/2^n + 1/2$).

Deuxième étape: On fait le raisonnement précédent avec k' et N' :

$$k' = k_0 2^{n-1} + \dots + k_{n-1} + k_n (1 + (-1)^{N_{n-1}})/2$$

$$= k_0 2^{n-1} + \dots + 2k_{n-2} + \delta_{n-1};$$

on pose $k'' = (k' + (-1)^{N_{n-2}} \varepsilon_{n-1})/2$ et $N'' = N' - N_{n-2} 2^{n-2}$.

Si k' est pair, c'est-à-dire si δ_{n-1} vaut 0 ou 2, on a

$$E(k'/2^{n-1}, N') = E(k''/2^{n-2}, N'');$$

si k' est impair, c'est-à-dire si $\delta_{n-1} = 1$, on a

$$E(k'/2^{n-1}, N') = E(k''/2^{n-2}, N'') + N'/2^{n-1} \quad \text{si } N'' = N' < 2^{n-2},$$

$$E(k'/2^{n-1}, N') = E(k''/2^{n-2}, N'') + 1 - N'/2^{n-1} \quad \text{si } N' \geq 2^{n-2};$$

dans les deux cas on a donc

$$E(k'/2^{n-1}, N') = E(k''/2^{n-2}, N'') + \varepsilon_{n-1} \varphi(N/2^{n-1})$$

(on a $\varphi(N'/2^{n-1}) = \varphi(N/2^{n-1})$ car φ est périodique de période 1).

(n-j)-ième étape: Supposons être arrivé à

$$z = k_0 2^{j+1} + \dots + 2k_j + k_{j+1} + (\delta_{j+2} + (-1)^{N_{j+1}} \varepsilon_{j+2})/2 \quad \text{et}$$

$$M = N - \sum_{i=j+1}^{n-1} N_i 2^i$$

avec

$$E(k/2^n, N) = E(z/2^{j+1}, M) + \sum_{i=j+2}^n \varepsilon_i \varphi(N/2^i);$$

on passe à l'étape suivante en posant $z' = (z + (-1)^{N_j} \varepsilon_{j+1})/2$ et $M' = M - N_j 2^j$, et en vérifiant (toujours par le même raisonnement) que

$$E(z/2^{j+1}, M) = E(z'/2^j, M') + \varepsilon_{j+1} \varphi(N/2^{j+1}).$$

Finalement, à la n -ième étape on arrive à

$$E(z/2, N_0) = E(z', 0) + \varepsilon_1 \varphi(N/2) = \varepsilon_1 \varphi(N/2),$$

d'où le lemme 2.2.

2.3. LEMME. Avec les notations du lemme 2.2, posons, pour $0 \leq j < n$,

$$n_j = \sum_{h=j}^{n-1} N_h 2^{n-h-1}, \quad K_j = \sum_{h=j+1}^n k_h 2^{n-h}.$$

Alors, pour $1 \leq j < n$, on a

$$\delta_j(n, k, N) = \begin{cases} k_j & \text{si } 0 \leq K_j \leq n_j, \\ 1 + k_j & \text{si } n_j < K_j < 2^{n-j}, \end{cases}$$

$$\varepsilon_j(n, k, N) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq K_{j-1} \leq n_j, \\ 1 & \text{si } n_j < K_{j-1} \leq n_j + 2^{n-j}, \\ 0 & \text{si } n_j + 2^{n-j} < K_{j-1} < 2^{n-j+1}. \end{cases}$$

Remarque. Les formules restent vraies pour $j = n$ avec la convention $n_j = K_j = 0$.

Preuve. Montrons d'abord la formule pour δ_j .

Elle est vraie pour $j = n-1$ car $\delta_{n-1} = k_{n-1} + k_n/2 + (-1)^{N_{n-1}} k_n/2$ et ici $K_{n-1} = k_n$ et $n_{n-1} = N_{n-1}$. Supposons-la vraie pour l'indice j ; par définition:

$$\delta_{j-1} = k_{j-1} + \delta_j/2 + (-1)^{N_{j-1}} \varepsilon_j/2.$$

Soient k et N tels que $0 \leq K_{j-1} \leq n_{j-1}$; distinguons quatre cas:

- si $k_j = N_{j-1} = 0$, alors on a $K_j \leq n_j$, d'où $\delta_j = k_j = 0$, d'où $\delta_{j-1} = k_{j-1}$;
- si $k_j = 0$ et $N_{j-1} = 1$, alors si $\delta_j = k_j = 0$ on a $\delta_{j-1} = k_{j-1}$ et si $\delta_j = 1 + k_j = 1$ on a $\delta_{j-1} = k_{j-1} (1 + (-1)^{N_{j-1}} \varepsilon_j) = k_{j-1}$;
- si $k_j = N_{j-1} = 1$, on a $K_j \leq n_j$, d'où $\delta_j = k_j = 1$, d'où $\delta_{j-1} = k_{j-1}$;
- enfin $k_j = 1$ et $N_{j-1} = 0$ est impossible car $K_{j-1} \leq n_{j-1}$.

Soient maintenant k et N tels que $n_{j-1} < k_{j-1} < 2^{n-j+1}$; en distinguant encore les quatre cas ci-dessus, on vérifie sans peine que $\delta_j = 1 + k_{j-1}$.

