[La] S. Lang, *Introduction to Transcendental Numbers*, Addison-Wesley, New York 1966.
[Le] J. Lehner, *Automorphic forms*, in *Discrete Groups and Automorphic Functions* (W. J. Harvey ed.), Academic Press, London–New York–San Francisco 1977, pp. 73–120.
[Ma] A. M. Macbeath, *Generators of the Linear Fractional Groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1968), 14–32.
[Shi 1] G. Shimura, *On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions*, Ann. Math. 78 (1967), 149–192.
[Shi 2] — *Automorphic forms and the periods of abelian varieties*, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 561–592.
[Sie 1] C. L. Siegel, *Lectures on Riemann Matrices*, Tata Institute, Bombay 1963.
[Sie 2] — *Bestimmung der elliptischen Modulfunktion durch eine Transformationsgleichung*, Abh. Math. Sem. Hamburg 27 (1964), 32–38.
[Ta 1] K. Takeuchi, *Arithmetic triangle groups*, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 91–106.
[Ta 2] — *Commensurability classes of arithmetic triangle groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I A, 24 (1977), 201–212.
[Wo 1] J. Wolfart, *Eine arithmetische Eigenschaft automorpher Formen zu gewissen nicht-arithmetischen Gruppen*, Math. Ann. 262 (1983), 1–21.
[Wo 2] — *Taylorentwicklungen automorpher Formen und ein Transzendenzproblem aus der Uniformisierungstheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 54 (1984), 25–33.
[Wo 3] — *Werte hypergeometrischer Funktionen*, Invent. Math. 92 (1988), 187–216.
[Wo 4] — *Fonctions hypergéométriques, arguments exceptionnels et groupes de monodromie*, Publ. Math. de l'Université P. et M. Curie, Problèmes Diophantiens 1985-1986, IX.1–IX.24.
[WW] J. Wolfart und G. Wüstholz, *Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen*, Math. Ann. 273 (1985), 1–15.

LABORATOIRE DE MATH. FONDAMENTALES
UER 48, UNIVERSITÉ P. ET M. CURIE
4 place Jussien
F-75230 Paris Cédex 05
France

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT FRANKFURT
Robert-Mayer-Strasse 6-10
D-6000 Frankfurt 1, BRD

Received on 3.3.1989 (1911)

ACTA ARITHMETICA
LVI (1990)

Mesures de transcendance pour les quotients de périodes d'intégrales elliptiques

par

NORIKO HIRATA-KOHNO* (Nara)

1. Introduction et résultats. Soient $\wp$, $\wp^*$ deux fonctions elliptiques de Weierstrass d'invariants algébriques, associées à deux réseaux Ω, Ω^* de $\boldsymbol{C}$ respectivement. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau d'endomorphismes de $\wp$, c'est-à-dire l'anneau des nombres complexes ϱ tels que $\varrho\Omega$ soit contenu dans Ω. On sait que $\mathcal{O}$ est ou bien l'anneau des entiers rationnels $\boldsymbol{Z}$, ou bien un sous-anneau d'indice fini de l'anneau des entiers algébriques d'un corps quadratique imaginaire k. Si $\mathcal{O} \neq \boldsymbol{Z}$, on dit que $\wp$ admet des multiplications complexes. Soient $\omega \in \Omega$, $\omega^* \in \Omega^*$, des périodes non nulles de $\wp$ et de $\wp^*$ respectivement, et ω_1, $\omega_2 \in \Omega$ deux périodes de $\wp$, linéairement indépendantes sur le corps des nombres réels $\boldsymbol{R}$.

Dans ce papier, on donne des minorations des formes linéaires à coefficients algébriques, ou bien de deux périodes de $\wp$, ou bien d'une période de $\wp$ et de $2\pi i$, ou bien d'une période de $\wp$ et d'une période de $\wp^*$. Ces minorations améliorent les résultats antérieurs. Une minoration de formes linéaires beaucoup plus générales de points algébriques de l'application exponentielle de groupes algébriques commutatifs sera traitée dans un autre article de l'auteur [H 2], qui permettra de raffiner l'estimation de P. Philippon et M. Waldschmidt [P-W 1].

1.1. Les deux théorèmes principaux. Pour énoncer les résultats précis, rappelons la définition de la hauteur h de Weil logarithmique absolue: pour $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in \boldsymbol{P}_N(\bar{\boldsymbol{Q}})$, si K est un corps de nombres contenant $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$, on définit h par

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K:\boldsymbol{Q}]} \sum_v [K_v:\boldsymbol{Q}_v] \log \operatorname{Max}\{|\alpha_j|_v;\ 0 \leqslant j \leqslant N\}$$

où v décrit l'ensemble des places de K et $[K_v:\boldsymbol{Q}_v]$ est le degré local de telle sorte que la formule du produit s'écrive pour $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$,

$$\sum_v [K_v:\boldsymbol{Q}_v] \log |\gamma|_v = 0.$$

* Ces recherches sont subventionnées par une bourse du gouvernement français.

Pour $\beta \in \bar{\boldsymbol{Q}}$, on note aussi $h(\beta)$ la hauteur de Weil du point $(1, \beta) \in \boldsymbol{P}_1(\bar{\boldsymbol{Q}})$. Le lien entre $h(\beta)$ et $H(\beta)$ la hauteur usuelle, est expliqué dans le chapitre 1 de [W 1]. Par exemple, on a

$$h(\beta) \leqslant (\log H(B) + \log D)/D \quad \text{pour } \beta \in \bar{\boldsymbol{Q}} \tag{1.1}$$

en notant D le degré de β sur $\boldsymbol{Q}$.

Voici les résultats précis.

THÉORÈME 1.2. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques. Soit ω une période non nulle de $\wp$. Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que des hauteurs de g_2, g_3, des degrés de g_2, g_3, et du nombre $|\omega|$ ayant la propriété suivante. Soient β_1, β_2 des nombres algébriques non tous deux nuls tels que $[\boldsymbol{Q}(\beta_1, \beta_2):\boldsymbol{Q}] \leqslant D$ et B un nombre réel vérifiant*

$$\log B \geqslant \operatorname{Max}(e, h(\beta_1), h(\beta_2)).$$

On note $\Lambda = \beta_1 \cdot 2\pi i + \beta_2 \omega$. Alors on a

$$\log|\Lambda| > -c \cdot D^2 (\log B + \log D)(\log\log B + \log D). \tag{1.3}$$

THÉORÈME 1.4. *Soit $\wp_1$ (resp. $\wp_2$) une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_{21}, g_{31} (resp. g_{22}, g_{32}) algébriques. Soit ω_1 (resp. ω_2) une période non nulle de $\wp_1$ (resp. $\wp_2$). Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que des hauteurs de g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}, des degrés de g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}, et des nombres $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ ayant la propriété suivante. Soient β_1, β_2 des nombres algébriques non tous deux nuls tels que $[\boldsymbol{Q}(\beta_1, \beta_2):\boldsymbol{Q}] \leqslant D$ et B un nombre réel vérifiant*

$$\log B \geqslant \operatorname{Max}(e, h(\beta_1), h(\beta_2)).$$

On note $\Lambda = \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2$. Si $\Lambda \neq 0$, alors on a

$$\log|\Lambda| > -c \cdot D^3 (\log B + \log D)(\log\log B + \log D)^2. \tag{1.5}$$

1.2. Un corollaire. On peut appliquer le théorème 1.4 au quotient de deux périodes d'une même fonction elliptique.

COROLLAIRE 1.6. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants g_2, g_3 algébriques. Soient ω_1, ω_2 deux périodes de $\wp$ qui sont linéairement indépendantes sur $\boldsymbol{R}$. Supposons que $\wp$ n'a pas de multiplications complexes. Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que des hauteurs de g_2, g_3, des degrés de g_2, g_3, et des valeurs absolues $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ ayant la propriété suivante. Soient β_1, β_2 des nombres algébriques non tous deux nuls tels que $[\boldsymbol{Q}(\beta_1, \beta_2):\boldsymbol{Q}] \leqslant D$ et B un nombre réel vérifiant*

$$\log B \geqslant \operatorname{Max}(e, h(\beta_1), h(\beta_2)).$$

On note $\Lambda = \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2$. Alors on a

$$\log|\Lambda| > -c \cdot D^3 (\log B + \log D)(\log\log B + \log D)^2. \tag{1.7}$$

1.3. Trois mesures de transcendance. Les trois énoncés précédents peuvent être formulés avec la hauteur usuelle. Ils donnent alors des mesures de transcendance. Rappelons que la hauteur d'un polynôme est le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.

