[8] K. Matsumoto, *The mean square of Dirichlet L-functions*, Proc. Japan Acad. 58 (1982), 443–446.
[9] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer, 1975.
[10] H. Rademacher, *Collected Papers*, vol. II, Cambridge 1974.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
A. MICKIEWICZ UNIVERSITY
ul. Matejki 48/49
Poznań, Poland

Received on 15.3.1988
and in revised form on 16.10.1989 (1799)

ACTA ARITHMETICA
LVI (1990)

Гипотеза Римана и экстремальные значения функции $Z(t)$

Ян Мозер (Братислава)

1. Формулировка основных результатов. Пусть $\{\gamma\}$, $\gamma > 0$ — возрастающая последовательность корней уравнения $Z(t) = 0$ (кратность корня не учитывается), где

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it),$$
$$\vartheta(t) = -\tfrac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\{\ln\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}it)\} = \vartheta_1(t)+O(1/t), \tag{1}$$
$$\vartheta_1(t) = \tfrac{1}{2}t\ln(t/2\pi)-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{8}\pi,$$

(см. [11], стр. 94, 383).

Пусть $\{t_0\}$, $t_0 > 0$ — возрастающая последовательность корней нечетного порядка уравнения $Z'(t) = 0$, удовлетворяющих условию $\gamma' < t_0 < \gamma''$, где γ', γ'' — соседние члены последовательности $\{\gamma\}$. Значит, t_0 — точка локального экстремума функции $Z(t)$, для которой $Z(t_0) \neq 0$. Последовательность $\{t_0\}$ автор начал изучать в работе [2] и продолжал ее изучение, в связи с некоторыми математическими вопросами релятивистской космологии, в работах [3], [4], [9].

В связи с анализом квадратурной формулы П. Л. Чебышева от 1889 г. (см. [12], стр. 249, (12)), автор получил следующий результат.

Теорема. *По гипотезе Римана*:

$$\sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+H}|Z(t_0)| > \frac{2}{\pi}(1-\varepsilon)H\ln P, \quad P\to\infty, \tag{2}$$

где $P = \sqrt{T/(2\pi)}$ *и* $H\in\langle T^{\mu}, \sqrt[4]{T}\,\rangle$ ($0 < \varepsilon$, μ — *сколь угодно малые числа*).

Замечание 1. Явно отметим, что в условиях теоремы выступает ограничение $H \leqslant \sqrt[4]{T}$. Справедливость оценки (2) можно расширить и на значения, скажем, $H\in(\sqrt[4]{T}, T\rangle$. Достигается это применением метода ван дер Корпута для оценок тригонометрических сумм, встречающихся в доказательстве леммы А.

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

1.1. Пусть $S(a, b)$ обозначает элементарную тригонометрическую сумму:

$$S(a, b) = \sum_{a\leqslant n\leqslant b} n^{it}, \quad 1 \leqslant a < b \leqslant 2a, \ b \leqslant \sqrt{t/(2\pi)}.$$

Справедлива

Лемма А. *Если*

$$|S(a, b)| < A(\Delta)\sqrt{a}\, t^{\Delta}, \quad \Delta \in (0, 1/6\rangle, \tag{3}$$

то

$$\int_T^{T+H} |Z'(t)|\, dt > \frac{4}{\pi}(1-\varepsilon) H \ln P, \quad P = \sqrt{T/(2\pi)}, \tag{4}$$

для $T^{\Delta+\varepsilon} \leqslant H \leqslant \sqrt[4]{T}$, *где* $0 < A(\Delta)$ *— постоянная, зависящая от выбора* Δ, $0 < \varepsilon$ *— сколь угодно малое число.*

Так как, по гипотезе Линделёфа $\Delta = \varepsilon$ (см. [1], стр. 89), то оценка снизу (4) имеет место для $H \in \langle T^{2\varepsilon}, \sqrt[4]{T}\rangle$. Однако, из гипотезы Римана следует гипотеза Линделёфа, (см. [11], стр. 323). Следовательно, делаем

Замечание 2. По гипотезе Римана, оценка снизу (4) имеет место для $H \in \langle T^{2\varepsilon}, \sqrt[4]{T}\rangle$.