Conséquence pour les ε_j :

- si $K_{j-1} \leq n_j$, alors $k_j = 0$, d'où $K_{j-1} = K_j$, d'où $\delta_j = k_j = 0$, et $\varepsilon_j = 0$;
- si $n_j < K_{j-1} \leq n_j + 2^{n-j}$: ou bien $k_j = 1$, auquel cas $K_j \leq n_j$, d'où $\delta_j = k_j = 1$ et $\varepsilon_j = 1$; ou bien $k_j = 0$, auquel cas $K_{j-1} = K_j > n_j$, d'où $\delta_j = k_j = 1$ et encore $\varepsilon_j = 1$;
- si $n_j + 2^{n-j} < K_{j-1} < 2^{n-j+1}$, alors $k_j = 1$ et $n_j < K_j$, d'où $\delta_j = 1 + k_j = 2$ et $\varepsilon_j = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

2.4. LEMME. Pour $1 \leq N \leq 2^n$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on a les formules

$$\int_0^1 \varepsilon_j(n, \alpha, N) d\alpha = 1/2, \quad \int_0^1 \varepsilon_i(n, \alpha, N) \varepsilon_j(n, \alpha, N) d\alpha = 1/4 \quad \text{si } i \neq j.$$

Preuve. Les fonctions ε_j étant constantes sur les intervalles $[(k-1)/2^n, k/2^n]$, ces intégrales se ramènent au calcul de

$$\sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_j(n, k, N) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_i(n, k, N) \varepsilon_j(n, k, N).$$

Bien noter pour ce qui suit que n , N et j sont fixés.

L'ensemble des k entre 1 et 2^n est partagé en 2^{n-j+1} classes, de 2^{j-1} termes chacune, où K_{j-1} est un entier entre 0 et 2^{n-j+1} ; et ε_j vaut 1 sur la moitié de ces classes: celles pour lesquelles $n_j < K_{j-1} \leq n_j + 2^{n-j}$ d'après le lemme 2.3; d'où 2^{n-1} valeurs de k pour lesquelles $\varepsilon_j = 1$, ce qui montre la première formule.

Supposons que $i < j$. On a 2^{n-i+1} classes, avec $\varepsilon_i = 1$ pour les 2^{n-i} classes consécutives correspondant à $n_i \leq K_{i-1} < n_i + 2^{n-i}$, toujours d'après le lemme 2.3. Les 2^{n-j+1} classes éclatent en 2^{j-i} classes du type précédent, où se reproduit l'égale répartition des ε_j entre 0 et 1:

$$\varepsilon_j = 1 \quad \text{si } n_j < K_{j-1} \leq n_j + 2^{n-j},$$

$$\varepsilon_j = 0 \quad \text{sinon.}$$

Il résulte de ces deux remarques qu'on a exactement un cas sur deux pour lequel $\varepsilon_j = 1$ quand $\varepsilon_i = 1$, ce qui entraîne

$$\sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_i \varepsilon_j = 2^{n-2},$$

et la deuxième formule du lemme 2.4.

2.5. Démonstration du théorème 1. D'après les lemmes 2.1 et 2.2, on a

$$\int_0^1 (E(\alpha, N, \omega))^2 d\alpha = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\alpha) \varphi(N/2^j) \right)^2 d\alpha$$

$$+ 2N \int_0^1 \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\alpha) \varphi(N/2^j) (x(\alpha) - \alpha) d\alpha + N^2 \int_0^1 (x(\alpha) - \alpha)^2 d\alpha.$$

Il en résulte que

$$T^2(N, \omega) = \sum_{i,j} \varphi(N/2^i) \varphi(N/2^j) \int_0^1 \varepsilon_i(\alpha) \varepsilon_j(\alpha) d\alpha$$

$$+ 2N \sum_j \varphi(N/2^j) \int_0^1 \varepsilon_j(\alpha) (x(\alpha) - \alpha) d\alpha + (N^2/4^n)/3.$$

Or d'après le lemme 2.4 $\int_0^1 \varepsilon_j(\alpha) d\alpha = 1/2$, $\int_0^1 \varepsilon_i(\alpha) \varepsilon_j(\alpha) d\alpha = 1/4$ si $i \neq j$, et un calcul élémentaire montre que

$$\int_0^1 (x(\alpha) - \alpha) \varepsilon_j(\alpha) d\alpha = \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_j(k)/2^{2n+1} = 1/2^{n+2};$$

d'où

$$T^2(N, \omega) = \sum_{j=1}^n \varphi^2(N/2^j)/2 + \sum_{i \neq j} \varphi(N/2^i) \varphi(N/2^j)/4$$

$$+ N \sum_{j=1}^n \varphi(N/2^j)/2^{n+1} + (N^2/4^n)/3;$$

ou encore

$$T^2(N, \omega) = \left(\sum_{j=1}^n \varphi(N/2^j) \right)^2 / 4 + \sum_{j=1}^n \varphi^2(N/2^j) / 4 \\ + N \sum_{j=1}^n \varphi(N/2^j) / 2^{n+1} + (N^2/4^n) / 3.$$

Enfin

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(N/2^j) \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n \varphi(N/2^j) + N/2^n \right)^2 \\ = \left(\sum_{j=1}^n \varphi(N/2^j) \right)^2 + N \sum_{j=1}^n \varphi(N/2^j) / 2^{n-1} + N^2/4^n, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^2(N/2^j) = \sum_{j=1}^n \varphi^2(N/2^j) + (N^2/4^n) / 3;$$

en ajoutant on obtient bien

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(N/2^j) \right)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^2(N/2^j) = 4T^2(N, \omega),$$

car $(N^2/4^n)/3 + N^2/4^n = 4(N^2/4^n)/3$, d'où le théorème 1.

