References

[B] W. D. Brownawell, *Bounds for the degrees in the Nullstellensatz*, Ann. of Math. 126 (1987), 577–591.
[B-Y] C. A. Berenstein and A. Yger, *Bounds for the degrees in the division problem*, manuscript, 1988.
[F] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin 1969.
[H] G. Hermann, *Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale*, Math. Ann. 95 (1926), 736–788.
[M-M] E. Mayr and A. Meyer, *The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals*, Adv. in Math. 46 (1982), 305–329.
[M-W] D. W. Masser and G. Wüstholz, *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions*, Invent. Math. 72 (1983), 407–464.
[S] H. Skoda, *Applications des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 5 (1972), 545–579.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE
Piazza dei Cavalieri 7
56100 Pisa, Italy

Received on 6.4.1988
and in revised form on 6.3.1989 (1809)

ACTA ARITHMETICA
LVI (1990)

Une nouvelle mesure d'indépendance algébrique pour $(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})$

par

G. DIAZ (Saint-Etienne)

1. Introduction, théorème. Soit α un nombre algébrique non nul, pour lequel on a choisi une détermination du logarithme, $\log\alpha$, que l'on suppose non nulle; et soit β un nombre algébrique de degré 3. En 1948, A. O. Gel'fond a démontré l'indépendance algébrique des nombres α^β, α^{β^2}; on s'intéresse ici à leurs mesures d'indépendance algébrique.

Soit K un corps de nombres. Pour un polynôme $P \in K[X_1, X_2]$ on note $d(P)$ son degré total, $H(P)$ sa hauteur naïve, $h(P)$ sa hauteur logarithmique (voir [P2], § I.3, pour la définition et les propriétés de h); les mesures $\log H$ et h sont équivalentes si on se limite à des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

La première mesure d'indépendance algébrique de $(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})$ est obtenue en 1950 par A. O. Gel'fond et N. I. Fel'dman (voir [G-F]):

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout polynôme $P \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ vérifiant $d(P) + \log H(P) > t(\varepsilon)$ on ait

$$\log|P(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})| > -\exp\left((d(P) + \log H(P))^{4+\varepsilon}\right).$$

Ce résultat est amélioré en 1979 par W. D. Brownawell (voir [B], théorème 1) qui remplace dans la minoration ci-dessus $(d(P) + \log H(P))^{4+\varepsilon}$ par $c\,d(P)^3(d(P) + \log H(P))$. Puis nous avons montré en 1987 en utilisant un critère de P. Philippon ([P1], théorème 2) que l'on peut remplacer $(d(P) + \log H(P))^{4+\varepsilon}$ par $(d(P) + \log H(P))^{2+\varepsilon}$ (voir [D1]).

Ce critère utilisait comme mesure d'une polynôme P la taille $d(P) + h(P)$ et ne permettait pas de séparer degré et hauteur dans les mesures d'indépendance algébrique. Il a été récemment amélioré par P. Philippon et E. M. Jabbouri (voir [J]) et cette nouvelle version permet de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soient α, β deux nombres algébriques ($\alpha \neq 0$, $\log\alpha \neq 0$, β de degré 3). Il existe deux réels positifs c_1, c_2 ne dépendant que des données α, β tels que pour tout polynôme $P \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ on ait*

$$\log|P(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})| \geq -c_1 \exp\left[c_2\, d(P)\left(d(P) + \log H(P)\right)\right].$$

Le principe de la démonstration est simple; on utilise la construction générale faite dans [D2] sur un cas particulier adapté au couple (α, β) et on utilise le nouveau critère de E. M. Jabbouri–P. Philippon. Ce critère, comme celui de [P1], utilise de façon essentielle les techniques de l'algèbre commutative et de l'élimination introduites en 1977 par Yu. V. Nesterenko dans [N], puis développées par Yu. V. Nesterenko et P. Philippon (voir [P2] par exemple). Le critère est rappelé au paragraphe 2 et le paragraphe 3 contient la démonstration du théorème.

Je tiens à remercier E. M. Jabbouri et P. Philippon qui ont fait bénéficier l'équipe stéphanoise de leur nouveau critère dès sa mise au point.