1.2. Из формулы Римана–Адамара, выражающей функцию $\zeta(s)$ бесконечным произведением по нулям (см. [11], стр. 40), по гипотезе Римана, получается асимптотическая формула (см. [3], стр. 34)

$$-\frac{d}{dt}\left\{\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right\} \sim \sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2}, \quad t \neq \gamma,\ t \to \infty,$$

и отсюда, в свою очередь, получается следующая закономерность: по гипотезе Римана, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга (см. [3], стр. 34, Следствие 3).

Это свойство является основным при доказательстве следующего вспомогательного утверждения.

Лемма В. *По гипотезе Римана*:

$$\int_T^{T+H} |Z'(t)|\, dt = 2 \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+H} |Z(t_0)| + O\left(T^{A/(\ln\ln T)}\right), \tag{5}$$

где

$$H \in \langle T^{\mu}, T\rangle. \tag{6}$$

Замечание 3. Соотношение (5) представляет собой асимптотическую квадратурную формулу (см. лемму А) для функции $|Z'(t)|$: площадь криволинейной трапеции, принадлежащей графику функции $|Z'(t)|$, $t \in \langle T, T+H\rangle$, асимптотически равна удвоенной сумме локальных максимумов функции $|Z(t)|$, $t \in \langle T, T+H\rangle$.

Теперь утверждение теоремы следует прямо из лемм А, В.

Продолжая формулировку результатов отметим, что, исходя из формулы Римана–Зигеля для $Z'(t)$ (см. (9), $\sqrt[4]{T} \to T^{1/2+\varepsilon}$) и применяя метод ван дер Корпута для оценок остаточных членов (по образцу [15]), нетрудно получить асимптотическую формулу

$$\int_T^{T+U} \{Z'(t)\}^2\, dt \sim \tfrac{1}{12} U \ln^3 T, \quad U = \sqrt{T}\psi(T),\ T \to \infty, \tag{7}$$

где $0 < \psi(T)$ — функция, сколь угодно медленно возрастающая к ∞ при $T \to \infty$.

Теперь, из (2), (5), (7) (см. Замечание 1), применяя неравенство Коши–Буняковского, получается важное

Следствие 1. *По гипотезе Римана*:

$$\frac{1}{\pi}(1-\delta) U \ln T < \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+U} |Z(t_0)| < \frac{1}{4\sqrt{3}}(1+\delta) U \ln^{3/2} T, \tag{8}$$

для $T \to \infty$, *где* $U = \sqrt{T}\psi(T)$, $0 < \delta$ *— сколь угодно малое число.*

Замечание 4. Явно обратим внимание на то обстоятельство, что оценка снизу в (8) особенно близко подходит к оценке сверху — их отношене есть $A\sqrt{\ln T}$.

Замечание 5. В асимптотической формуле (7) и, следовательно, в оценках (8), $U = \sqrt{T}\psi$ можно заменить на $U = T^{5/12+\varepsilon}$, или даже на степень T с еще меньшим показателем. Так как, с одной стороны, соответствующие оценки очень громоздки и, с другой стороны, получаемые показатели еще далеки от значения 1/4 выступающего в (2), то мы здесь не будем касаться этого вопроса.

Доказательство леммы А помещено в частях 2–4, а доказательство леммы В — в части 5 предлагаемой работы.

2. Дискретные формулы. Из формулы (см. [7], (11))

$$Z'(t) = -2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P}{n} \cdot \sin(\vartheta - t\ln n) + O(T^{-1/4}\ln T), \quad P = \sqrt{T/(2\pi)},$$

в случае $\vartheta \to \vartheta_1$ (см. (1)) получается основная для доказательства леммы А формула:

$$Z'(t) = -2\sum_{n<P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P}{n} \sin(\vartheta_1 - t\ln n) + O(T^{-1/4}\ln T), \tag{9}$$

$$t \in \langle T, T+H\rangle,\ H \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle.$$

В связи с этой формулой определим семейство последовательностей $\{h_\nu(\tau)\}$ следующим образом (ср. [7], (12)):

$$\vartheta_1[h_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau + \pi/2, \quad \nu = 1, 2, \ldots,\ \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle. \tag{10}$$