Remarque. D'après le lemme 2.1, on a

$$T^2(N, \omega) = \int_0^1 \left(E(x(\alpha), N, \omega) \right)^2 d\alpha + 2N \int_0^1 E(x(\alpha), N, \omega) (x(\alpha) - \alpha) d\alpha \\ + N^2 \int_0^1 (x(\alpha) - \alpha)^2 d\alpha.$$

Les deux dernières expressions sont majorées respectivement par $2ND(N)/2^n$ et $N^2/4^n$ et donc tendent vers 0 quand n tend vers l'infini; on peut donc éviter le calcul des deux dernières intégrales par passage à la limite.

3. Démonstration du théorème 3. La démonstration est décomposée en plusieurs lemmes; la plupart des calculs, assez voisins de ceux du paragraphe 2, ne sont pas détaillés.

3.1. LEMME (relation entre écarts sur ω et $1-\omega$). Soient n, M et k des entiers tels que $1 \leq M \leq 2^{n-1}$ et $1 \leq k \leq 2^{n-1}$; posons $\omega'(i) = 1 - \omega(i)$; alors

$$E(k/2^{n-1}, M, \omega') = -E(1 - (k-1)/2^{n-1}, M, \omega) - M/2^{n-1}.$$

Preuve. Posons $x = k/2^{n-1}$; on a

$$E(x, M, \omega') = -E([x, 1]; M, \omega')$$

car $0 = E(1, M, \omega') = E(x, M, \omega') + E([x, 1]; M, \omega')$ (avec la convention que

$E([x, \beta]; M, X)$ représente l'écart de la suite X sur l'intervalle $[x, \beta]$). Mais

$$A([x, 1]; M, \omega') = A([0, 1-x]; M, \omega)$$

car $\omega(i) \in [0, 1-x]$ équivaut à $0 \leq \omega(i) \leq 1-x$, c'est-à-dire $x \leq 1 - \omega(i) \leq 1$, donc à $\omega'(i) \in [x, 1]$; il en résulte que $E([x, 1]; M, \omega') = E([0, 1-x]; M, \omega)$. Or

$$E([0, 1-x]; M, \omega) = E([0, 1-x + 1/2^{n-1}]; M, \omega) + M/2^{n-1}$$

puisque les points de ω jusqu'à 2^{n-1} sont sur les 2^{n-1} subdivisions diadiques de $[0, 1]$; d'où ce premier lemme.

3.2. LEMME (formule de descente pour l'écart). Soient n et N tels que $1 \leq N \leq 2^n$ et $\alpha \in [0, 1]$; posons $x(\alpha) = k/2^{n-1}$ avec k entier tel que $(k-1)/2^{n-1} < \alpha \leq k/2^{n-1}$. Pour $1 \leq M \leq 2^{n-1}$ et $1 \leq j \leq n-1$, posons $\varepsilon'_j(n-1, \alpha, M) = \varepsilon_j(n-1, k', M)$ avec $k' = 2^{n-1} - k + 1$. Alors on a les formules suivantes pour la suite de van der Corput symétrique $\tilde{\omega}$: Si N est pair,

$$E(x(\alpha), N, \tilde{\omega}) = \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j(n-1, \alpha, N/2) \varphi(N/2^{j+1}) \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon'_j(n-1, \alpha, N/2) \varphi(N/2^{j-1}) - N/2^n;$$

si N est impair,

$$E(x(\alpha), N, \tilde{\omega}) = \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j\left(n-1, \alpha, \frac{N+1}{2}\right) \varphi\left(\frac{N+1}{2^{j+1}}\right) \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon'_j\left(n-1, \alpha, \frac{N-1}{2}\right) \varphi\left(\frac{N-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{N-1}{2^n}.$$

Preuve. Résulte du lemme 2.2 appliqué à $E(k/2^{n-1}, M+1, \omega)$ et à $E(k'/2^{n-1}, M, \omega)$ où $M = [N/2]$.

3.3. LEMME (calcul d'intégrales). Soient n et N tels que $1 \leq N \leq 2^n$, et soient i et j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$; on a les formules suivantes:

$$\int_0^1 \varepsilon'_j(n, \alpha, N) d\alpha = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \varepsilon'_i(n, \alpha, N) \varepsilon'_j(n, \alpha, N) d\alpha = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \varepsilon_i(n, \alpha, N) \varepsilon'_j(n, \alpha, N) d\alpha = \frac{1}{4} \quad \text{si } i \neq j \text{ et}$$

$$\int_0^1 \varepsilon_j(n, \alpha, N) \varepsilon'_j(n, \alpha, N) d\alpha = \begin{cases} \varphi(2^j \omega(N+1)) & \text{pour } N < 2^n, \\ 0 & \text{pour } N = 2^n. \end{cases}$$

Remarque. Les valeurs obtenues pour ces intégrales ne dépendent pas de n , pour $n > [\log_2 N]$.