COROLLAIRE 1.8. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques. Soient ω_1, ω_2 deux périodes de $\wp$ qui sont linéairement indépendantes sur $\boldsymbol{R}$. Supposons que $\wp$ n'a pas de multiplications complexes. Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que des hauteurs de g_2, g_3, des degrés de g_2, g_3 et des valeurs absolues $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ ayant la propriété suivante. Soit $P \in \boldsymbol{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré $\leqslant D$ et de hauteur $\leqslant H$, avec $H \geqslant e^e$.*

Alors on a

$$\log\left|P\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right| > -c(D^2 \log H (\log\log H)^2 + D^3 (\log D)^3). \tag{1.9}$$

Remarque. On remarque que lorsque $\wp$ admet des multiplications complexes, le nombre ω_2/ω_1 est algébrique, donc les inégalités (1.7) et (1.9) sont banales à cause de l'inégalité de Liouville (voir par exemple le lemme 3 de [M-W]). De même, dans le théorème 1.4, quand les deux fonctions $\wp_1(\omega_1 z)$ et $\wp_2(\omega_2 z)$ sont algébriquement dépendantes, alors le quotient ω_2/ω_1 est algébrique et l'inégalité (1.5) est banale.

Démonstration du corollaire 1.8. Soit β un nombre algébrique de degré D et de hauteur usuelle $\leqslant H$. Dans le corollaire 1.6, on choisit $\beta_1 = -\beta$, $\beta_2 = 1$, on définit un nombre réel B par

$$\log B = (\log H)/D + e.$$

D'après (1.1), on a $\log B \geqslant \operatorname{Max}(e, h(\beta))$. Comme le nombre $\omega_2 - \beta\omega_1$ n'est pas nul (cf. [S]), donc le corollaire 1.6 implique que

$$\log|\omega_2 - \beta\omega_1| > -c' \cdot D^2 (\log H + D \log D)(\log\log H + \log D)^2.$$

On remarque qu'il existe une constante $c'' > 0$ telle que pour tout $D \geqslant 1$, $H \geqslant e^e$, on ait

$$(\log H + D \log D)(\log\log H + \log D)^2 < c''(\log H (\log\log H)^2 + D(\log D)^3).$$

Il suffit pour cela de distinguer les deux cas $\log H > D \log D$ et $\log H \leqslant D \log D$. Dans le premier cas on majore $\log\log H + \log D$ par $2 \log\log H$, dans le seconde cas $\log\log H \leqslant 2 \log D$ et ainsi $\log\log H + \log D \leqslant 3 \log D$. Le corollaire 1.6 entraîne donc

$$\log\left|\frac{\omega_2}{\omega_1} - \beta\right| > -c'''(D^2 \log H (\log\log H)^2 + D^3 (\log D)^3).$$

On en déduit le corollaire 1.8 en considérant β une des racines de $P = 0$ et en utilisant le lien bien connu entre mesures d'approximations et mesures de transcendance (cf. par exemple [F 1], lemme 5). ∎

La meilleure estimation connue jusqu'à présent était celle de Fel'dman [F 2]:

$$\log\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}-\beta\right| > -c\left(D(\log H)^3+D^4(\log D)^3\right).$$

La minoration (1.9) l'améliore, et améliore aussi celle de [H 1].

COROLLAIRE 1.10. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques. Soit ω une période non nulle de $\wp$. Il existe une constante $c>0$ ne dépendant que des hauteurs de g_2, g_3 des degrés de g_2, g_3 et de la valeur absolue $|\omega|$, ayant la propriété suivante. Soit $P\in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré $\leqslant D$ et de hauteur $\leqslant H$, avec $H\geqslant e^e$.*

Alors on a

$$\log|P(\pi/\omega)| > -c\left(D\log H\cdot\log\log H+D^2(\log D)^2\right). \tag{1.11}$$

Démonstration du corollaire 1.10. On utilise le théorème 1.2. Soit β un nombre algébrique de degré D et de hauteur usuelle $\leqslant H$. On choisit $\beta_1=1/(2i)$, $\beta_2=-\beta$, on définit B par $\log B=(\log H)/D+e$ ainsi on a $\log B\geqslant \operatorname{Max}(e, h(\beta))$. Le théorème 1.2 donne

$$\log|\pi/\omega-\beta| > -c'\,D(\log H+D\log D)(\log\log H+\log D).$$

Le même argument que celui de la démonstration du corollaire 1.8 permet d'avoir l'inégalité

$$(\log H+D\log D)(\log\log H+\log D)\leqslant c''\left(\log H\cdot\log\log H+D(\log D)^2\right)$$

qui implique la minoration (1.11). ∎

L'estimation (1.11) est meilleure que celle de Reyssat [R]:

$$\log|\pi/\omega-\beta| > -c\left((\log H)^2+D^2(\log D)^2\right),$$

car on vérifie facilement $D\log H\cdot\log\log H<c'''\left((\log H)^2+D^2(\log D)^2\right)$.

COROLLAIRE 1.12. *Soit $\wp_1$ (resp. $\wp_2$) une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_{21}, g_{31} (resp. g_{22}, g_{32}) algébriques. Soit ω_1 (resp. ω_2) une période non nulle de $\wp_1$ (resp. $\wp_2$). On suppose que les deux fonctions $\wp_1(\omega_1 z)$ et $\wp_2(\omega_2 z)$ sont algébriquement indépendantes. Il existe une constante $c>0$ ne dépendant que des hauteurs de $g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}$, des degrés de $g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}$, des valeurs absolues $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ ayant la propriété suivante. Soit $P\in\mathbf{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré $\leqslant D$ et de hauteur $\leqslant H$, avec $H\geqslant e^e$.*

Alors on a

$$\log|P(\omega_2/\omega_1)| > -c\left(D^2\log H(\log\log H)^2+D^3(\log D)^3\right). \tag{1.13}$$

Démonstration du corollaire 1.12. C'est exactement le même calcul que celui de la démonstration du corollaire 1.8. ∎

La minoration (1.13) est meilleure que celle de Brownawell et de Masser [B-M]:

$$\log|\omega_2/\omega_1-\beta| > -c\left((\log H)^3+D^3(\log D)^3\right).$$

L'idée nouvelle essentielle qui permet d'améliorer les résultats antérieurs est une généralisation et une modification d'une astuce due à N. I. Fel'dman, D. W. Masser et E. Reyssat. Cette astuce repose sur le fait que toute dérivée d'un polynôme en z_0 par rapport à z_0 d'ordre supérieur au degré de ce polynôme est nulle (par exemple, dans la démonstration de notre théorème 1.2, on a des majorations analytiques et une minoration arithmétique faisant intervenir $L_0 D\log B$ au lieu de $TD\log B$). Fel'dman a utilisé cet argument dans [F 1] pour obtenir des mesures de transcendance des nombres $\log\alpha$, π, ω et u, en notant α un nombre algébrique $\neq 0$, $\neq 1$ et u un point algébrique de $\wp$ (voir par exemple la définition dans [A]). Masser l'a appliqué dans [M] à une minoration de $\beta_0+\beta_1\omega+\beta_2\cdot 2\pi i$ quand $\beta_0\neq 0$. Le raffinement par Reyssat des mesures de transcendance de ω et de u utilise aussi cet astuce [R]. Les auteurs précédents devaient supposer $\beta_0\neq 0$ pour estimer $\beta_0+\beta_1\omega+\beta_2\cdot 2\pi i$. Ici, pour traiter le cas $\beta_0=0$ nous écrivons $\beta_1\omega+\beta_2\cdot 2\pi i=\beta_0'\cdot 0+\beta_1\omega+\beta_2\cdot 2\pi i$ avec $\beta_0'\neq 0$, et cela nous permettra d'utiliser l'argument ci-dessus.

La difficulté par rapport aux travaux précédents est alors la suivante: notre fonction auxiliaire F est un polynôme en z_0, $\exp(z_1)$, $\wp(z_2+\omega/2)$ (pour démontrer le premier théorème), on estime ses valeurs en les points $(0, 2si\pi, s\omega)$ pour s entier, et ces points sont des périodes de F. La méthode de Baker permet traditionnellement d'extrapoler sur les points, ce qui est inutile dans le cas d'une période. Il nous faut ici extrapoler sur les dérivées, ce qui est maintenant possible grâce à la méthode de [W 3].

Je remercie profondément Michel Waldschmidt qui est le directeur de ma thèse de doctorat, pour ses enseignements divers et son aide de grande amabilité pour la rédaction de cet article. Mes gratitudes vont aussi à Daniel Bertrand, à Patrice Philippon, à Eric Reyssat et aux gens de l'équipe "Problèmes Diophantiens" à l'Institut Henri Poincaré à Paris, pour les discussions fructueuses.