Справедлива

Лемма 1. *Из* (3) *следует* ($h_\nu = h_\nu(0)$):

$$(11)\qquad \begin{aligned} \sum_{T\le h_{2\nu}\le T+H} Z'[h_{2\nu}(\tau)] &= -\frac{1}{\pi}H\ln^2 P\cdot\cos\tau+O(T^{\Delta}\ln^2 T),\\ \sum_{T\le h_{2\nu+1}\le T+H} Z'[h_{2\nu+1}(\tau)] &= \frac{1}{\pi}H\ln^2 P\cdot\cos\tau+O(T^{\Delta}\ln^2 T), \end{aligned}$$

где O-оценки справедливы равномерно для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Доказательство. (A) Из (9), в силу (10), получаем:

$$(12)\qquad Z'[h_\nu(\tau)] = 2(-1)^{\nu+1}\ln P\cdot\cos\tau -2\sum_{2\le n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P}{n}\cos\{\pi\nu-h_\nu(\tau)\ln n+\tau\}+O(T^{-1/4}\ln T),$$

для $h_\nu(\tau)\in\langle T, T+H\rangle$. Так как (ср. [6], (23))

$$(13)\qquad \sum_{T\le h_\nu\le T+H} 1 = \frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(1) = \frac{1}{\pi}H\ln P+O(1),$$

то, из (12), получаем (ср. [5], (59)–(61), [7], (51)–(53)):

$$(14)\qquad \sum_{T\le h_\nu\le T+H} Z'[h_\nu(\tau)] = -2\bar{W}(T, H; \tau)+O(\ln^2 T),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{2}(-1)^{\bar\nu}\cdot\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P}{n}\cdot\cos\varphi\\ &+\frac{1}{2}(-1)^{N+\bar\nu}\cdot\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P}{n}\cdot\cos(\omega N+\varphi)\\ &+\frac{1}{2}(-1)^{\bar\nu}\cdot\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\cdot\sin\varphi\\ &+\frac{1}{2}(-1)^{N+\bar\nu+1}\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\cdot\sin(\omega N+\varphi), \end{aligned}$$

$$\omega = \pi\frac{\ln n}{\ln P},\qquad \varphi = h_{\bar\nu}(\tau)\ln n-\tau,\qquad n\in\langle 2, P),$$

$$\bar\nu = \min\{\nu:\ h_\nu\in\langle T, T+H\rangle\},\qquad \bar\nu+N = \max\{\nu:\ h_\nu\in\langle T, T+H\rangle\};$$

конечно, при любом фиксированном $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$,

$$\sum_{T\le h_\nu(\tau)\le T+H} 1 = \sum_{T\le h_\nu\le T+H} 1+O(1).$$

Теперь уже ясно, что способом [7], (54)–(64), в силу (3), получается оценка

$$\bar{W} = O(T^{\Delta}\ln^2 T),$$

равномерно для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$ и, следовательно (см. (14)):

$$(15)\qquad \sum_{T\le h_\nu\le T+H} Z'[h_\nu(\tau)] = O(T^{\Delta}\ln^2 T),$$

где O-оценка справедлива равномерно для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

(B) Далее (см. (12), (13)):

$$\sum_{T\le h_\nu\le T+H}(-1)^\nu Z'[h_\nu(\tau)] = -\frac{2}{\pi}H\ln^2 P\cdot\cos\tau-2R+O(\ln^2 T),$$

$$R = \sum_{2\le n<P}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P}{n}\cdot\sum_{T\le h_\nu\le T+H}\cos\{h_\nu(\tau)\ln n-\tau\}.$$

Так как (ср. [7], (65)–(70)) из (3) следует оценка

$$R = O(T^{\Delta}\ln^2 T),$$

равномерно для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$, то:

$$(16)\qquad \sum_{T\le h_\nu\le T+H}(-1)^\nu Z'[h_\nu(\tau)] = -\frac{2}{\pi}H\ln^2 P\cdot\cos\tau+O(T^{\Delta}\ln^2 T),$$

где O-оценка справедлива равномерно для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Наконец, из (15), (16), следует (11).