Preuve. D'après le lemme 2.4, les trois premières formules sont évidentes. Pour la dernière formule, noter d'après le lemme 2.3 que pour k tel que $K_{j-1} \neq 0$ et 1, on a

$$\varepsilon_j(n, 2^n - k + 1, N) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < K_{j-1} \leq 2^{n-j} - n_j, \\ 1 & \text{si } 2^{n-j} - n_j < K_{j-1} \leq 2^{n-j+1} - n_j, \\ 0 & \text{si } 2^{n-j+1} - n_j < K_{j-1} < 2^{n-j+1}; \end{cases}$$

pour $K_{j-1} = 1$, on a $\varepsilon_j(n, 2^n - k + 1, N) = 0$ quel que soit N ; et pour $K_{j-1} = 0$, on a $\varepsilon_j(n, 2^n - k + 1, N) = 1$ si $n_j = 0$ et 0 si $n_j \neq 0$.

Il en résulte que l'intégrale vaut $\min(n_j 2^{j-n}, 1 - n_j 2^{j-n})$, c'est-à-dire $\varphi(2^j \omega(N+1))$ pour $N < 2^n$ et 0 pour $N = 2^n$.

PROPRIÉTÉ 1. Pour tout $N \geq 1$, on a

$$\varphi(2^{j+1} \omega(N+1)) = \varphi(2^j \omega([N/2] + 1)) \quad \text{pour } j \geq 1,$$

$$\varphi(2^j \omega(N+1)) = 0 \quad \text{pour } j > [\log_2 N],$$

$$\varphi(2^j \omega(N+1)) = 1/2 \quad \text{pour } j = [\log_2 N].$$

3.4. Démonstration du théorème 3 dans le cas N pair. Quand on calcule l'intégrale de $(E(\alpha, N, \tilde{\omega}))^2$, on voit que les termes non diagonaux s'éliminent; c'est la raison fondamentale de l'obtention du logarithme pour l'ordre de croissance de $T^2(N, \tilde{\omega})$. Les termes restant conduisent bien à la formule du théorème 3 en notant que $\varphi(N/2) = 0$ car N est pair.

3.5. Démonstration du théorème 3 dans le cas N impair. Quelques propriétés supplémentaires sont nécessaires du fait de la disymétrie introduite par $M+1 = (N+1)/2$ et $M = (N-1)/2$ dans la formule du lemme 3.2.

PROPRIÉTÉ 2 (sur la fonction φ). On a les relations suivantes pour $j \geq 1$ et $N = 2M+1$:

$$\varphi\left(\frac{M+1}{2^j}\right) = \varphi\left(\frac{N}{2^{j+1}}\right) + \frac{(-1)^{Nj}}{2^{j+1}},$$

$$\varphi\left(\frac{M}{2^j}\right) = \varphi\left(\frac{N}{2^{j+1}}\right) - \frac{(-1)^{Nj}}{2^{j+1}}.$$

CONSÉQUENCE:

$$\varphi^2\left(\frac{M+1}{2^j}\right) + \varphi^2\left(\frac{M}{2^j}\right) = 2\varphi^2\left(\frac{N}{2^{j+1}}\right) + \frac{2}{4^{j+1}},$$

$$\varphi\left(\frac{M+1}{2^j}\right)\varphi\left(\frac{M}{2^j}\right) = \varphi^2\left(\frac{N}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{4^{j+1}}.$$

PROPRIÉTÉ 3 (sur l'intégrale de $\varepsilon_j(M+1)\varepsilon'_j(M)$). Soit $l \geq 1$, le plus petit indice tel que $N_l = 0$; alors

$$\int_0^1 \varepsilon_j(M+1, \alpha) \varepsilon'_j(M, \alpha) d\alpha = \int_0^1 \varepsilon_j(M, \alpha) \varepsilon'_j(M, \alpha) d\alpha$$

pour $j \geq l$.

CONSÉQUENCE:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{M+1}{2^j}\right) \varphi\left(\frac{M}{2^j}\right) \int_0^1 \varepsilon_j(M+1, \alpha) \varepsilon'_j(M, \alpha) d\alpha \\ = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{M+1}{2^j}\right) \varphi\left(\frac{M}{2^j}\right) \int_0^1 \varepsilon_j(M, \alpha) \varepsilon'_j(M, \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Tous calculs faits, à l'aide des propriétés ci-dessus, on aboutit à

$$T^2(N, \tilde{\omega}) = \sum_{j=2}^{\infty} \varphi^2(N/2^j) \theta_j(N) + \text{reste}, \quad \text{où } \theta_j(N) = 1 - 2\varphi(2^j \omega(N+1)).$$

On vérifie alors par récurrence que le reste dans la formule ci-dessus est égal à $\varphi^2(N/2) \theta_1(N)$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

4. Étude asymptotique de $T^2(N, \omega)$. Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 2.

Notations. On pose $J(N, \omega) = 4T^2(N, \omega)$ de sorte que $J(N, \omega) = D^2(N, \omega) + \Delta(N, \omega)$; pour $n \geq 1$ et $N \leq 2^n$, on pose

$$D_n(N) = \sum_{j=1}^n \varphi(N/2^j), \quad \Delta_n(N) = \sum_{j=1}^n \varphi^2(N/2^j),$$

$$I_n = [2^{n-1}, 2^n], \quad a_n = (2^{n+1} + (-1)^n)/3.$$

Le premier lemme qui suit est un rappel des principales propriétés de D et de D_n .