2. Le nouveau critère de E. M. Jabbouri–P. Philippon. On va expliciter ce critère dans le cas particulier qui nous est utile ici, c'est-à-dire celui qui permet d'obtenir une mesure d'indépendance algébrique de deux nombres (alors que le critère général donne une mesure en terme d'idéaux).

CRITÈRE. *Soit* $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{C}^2$ *et* K *un corps de nombres; on note* $|\theta| = \max(1, |\theta_1|, |\theta_2|)$. *Soit* δ, τ, σ, U *des nombres réels positifs vérifiant*

$$\delta \geqslant 1, \quad \tau \geqslant \sigma^2 \geqslant 1, \quad \tau \geqslant 2\delta \log 3, \quad U \geqslant 6(1+4[K:\mathbf{Q}])\tau.$$

On suppose que pour tout entier S *vérifiant*

(a) $\tau < S\sigma^2 \leqslant U$

il existe une famille $Q_{S,1}, \ldots, Q_{S,m(S)}$ *de polynômes de* $K[X_1, X_2]$ *telle que:*

(b) $d(Q_{S,j}) \leqslant \delta$,

(c) $h(Q_{S,j}) \leqslant \tau - 2\delta \log 3$,

(d) $\max_{1 \leqslant j \leqslant m(S)} \left(|Q_{S,j}(\theta)|/|\theta|^{d(Q_{S,j})}\right) \leqslant \exp(-S\sigma^2)$,

(e) *les polynômes* $Q_{S,j}$, $j = 1, \ldots, m(S)$, *sont sans zéro commun dans la boule de* $\mathbf{C}^2$ *(au sens de la norme du max) de centre* 0 *et de rayon* $\exp(-S\sigma^3)$.

Alors pour tout polynôme $P \in K[X_1, X_2]$ *non constant vérifiant*

(f) $10(4[K:\mathbf{Q}]+3)(27\sigma)^2(\delta^2 h(P) + (\delta^2 + \tau\delta) d(P)) \leqslant U$

on a

$$\log|P(\theta)| \geqslant -10(5[K:\mathbf{Q}]+4)(27\sigma)^2(\delta^2 h(P) + (\delta^2 + \tau\delta) d(P)).$$

Pour obtenir ce résultat on utilise le critère de [J] avec $n = 2$, $k = 1$ et en prenant pour idéal J de $K[X_1, X_2]$ l'idéal engendré par P (cet idéal est de dimension 1 puisque P n'est pas constant). Il suffit alors de traduire, en sachant que:

$$\begin{cases} \operatorname{Deg}(J) = 2d(P), \\ Ht(J) \leqslant h(P) + 5d(P), \\ \|J\|_\theta \leqslant |P(\theta)| \exp([K:\mathbf{Q}]\, d(P) + 30\, d(P)) \end{cases}$$

(pour les définitions de $\operatorname{Deg}(J)$, $Ht(J)$, $\|J\|_\theta$ voir [P1], [P2]).

Remarquons au passage que dans cet énoncé toutes les "constantes" sont explicites, ce qui n'était pas le cas du théorème 2 de [P2]. Notons aussi que l'hypothèse essentielle reste l'existence d'une famille de polynômes sans zéro commun au voisinage du point considéré; la méthode de construction développée dans [D2] lui est donc bien adaptée.

3. Démonstration du théorème

3.1. *Préliminaires.* Les données sont celles du théorème; et on s'est fixé un corps de nombres K. On note K' le corps de nombres $K(\alpha, \beta)$. Au couple (α, β) on associe les deux familles de nombres complexes suivantes:

$$\begin{cases} u_1 = \log\alpha, & u_2 = \beta\log\alpha, & u_3 = \beta^2\log\alpha, \\ v_1 = 1, & v_2 = \beta, & v_3 = \beta^2. \end{cases}$$

Pour faire le lien avec les notations de [D2] on définit $\theta \in \mathbf{C}^{12}$ par

$$\theta = (1, \beta, \beta^2, \alpha, \alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \alpha^{\beta^3}, \alpha^{\beta^2}, \alpha^{\beta^3}, \alpha^{\beta^4});$$

et on représente par Y la variable $(Y_1, \ldots, Y_{12})$. Enfin pour un élément $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{Z}^3$ on note

$$|\lambda| = \max_i |\lambda_i|, \qquad \lambda \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i.$$

