THEOREM 9. Under the conditions stated in Theorem 8,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \# \{n \leq x: t(n) < y\} = G(y)$$

exists for almost all y ; furthermore, G is a distribution function and it does not depend on H . The same result holds when replacing $t(n)$ by $T(n)$.

Acknowledgement. The authors wish to thank the referee for some helpful comments.

References

- [1] N. G. de Bruijn, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $v > y$* , Koninkl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen, Series A, 54 (1951), 49–60.
- [2] J. M. De Koninck, I. Kátai and A. Mercier, *Additive functions and the largest prime factors of integers*, J. Number Theory 33 (1989), 293–310.
- [3] J. M. De Koninck et A. Mercier, *Les fonctions arithmétiques et le plus grand facteur premier*, Acta Arith. 52 (1989), 27–48.
- [4] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory*, I and II, Springer-Verlag, 1979.
- [5] H. Halberstam and H. E. Richert, *Sieve Methods*, L.M.S. Monograph, Academic Press, 1975.

Jean-Marie De Koninck

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ LAVAL
Québec, G1K 7P4
Canada

Imre Kátai

EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY
COMPUTER CENTER
1117 Budapest, Bogdányi u. 10/B
Hungary

Armel Mercier

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC
Chicoutimi, G7H 2B1
Canada

Received on 18.4.1989
and in revised form on 8.8.1989

(1927)

Suites de G_q -orbite finie

par

CHRISTIAN MAUDUIT et BRIGITTE MOSSÉ (Marseille)

1. Introduction. Pour démontrer l'existence de géodésiques récurrentes non périodiques sur certaines surfaces de courbure négative, M. Morse a introduit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{a, b\}$ définie par $u_n = a$ (resp. b) si la somme des chiffres de n écrit en base 2 est paire (resp. impaire). Depuis, cette suite est réapparue lors de la résolution de nombreux problèmes de combinatoire, d'algèbre, d'arithmétique, d'analyse harmonique, de physique théorique, etc... (on pourra consulter à ce sujet [18]). Les procédés de construction de la suite de Morse ont été généralisés par divers auteurs, et notamment par S. Kakutani et M. Keane qui ont étudié les systèmes dynamiques symboliques obtenus ainsi (cf. [5], [6], [9]–[13], [17], [23], [27]).

Par ailleurs, J. Coquet et B. Mossé ont défini dans [3], [21], [22] un décalage q -adique des suites dont ils ont étudié les propriétés harmoniques et arithmétiques. Les systèmes dynamiques les plus simples associés à ce décalage sont évidemment ceux obtenus pour les suites d'orbite finie; il est donc utile de pouvoir les caractériser.

Une famille de telles suites a été étudiée dans [19]. L'objet de ce travail est de les décrire toutes et d'établir leurs liens avec les suites de Morse généralisées au sens de M. Keane. Nous étudions ensuite une propriété de disjonction spectrale de certaines de ces suites, complétant ainsi les résultats concernant la somme des chiffres obtenus dans [1], [7], [8], [16], [25].

2. Rappels et définitions. Soit q un entier au moins égal à 2. Tout entier naturel n s'écrit de façon unique

$$n = \sum_{r \geq 0} e_r(n) q^r,$$

où $e_r(n) \in \{0, \dots, q-1\}$ est le r -ième chiffre du développement de n en base q .

DÉFINITION 1. On appelle *addition q -adique* de deux entiers n et n' l'opération notée $\oplus_q$ (ou $\oplus$ si aucune confusion n'est possible) et définie par

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad e_r(n \oplus_q n') = e_r(n) + e_r(n') \bmod q.$$

Nous désignerons par G_q le groupe commutatif $(\mathbb{N}, \oplus_q)$.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble non vide que nous appellerons *alphabet* et dont les éléments seront appelés *lettres*.

DÉFINITION 2. On appelle *décalage q -adique* l'action de G_q sur l'ensemble $\mathcal{A}^N$ des suites à valeurs dans $\mathcal{A}$, définie par

$$\forall (g, u) \in G_q \times \mathcal{A}^N, \quad T_g(u) = (u_{n \oplus qg})_{n \in N}.$$

L'ensemble $\text{Orb}(u) = \{T_g(u); g \in G_q\}$ est appelé *orbite de u* sous l'action du décalage q -adique.

DÉFINITION 3. Soit E une partie de N . La E -somme des chiffres en base q de l'entier naturel n est définie par

$$s_E^q(n) = \sum_{r \in E} e_r(n).$$

L'objet de cette étude est de décrire l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ des éléments de $\mathcal{A}^N$ dont l'orbite sous l'action du décalage q -adique est finie.

Nous donnons trois caractérisations de $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$: tout d'abord un algorithme de construction de cet ensemble qui le relie à l'ensemble des suites de Morse généralisées, puis une caractérisation en termes de sommes de chiffres et enfin en termes de transformation de Fourier-Walsh.

Dans la dernière partie, nous montrons que les parties continues des spectres de $(s_E^q(n))_{n \geq 0}$ et $(s_{E'}^q(n))_{n \geq 0}$ sont disjointes si et seulement si p est différent de q ou $E \triangle E'$ est infini.

3. Suites récurrentes au sens de M. Keane. Nous introduisons quelques notions et notations inspirées de [9], [17], que nous utiliserons par la suite.

DÉFINITION 4. On appelle *bloc* ou *mot* de longueur $l \in N$, et on note $x_0 \dots x_{l-1}$, tout élément $(x_0, \dots, x_{l-1})$ de $\mathcal{A}^l$.