4.1. LEMME (cf. [1]). Pour tout $N \geq 1$, on a

$$D(2N) = D(N), \quad D(2N+1) = (D(N) + D(N+1) + 1)/2,$$

$$D(a_n) = n/3 + 7/9 + ((-1)^n/9)/2^{n-1},$$

$$D_n(a_n) = n/3 + 1/9 + ((-1)^{n+1}/9)/2^n;$$

D et D_n atteignent leur maximum sur I_n pour a_n .

Les deux lemmes suivants montrent les propriétés analogues pour Δ .

4.2. LEMME (relations de récurrence sur Δ). Pour tout $N \geq 1$, on a

$$\Delta(1) = 1/3, \quad \Delta(2N) = \Delta(N),$$

$$\Delta(2N+1) = (\Delta(N) + \Delta(N+1))/2 + 1/6.$$

Preuve. La formule $\Delta(2N) = \Delta(N)$ est immédiate d'après les propriétés de φ .

Pour N et n tels que $N < 2^n$, montrons que

$$\Delta_{n+1}(2N+1) = (\Delta_n(N) + \Delta_n(N+1))/2 + 1/6 + (1/3)/4^{n+1}.$$

Pour cela, posons

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^2(x2^k)$$

de sorte que $\Delta_n(N) = \Phi_n(N/2^n)$.

La fonction Φ_n est périodique de période 1, et on passe de Φ_n à Φ_{n+1} en ajoutant $\varphi^2(x2^n) = \min(x^2 4^n, (1-x)^2 4^n)$; on voit donc que sur tout intervalle $[k/2^n, (k+1)/2^n]$, Φ_n est un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est $\alpha_n = 1 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} = (4^n - 1)/3$; or

$$\Phi_{n+1}((2N+1)/2^{n+1}) = \Phi_n((2N+1)/2^{n+1}) + 1/4$$

et pour obtenir cette dernière valeur, il suffit de calculer les deux autres coefficients de Φ_n sur l'intervalle $[N/2^n, (N+1)/2^n]$, ce que l'on fait en résolvant le système

$$\Phi_n(N/2^n) = \alpha_n(N/2^n)^2 + \beta N/2^n + \gamma,$$

$$\Phi_n((N+1)/2^n) = \alpha_n((N+1)/2^n)^2 + \beta(N+1)/2^n + \gamma;$$

tous calculs faits, on aboutit bien à la formule annoncée.

Le passage à Δ se fait grâce à la relation $\Delta(N) = \Delta_n(N) + (N^2/3)/4^n$ qui résulte de $\varphi^2(N/2^j) = N^2/4^j$ pour $j > n$:

$$\Delta(2N+1) = \Delta_{n+1}(2N+1) + ((2N+1)^2/3)/4^{n+1}, \text{ d'où}$$

$$\Delta(2N+1) = (\Delta_n(N) + \Delta_n(N+1))/2 + 1/6 + ((2+4N+4N^2)/3)/4^{n+1}, \text{ d'où}$$

$$\Delta(2N+1) = (\Delta(N) + \Delta(N+1))/2 + 1/6,$$

d'où le lemme 4.2.

4.3. LEMME (maximum de Δ et Δ_n sur I_n). Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta(a_n) = n/9 + 7/27 + ((-1)^n/27)/2^{n-1},$$

$$\Delta_n(a_n) = n/9 + 3/27 + ((-1)^{n-1}/27)/2^{n-1} - (1/27)/4^n;$$

Δ et Δ_n atteignent leur maximum sur I_n pour a_n .

Preuve. La première formule se montre par récurrence en remarquant que a_n , impair, est intercalé entre les deux nombres pairs $2a_{n-1}$ et $4a_{n-2}$; la deuxième en résulte par

$$\Delta_n(a_n) = \Delta(a_n) - (a_n^2/3)/4^n.$$

Pour montrer la dernière assertion, on procède encore par récurrence. Soit $x \in I_n$; si x est pair, on a $\Delta(x) = \Delta(x/2) \leq \Delta(a_{n-1}) < \Delta(a_n)$; si x est impair, il s'encadre entre un multiple de 4, noté z , et un multiple de 2, non multiple de 4, noté y ; alors

$$\Delta(x) = (\Delta(y) + \Delta(z))/2 + 1/6 \leq (\Delta(a_{n-1}) + \Delta(a_{n-2}))/2 + 1/6 = \Delta(a_n);$$

d'où la propriété annoncée pour Δ ; celle sur Δ_n se montre de la même façon avec la formule du lemme 4.2, 2ème alinéa et $\Delta_n(2N) = \Delta_{n-1}(N)$.

COROLLAIRE. Pour tout $N \in I_n$, on a

$$\Delta(N) \leq \min(\Delta(a_n), \Delta_n(a_n) + (N^2/3)/4^n),$$

$$D(N) \leq \min(D(a_n), D_n(a_n) + N^2/2^n).$$

4.4. Démonstration du théorème 2. Posons

$$K(N) = \left(\frac{\log N}{3 \log 2}\right)^2 + \left(\frac{11}{3} + \frac{2 \log 3}{\log 2}\right) \frac{\log N}{9 \log 2}$$

et montrons d'abord que pour tout $N \in I_n$ on a

$$J(N) - K(N) \leq J(a_n) - K(a_n).$$

Si $N \geq a_n$, la majoration résulte des lemmes 4.1 et 4.3 puisque $K(N) \geq K(a_n)$.