Rappelons le résultat obtenu dans [D2], § II, qui va constituer le point de départ de la démonstration. On suppose que les familles (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) vérifient l'hypothèse technique suivante:

$\mathrm{HT}(\delta_1, \delta_2)$ (1) *Il existe* $X(u) > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \in \mathbf{Z}^3$, $\lambda \neq 0$, *et tout* $X > X(u)$ *on ait*

$$|\lambda \cdot u| \geqslant \exp(-X^{\delta_1}) \quad \text{dès que } |\lambda| \leqslant X.$$

(2) *Il existe* $X(v) > 0$ *tel que pour tout* $\mu \in \mathbf{Z}^3$, $\mu \neq 0$, *et tout* $X > X(v)$ *on ait*

$$|\mu \cdot v| \geqslant \exp(-\min(X \log X, X^{\delta_2})) \quad \text{dès que } |\mu| \leqslant X.$$

Alors il existe des réels positifs $a_0, a_1, \ldots, a_6$ ($a_6 \geqslant 1$) tels que pour toute famille de paramètres $(D, L, M, M_1, \varrho, R)$ où D, L, M, M_1 sont des entiers, R, ϱ des réels, tous plus grands que a_6 et vérifiant les neuf contraintes:

($\mathscr{C}1$) $\quad 2^{13} M^3 \leqslant DL^3$,

($\mathscr{C}2$) $\quad M < M_1$,

($\mathscr{C}3$) $\quad 4M_1 < a_0 R$,

($\mathscr{C}4$) $\quad a_1(D \log M_1 + LM_1) \leqslant \varrho$,

($\mathscr{C}5$) $\quad a_2(D \log R + LR) \leqslant M^3 \log(a_0 R/M_1)$,

($\mathscr{C}$6) $\quad a_3(D\log M+LM)+2M^3\log(a_4 M_1/M)+2M^3\log M \leqslant \varrho,$

($\mathscr{C}$7) $$4!\,8^3 DL^3 \leqslant M_1^3,$$

($\mathscr{C}$8) $$4\cdot 8^3 L \leqslant M_1^2,$$

($\mathscr{C}$9) $\quad \log(\Delta L^2(M_1/4)^2)+(\Delta L^2 M_1/4)^{\delta_1}+(\Delta L(M_1/4)^2)^{\delta_2} < \varrho/2,$

$$\text{où } \Delta := 8\max(\pi;\ \pi|u_1|;\ \sum_{h,k}(1+|u_h v_k|)),$$

il existe une famille de polynômes de $\mathbf{Z}[Y]$, $\{Q_1, \ldots, Q_p\}$, vérifiant les propriétés suivantes:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}(\mathrm{I}.1) & d(Q_i) \leqslant a_5(D+LM_1),\\ (\mathrm{I}.2) & h(Q_i) \leqslant a_5(D\log M_1+LM),\\ (\mathrm{I}.3) & |Q_i(\theta)| \leqslant 2\exp(-\varrho/2)+\exp(-\frac{1}{2}M^3\log(a_0R/M_1)),\\ (\mathrm{I}.4) & \text{les polynômes } Q_1,\ldots,Q_p \text{ n'ont pas de zéro commun dans}\\ & \text{la boule de } \mathbf{C}^{12} \text{ (au sens de la norme du max)}\\ & \text{de centre } \theta, \text{ de rayon } \exp(-\varrho).\end{cases}$$

Déterminons δ_1, δ_2, dans l'hypothèse technique; pour $\mu \in \mathbf{Z}^3$ non nul, $\mu\cdot v = \mu_1+\mu_2\beta+\mu_3\beta^2$ est non nul (puisque β est de degré 3) et on sait alors minorer $|\mu\cdot v|$ (voir [M-W], lemme 3, ou [W], p. 30). On obtient:

(1) $$|\mu\cdot v| \geqslant \exp(-2\log M(\beta)-2\log 3|\mu|),$$

(2) $$|\lambda\cdot v| \geqslant |\log\alpha|\exp(-2\log M(\beta)-2\log 3|\lambda|).$$

Ceci montre que l'on peut prendre pour δ_1, δ_2 n'importe quel réel positif aussi petit que nécessaire; par exemple on peut prendre $\delta_1=\delta_2=1/4$. La contrainte ($\mathscr{C}$9) est alors plus faible que ($\mathscr{C}$4).