2. Lemmes auxiliaires. Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass associée au réseau Ω. Prenons la fonction sigma σ de Weierstrass associée au même réseau Ω définie par

$$\sigma(z)=z\prod_{0\neq\omega\in\Omega}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

(voir par exemple [W-W], p. 447). L'ensemble des zéros de σ est Ω. En particulier, on a

$$\sigma(\omega/2)\neq 0 \quad \text{pour } \omega\in\Omega \text{ tel que } 2\omega\notin\Omega. \tag{2.1}$$

Pour n un entier positif, on désigne par $\| \ \|$ la norme dans $\boldsymbol{C}^n$, définie par

$$\|z\| = \operatorname{Max}\{|z_i|;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \quad \text{pour } z = (z_1, \ldots, z_n).$$

Lorsque f est une fonction entière dans $\boldsymbol{C}^n$, on pose pour $R \geqslant 0$,

$$|f|_R = \sup_{\|z\| \leqslant R} |f(z)|.$$

Nous notons $c_1, c_2, \ldots$ des nombres réels positifs que l'on peut expliciter en fonction des donnés dans chacun des paragraphes correspondants.

LEMME 2.2. *Les fonctions $\sigma(z)$ et $(\sigma(z))^2 \wp(z)$ sont entières et il existe une constante positive c_1 ne dépendant que de g_2, g_3 telle que pour tout nombre réel $R \geqslant 1$, on ait*

$$\log|\sigma(z)|_R \leqslant c_1 \cdot R^2 \quad \text{et} \quad \log|(\sigma(z))^2 \wp(z)|_R \leqslant c_1 \cdot R^2.$$

Démonstration du lemme 2.2. Voir par exemple p. 78 de [M]. ∎

2.1. Equations différentielles

LEMME 2.3. *Soient $f_1, \ldots, f_h$ des fonctions analytiques dans un ouvert U de $\boldsymbol{C}^n$ $(n \geqslant 1)$. Il existe un entier rationnel $c_2 > 0$ ayant la propriété suivante. Soient K_1 un corps de nombres et $L_1, \ldots, L_h, t_1, \ldots, t_n$ des entiers positifs ou nuls avec $|t| = t_1 + \ldots + t_n > 0$. On suppose que les dérivations $\partial/\partial z_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ laissent stable l'algèbre $K_1[f_1, \ldots, f_h]$.*

Il existe alors un polynôme $Q \in K_1[X_1, \ldots, X_h]$ tel que

(i) $\left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^{t_n} (f_1^{L_1} \ldots f_h^{L_h}) = Q(f_1, \ldots, f_h)$.

(ii) $\deg_{X_j} Q \leqslant L_j + c_2|t|$ $(1 \leqslant j \leqslant h)$.

(iii) *Les coefficients du polynôme $c_2^{|t|} Q$ sont des entiers algébriques de K_1, dont les valeurs absolues des conjugués sont majorées par*

$$c_2^{2|t|}(L_1 + \ldots + L_h + |t|)^{|t|}.$$

Démonstration du lemme 2.3. C'est le lemme 5.4.2 de [W 1]. ∎

2.2. Dérivations. On donne une estimation des dérivées d'une fonction en un point de $\boldsymbol{C}^2$ après un changement de variable $(\zeta_1, \zeta_2) \mapsto (a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2, b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2)$.

LEMME 2.4. *Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres complexes tels que $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$. Il existe une constante $c_3 > 0$ ayant la propriété suivante. Soit T un entier positif. Soit $\zeta^0 = (\zeta_1^0, \zeta_2^0)$ un point de $\boldsymbol{C}^2$; posons*

$$z_1^0 = a_1\zeta_1^0 + a_2\zeta_2^0, \quad z_2^0 = b_1\zeta_1^0 + b_2\zeta_2^0;$$

soit $f(z)$ une fonction analytique au voisinage de $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$; enfin, considérons la fonction

$$g(\zeta) = f(a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2, b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2)$$

qui est analytique au voisinage de ζ^0. Alors on a

$$(2.5) \quad \log \operatorname*{Max}_{\tau_1+\tau_2=T} \left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{\tau_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{\tau_2} g(\zeta^0)\right| \leqslant \log \operatorname*{Max}_{t_1+t_2=T} \left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2} f(z^0)\right| + c_3 T$$

et

$$(2.6) \quad \log \operatorname*{Max}_{t_1+t_2=T} \left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2} f(z^0)\right| \leqslant \log \operatorname*{Max}_{\tau_1+\tau_2=T} \left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{\tau_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{\tau_2} g(\zeta^0)\right| + c_3 T.$$

Démonstration du lemme 2.4. Grâce aux relations $z_1 = a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2$ et $z_2 = b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2$, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{\tau_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{\tau_2} g(\zeta^0) = \left(a_1\frac{\partial}{\partial z_1} + b_1\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{\tau_1}\left(a_2\frac{\partial}{\partial z_1} + b_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{\tau_2} f(z^0).$$

Ainsi on a l'inégalité (2.5).

D'autre part, comme

$$\zeta_1 = \frac{b_2 z_1 - a_2 z_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \zeta_2 = \frac{a_1 z_2 - b_1 z_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

on a aussi

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2} f(z^0) = \left(\frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \frac{-b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_1} \times \left(\frac{-a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2} g(\zeta^0).$$

On en déduit l'inégalité (2.6). ∎

2.3. Lemme de Siegel

LEMME 2.7. *Soient α_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant \nu,\ 1 \leqslant j \leqslant \mu)$ des nombres complexes, et δ, m, p des nombres réels positifs tels que*

$$(2\mu e^{\delta+m+p} + 1)^{2\mu} \leqslant e^{\nu\delta} \quad \text{et} \quad \operatorname*{Max}_{1\leqslant j\leqslant\mu} \left(\sum_{i=1}^{\nu} |\alpha_{ij}|\right) \leqslant e^m.$$

Alors il existe $(\xi_1, \ldots, \xi_\nu) \in \boldsymbol{Z}^\nu$ *tel que*

$$0 < \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant \nu} |\xi_i| \leqslant e^\delta \quad \text{et} \quad \operatorname*{Max}_{1 \leqslant j \leqslant \mu} \Big|\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ij} \xi_i\Big| \leqslant e^{-p}.$$

Démonstration du lemme 2.7. On utilise le principe de tiroir (c'est le lemme 6.1 dans [P-W 1]). ■

2.4. Extrapolation

LEMME 2.8. *Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| \leqslant R$ du plan complexe. Soient T, S deux entiers positifs avec $S \geqslant 2$ et $S \leqslant r \leqslant R/2$. Alors on a*

$$|f|_{2r} \leqslant 2|f|_R \left(\frac{4r}{R}\right)^{TS} + 5\left(\frac{18r}{S}\right)^{TS} \operatorname*{Max}_{\substack{0 \leqslant t < T \\ 0 \leqslant s < S}} \left|\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t} f(s)\right|.$$

Démonstration du lemme 2.8. C'est le lemme 2.3 dans [W 2]. ■

2.5. Deux lemmes de zéros. Un des outils essentiels pour démontrer nos théorèmes est le lemme de zéros. Le théorème de P. Philippon [P] implique les deux lemmes suivants; le premier intervient dans la démonstration du théorème 1.2, et le suivant dans la démonstration du théorème 1.4.

LEMME 2.9. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 complexes. Soit ω une période fondamentale de $\wp$. Soient M_0, M_1, M_2, T des entiers positifs tels que $T > 57 \operatorname{Max}\{M_0, M_1, M_2\}$ et $T^2 > 722 M_0 M_1 M_2$. Soient β_1, β_2 deux nombres complexes non nuls, P un polynôme non identiquement nul en 3 variables X_0, X_1, X_2 dont le degré en X_i est inférieur ou égal à M_i ($i = 0, 1, 2$ resp.). Alors l'ordre du point $(z_1, z_2) = (0, 0)$ comme zéro de la fonction $F_1 = P(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2, \exp(z_1), \wp(z_2 + \omega/2))$ est inférieur ou égal à T.*

Démonstration du lemme 2.9. Soit E la courbe elliptique associée à $\wp$. On identifie l'espace tangent de E à $\boldsymbol{C}$, et la courbe elliptique E à

$$\{(t, x, y) \in \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C});\ y^2 t = 4x^3 - g_2 x t^2 - g_3 t^3\},$$

l'application exponentielle étant réprésentée par $(1, \wp(z), \wp'(z))$.

On utilise le théorème 2.1 dans [P] pour $G = G_a \times G_m \times E$ avec $\Sigma = \{0\}$ et $A = \exp_G W$ où $W = \{(z_0, z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^3;\ z_0 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2\}$. On plonge G_a et G_m dans P_1 de manière naturelle. On démontre le lemme 2.9 par l'absurde. En notant $T_1 = [T/3]$, on suppose F_1 s'annule à l'origine avec un ordre supérieur à T donc à $3T_1$. Notons $G_0 = G_a$, $G_1 = G_m$, $G_2 = E$ et π_i: $G \to G_i$ la projection de G sur G_i ($i = 0, 1, 2$). Alors selon les notations dans [P], le théorème 2.1 de [P] montre qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe G' de G, distinct de G, vérifiant

$$\binom{T_1+\sigma}{\sigma} H(G';\ M_0, M_1, M_2) \leqslant H(G;\ M_0, M_1, 2M_2),$$

avec

$$\sigma = \sigma(G') = \dim(W/W \cap T_{G'}),$$

c'est-à-dire $\sigma = 2 - \dim W \cap T_{G'}$.