3. Интегралы по несвязным множествам. Определим следующие множества (ср. [8], (3)):

$$\begin{aligned} G_{2\nu}(x) &= \{t:\ h_{2\nu}(-x)<t<h_{2\nu}(x),\ t\in\langle T, T+H\rangle\},\qquad x\in(0,\pi/2\rangle,\\ G_{2\nu+1}(y) &= \{t:\ h_{2\nu+1}(-y)<t<h_{2\nu+1}(y),\ t\in\langle T, T+H\rangle\},\qquad y\in(0,\pi/2\rangle, \end{aligned}$$

$$(17)\qquad G_1(x) = \bigcup_{T\le h_{2\nu}\le T+H} G_{2\nu}(x),\qquad G_2(y) = \bigcup_{T\le h_{2\nu+1}\le T+H} G_{2\nu+1}(y).$$

Очевидно, $G_1(x)$, $G_2(y)$ — два семейства несвязных множеств, входящих в промежуток $\langle T, T+H\rangle$.

Справедлива

Лемма 2. *Из* (3) *следует*:

$$(18)\qquad \begin{aligned} \int_{G_1(x)} Z'(t)\,dt &= -\frac{2}{\pi}H\ln P\cdot\sin x+O(xT^{\Delta}\ln T),\\ \int_{G_2(y)} Z'(t)\,dt &= \frac{2}{\pi}H\ln P\cdot\sin y+O(yT^{\Delta}\ln T). \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку (см. (1), (10), ср. [8], (51)):

$$\left(\frac{dh_{2\nu}(\tau)}{d\tau}\right)^{-1} = \vartheta_1'[h_{2\nu}(\tau)] = \ln P + O(H/T),$$

и, далее (применяя к сумме в (9) преобразование Абеля, аналогично случаю [11], стр. 109), в силу (3), имеет место

$$Z'(t) = O(T^{\Delta}\ln^2 T), \qquad t \in \langle T, T+H\rangle,$$

то (ср. [8], (52)):

$$(19)\qquad \int_{-x}^{x} Z'[h_{2\nu}(\tau)]\,d\tau = \int_{-x}^{x} Z'[h_{2\nu}(\tau)]\left(\frac{dh_{2\nu}(\tau)}{d\tau}\right)^{-1}\cdot\frac{dh_{2\nu}(\tau)}{d\tau}d\tau$$
$$= \ln P\cdot\int_{h_{2\nu}(-x)}^{h_{2\nu}(x)} Z'(t)\,dt + O\left(x\frac{H}{T}T^{\Delta}\ln^2 T\cdot\frac{1}{\ln T}\right)$$
$$= \ln P\cdot\int_{G_{2\nu}(x)} Z'(t)\,dt + O(xHT^{-5/6}\ln T).$$

Теперь, интегрируя по $\tau\in\langle -x, x\rangle$ первую формулу в (11), получаем (см. (13), (17), (19)):

$$\int_{G_1(x)} Z'(t)\,dt = -\frac{2}{\pi}H\ln P\cdot\sin x + O(xT^{\Delta}\ln T) + O(xH^2T^{-5/6}\ln T),$$

т.е. первую формулу в (18) и, аналогичным образом — вторую.

4. Завершение доказательства леммы А. Пусть

$$G_1^+(x) = \{t\colon Z'(t) > 0,\ t\in G_1(x)\},$$
$$G_1^-(x) = \{t\colon Z'(t) < 0,\ t\in G_1(x)\},$$
$$G_1^0(x) = \{t\colon Z'(t) = 0,\ t\in G_1(x)\}$$

(аналогичный смысл имеют обозначения $G_2^-(y), \ldots$). Поскольку соотношения (18) являются асимптотическими для $H\in\langle T^{\Delta+\varepsilon}, \sqrt[4]{T}\rangle$ то, из (18), при $x = y = \pi/2$, получаем (ср. [10], (10); меры множеств $G_1^0(\pi/2)$, $G_2^0(\pi/2)$ равны нулю):

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\frac{2}{\pi}(1-\varepsilon)H\ln P < -\int_{G_1(\pi/2)} Z'(t)\,dt \leqslant -\int_{G_1^-(\pi/2)} Z'(t)\,dt = \int_{G_1^-(\pi/2)} |Z'(t)|\,dt,\\ &\frac{2}{\pi}(1-\varepsilon)H\ln P < \int_{G_2(\pi/2)} Z'(t)\,dt \leqslant \int_{G_2^+(\pi/2)} |Z'(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Так как

$$G_1^-(\pi/2)\cup G_2^+(\pi/2) \subset \langle T, T+H\rangle, \qquad G_1^-(\pi/2)\cap G_1^+(\pi/2) = \varnothing,$$

то, в силу (20), уже получаем нужную нам оценку снизу:

$$\int_T^{T+H} |Z'(t)|\,dt \geqslant \int_{G_1^-(\pi/2)} |Z'(t)|\,dt + \int_{G_2^+(\pi/2)} |Z'(t)|\,dt > \frac{4}{\pi}(1-\varepsilon)H\ln P.$$

5. Доказательство леммы В.