L'estimation (I.3) montre que ϱ et $M^3\log(a_0R/M_1)$ doivent être du même ordre de grandeur; il n'est pas gênant d'imposer à ϱ d'être le plus grand des deux, ce qui permet d'écrire (I.3) sous la forme

$$|Q_i(\theta)| \leqslant 3\exp(-\tfrac{1}{2}M^3\log(a_0R/M_1)).$$

3.2. *Passage de θ à $(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})$.* Dans la suite on suppose que β est un entier algébrique (on déduit la mesure dans le cas général de la mesure établie dans ce cas particulier). On procède alors exactement comme dans [D1], §II.2, c'est-à-dire que l'on remplace formellement, dans $Q_i(\theta)$, α^β par X_1 et α^{β^2} par X_2. On obtient ainsi une famille de polynômes de $K'[X_1, X_2]$, que l'on va encore noter $\{Q_1, \ldots, Q_p\}$, vérifiant les mêmes estimations (aux constantes près) que la famille initiale; précisément, il existe $a_7 \geqslant 1$ tel que:

$$(\mathrm{II})\begin{cases}(\mathrm{II}.1) & d(Q_i) \leqslant a_7(D+LM_1),\\ (\mathrm{II}.2) & h(Q_i) \leqslant a_7(D\log M_1+LM),\\ (\mathrm{II}.3) & |Q_i(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})| \leqslant \exp(-\frac{1}{3}M^3\log(a_0R/M_1)),\\ (\mathrm{II}.4) & \text{les polynômes } Q_1,\ldots,Q_p \text{ n'ont pas de zéro commun}\\ & \text{dans la boule de } \mathbf{C}^2 \text{ de centre } (\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}),\\ & \text{et de rayon } \exp(-\varrho).\end{cases}$$

L'objectif est maintenant de choisir les paramètres D, L, M, M_1, ϱ, R de façon à pouvoir se placer dans les hypothèses du critère.

3.3. *Choix des paramètres D, L, M, M_1, ϱ, R.* On introduit trois nouveaux paramètres S, τ, δ (S entier, δ et $\tau \geqslant 1$); les contraintes portant sur S, τ, δ (et plus loin U) seront notées ($\mathscr{C}'$1), ($\mathscr{C}'$2), ... On vérifie d'abord qu'il existe un réel positif c_0, qui dépend de α, β, a_0, a_1, ..., a_7 mais indépendant de S, τ, δ, tel que pour tout $\sigma \geqslant c_0$ on ait:

si (τ, δ, S) satisfont

($\mathscr{C}'$1) $$\tau < \sigma^2 S,$$

($\mathscr{C}'$2) $$8a_6a_7\log S \leqslant \tau,$$

($\mathscr{C}'$3) $$\sigma^2\exp(\sigma) \leqslant \tau,$$

($\mathscr{C}'$4) $$(1+3\log 3)\delta \leqslant \tau,$$

alors les paramètres D, L, M, M_1, ϱ, R suivants vérifient ($\mathscr{C}$1) à ($\mathscr{C}$9):

$$L = [4a_7^{1/3}\sigma^{5/6}(S/\tau)^{1/3}]; \quad D = \left[\frac{1}{4a_7}\frac{\tau}{\log S}\right];$$

$$M = [2^{-13/3}\sigma^{5/6}(S/\log S)^{1/3}]; \quad M_1 = [48a_7^{1/3}\sigma^{5/6}(24S/\log S)^{1/3}];$$

$$R = M_1^2/a_0; \quad \varrho = \sigma^3 S.$$

Au quadruplet $(\sigma, S, \tau, \delta)$ on peut alors associer la famille finie de polynômes $\{Q_1, \ldots, Q_p\}$ de $K'[X_1, X_2]$ vérifiant (II). On remplace L, D, M, M_1, R, ϱ par leurs valeurs et on obtient pour le degré et la hauteur:

(3) $$d(Q_i) \leqslant \frac{1}{4}\frac{\tau}{\log S}+a_8\sigma^{5/3}\left(\frac{S^2}{\tau\log S}\right)^{1/3}, \quad h(Q_i) \leqslant \frac{1}{4}\tau+a_8\sigma^{5/3}\left(\frac{S^2}{\tau\log S}\right)^{1/3}.$$

Rappelons que pour pouvoir appliquer le critère il faut avoir $d(Q_i) \leqslant \delta$, $h(Q_i) \leqslant \tau-2\delta\log 3$. Pour cela il suffit d'imposer les deux nouvelles contraintes suivantes:

($\mathscr{C}'$5) $$\tau \leqslant 2\delta\log(\tau/\sigma^2),$$

($\mathscr{C}'$6) $$a_9\sigma^5(S^2/\log S) \leqslant \tau\delta^3, \quad \text{où } a_9 = (2a_8)^3.$$

En effet, compte tenu de ($\mathscr{C}'$1), la contrainte ($\mathscr{C}'$5) implique $\frac{1}{4}\tau/\log S \leqslant \delta/2$; et la contrainte ($\mathscr{C}'6$) est équivalente à

$$a_8 \sigma^{5/3} \left(\frac{S^2}{\tau \log S}\right)^{1/3} \leqslant \frac{\delta}{2};$$

donc les majorations (3) deviennent $d(Q_i) \leqslant \delta$ et $h(Q_i) \leqslant \tau/4 + \delta/2$; pour conclure il suffit de vérifier que ($\mathscr{C}'4$) implique $\tau/4 + \delta/2 \leqslant \tau - 2\delta \log 3$.

Notons ici que la contrainte ($\mathscr{C}'6$) est plus forte que ($\mathscr{C}'2$), quitte à majorer c_0. On oubliera donc ($\mathscr{C}'2$) dans la suite.

En conclusion, pour tout quadruplet $(S, \tau, \delta, \sigma)$ (avec $\sigma \geqslant c_0$) vérifiant ($\mathscr{C}'1$), ($\mathscr{C}'3$)–($\mathscr{C}'6$) il existe une famille de polynômes de $K'[X_1, X_2]$, $\{Q_1, \ldots, Q_p\}$, telle que:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \text{(III.1)} & d(Q_i) \leqslant \delta, \\ \text{(III.2)} & h(Q_i) \leqslant \tau - 2\delta \log 3, \\ \text{(III.3)} & |Q_i(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})| \leqslant \exp(-\sigma^2 S), \\ \text{(III.4)} & \text{cette famille n'a pas de zéro dans la boule de } \boldsymbol{C}^2 \\ & \text{de centre } (\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}), \text{ de rayon } \exp(-\sigma^3 S). \end{cases}$$

3.4. *Application du critère.* On va noter

$$c_1 = 10 \cdot 27^2 (4[K':\boldsymbol{Q}] + 3), \qquad c_2 = 10 \cdot 27^2 (5[K':\boldsymbol{Q}] + 4)$$

les deux constantes qui interviennent dans le critère (cf. § 2). On prend maintenant en compte le polynôme $P \in K[X, Y]$ que l'on se donne et on note $h = h(P)$, $d = d(P)$, $t = d + h$.

Il faut choisir σ, τ, δ, U en fonction de d et h; on va prendre pour σ une valeur quelconque plus grande que c_0, indépendante de P, et pour les autres:

$$(4) \qquad \delta := \frac{\exp(c_3 dt)}{\sqrt{t}}, \quad \tau := \frac{5\delta t}{d}, \quad U := c_1 \sigma^2 (\delta^2 t + \tau \delta d) = 6c_1 \sigma^2 \exp(2c_3 dt),$$

où c_3 est un paramètre que l'on choisira plus loin, indépendant de P.