On peut écrire $G' = G'_0 \times G'_1 \times G'_2$ avec

$$G'_0 = G_0 \quad \text{ou } \{0\},$$
$$G'_1 = G_1 \quad \text{ou } \{1\},$$
$$G'_2 = G_2 \quad \text{ou } \{0\}.$$

D'après le lemme 3.4 de [P], on a

$$H(G';\ M_0, M_1, M_2)$$
$$= (\dim G')! \times \deg G'_0 \times \deg G'_1 \times \deg G'_2 \times M_0^{\dim G'_0} \times M_1^{\dim G'_1} \times M_2^{\dim G'_2}$$

et

$$H(G;\ M_0, M_1, 2M_2) = (\dim G)! \times \deg G_0 \times \deg G_1 \times \deg G_2 \times\ M_0 \times M_1 \times 2M_2$$
$$= 36 M_0 M_1 M_2,$$

car on a $\deg G_0 = \deg G_1 = 1$ et $\deg G_2 = 3$.

D'autre part, par hypothèses, on a $T > 57$ donc $T_1 > (18/57)T$. Par conséquent, en remarquant que

$$\binom{T_1+\sigma}{\sigma} \geqslant \frac{T_1^\sigma}{\sigma!} \geqslant \left(\frac{18}{57}\right)^\sigma \frac{T^\sigma}{\sigma!},$$

on obtient

$$\left(\frac{18}{57}\right)^\sigma \frac{T^\sigma}{\sigma!} (\dim G')! \times \deg G'_0 \times \deg G'_1 \times \deg G'_2 \leqslant 36 \prod_{i \in J} M_i,$$

où

$$J = J(G') = \{i \in \{0, 1, 2\};\ \pi_i(G') = 0\}.$$

Notons que, pour $G' \neq \{0\}$, l'espace tangent $T_{G'}$ n'est pas contenu dans l'hyperplan W, donc $\dim W \cap T_{G'} = \dim G' - 1$ et ainsi $\sigma = 3 - \dim G'$. Pour $G' = \{0\}$ on a évidemment $\sigma = 2$.

1) Si G' est $\{0\}$, G_0, G_1 ou G_2, on a $\sigma = 2$ et on en déduit l'inégalité $T^2 \leqslant 722 M_0 M_1 M_2$ qui est incompatible avec nos hypothèses.

2) Si G' est $G_0 \times G_1$, $G_0 \times G_2$, $G_1 \times G_2$, on a $\sigma = 1$, $\operatorname{card} J = 1$ et on obtient l'inégalité $T \leqslant 57 \operatorname{Max}\{M_0, M_1, M_2\}$ qui est incompatible avec nos hypothèses. ■

LEMME 2.10. *Soient $\wp_1$ (resp. $\wp_2$) une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_{21}, g_{31} (resp. g_{22}, g_{32}) complexes, et ω_1 (resp. ω_2) une période fondamentale de $\wp_1$ (resp. $\wp_2$). Soient M_0, M_1, M_2, T des entiers positifs vérifiant $T > 111 \operatorname{Max}\{M_0, M_1, M_2\}$ et $T^2 > 4107 M_0 M_1 M_2$. Soient β_1, β_2 deux nombres complexes non nuls, P un polynôme non identiquement nul en 3 variables*

X_0, X_1, X_2 dont le degré en X_i est inférieur ou égal à M_i ($i = 0, 1, 2$ resp.). On suppose de plus, dans le cas où les deux courbes elliptiques associées à $\wp_1$ et $\wp_2$ sont isogènes, que le nombre β_2/β_1 n'appartient pas au corps des endomorphismes de ces courbes. Alors l'ordre du point $(z_1, z_2) = (0, 0)$ comme zéro de la fonction

$$F_2 = P(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2, \wp_1(z_1+\omega_1/2), \wp_2(z_2+\omega_2/2))$$

est inférieur ou égal à T.

Démonstration du lemme 2.10. Soit E_i la courbe elliptique associée à $\wp_i$ ($i = 1, 2$). On identifie l'espace tangent de E_i à $\boldsymbol{C}$ ($i = 1, 2$), et la courbe elliptique E_i, pour $i = 1, 2$, à

$$\{(t, x, y) \in \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C});\ y^2 t = 4x^3 - g_{2i} x t^2 - g_{3i} t^3\},$$

l'application exponentielle étant réprésentée par $(1, \wp_i(z), \wp_i'(z))$. On plonge G_a dans P_1 de manière naturelle. On utilise le théorème 2.1 dans [P] pour $G = G_a \times E_1 \times E_2$ avec $\Sigma = \{0\}$ et $A = \exp_G W$ où $W = \{(z_0, z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^3;\ z_0 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2\}$. On démontre le lemme 2.10 par l'absurde. En notant $T_1 = [T/3]$, on suppose que F_2 s'annule à l'origine avec un ordre supérieur à T donc à $3T_1$. On remarque ici que par hypothèses on a $T > 111$ donc $T_1 > (12/37)\,T$. Notons $G_0 = G_a$, $G_1 = E_1$, $G_2 = E_2$ et π_i: $G \to G_i$ la projection de G sur G_i ($i = 0, 1, 2$). On va considérer les deux cas suivants.

(I) Lorsque E_1 et E_2 ne sont pas isogènes: Le théorème 2.1 de [P] montre qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe G' de G, distinct de G, vérifiant

$$\left(\frac{12}{37}\right)^{\sigma} \frac{T^{\sigma}}{\sigma!} (\dim G')! \times \deg G_0' \times \deg G_1' \times \deg G_2' \leqslant 216 \prod_{i \in J} M_i,$$

avec

$$G_0' = G_0 \quad \text{ou} \quad \{0\},$$
$$G_1' = G_1 \quad \text{ou} \quad \{0\},$$
$$G_2' = G_2 \quad \text{ou} \quad \{0\},$$
$$J = J(G') = \{i \in \{0, 1, 2\};\ \pi_i(G') = 0\} \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma(G') = \dim(W/W \cap T_{G'})$$

c'est-à-dire $\sigma = 2 - \dim W \cap T_{G'}$. Les sous-groupes algébriques connexes de G sont 0, G_0, G_1, G_2, $G_0 \times G_1$, $G_0 \times G_2$, $G_1 \times G_2$ et G. Notons que, pour $G' \neq \{0\}$, l'espace tangent $T_{G'}$ n'est pas contenu dans l'hyperplan W, donc $\dim W \cap T_{G'} = \dim G' - 1$ et $\sigma = 3 - \dim G'$. Pour $G' = \{0\}$, on a $\sigma = 2$.

1) Si G' est $\{0\}$, G_0, G_1 ou G_2, on a $\sigma = 2$ et donc on obtient l'inégalité $T^2 \leqslant 4107 M_0 M_1 M_2$ qui est incompatible avec nos hypothèses.

2) Si G' est $G_0 \times G_1$, $G_0 \times G_2$, $G_1 \times G_2$, on a $\sigma = 1$, $\operatorname{card} J = 1$ et on en déduit l'inégalité $T \leqslant 111 \operatorname{Max}\{M_0, M_1, M_2\}$ qui est incompatible avec nos hypothèses.

(II) Supposons que E_1 et E_2 sont isogènes.

1) Soit H un sous-groupe algébrique connexe de $E_1 \times E_2$ de dimension 1 tel que $H \cap E_1 = 0$ et $H \cap E_2 = 0$. L'espace tangent à l'origine T_H de H est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{C}^2$ défini sur le corps des endomorphismes k de E_1, c'est-à-dire

$$T_H = \{(z_0, z_1, z_2);\ z_0 = 0,\ b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0\}$$

où b_1 et b_2 sont deux éléments non nuls de k. Comme $\beta_2/\beta_1 \notin k$, il en résulte $T_H \cap W = \{0\}$.

Si le sous-groupe G' obtenu dans le théorème 2.1 de [P] est H ou $G_0 \times H$, on a $\sigma = 2$ et on obtient

$$T^2 \leqslant \begin{cases} 4107 M_0 \cdot \operatorname{Max}\{M_1, M_2\} & \text{si } G' = H, \\ (4107/2) \cdot \operatorname{Max}\{M_1, M_2\} & \text{si } G' = G_0 \times H \end{cases}$$

qui est incompatible avec nos hypothèses.