Si $N < a_n$, en vertu du corollaire 4.3 on a

$$J(N) - K(N) \leq (D_n(a_n) + N/2^n)^2 + \Delta_n(a_n) + (N^2/3)/4^n - K(N);$$

notons q cette dernière fonction de N et calculons sa dérivée:

$$q'(x) = \frac{D_n(a_n)}{2^{n-1}} + \frac{2}{3 \times 4^{n-1}} x - \frac{2}{9(\log 2)^2} \frac{\log x}{x} - \left(\frac{11}{3} + \frac{2 \log 3}{\log 2}\right) \frac{1}{9x \log 2};$$

$q'(x)$ est de la forme $ax - b(\log x)/x - c/x + d$, $q''(x) = a + (c - b + b \log x)/x^2 > 0$ pour $x \in [1, \infty[$, compte tenu des valeurs de a , $b = .462\dots$ et $c = 1.095\dots$; q' est croissante, et elle s'annule donc une fois au plus sur $[1, \infty[$; il suffit donc de vérifier que $q'(2^{n-1}) > 0$ pour être assuré que q' est positive sur I_n , ce qui montre que $q(N) < q(a_n)$, c'est-à-dire $J(N) - K(N) \leq J(a_n) - K(a_n)$ dans le cas $N < a_n$; or

$$2^{n-1} q'(2^{n-1}) = n \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9 \log 2} \right) + \frac{7}{9} - \frac{5}{27 \log 2} - \frac{2 \log 3}{9(\log 2)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{9 \times 2^n},$$

le coefficient de n vaut .0127... et le terme constant vaut .0024...; on vérifie donc que $q'(2^{n-1}) > 0$, même pour $n = 2$.

Nous sommes maintenant en mesure de conclure:

$$J(a_n) - K(a_n) = \frac{28}{81} + \frac{11}{27} \frac{\log 3}{\log 2} + \left(\frac{\log 3}{3 \log 2} \right)^2 + o(1),$$

d'où la deuxième partie du théorème 2, $(J(N) - K(N))/4$ étant la quantité dont on cherchait la limite supérieure.

On vérifie ensuite que $J(1) - K(1) = J(1) = 4/3$ et que $J(a_n) - K(a_n) \leq 4/3$ pour tout n (le $o(1)$ ci-dessus est assez compliqué, mais on peut facilement calculer $J(a_n) - K(a_n)$ à la machine pour vérifier cette dernière inégalité pour les premières valeurs de n ; on a donc aussi la première partie du théorème 2.

5. Étude asymptotique de $T^2(N, \tilde{\omega})$. Contrairement au cas de la suite ω de van der Corput, nous n'avons pas obtenu le comportement asymptotique exact de $T^2(N, \tilde{\omega})$; cela en raison de la complication introduite par le terme correctif $\theta_j(N) = 1 - 2\varphi(2^j \omega(N+1))$. Néanmoins nous avons un encadrement précis de $t(\tilde{\omega})$, qu'il serait possible d'améliorer en poussant plus loin les calculs à la machine.

Pour obtenir la formule du théorème 4, il nous faut d'abord montrer quelques propriétés de la fonction θ_j ; c'est l'objet du lemme 5.1; nous énoncerons ensuite une proposition (5.2) qui permet de démontrer la formule (5.3); la majoration du théorème 4 en découle; la minoration est traitée en 5.4. Enfin, nous établirons (5.5) des relations de récurrence pour $T^2(N, \tilde{\omega})$, comme nous l'avons fait pour $\Delta(N, \omega)$ (en 4.2), relations ici trop complexes pour déboucher simplement, comme au paragraphe 4, sur un résultat exact.

Un dernier point: l'étude de $\Delta(4.3)$ et la majoration $T^2(N, \tilde{\omega}) \leq \Delta(N, \omega)$, due à $\theta_j(N) \leq 1$, montrent immédiatement que

$$t(\tilde{\omega}) \leq \frac{1}{9 \log 2} < 0.161.$$

5.1. LEMME (formules pour $\theta_j(N)$). Soient $n \geq 0$ et N impair tel que $2^n < N < 2^{n+1}$; alors

$$2\theta_j(N) = \theta_j(N - 2^n) + \theta_j(2^{n+1} - N) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\theta_n(N) = 0, \quad \theta_n(N - 2^n) = 1, \quad \theta_n(2^{n+1} - N) = 1,$$

$$\theta_j(N) = \theta_j(N - 2^n) = \theta_j(2^{n+1} - N) = 1 \quad \text{pour } j > n.$$

D'autre part, pour tout entier M , on a

$$2\theta_1(2M+1) = 1 + e(M)\theta_1(M)$$

où e est défini par

$$e(M) = 1 \quad \text{si } M \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod{4},$$

$$e(M) = -1 \quad \text{si } M \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod{4}.$$

Remarque. La définition de $\theta_j(N)$ implique $\theta_j(2M+1) = \theta_j(2M)$ pour tout entier M ; on a aussi $\theta_j(N) = \theta_1([N/2^{j-1}])$ pour tout $j \geq 1$.

Preuve. Résulte simplement de l'écriture du développement de $N - 2^n$ et $2^{n+1} - N$ en fonction de celui de N (respectivement du développement de M en fonction de celui de $2M+1$), avec la formule annoncée en remarque au théorème 3.