Il faut montrer que ce choix est compatible avec les contraintes ($\mathscr{C}'1$), ($\mathscr{C}'3$)–($\mathscr{C}'6$) et avec les contraintes du critère portant sur U non encore prises en compte; celles-ci s'écrivent:

$$(\mathscr{C}'7) \qquad U \geqslant 6\tau(1 + 4[K':\boldsymbol{Q}]),$$

$$(\mathscr{C}'8) \qquad S\sigma^2 \leqslant U.$$

Notons que l'on a donc $S \leqslant U/\sigma^2$ et *a fortiori*

$$S^2/\log S \leqslant (U/\sigma^2)^2 (\log(U/\sigma^2))^{-1}.$$

On peut ainsi remplacer la contrainte ($\mathscr{C}'6$) par une contrainte plus forte mais ne faisant plus apparaître S, en remplaçant $S^2/\log S$ par le majorant ci-dessus. D'où la nouvelle forme de ($\mathscr{C}'6$):

$$(\mathscr{C}'6\,\text{bis}) \qquad a_9 \sigma U^2 (\log(U/\sigma^2))^{-1} \leqslant \tau\delta^3.$$

En résumé le paramètre S n'apparaît que dans les contraintes ($\mathscr{C}'1$) et ($\mathscr{C}'8$) qui s'écrivent: $\tau < \sigma^2 S \leqslant U$. On peut donc dire que si $(\sigma, \tau, \delta, U)$ vérifient les contraintes restantes, c'est-à-dire ($\mathscr{C}'3$)–($\mathscr{C}'5$), ($\mathscr{C}'6$ bis) et ($\mathscr{C}'7$), alors pour tout entier S de l'intervalle $]\tau/\sigma^2, U/\sigma^2]$ il existe une famille de polynômes de $K'[X_1, X_2]$ vérifiant (III), c'est-à-dire vérifiant les hypothèses (b)–(e) du critère. Comme de plus U a été choisi de telle façon que l'hypothèse (f) de ce critère soit satisfaite, il ne restera plus qu'à écrire la conclusion du dit critère.

Il faut donc vérifier que l'on a, avec les valeurs de δ, τ, U données en (4):

$$(\mathscr{C}'3) \qquad \sigma^2 \exp(\sigma) \leqslant \tau,$$

$$(\mathscr{C}'4) \qquad (1 + 3\log 3)\delta \leqslant \tau,$$

$$(\mathscr{C}'5) \qquad \tau \leqslant 2\delta \log(\tau/\sigma^2),$$

$$(\mathscr{C}'6\,\text{bis}) \qquad a_9 \sigma U^2 (\log(U/\sigma^2))^{-1} \leqslant \tau\delta^3,$$

$$(\mathscr{C}'7) \qquad U \geqslant 6\tau(1 + 4[K':\boldsymbol{Q}]).$$

Plus précisément, on vérifie sans difficulté qu'il existe une valeur du paramètre c_3, indépendante de P, telle que δ, τ, U vérifient les contraintes ci-dessus (il suffit de prendre c_3 "assez grand").

Le critère permet de conclure que l'on a

$$\log|P(\theta)| \geqslant -c_2 \sigma^2 (\delta^2 h(P) + (\delta^2 + \tau\delta) d(P))$$

c'est-à-dire

$$\log|P(\theta)| \geqslant -6c_2 \sigma^2 \exp(2c_3 dt).$$

Ceci montre que:

Soient α, β deux nombres algébriques ($\alpha \neq 0$, $\log\alpha \neq 0$, β de degré 3), et K un corps de nombres. Il existe deux réels positifs c_1, c_2 ne dépendant que des données α, β, K tels que pour tout polynôme non constant $P \in K[X_1, X_2]$ on ait

$$\log|P(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})| \geqslant -c_1 \exp[c_2 d(P)(d(P) + h(P))].$$

En conclusion, on a le résultat annoncé; en effet, les mesures $\log H$ et h sont équivalentes si on se limite à des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{Z}$.

Bibliographie

[B] W. D. Brownawell, *On the Gelfond–Feldman measure of algebraic independence*, Compositio Math. 38 (3) (1979), 355–368.