2) Si G' est un autre sous-groupe algébrique connexe de G, distinct de G, on reprend l'argument du cas (I) pour obtenir une contradiction. ∎

3. Démonstration du théorème 1.2. Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques associée au réseau Ω. Soit σ la fonction sigma de Weierstrass associée au même réseau Ω.

On prend deux périodes ω_0, ω_0' telles que $\Omega = \boldsymbol{Z}\omega_0 \oplus \boldsymbol{Z}\omega_0'$.

Soit ω un élément non nul de Ω. Soient β_1, β_2 des nombres algébriques non tous deux nuls. On suppose que $[\boldsymbol{Q}(\beta_1, \beta_2):\boldsymbol{Q}] = D$.

On va démontrer que pour

$$\Lambda = \beta_1 \cdot 2\pi i + \beta_2 \omega,$$

on a

$$\log|\Lambda| > -c \cdot D^2 (\log B + \log D)(\log\log B + \log D),$$

avec

$$\log B \geqslant \operatorname*{Max}_{i=1,2}(e, h(\beta_i)).$$

Soit K_0 un corps de nombres tel que

$$K_0 = \boldsymbol{Q}(g_2, g_3, \wp(\omega_0/2)).$$

On choisit un nombre réel $c_0 > 0$ assez grand (dépendant seulement de g_2, g_3 et de $|\omega|$), beaucoup plus grand que tous les autres nombres réels c_1, $c_2, \ldots, c_{26}$ qui sont intervenus et vont intervenir, mais indépendant des nombres D et de B, et on démontrera l'inégalité annoncée avec $c = c_0^{17}$.

Choix 3.1. Nous posons

$S = [c_0^5 D(\log\log B + \log D)]$,
$U = c_0^{14} D^2 (\log B + \log D)(\log\log B + \log D)$,
$L_0 = [U/(c_0^2 D(\log B + \log D))]$,
$L_1 = [U/S]$, $\quad L_2 = [U/S^2]$,
$T = [U/(c_0 D(\log\log B + \log D))]$,
$T_0 = [T/c_0^2]$.

PROPRIÉTÉ 3.2. *On a*

$$c_0 L_0 L_1 L_2/2 \leqslant T^2 \leqslant 2c_0 L_0 L_1 L_2,$$
$$c_0^2 U/2 \leqslant T_0 S \leqslant 2c_0^2 U,$$
$$L_0 \geqslant 1, \quad L_1 \geqslant 1, \quad L_2 \geqslant 1, \quad T \geqslant c_0 L_0, \quad T \geqslant c_0 L_1, \quad T \geqslant c_0 L_2.$$

PROPRIÉTÉ 3.3. *On a*

$$DL_0 \log B \leqslant c_0^{-1} U, \quad DL_0 \log L_0 \leqslant c_0^{-1} U,$$
$$DL_0 \log S \leqslant c_0^{-1} U, \quad DT \log T \leqslant c_0^{-4/5} U,$$
$$L_1 S \leqslant U, \quad L_2 S^2 \leqslant U.$$

Lorsque $P \in \boldsymbol{C}[X_0, X_1, X_2]$ est un polynôme de degré partiel $< L_i$ en X_i (pour $i = 0, 1, 2$), on pose

$$\phi(z_1, z_2) = P(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2, \exp(z_1), \wp(z_2 + \omega_0/2))$$

et

$$\Phi(z_1, z_2) = \phi(z_1, z_2)(\sigma(z_2 + \omega_0/2))^{2L_2},$$

de sorte que Φ soit une fonction entière. Il sera aussi utile d'effectuer un changement de variables, en remplaçant la base canonique (e_1, e_2) de $\boldsymbol{C}^2$ par la base (w, e_2) avec $w = (2\pi i, \omega)$. C'est pourquoi on pose $z_1 = 2\pi i \zeta_1$, $z_2 = \omega\zeta_1 + \zeta_2$ et on définit

$$\psi(\zeta_1, \zeta_2) = \phi(2\pi i \zeta_1, \omega\zeta_1 + \zeta_2) \quad \text{et} \quad \Psi(\zeta_1, \zeta_2) = \Phi(2\pi i \zeta_1, \omega\zeta_1 + \zeta_2).$$

3.1. Base de K. Soit $K = K_0(\beta_1, \beta_2)$. Le degré d de K sur $\boldsymbol{Q}$ est $c_4 \cdot D$. Soit α un générateur de K_0 sur $\boldsymbol{Q}$ et soit $\{\xi_1 = 1, \xi_2, \ldots, \xi_d\}$ une base de K sur $\boldsymbol{Q}$ formée d'éléments de l'ensemble

$$\{\alpha^k \prod_{i=1}^{2} \beta_i^{\delta_i};\ 0 \leqslant \delta_i < D, 0 \leqslant k < [K_0:\boldsymbol{Q}], k + \delta_1 + \delta_2 < [K:\boldsymbol{Q}]\}.$$

Alors on a pour $1 \leqslant i \leqslant d$

$$h(\xi_i) \leqslant c_0 D \log B. \tag{3.4}$$

3.2. Construction de la fonction auxiliaire

HYPOTHÈSE 3.5. Pour démontrer le théorème 1.2 par l'absurde, on suppose

$$|\Lambda| \leqslant \exp(-c_0^3 U).$$

On cherche à construire un polynôme $P \in K[X_0, X_1, X_2]$ de degré en X_i inférieur à L_i $(i = 0, 1, 2)$. On considère les coefficients de P comme des inconnues. On note

$$I = \{(t_1, t_2);\ 0 \leqslant t_1 \leqslant T_0, 0 \leqslant t_2 \leqslant T, t_1, t_2 \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Si $p_1, \ldots, p_M \in K$ désignent tous les coefficients non nuls de P, alors on définit $h(P)$ comme la hauteur de Weil logarithmique absolue du point $(1, p_1, \ldots, p_M) \in P_M(K)$.

PROPOSITION 3.6. *Il existe une constante $c_5 > 0$ indépendante des paramètres B, D et il existe un polynôme non nul $P \in K[X_0, X_1, X_2]$ de degré en X_i inférieur à L_i $(i = 0, 1, 2)$ vérifiant*

$$h(P) \leqslant c_5 \cdot c_0^{3/2} U/D \tag{3.7}$$

et

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\psi(0, 0)\right| < -c_0^{5/2} U/c_5 \tag{3.8}$$

pour $(t_1, t_2) \in I$.

Démonstration de la proposition 3.6. On écrit les coefficients de P dans la base $\xi_1, \ldots, \xi_d$ de K sur $\boldsymbol{Q}$ définie dans le § 3.1. Par la propriété 3.2 et le choix 3.1, on a avec les notations du lemme 2.7

$$\nu = c_4 D L_0 L_1 L_2 \geqslant c_4 D T^2/(2c_0) \quad \text{et} \quad \mu \leqslant (T_0 + 1)(T + 1) \leqslant 4T^2/c_0^2$$

donc

$$\nu/2\mu \geqslant c_4 c_0 D/16.$$

Nous allons considérer le système d'inégalités

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\psi(0,0)\right| < -c_0^{5/2} U/c_5 \text{ pour } (t_1, t_2) \in I, c_5 = \operatorname{Max}(2, (64/c_4)).$$

On va majorer les coefficients. Pour $i = 0$, 1 et 2, soit λ_i un entier tel que $0 \leqslant \lambda_i < L_i$; posons aussi

$$z_1 = 2\pi i \zeta_1, \quad z_2 = \omega\zeta_1 + \zeta_2 \quad \text{et} \quad z_0 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2,$$
$$f_1(z_1, z_2) = \exp(z_1), \quad f_2(z_1, z_2) = \wp(z_2 + \omega_0/2).$$

On remarque ici que dans la propriété 3.2, on a $L_0 < T$. Ainsi on a, comme dans la démonstration du lemme 2.4, mais en explicitant la dépendance en β_2 et en utilisant l'inégalité $|\beta_2| \leqslant B^D$ (cf. p. 20 de [W 1]),

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}(\Lambda\zeta_1 + \beta_2\zeta_2)^{\lambda_0} e^{2\pi i\lambda_1\zeta_1} \wp(\omega\zeta_1 + \zeta_2 + \omega_0/2)^{\lambda_2}\Big|_{\substack{\zeta_1=0\\ \zeta_2=0}}\right|$$
$$\leqslant \operatorname{Max} c_7^T B^{DL_0}\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\tau_0}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{\tau_2} z_0^{\lambda_0}\prod_{i=1}^{2} f_i^{\lambda_i}(z_1, z_2)\Big|_{z_0=z_1=z_2=0}\right|$$

où le maximum est étendu aux entiers $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \geqslant 0$ avec $0 \leqslant \tau_0 < L_0$, $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 \leqslant 2T$; en effet, toute dérivée par rapport à z_0 d'ordre supérieur à λ_0 est nulle.