(А) Пусть $\{\bar\gamma\}$, $\bar\gamma > 0$ — возрастающая последовательность корней нечетного порядка уравнения $Z'(t) = 0$. Поскольку, по гипотезе Римана, справедлива оценка Литтлвуда ([14], стр. 237)

$$\gamma'' - \gamma' < A/(\ln\ln\gamma'), \qquad \gamma'\to\infty$$

для расстояния соседних корней уравнения $Z(t) = 0$, а между корнями γ', γ'' лежит корень нечетного порядка уравнения $Z'(t) = 0$, то промежуток $\langle T, T+H\rangle$, где

$$H\in\langle 2A/(\ln\ln T),\ T\rangle,$$

содержит не меньше чем $A^{-1}H\ln\ln T$ членов последовательности $\{\bar\gamma\}$.

Ясно, что в точке $\bar\gamma$ функция $Z'(t)$ изменяет знак и между двумя соседними корнями $\bar\gamma'$, $\bar\gamma''$ — сохраняет знак. В силу этого, в случае

$$T \leqslant \bar\gamma_1 < \bar\gamma_2 < \ldots < \bar\gamma_M \leqslant T+H$$

имеем:

$$(21)\qquad \int_T^{T+H} |Z'(t)|\,dt$$
$$= \int_T^{\bar\gamma_1} |Z'(t)|\,dt + \sum_{k=2}^{M}\int_{\bar\gamma_{k-1}}^{\bar\gamma_k} |Z'(t)|\,dt + \int_{\bar\gamma_M}^{T+H} |Z'(t)|\,dt$$
$$= \left|\int_T^{\bar\gamma_1} Z'(t)\,dt\right| + \sum_{k=2}^{M}\left|\int_{\bar\gamma_{k-1}}^{\bar\gamma_k} Z'(t)\,dt\right| + \left|\int_{\bar\gamma_M}^{T+H} Z'(t)\,dt\right|$$
$$= \sum_{k=2}^{M}|Z(\bar\gamma_k) - Z(\bar\gamma_{k-1})| + |Z(\bar\gamma_1) - Z(T)| + |Z(T+H) - Z(\bar\gamma_M)|$$
$$= \sum_{k=2}^{M}|Z(\bar\gamma_k) - Z(\bar\gamma_{k-1})| + O(T^{A/(\ln\ln T)}),$$

где использована оценка Литтлвуда ([11], стр. 350)

$$(22)\qquad Z(t) = O(T^{A/(\ln\ln T)}), \qquad t\in\langle T, T+H\rangle.$$

(В) Поскольку, по гипотезе Римана, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга (см. пункт 1.2), то основной для нас будет следующая конфигурация:

$$(23)\qquad t_0(1) < \gamma' < t_0(2),$$

($t_0(1)$ — первый член последовательности $\{t_0\}$, лежащий в промежутке $\langle T, T+H\rangle$; в силу (21), (22) можно предположить, что $t_0(1) = \bar{\gamma}_1$). Далее действуем так.