[D1] G. Diaz, *Mesure d'indépendance algébrique de $(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})$*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87 (C. Goldstein éd.), Birkhäuser, 1988, 129–135.

[D2] G. Diaz, *Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles*, J. Number Theory 31 (1) (1989), 1–23.
[G-F] A. O. Gel'fond and N. I. Fel'dman, *On the measure of relative transcendence of certain numbers* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 14 (1950), 493–500.
[J] E. M. Jabbouri, *Sur un critère d'indépendance algébrique de P. Philippon*, Séminaire d'Arithmétique de Saint-Etienne 1986–1987.
[M-W] M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method*, Math. Ann. 231 (1978), 241–267.
[N] Yu. V. Nesterenko, *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers*, Math. USSR-Izv. 11 (1977), 239–270.
[P1] P. Philippon, *Sur les mesures d'indépendance algébrique*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1983–84 (C. Goldstein éd.), Birkhäuser, 1985, 219–233.
[P2] – *Critères pour l'indépendance algébrique*, Publ. Math. IHES 64 (1986), 5–52.
[W] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Math. 402, Springer, 1974.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE SAINT-ETIENNE
23, rue du docteur Paul Michelon
F-42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

Reçu le 2.5.1988
et révisé le 18.4.1989 (1820)

ACTA ARITHMETICA
LVI (1990)

The set of rational cycles for the $3x+1$ problem

by

JEFFREY C. LAGARIAS (Murray Hill, N.J.)

1. Introduction. The notorious $3x+1$ problem concerns the behavior under iteration of the $3x+1$ function

$$T(n) = \begin{cases} (3n+1)/2, & n \equiv 1 \pmod 2, \\ n/2, & n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{1.1}$$

The $3x+1$ *Conjecture* is the claim that, starting from any positive integer n the iterates $(n, T(n), T(T(n)), \ldots)$ eventually reach the value 1, and subsequently run through the cycle $\{1, 2\}$ of period 2. The $3x+1$ Conjecture is often attributed to L. Collatz who studied similar iteration problems (but not necessarily this one); it was certainly made by B. Thwaites [15]. The $3x+1$ Conjecture remains unproved; it has however been verified for all $n \leqslant 10^{12}$. The *Finite Cycles Conjecture* asserts that the function T has only finitely many cycles on $\boldsymbol{Z}$; it too remains unproved. The $3x+1$ Conjecture would be disproved by exhibiting a cycle on the positive integers other than $\{1, 2\}$. It is known that T has no cycles in $\boldsymbol{Z}$ of length $< 250{,}000$, except those beginning with $1, 0, -1, -5$ and -17 (see [6], [7]). These results together with much of the previous work on the $3x+1$ problem are surveyed in [10].

This paper studies properties of *rational cycles* of the $3x+1$ problem, which are cycles of the function T considered on the domain $\boldsymbol{Q}[(2)]$ of all rational numbers having an odd denominator([1]). The $3x+1$ function T is well defined on $\boldsymbol{Q}[(2)]$ and, more generally, is well defined on the set of 2-adic integers $\boldsymbol{Z}_2$, into which $\boldsymbol{Q}[(2)]$ is canonically embedded (see [10]). Unlike the set of integer cycles of T, which is presumed to be finite, the set $\mathscr{C}$ of all elements of $\boldsymbol{Q}[(2)]$ in cycles of T is large and well-behaved. Cycles of period n can be indexed by the n residue classes (mod 2) of their iterates. In Section 2 we show that every possible such sequence (mod 2) gives rise to an element in a unique rational cycle and conversely. Theorem 2.1 shows that for each $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ there is a unique $x(\mathbf{v}) \in \boldsymbol{Q}[(2)]$ with the property that $x(\mathbf{v})$ is

([1]) The ring $\boldsymbol{Q}[(2)]$ is the (local) ring of fractions of $\boldsymbol{Z}$ at the prime ideal (2), so would be denoted $\boldsymbol{Z}_{(2)}$ in the notation of [2], p. 38. To avoid confusion with the 2-adic integers $\boldsymbol{Z}_2$ we adopt the notation $\boldsymbol{Q}[(2)]$.