On utilise les inégalités de Cauchy en remarquant que $L_0 < T$ pour en déduire

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}(\Lambda\zeta_1+\beta_2\zeta_2)^{\lambda_0}e^{2\pi i\lambda_1\zeta_1}\wp(\omega\zeta_1+\zeta_2+\omega_0/2)^{\lambda_2}\Big|_{\substack{\zeta_1=0\\ \zeta_2=0}}\right|$$
$$\leqslant \exp\big(c_8(DL_0\log B+T\log T)\big).$$

On utilise aussi (3.4) et la propriété 3.3 pour majorer le module des coefficients de notre système d'inégalités par $\exp(U)$. On applique le lemme 2.7 avec

$$m = p = c_0^{5/2}\,U/c_5 \quad \text{et} \quad \delta = c_0^{3/2}\,U/D$$

pour résoudre (3.8) et avoir

$$h(P) \leqslant c_5\cdot c_0^{3/2}\,U/D. \ \blacksquare$$

PROPOSITION 3.9. *On a pour* $t_1+t_2 \leqslant 2T$, $0 \leqslant s < S$, $t_1, t_2, s \in \mathbf{Z}$,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\psi(0,0)-\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\psi(s,0)\right| < \exp(-c_9\cdot c_0^{5/2}\,U).$$

Démonstration de la proposition 3.9. Fixons deux entiers t_1, $t_2 \geqslant 0$ avec $t_1+t_2 \leqslant 2T$, et considérons la fonction d'une variable complexe

$$f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\psi(sz,0).$$

On note

$$P(X_0, X_1, X_2) = \sum_{\lambda_0}\sum_{\lambda_1}\sum_{\lambda_2} p_\lambda X_0^{\lambda_0}X_1^{\lambda_1}X_2^{\lambda_2}$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ décrivent les entiers tels que $0 \leqslant \lambda_i < L_i$ $(i = 0, 1, 2)$. Effectuons le changement de variables $z_0 = \Lambda\zeta_1+\beta_2\zeta_2$, $z_1 = 2\pi i\zeta_1$ et $z_2 = \omega\zeta_1+\zeta_2$. On a donc en posant $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$

$$f(0) = \sum_{\lambda_0}\sum_{\lambda_1}\sum_{\lambda_2} p_\lambda\left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z_0}+2\pi i\frac{\partial}{\partial z_1}+\omega\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_1}\left(\beta_2\frac{\partial}{\partial z_0}+\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}$$
$$\times z_0^{\lambda_0}e^{\lambda_1 z_1}\big(\wp(z_2+\omega_0/2)\big)^{\lambda_2}\big|_{z_0=z_1=z_2=0}$$

et grâce à la périodicité de la fonction exponentielle et de la fonction elliptique, on a

$$f(1) = \sum_{\lambda_0}\sum_{\lambda_1}\sum_{\lambda_2} p_\lambda\left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z_0}+2\pi i\frac{\partial}{\partial z_1}+\omega\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_1}\left(\beta_2\frac{\partial}{\partial z_0}+\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}$$
$$\times z_0^{\lambda_0}e^{\lambda_1 z_1}\big(\wp(z_2+\omega_0/2)\big)^{\lambda_2}\big|_{\substack{z_0=s\Lambda\\ z_1=z_2=0}}.$$

On pose

$$q(\lambda, t_1, t_2) = \left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z_0}+2\pi i\frac{\partial}{\partial z_1}+\omega\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_1}\left(\beta_2\frac{\partial}{\partial z_0}+\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}$$
$$\times z_0^{\lambda_0}e^{\lambda_1 z_1}\big(\wp(z_2+\omega_0/2)\big)^{\lambda_2}\big|_{z_0=z_1=z_2=0}$$

et

$$r(\lambda, t_1, t_2) = \left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z_0}+2\pi i\frac{\partial}{\partial z_1}+\omega\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_1}\left(\beta_2\frac{\partial}{\partial z_0}+\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}$$
$$\times z_0^{\lambda_0}e^{\lambda_1 z_1}\big(\wp(z_2+\omega_0/2)\big)^{\lambda_2}\big|_{\substack{z_0=s\Lambda\\ z_1=z_2=0}}$$

On peut considérer que $r(\lambda, t_1, t_2)-q(\lambda, t_1, t_2)$ est un polynôme en $s\Lambda$. Le terme constant de ce polynôme est nul. Par hypothèse 3.5, on a $|\Lambda| \leqslant 1$. On calcule les dérivées comme dans la démonstration du lemme 3.5 de [W 4] mais en explicitant la dépendance en β_2 et en $s\Lambda$ dans la majoration des dérivées, en remarquant la propriété 3.2 et enfin en utilisant l'inégalité $|\beta_2| \leqslant B^D$, pour obtenir

$$|f(0)-f(1)| \leqslant L_0 L_1 L_2 \operatorname*{Max}_{\lambda}|p_\lambda|\, c_{10}^T B^{DL_0} T^{c_{11}T}|\Lambda|\, S^{L_0}.$$

Par l'hypothèse 3.5, les propriétés 3.2 et 3.3, et l'estimation (3.7), la proposition 3.9 en résulte. ■

3.3. Extrapolation

PROPOSITION 3.10. *Il existe un nombre réel* $c_{12} > 0$ *tel que*

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\Psi(0,0)\right| < -c_{12}\cdot c_0^2\,U \quad \textit{pour } t_1+t_2 \leqslant T,\ t_1, t_2 \in \mathbf{Z}.$$

Démonstration de la proposition 3.10. D'abord on déduit de (3.8), de la proposition 3.9 et du lemme 2.2 avec la propriété 3.3,

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\Psi(s,0)\right| < -c_{13}\cdot c_0^{5/2}\,U \quad \text{pour } (t_1, t_2)\in I,\ 0 \leqslant s < S,\ s\in\mathbf{Z}.$$

On fixe t_2 avec $0 \leqslant t_2 \leqslant T$, et on pose

$$f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\Psi(z,0).$$

Ainsi on a

$$\log|f^{(t_1)}(s)| \leqslant -c_{13}\cdot c_0^{5/2}\,U \quad \text{pour } 0 \leqslant t_1 \leqslant T_0,\ 0 \leqslant s < S. \tag{3.11}$$

Nous allons appliquer le lemme 2.8 avec $r = S$, $R = 16r$. On a par la propriété 3.2,

$$(3.12)\qquad (c_0^2/2)\,U \leqslant (T_0+1)\,S \leqslant 4c_0^2\,U.$$

D'abord on a l'estimation avec (3.7):

$$\log|f|_R \leqslant c_{14}(c_0^{3/2}\,U + DL_0 \log B + T\log T + L_0 \log R + L_1 R + L_2 R^2)$$

et cette quantité est majorée par $c_{15}\cdot c_0^{3/2}\,U$ par la propriété 3.3. Ainsi le lemme 2.8 implique avec (3.11), (3.12):

$$(3.13)\qquad \log|f|_{2r} \leqslant \log 2 + \operatorname{Max}\big(\log 2 + c_{15}\cdot c_0^{3/2}\,U - (\log 4)(c_0^2/2)\,U,\ \log 5 + (\log 18)(4c_0^2)\,U - c_{13}\cdot c_0^{5/2}\,U\big)$$
$$\leqslant -c_{16}\cdot c_0^2\,U.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy pour $0 \leqslant t_1 \leqslant T$, $c = c_{17}$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^{t_2}\Psi(0,0)\right| = \left|\left(\frac{d}{dz}\right)^{t_1} f(0)\right| \leqslant (T+1)!\,|f|_c,$$

on a la proposition 3.10. ∎

3.4. Inégalité de la taille. Pour la fonction Φ que l'on a définie au début du § 3, on a l'énoncé suivant:

LEMME 3.14. *Il existe un nombre réel $c_{18} > 0$ ne dépendant que de $g_2, g_3, |\omega|$, ayant la propriété suivante. Soit $K = K_0(\beta_1, \beta_2)$. Soit $P \in K[X_0, X_1, X_2]$ de degrés $< (L_0, L_1, L_2)$ avec $h(P) \leqslant \log H$, $H \geqslant e$. On prend ω et B comme précédemment. Soient T_1, t_1, t_2 des entiers $\geqslant 0$ avec $t_1 + t_2 = T_1$. On suppose que la fonction Φ a un zéro en $(z_1, z_2) = (0, 0)$ d'ordre supérieur ou égal à T_1 et le nombre*

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0) \quad \textit{n'est pas nul.}$$

Si $L_0 < T_1$ alors on a

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)\right| \geqslant -c_{18}\,D\big(\log H + L_0 \log B + T_1 \log(T_1 + L_1 + L_2)\big).$$

Démonstration du lemme 3.14. Utilisons le lemme 2.3 pour exprimer la valeur

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\phi(0,0)$$

sous la forme de la valeur d'un polynôme et pour estimer les coefficients de ce polynôme.