(B1) Если γ' — корень нечетного порядка уравнения $Z(t) = 0$, т.е. γ' — корень четного порядка уравнения $Z'(t) = 0$ (корень четного порядка $= 0$ соответствует простому корню уравнения $Z(t) = 0$), то

$$\bar{\gamma}_1 = t_0(1), \quad \bar{\gamma}_2 = t_0(2), \quad Z(t_0(1))\cdot Z(t_0(2)) < 0$$

и, следовательно,

$$|Z(\bar{\gamma}_2) - Z(\bar{\gamma}_1)| = |Z(\bar{\gamma}_2)| + |Z(\bar{\gamma}_1)| = |Z(t_0(1))| + |Z(t_0(2))|. \tag{24}$$

(B2) Если γ' — корень четного порядка уравнения $Z(t) = 0$ (порядок $\geqslant 2$), т.е. γ' — корень нечетного порядка уравнения $Z'(t) = 0$, то

$$\bar{\gamma}_1 = t_0(1), \quad \bar{\gamma}_2 = \gamma', \quad \bar{\gamma}_3 = t_0(2),$$
$$Z(t_0(1))\cdot Z(t_0(2)) > 0, \quad Z(\bar{\gamma}_2) = 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |Z(\bar{\gamma}_2) - Z(\bar{\gamma}_1)| + |Z(\bar{\gamma}_3) - Z(\bar{\gamma}_2)| &= |-Z(t_0(1))| + |Z(t_0(2))| \\ &= |Z(t_0(1))| + |Z(t_0(2))|. \end{aligned} \tag{25}$$

(B3) Продолжая конфигурацию (23) через соседнюю конфигурацию $t_0(2) < \gamma'' < t_0(3)$ далее направо, в промежутке $\langle T, T+H\rangle$, в силу (21), (22), (24), (25), получаем

$$\sum_{k=2}^{M} |Z(\bar{\gamma}_k) - Z(\bar{\gamma}_{k-1})| = 2 \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+H} |Z(t_0)| + O(T^{A/(\ln\ln T)}),$$

т.е.

$$\int_T^{T+H} |Z'(t)|\, dt = 2 \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+H} |Z(t_0)| + O(T^{A/(\ln\ln T)}).$$

6. Связь вопроса с квадратурной формулой П. Л. Чебышева. П. Л. Чебышев, в своем знаменитом мемуаре [12], на стр. 247, сделал следующее замечание: „Из полученного нами равенства нетрудно вывести формулу, доставляюшую предельные величины интеграла

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\, du$$

при помощи интегралов, заключающих функцию V вне знака радикала. Для этого необходимо, чтобы функции U, V оставались положительными при всех величинах переменной u, на которые распространяется интегрирование."

В случае

$$U = V = F(t) + \{Z'(t)\}^2, \quad t \in \langle T, T+H\rangle \tag{26}$$

где $0 < F(t)$ — любая непрерывная функция, общая формула П. Л. Чебышева ([12], стр. 249, (12)) приводит к следующему, достаточно сложному, результату:

$$\int_T^{T+H} \sqrt{F(t) + \{Z'(t)\}^2}\, dt = \frac{1}{l^{2\vartheta}}[E(0) + 2E(s_1) + 2E(s_2) + \ldots + 2E(s_n)], \tag{27}$$

где $\vartheta \in \langle 0, 1\rangle$ и

$$E(s) = \frac{\sqrt{M}\sqrt{1-k^2s^2}}{S} \int_T^{T+H} \frac{F(t) + \{Z'(t)\}^2}{(F(t) + \{Z'(t)\}^2)s^2 + M(1-s^2)}\, dt, \quad s_m = sn\frac{2mK}{2n+1},$$

(остальные обозначения, связанные с границами функции (26), эллиптическими интегралами, эллиптическими функциями Якоби и отношением тэта рядов, см. в мемуаре [12]).

В указанном направлении мы получаем

Следствие 2. *Пусть $F(t)$ любая интегрируемая по Лебегу и положительная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_T^{T+H} F(t)\, dt = O\left(\frac{H \ln^2 T}{\psi^2}\right).$$

Тогда, по гипотезе Римана:

$$\int_T^{T+H} \sqrt{F(t) + \{Z'(t)\}^2}\, dt \sim 2 \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+H} |Z(t_0)|, \quad T \to \infty, \tag{28}$$

для $X \in \langle T^{\mu}, \sqrt[4]{T}\rangle$, где $0 < \mu$ — сколь угодно малое число.

Формула (28) следует из очевидного равенства

$$\int_T^{T+H} \sqrt{F(t) + \{Z'(t)\}^2}\, dt = \int_T^{T+H} |Z'(t)|\, dt + O\left(\frac{H \ln T}{\psi}\right).$$

и лемм А, В.