5.2. PROPOSITION. Pour q et N entiers, $q \geq 1$, $N \geq 1$, posons

$$\psi_q(N) = \sum_{j=1}^q \varphi^2(N/2^j) \theta_j(N), \quad t_q = \max_{1 \leq N \leq 2^q} \psi_q(N).$$

On a la propriété suivante:

$$\max_{N \in \mathbb{N}} \psi_q(N) = t_q.$$

Preuve. On montre d'abord que pour $n \geq q$ on a

$$\max_{2^n < N \leq 2^{n+1}} \psi_q(N) \leq \max_{1 \leq N \leq 2^n} \psi_q(N),$$

en utilisant la première partie du lemme 5.1. La propriété annoncée en résulte par récurrence sur $n \geq q$.

5.3. Démonstration de la formule du théorème 4. On scinde la somme exprimant $T^2(N, \tilde{\omega})$ (théorème 3) en blocs de q termes en divisant $n+1$ par q ($n+1 = aq + r$, $0 \leq r < q$). Par application de 5.2 on obtient alors

$$T^2(N, \tilde{\omega}) \leq at_q + q + 1/3 \quad \text{pour tout } q \geq 1,$$

d'où

$$t(\tilde{\omega}) \leq \inf_{q \geq 1} (t_q / (q \log 2)).$$

D'autre part, soit $A_q \in [1, 2^q]$ tel que $t_q = \psi_q(A_q)$; d'après le théorème de Roth, on sait que $t(\tilde{\omega}) \geq d > 0$ (voir le paragraphe 1), d'où la suite $(A_q)_q$ est non bornée (notons que la minoration établie en 5.4 montre aussi que $t(\tilde{\omega}) \geq d \geq 0$, avec $d \geq .089$); il en résulte que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} (T^2(N, \tilde{\omega}) / \log N) \geq \limsup_{q \rightarrow \infty} (\psi_q(A_q) / \log A_q) \geq \inf_{q \geq 1} (t_q / (q \log 2));$$

d'où la formule du théorème 4.

Le calcul à la machine de t_q pour diverses valeurs de q permet de majorer $t(\tilde{\omega})$; le majorant annoncé (0.103) correspond au minimum de t_q/q pour q allant de 1 à 20 (cf. La table en annexe).

Une remarque pour terminer ce paragraphe 5.3: la démonstration de la formule du théorème 4 montre que $t_m \leq at_q + t_r$ si $m = aq + r$ avec $0 \leq r < q$, et par suite on a

$$\inf_{q \geq 1} (t_q/q) = \lim_{q \rightarrow \infty} (t_q/q).$$

5.4. Minoration de $t(\tilde{\omega})$. La table en annexe suggère des sous-suites pour minorer $t(\tilde{\omega})$:

la suite $b_m = (16^m - 1)/15$ qui donne 1, 17, 273, 4369, 69905, ...;

la suite $c_m = (8 \times 16^m + 7)/15$ qui donne 9, 137, 2185, 34953, ...

Prenons par exemple b_m ; le calcul de

$$\psi_{4m-3}(b_m) = \sum_{j=1}^{4m-3} \varphi^2(b_m/2^j) \theta_j(b_m)$$

aboutit à la formule

$$\psi_{4m-3}(b_m) = m \left(\left(\frac{7}{15} \right)^2 \frac{1}{15} + \left(\frac{4}{15} \right)^2 \frac{1}{15} + \left(\frac{2}{15} \right)^2 \frac{7}{15} + \left(\frac{1}{15} \right)^3 \right) + O(1),$$

d'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\psi_{4m-3}(b_m)/m) = 842/3375,$$

ce qui donne bien la minoration annoncée pour $t(\tilde{\omega})$.

Notons pour terminer que la suite c_m donne la même minoration, ce qui renforce l'hypothèse que .089... est la vraie valeur de $t(\tilde{\omega})$.

5.5. Formules génératrices pour $T^2(N, \tilde{\omega})$.

PROPOSITION. Pour tout entier $N \geq 1$, on a

$$T^2(1, \tilde{\omega}) = 1/3, \quad T^2(2N, \tilde{\omega}) = T^2(N, \tilde{\omega}),$$

$$T^2(2N+1, \tilde{\omega}) = (T^2(N, \tilde{\omega}) + T^2(N+1, \tilde{\omega}))/2 + 5/48 \\ - \theta_1^2(N)/16 + e(N)\theta_1(N)/8$$

(la fonction $e(N)$ a été définie au lemme 5.1).

Preuve. La formule $T^2(2N, \tilde{\omega}) = T^2(N, \tilde{\omega})$ est évidente. Pour l'autre formule, nous procédons comme au lemme 4.2 pour $\Delta(N, \omega)$: pour n tel que $N < 2^n$, posons

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^2(2^k x) \theta_1([2^{k+1} x])$$

de sorte que $\psi_n(N) = \Psi_n(N/2^n)$.

On passe de Ψ_n à Ψ_{n+1} en ajoutant $\varphi^2(2^n x) \theta_1([2^{n+1} x])$ et ici, sur un intervalle $[k/2^n, (k+1)/2^n]$, Ψ_n est un trinôme de second degré dont le

coefficient dominant est

$$\alpha_n(k) = \sum_{j=1}^n 4^{n-j} \theta_j(k)$$

(contrairement au cas de Δ , ce coefficient dépend de k).