Ce nombre

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\phi(0,0)$$

peut s'écrire sous la forme $Q_t(0, 1, \wp(\omega_0/2))$ où Q_t est un polynôme $\in K[X_0, X_1, X_2]$ dont, grâce à $L_0 < T_1$, la hauteur de Weil logarithmique absolue des coefficients est majorée par

$$\log H + c_{19}(T_1 \log(T_1 + L_1 + L_2) + L_0 \log B).$$

De plus $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\phi(0,0)$ est un nombre algébrique appartenant à K qui est de degre $= c_4\cdot D$ sur $\mathbf{Q}$, et on peut majorer sa hauteur de Weil logarithmique absolue par

$$\log H + c_{21}(T_1 \log(T_1 + L_1 + L_2) + L_0 \log B).$$

D'autre part, on peut supposer que l'ordre de zéro de Φ en $(0, 0)$ est exactement T_1, alors on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\phi(0,0)\big(\sigma(\omega_0/2)\big)^{2L_2}.$$

Donc, on déduit de (2.1) que

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\phi(0,0)$$

n'est pas nul si et seulement si

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)$$

n'est pas nul. Il résulte ainsi de l'inégalité de la taille (voir par exemple le lemme 3 dans [M-W]):

$$(3.15)\qquad \log\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\phi(0,0)\right| \geqslant -c_{22}\,D\big(\log H + T_1 \log(T_1 + L_1 + L_2) + L_0 \log B\big).$$

Par conséquent, on déduit de (3.15) et de (2.1) que

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)\right| \geqslant -c_{23}\,D\big(\log H + T_1 \log(T_1 + L_1 + L_2) + L_0 \log B\big).\ ∎$$

PROPOSITION 3.16. *La fonction Φ que l'on a construite vérifie*

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0) = 0 \quad \textit{pour } t_1 + t_2 \leqslant T.$$

Démonstration de la proposition 3.16. La proposition 3.10 et le lemme 2.4 avec la propriété 3.3 fournissent

$$(3.17)\qquad \log\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)\right| < -c_{24}\cdot c_0^2\,U \quad \text{pour } t_1 + t_2 \leqslant T.$$

On applique le lemme 3.14 avec (3.7) et la propriété 3.3. Si le nombre

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)$$

n'est pas nul, alors

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)\right| > -c_{25}\cdot c_0^{3/2}\,U. \tag{3.18}$$

En combinant (3.17), (3.18) on en déduit $c_0 < c_{26}$ d'où une contradiction. La proposition en résulte. ∎

3.5. Conclusion. La proposition 3.16, jointe à la remarque (2.1), montre que la fonction ϕ que nous avons construite a un zéro à l'origine d'ordre supérieur à T, contrairement à ce qui est permis par le lemme de zéros 2.9. On obtient ainsi une contradiction qui complète la démonstration du théorème 1.2.

4. Démonstration du théorème 1.4. Soit $\wp_1$ (resp. $\wp_2$) une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_{21}, g_{31} (resp. g_{22}, g_{32}) algébriques associée au réseau Ω_1 (resp. Ω_2). Soit σ_1 (resp. σ_2) la fonction sigma de Weierstrass associée au même réseau Ω_1 (resp. Ω_2). Pour $i = 1, 2$, on prend deux périodes ω_i^0, $\omega_i^{0\prime}$ telles que $\Omega_i = \mathbf{Z}\omega_i^0 \oplus \mathbf{Z}\omega_i^{0\prime}$.

Soit ω_1 (resp. ω_2) un élément non nul de Ω_1 (resp. Ω_2). Soient β_1, β_2 des nombres algébriques non tous deux nuls. Supposons que $[\mathbf{Q}(\beta_1, \beta_2):\mathbf{Q}] = D$.

On va démontrer si la quantité $\Lambda = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2$ n'est pas nul, alors on a

$$\log|\Lambda| > -c\cdot D^3(\log B + \log D)(\log\log B + \log D)^2,$$

avec

$$\log B \geqslant \operatorname*{Max}_{i=1,2}(e, h(\beta_i)).$$

Soit K_0 un corps de nombres tel que

$$K_0 = \mathbf{Q}(g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}, \wp_1(\omega_1^0/2), \wp_2(\omega_2^0/2)).$$

On choisit un nombre réel $c_0 > 0$ assez grand (dépendant seulement de g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}, $|\omega_1|$ et de $|\omega_2|$), beaucoup plus grand que tous les autres nombres réels $c_1, c_2, c_3, c_{30}, \ldots, c_{38}$ qui sont intervenus et vont intervenir, mais indépendant des nombres D et de B, et l'on démontrera l'inégalité annoncée avec $c = c_0^{22}$.

Choix 4.1. Nous posons
$S = [c_0^5 D(\log\log B + \log D)]$,
$U = c_0^{19} D^3(\log B + \log D)(\log\log B + \log D)^2$,
$L_0 = [U/(c_0^2 D(\log B + \log D))]$,
$L_1 = L_2 = [U/S^2]$,
$T = [U/(c_0 D(\log\log B + \log D))]$,
$T_0 = [T/c_0^2]$.

Propriété 4.2. *On a*

$$c_0 L_0 L_1 L_2/2 \leqslant T^2 \leqslant 2c_0 L_0 L_1 L_2,$$
$$c_0^2 U/2 \leqslant T_0 S \leqslant 2c_0^2 U,$$
$$L_0 \geqslant 1,\quad L_1 \geqslant 1,\quad L_2 \geqslant 1,\quad T \geqslant c_0 L_0,\quad T \geqslant c_0 L_1,\quad T \geqslant c_0 L_2.$$

Propriété 4.3. *On a*

$$DL_0 \log B \leqslant c_0^{-1} U,\quad DL_0 \log L_0 \leqslant c_0^{-1} U,$$
$$DL_0 \log S \leqslant c_0^{-1} U,\quad DT \log T \leqslant c_0^{-4/5} U,$$
$$L_1 S^2 \leqslant U,\quad L_2 S^2 \leqslant U.$$

Lorsque $P \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]$ est un polynôme de degré partiel $< L_i$ en X_i (pour $i = 0, 1, 2$), on pose

$$\phi(z_1, z_2) = P(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2, \wp_1(z_1 + \omega_1^0/2), \wp_2(z_2 + \omega_2^0/2))$$

et

$$\Phi(z_1, z_2) = \phi(z_1, z_2) \prod_{i=1,2} (\sigma_i(z_i + \omega_i^0/2))^{2L_i},$$

de sorte que Φ soit une fonction entière. Il sera aussi utile d'effectuer un changement de variables, en remplaçant la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbf{C}^2$ par la base (w, e_2) avec $w = (\omega_1, \omega_2)$. C'est pourquoi on pose $z_1 = \omega_1\zeta_1$, $z_2 = \omega_2\zeta_1 + \zeta_2$ et on définit

$$\psi(\zeta_1, \zeta_2) = \phi(\omega_1\zeta_1, \omega_2\zeta_1 + \zeta_2)$$

et

$$\Psi(\zeta_1, \zeta_2) = \Phi(\omega_1\zeta_1, \omega_2\zeta_1 + \zeta_2).$$

Nous allons reprendre exactement le même argument pour démontrer le théorème 1.4 que celui de la démonstration du théorème 1.2, en considérant les fonctions auxiliaires ϕ et Φ ci-dessus, au lieu de

$$P(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2, \exp(z_1), \wp(z_2 + \omega_0/2))$$

et

$$P(\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2, \exp(z_1), \wp(z_2 + \omega_0/2))(\sigma(z_2 + \omega_0/2))^{2L_2}$$

celles dans la démonstration du théorème 1.2.

4.1. Base de K. On prend une base $\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ de $K = K_0(\beta_1, \beta_2)$, choisie de la même manière que celle du § 3.1 et on a pour $1 \leqslant i \leqslant d$,

$$h(\xi_i) \leqslant c_0 D \log B. \tag{4.4}$$

4.2. Construction de la fonction auxiliaire

Hypothèse 4.5. Pour démontrer le théorème 1.4 par l'absurde, on suppose

$$|\Lambda| \leqslant \exp(-c_0^3 U).$$

On va construire un polynôme $P \in K[X_0, X_1, X_2]$ de degré en X_i inférieur à L_i $(i = 0, 1, 2)$ comme dans le § 3.2.