Замечание 6. Итак, в асимптотической квадратурной формуле (28) выделен главный член для всех функций $F(t)$, входящих в упоминавшийся выше класс функций.

Далее, для длины дуги кривой $Z = Z(t)$, $t \in \langle T, T+H\rangle$, получаем из (28), в случае $F(t) = 1$,

Следствие 3. *По гипотезе Римана*:

$$\int_T^{T+H} \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\, dt \sim 2 \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+H} |Z(t_0)|, \quad T \to \infty.$$

Замечание 7. По этой формуле, длина дуги кривой $Z = Z(t)$, $t \in \langle T, T+H \rangle$, асимптотически равна удвоенной сумме абсолютных значений локальных экстремумов функции $Z(t)$, $t \in \langle T, T+H \rangle$.

Квадратурная формула (28) является более простой чем формула (27), следующая из теории П. Л. Чебышева и представляет собой результат в вопросе об асимптотическом интегрировании радикалов второй степени от сложных функций.

Наконец, формулы (27), (28) вместе взятые (в случае непрерывной функции $F(t)$) дают точку соприкосновения между гипотезой Римана и мемуаром П. Л. Чебышева [12].

7. Заключительные замечания. Наконец отметим, что предложенный здесь метод срабатывает и в большом количестве других случаев. Например, справедливы следующие результаты.

7.1. Пусть $G(t)$ любая интегрируемая по Лебегу и положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_T^{T+U} G(t)\,dt = O\left(\frac{U \ln T}{\psi^2}\right).$$

Тогда, по гипотезе Римана:

$$\int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{G(t) + \{Z'(t)\}^2}\,dt \sim \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+U} Z^2(t_0), \tag{29}$$

при $T \to \infty$ и $U = \sqrt{T}\,\psi(T)$.

Для площади поверхности тела вращения, образованного вращением кривой $Z = Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$ вокруг оси $0t$, из (29) с $G(t) = 1$ получаем асимптотическое соотношение

$$2\pi \int_T^{T+U} |Z(t)| \sqrt{1 + \{Z'(t)\}^2}\,dt \sim 2 \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+U} \pi Z^2(t_0), \quad T \to \infty.$$

7.2. Для суммы квадратов экстремальных значений функции $Z(t)$, $t \in \langle T, T+U \rangle$ получаем неравенства (ср. (8)):

$$\frac{2}{\pi}(1-\delta) U \ln T < \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+U} Z^2(t_0) < \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\delta) U \ln^2 T,$$

для $T \to \infty$, где $U = \sqrt{T}\psi$.

7.3. По теореме Андерсона ([13]), в предположении справедливости гипотезы Римана, корни уравнений

$$Z'(t) = 0, \quad Z''(t) = 0$$

тоже отделяют друг друга. Возможно, что эта закономерность продолжается и дальше.

Во всех этих случаях, метод предложенный в настоящей работе срабатывает (надо только использовать формулы Римана–Зигеля для $Z''(t), \ldots$).

Замечания рецензента.

(A) Прежде всего, анализируя классические работы А. Сельберга и соответствующую работу А. Фудзий (A. Fujii), рецензент получил оценку (до сих пор неопубликованную):

$$\sum_{T \leqslant \gamma_n \leqslant T+H} d_n^2 < A \frac{H}{\ln T}, \quad H \geqslant T^{\varepsilon}, \tag{*}$$

где

$$T \leqslant \gamma_1 < t_0(1) < \gamma_2 < t_0(2) < \ldots < t_0(N-1) < \gamma_N \leqslant T+H,$$

$$d_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n, \quad n = 1, \ldots, N-1.$$

Далее, интегрированием функции $\varphi(s) = \sqrt{\zeta(s)}$, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1/2$ по прямоугольнику с вершинами в точках

$$\tfrac{1}{2} + iT,\ 2 + iT,\ 2 + i(T+H),\ \tfrac{1}{2} + i(T+H)$$

(применяя в надлежащем месте неравенство Коши и оценку (*)) рецензент нолучает оценку (2) с точностью до постоянной.

(B) Рецензент также получил простое доказательство (с помощью комплексного интегрирования) асимптотической формулы для длины дуги Z-кривой (Следствие 3) для

$$H \geqslant T^{A/\ln\ln T}.$$

Наконец, выражаю благодарность рецензенту за его критические замечания, которые были мною учтены при оформлении настоящей работы.