Les calculs sont en tout point semblables, la seule nouvelle difficulté étant le calcul effectif de $\alpha_n(N)$; il ne reste plus alors qu'à reporter dans $T^2(2N+1, \tilde{\omega})$ pour avoir la formule annoncée avec la deuxième partie du lemme 5.1.

Noter qu'avec $\theta_1(N) = 1$ pour tout N , on retrouve la formule pour Δ (lemme 4.2).

Annexe: Valeurs approchées de $t(\tilde{\omega}) = \inf_q (t_q/(q \log 2))$. Pour $N < 2^q$, on

a $T^2(N, \tilde{\omega}) = \psi_q(N) + (N^2/3)/4^q$ avec $\psi_q(N) = \sum_{j=1}^q \varphi^2(N/2^j) \theta_j(N)$; on pose

$$t_q = \max_{1 \leq N \leq 2^q} \psi_q(N) = \psi_q(A_q), \quad t'_q = \max_{2^{q-1} \leq N \leq 2^q} \psi_q(N) = \psi_q(A'_q).$$

Les valeurs dans la table 1 sont données avec les quatre premières décimales.

Table 1

q	A_q	t_q	A'_q	t'_q	$t_q/(q \log 2)$
1	1	.25	1		.3606
2	1	.3125	2	.25	.2254
3	1	.3281	5	.2656	.1577
4	9	.4101	9		.1479
5	17	.4931	17		.1422
6	17	.5637	33	.5373	.1355
7	33	.6038	73	.5767	.1244
8	137	.6666	137		.1202
9	273	.7421	273		.1189
10	273	.8132	529	.7886	.1173
11	529	.8554	1097	.8355	.1121
12	2185	.9166	2185		.1101
13	4369	.9916	4369		.1100
14	4369	1.062	8465	1.038	.1095
15	8721	1.105	17545	1.087	.1063
16	34953	1.166	34953		.1051
17	69905	1.241	69905		.1053
18	69905	1.312	135441	1.287	.1051
19	139537	1.355	279689	1.337	.1028
20	559241	1.415	559241		.1021

Références

- [1] R. Bejani et H. Faure, *Discrépance de la suite de van der Corput*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 285 (1977), 313–316.
- [2] H. Faure, *Discrépances de suites associées à un système de numération (en dimension un)*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 143–182.
- [3] S. Haber, *On a sequence of points of interest for numerical quadrature*, J. Res. Nat. Bur. Standards B 70 (1966), 127–136.
- [4] H. Niederreiter, *Application of diophantine approximation to numerical integration*, in: *Diophantine Approximation and its Applications*, C. F. Osgood (ed.), Academic Press, New York 1973, 129–199.
- [5] P. D. Proinov, *Estimation of L^2 discrepancy of a class of infinite sequences*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 36 (1) (1983), 37–40.
- [6] — *On the L^2 discrepancy of some infinite sequences*, Serdica 11 (1985), 3–12.
- [7] — *On irregularities of distribution*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 39 (9) (1986), 31–34.
- [8] P. D. Proinov and V. S. Grozdanov, *Symmetrisation of the van der Corput–Halton sequence*, ibid. 40 (8) (1987), 5–8.
- [9] K. F. Roth, *On irregularities of distribution*, Mathematika 1 (1954), 73–79.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
UFR M.I.M.
3 Place Victor Hugo
13331 Marseille, France

Reçu le 24.3.1988
et révisé le 31.1.1989

(1805)

An alternative approach to a theorem of Tom Meurman

by

R. BALASUBRAMANIAN and K. RAMACHANDRA (Bombay)

§ 1. Introduction. Tom Meurman proved the following theorem which is Corollary 2 on page 352 of his paper [3].

THEOREM 1. For $3 \leq H \leq T$, and any $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_T^{T+H} |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi)|^2 dt \ll (qH + (qT)^{1/3})(q(T+H))^\varepsilon$$

where $q \geq 1$ is any integer and χ runs over all residue class characters mod q and the constant implied by the Vinogradov symbol $\ll$ depends only on ε .

Remark. We have stated the condition $3 \leq H \leq T$ which is not different from his conditions.

The history of this theorem is as follows. By Balasubramanian's result [1] the special case $q = 1$ of this theorem follows as an immediate corollary. A somewhat simpler proof in the case $q = 1$ was given by P. N. Ramachandran in his M. Phil. thesis [7]. The object of this paper is to give a simple proof of this theorem in fact with $(q(T+H))^\varepsilon$ replaced by more precise functions on the lines of [5] (see the appendix therein). Our proof resembles to some extent the method of an earlier draft of [6]. The only serious estimate which we use is Theorem 5.9 of [8] due to van der Corput. We also use the functional equation for $L(s, \chi)$ (χ proper) to get an approximate functional equation. Accordingly we prove the following theorem.

THEOREM 2. Let $\sum^*$ denote the sum over all proper characters $\chi \bmod q$, $\varphi(q) = q \prod_{p|q} (1 - 1/p)$, $d_0^x(q) = \prod_{p|q} (2 - 2/p)$, and $T \geq T_0$, a large positive constant. Then the following statements hold.

(a) Let $q \geq 10^8 T$. Then if $0 \leq |t| \leq T$, we have

$$(1) \quad \sum_x^* |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi)|^2 \ll \varphi(q) \log q.$$

(b) Let $10^8 T \geq q$. Then for $C \log T \leq H \leq T$ where C is a large positive