PROPOSITION 4.6. *Il existe une constante $c_{30} > 0$ indépendante des paramètres B, D et il existe un polynôme non nul $P \in K[X_0, X_1, X_2]$ de degré en X_i inférieur à L_i $(i = 0, 1, 2)$ vérifiant*

$$h(P) \leqslant c_{30} \cdot c_0^{3/2} U/D \tag{4.7}$$

et

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)^{t_2} \psi(0, 0)\right| < -c_0^{5/2} U/c_{30} \tag{4.8}$$

pour $(t_1, t_2) \in I$.

Démonstration de la proposition 4.6. Ici, on a la majoration suivante des coefficients du système d'inégalités (4.8):

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)^{t_2} (\Lambda\zeta_1 + \beta_2\zeta_2)^{\lambda_0} (\wp_1(\omega_1\zeta_1 + \omega_1^0/2))^{\lambda_1} (\wp_2(\omega_2\zeta_1 + \zeta_2 + \omega_2^0/2))^{\lambda_2}\Big|_{\substack{\zeta_1=0\\ \zeta_2=0}}\right|$$
$$\leqslant \exp(c_{31}(DL_0 \log B + T \log T)).$$

Nous utilisons le même argument que celui de la démonstration de la proposition 3.6. ∎

PROPOSITION 4.9. *On a pour $t_1 + t_2 \leqslant 2T$, $0 \leqslant s < S$, $t_1, t_2, s \in \mathbf{Z}$,*

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)^{t_2} \psi(0, 0) - \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)^{t_2} \psi(s, 0)\right| < \exp(-c_{32} \cdot c_0^{5/2} U).$$

Démonstration de la proposition 4.9. Fixons deux entiers $t_1, t_2 \geqslant 0$ avec $t_1 + t_2 \leqslant 2T$, et considérons la fonction d'une variable complexe

$$f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)^{t_2} \psi(sz, 0).$$

Grâce à la périodicité de la fonction elliptique, on a avec la propriéte 4.2

$$|f(0) - f(1)| \leqslant L_0 L_1 L_2 \operatorname*{Max}_{\lambda} |p_\lambda| c_{33}^T B^{DL_0} T^{c_{34}T} |\Lambda| S^{L_0}.$$

Le même argument que celui de la démonstration de la proposition 3.9 avec l'hypothèse 4.5, les propriétés 4.2 et 4.3, et l'estimation (4.7) fournit la proposition 4.9. ∎

4.3. Extrapolation

PROPOSITION 4.10. *Il existe un nombre réel $c_{35} > 0$ tel que*

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)^{t_2} \Psi(0, 0)\right| < -c_{35} \cdot c_0^2 U \quad \text{pour } t_1 + t_2 \leqslant T,\ t_1, t_2 \in \mathbf{Z}.$$

Démonstration de la proposition 4.10. C'est la même démonstration que celle de la proposition 3.10 avec l'estimation

$$\log|f|_R \leqslant c_{36}(c_0^{3/2} U + DL_0 \log B + T \log T + L_0 \log R + L_1 R^2 + L_2 R^2)$$
$$\leqslant c_{37} \cdot c_0^{3/2} U$$

où

$$f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\right)^{t_2} \Psi(z, 0). \ ∎$$

4.4. Inégalité de la taille. Pour la fonction Φ que l'on a définie au début du § 4, on a l'énoncé suivant:

LEMME 4.11. *Il existe un nombre réel $c_{38} > 0$ ne dépendant que de $g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}, |\omega_1|, |\omega_2|$, ayant la propriété suivante. Soit $K = K_0(\beta_1, \beta_2)$. Soit $P \in K[X_0, X_1, X_2]$ de degrés $< (L_0, L_1, L_2)$ avec $h(P) \leqslant \log H$, $H \geqslant e$. On prend ω_1, ω_2 et B comme précédemment. Soient T_1, t_1, t_2 des entiers $\geqslant 0$ avec $t_1 + t_2 = T_1$. On suppose que la fonction Φ a un zéro en $(z_1, z_2) = (0, 0)$ d'ordre supérieur ou égal à T_1 et le nombre*

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2} \Phi(0, 0) \quad \textit{n'est pas nul.}$$

Si $L_0 < T_1$ alors on a

$$\log\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2} \Phi(0, 0)\right| \geqslant -c_{38} D(\log H + L_0 \log B + T_1 \log(T_1 + L_1 + L_2)).$$

Démonstration du lemme 4.11. Le lemme 2.3 permet de dire que le nombre

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2} \phi(0, 0)$$

peut s'écrire sous la forme

$$Q_t(0, \wp_1(\omega_1^0/2), \wp_2(\omega_2^0/2))$$

où Q_t est un polynôme $\in K[X_0, X_1, X_2]$. Le même argument que celui utilisé plus haut pour démontrer le lemme 3.14 avec la fonction

$$\Phi = \phi \times (\sigma_1(z_1 + \omega_1^0/2))^{2L_1} (\sigma_2(z_2 + \omega_2^0/2))^{2L_2}$$

entraîne le lemme 4.11. ∎

PROPOSITION 4.12. *La fonction Φ que l'on a construite vérifie*

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)=0 \quad \textit{pour } t_1+t_2\leqslant T.$$

Démonstration de la proposition 4.12. S'il existe un couple (t_1, t_2) d'entiers avec $t_1+t_2\leqslant T$ tels que le nombre

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{t_2}\Phi(0,0)$$

ne soit pas nul, alors, comme dans la démonstration de la proposition 3.16, on obtient une contradiction entre d'une part l'estimation déduite de la proposition 4.10 et du lemme 2.4, et d'autre part la minoration obtenue grâce au lemme 4.11 et (4.7). ∎

4.5. Conclusion. Le lemme de zéros 2.10 impose que les deux courbes elliptiques associées à $\wp_1$ et $\wp_2$ soient isogènes, et que le nombre β_1/β_2 appartienne au corps des endomorphismes k. Si ω_2/ω_1 est algébrique, on conclut grâce à l'inégalité de Liouville. Sinon, ω_2/ω_1 est transcendant, et alors $k=\mathbf{Q}$ et de plus ω_2/ω_1 n'est pas réel, tandis que β_1/β_2 est rationnel; l'inégalité (1.5) est alors banale.

Références

[A] M. Anderson, *Inhomogeneous linear forms in algebraic points of an elliptic function*, dans *Transcendence Theory: Advances and Applications* (eds. A. Baker and D. W. Masser), Academic Press, London 1977, 121–143.

[B-M] W. D. Brownawell and D. W. Masser, *Multiplicity estimates for analytic functions I*, J. Reine Angew. Math. 314 (1980), 200–216.

[F 1] N. I. Fel'dman, *Approximation of certain transcendental numbers I, II* (en russe), Izv. Akad. Nauk S.S.S.R. Ser. Mat. 15 (1951), 53–74, 153–176; (en anglais) Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 59 (1966), 224–270.

[F 2] — *On the periods of an elliptic function* (en russe), Acta Arith. 24 (1974), 477–489.

[H 1] N. Hirata, *Approximation de périodes de fonctions méromorphes*, dans, *Théorie des nombres. Number Theory* (eds. J.-M. De Koninck et C. Levesque), Walter de Gruyter, 1990, 386–397.

[H 2] N. Hirata-Kohno, *Formes linéaires de points algébriques sur les groupes algériques*, manuscript.

[M] D. W. Masser, *Elliptic functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics, 437, Springer-Verlag, Berlin 1975.

[M-W] M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method*, Math. Ann. 231 (1978), 241–267.

[P] P. Philippon, *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France 114 (1986), 355–383 + Errata et addenda; ibidem, 115 (1987), 393–395.

[P-W 1] P. Philippon et M. Waldschmidt, *Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques*, Illinois J. Math. 32 (2) (1988), 281–314.

[P-W 2] P. Philippon et M. Waldschmidt, *Formes linéaires de logarithmes elliptiques et mesures de transcendance*, dans *Théorie des nombres. Number Theory* (eds. J.-M. De Koninck et C. Levesque), Walter de Gruyter 1990, 798–805.

[R] E. Reyssat, *Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 47–79.

[S] Th. Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, Grundlehren der Math. Wiss., 81, Springer-Verlag, Berlin 1957, Gauthier-Villars, Paris 1959.

[W 1] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants et groupes algébriques*, Astérisque 69–70 (1979).

[W 2] — *A lower bound for linear forms in logarithms*, Acta Arith. 37 (1980), 257–283.

[W 3] — *Sous-groupes analytiques de groupes algébriques*, Ann. of Math. 117 (1983), 627–657.

[W 4] — *Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables II*, Sém. P. Lelong, 1975/76; Lecture Notes in Mathematics, 578, Springer-Verlag, Berlin 1977, 108–135.

[W-W] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1965.

[Y] Kunrui Yu, *Linear forms in elliptic logarithms*, J. Number Theory 20 (1985), 1–69.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NARA WOMEN'S UNIVERSITY
Kita-uoya-nishi-machi
Nara 630, Japan

Reçu le 3.3.1989 (1912)