Литература

[1] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва 1975.

[2] Ян Мозер, *Об одном новом следствии из гипотезы Римана*, Acta Arith. 25 (1974), 307–311.

[3] — *Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой*, ibid. 26 (1974), 33–39.

[4] — *О точках перегиба функции* $Z(t)$, ibid. 28 (1975), 89–99.

[5] — *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), 31–43; 40 (1981), 97–107.

[6] — *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), 45–51.

[7] — *О корнях уравнения* $Z'(t) = 0$, ibid. 40 (1981), 79–89.

[8] — *Новые следствия из формулы Римана–Зигеля*, ibid. 42 (1982), 1–10.

[9] — *Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна–Фридмана*, Acta Math. Univ. Comenian. 44-45 (1984), 115–125.

[10] — *О поведении положительных и отрицательных значений функции* $Z(t)$ *в теории дзета-функции Римана*, ibid. 46-47 (1985), 41–48.
[11] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, Москва 1953.
[12] П. Л. Чебышев, *О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби*; В книге: *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева*, т. 3, Издательство АН СССР, Москва–Ленинград 1948, стр. 240–255.
[13] R. J. Anderson, *On the function* $Z(t)$ *associated with the Riemann zeta-function*, J. Math. Anal. Appl. 118 (2) (1986), 323–340.
[14] J. E. Littlewood, *Two notes on the Riemann zeta-function*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 22 (1924), 234–242.
[15] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, (IV)*, Quart. J. Math. 5 (1934), 98–105.

KAT. MAT. ANAL. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava
Czechoslovakia

Поступило 18.1.1989
и в исправленной форме 12.5.1989 (1901)

ACTA ARITHMETICA
LVI (1990)

Lower and upper bounds for the number of solutions of $p+h = P_r$

by

KAN JIAHAI (Nanjing)

1. Introduction and the main results. Let x be a sufficiently large positive number, h ($\neq 0$) a fixed even number, p a prime and P_r an almost prime with at most r prime factors counted with multiplicity. Set

$$c_h = \prod_{p>2} (1-(p-1)^{-2}) \prod_{2<p|h} (p-1)(p-2)^{-1}.$$

The work to determine the exact order of magnitude for

$$\# := |\{P_r:\ p+h = P_r,\ p \leqslant x\}|$$

is closely connected with the well-known Prime Twins Conjecture. In all papers published up to date on the lower bounds of $\#$, only the P_r's with no prime factor less than $x^{1/w}$ ($w > 0$, fixed) are counted. This leads to an order of $c_h x \log^{-2} x$ for all r, much smaller than the presumably correct order, i.e. $c_h x \log^{-2} x (\log\log x)^{r-1}$. On the other hand, the upper bounds of $\#$ seem to be ignored for all $r \geqslant 2$. The purpose of this paper is to improve on these situations.

We get the following main results.

THEOREM 1. $|\{P_r:\ p+h = P_r,\ p \leqslant x\}| \ll c_h x \log^{-2} x (\log\log x)^{r-1}, \quad r \geqslant 1.$

THEOREM 2. *Let δ be a fixed number with $0 < \delta < 1$. For any $r \geqslant 3$,*

$$\begin{aligned} |\{p:\ p \leqslant x,\ p+h = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1} \text{ or } p_1 \cdot \ldots \cdot p_r,\\ p_r > p_{r-1} > \ldots > p_1 \geqslant \exp(\log^{\delta} x)\}|\\ > 0.965\left((1-\delta)^{r-2}/(r-2)!\right) c_h x \log^{-2} x (\log\log x)^{r-2}. \end{aligned}$$

2. Lemmas. Let $\mathscr{A}$ denote a finite set of integers, $|\mathscr{A}|$ the number of elements in $\mathscr{A}$, and $\mathscr{P}$ a set of primes. Suppose that $|\mathscr{A}| \sim X$, and for square-free d,

$$(\mathrm{A}_1) \qquad |\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + r_d, \quad \mathscr{A}_d = \{a:\ a \in \mathscr{A},\ d\,|\,a\},$$

$$\omega(d) \text{ is multiplicative, } 0 \leqslant \omega(p) < p.$$