Si u est un élément de $\mathcal{A}^N$ (i.e. un *mot infini*), on dit que $x_0 \dots x_{l-1}$ est un *bloc de u* , ou un *sous-mot de u* , s'il existe $i \in N$ tel que $x_j = u_{i+j}$ pour tout $j \in \{0, \dots, l-1\}$.

Si b et b' sont deux blocs de longueurs $|b| = l$ et $|b'| = l'$, on note bb' le bloc de longueur $l+l'$ obtenu par concaténation: $bb' = b_0 \dots b_{l-1} b'_0 \dots b'_{l'-1}$.

Si u est un mot infini, on considère A la partie de $\mathcal{A}$ formée des lettres qui interviennent effectivement dans u (i.e. $A = u(N)$), que l'on suppose fini de cardinal égal à s .

Soit alors $\mathfrak{S} = \{\sigma_0 = \text{id}_A, \dots, \sigma_{s-1}\}$ un groupe de permutations de A . Pour tout $i \in \{0, \dots, s-1\}$, σ_i peut être considérée comme une application de l'ensemble des blocs dans lui-même. Si b (resp. b') est un bloc de longueur l (resp. l') on note $b \times b'$ le bloc de longueur ll' défini par

$$b \times b' = \sigma_{b_0}(b) \dots \sigma_{b_{l'-1}}(b).$$

DÉFINITION 5. On appelle *suite récurrente* tout élément u de $\mathcal{A}^N$ de la forme $u = \prod_{i \geq 0} b^i$ où les b^i sont des blocs commençant par la lettre 0, et tels que $|b^i| \geq 2$ pour une infinité de i .

4. Description de $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$. On peut, grâce à la proposition suivante, décrire d'une manière générale les éléments d'orbite finie de $\mathcal{A}^N$ sous l'action d'un groupe abélien dénombrable dont le support est identifié à N , $G = (N, *)$. G agit sur $\mathcal{A}^N$ par décalage:

$$\forall (g, u) \in G \times \mathcal{A}^N, \quad T_g(u) = (u_{n*g})_{n \in N}.$$

PROPOSITION 1. Les éléments de $\mathcal{A}^N$ d'orbite finie sous l'action du décalage défini par G sont les suites de la forme $u = f(\chi_1, \dots, \chi_r)$ où $r \in N^*$, f est une application de C^r dans $\mathcal{A}$, et où pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, χ_i est un caractère d'ordre fini de G .

Démonstration. Notons $S(u)$ le stabilisateur d'un élément u de $\mathcal{A}^N$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments g de G tels que $T_g(u) = u$. La suite u est d'orbite finie sous l'action de G si et seulement si $G/S(u)$ est fini, c'est-à-dire si et seulement si $S(u)$ est de la forme $S(u) = \bigcap_{\chi \in H} \ker \chi$, où H est un sous-groupe fini du dual de G .

Soit $(\chi_1, \dots, \chi_r)$ une famille génératrice de H . Pour tout entier naturel n , $T_n(u)$ ne dépend que de la classe de n modulo $S(u)$, c'est-à-dire du r -uplet $(\chi_1(n), \dots, \chi_r(n))$. En particulier $u_n = (T_n(u))(0)$ ne dépend que de $(\chi_1(n), \dots, \chi_r(n))$ et il existe donc une fonction f de C^r dans $\mathcal{A}$ telle que $u = f(\chi_1, \dots, \chi_r)$, avec les χ_i d'ordre fini.

On vérifie réciproquement que toute suite de cette forme est d'orbite finie sous l'action de G . ■

Cette proposition pourrait être utilisée pour montrer les théorèmes 1 à 3; nous allons toutefois donner une description de $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ de manière plus constructive.

LEMME 1. $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ si et seulement si $\{T_{q^r}(u); r \in N\}$ est fini.

Démonstration. Supposons que $\{T_{q^r}(u); r \in N\}$ soit fini, égal à $\{T_{q^k}(u); k \in \{0, \dots, \delta-1\}\}$, et considérons $g = \sum_{r \geq 0} e_r(g) q^r \in G_q$.

G_q étant un groupe commutatif dont tous les éléments sont d'ordre fini, on a

$$T_g(u) = (\dots \circ T_{q^{r(g)}} \circ \dots \circ T_{q^{s(g)}})(u) = (T_{q^{k_0}}^{n_0} \circ \dots \circ T_{q^{k_{\delta-1}}}^{n_{\delta-1}})(u),$$

où pour tout $i \in \{0, \dots, \delta-1\}$, $n_i \in \{0, \dots, q-1\}$.

Donc $\text{Orb}(u)$ est finie, de cardinal inférieur ou égal à q^δ . ■

Pour tout $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{A})$, on pose

$$\{u\} \cup \{T_{q^r}(u); r \in N\} = \{u^{(0)} = u, \dots, u^{(d-1)}\},$$

et si $i \in \{0, \dots, d-1\}$, $N_i = \{r \in N; T_{q^r}(u) = u^{(i)}\}$, et $m_i = \inf N_i$ pour $i \neq 0$. On note h l'application de N dans $\{0, \dots, d-1\}$ qui à tout entier naturel n associe l'entier naturel i tel que $n \in N_i$.

LEMME 2. Le support A d'un élément de $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ est fini, de cardinal inférieur ou égal à q^{d-1} .

Démonstration. Pour tout entier naturel r , l'action de T_{q^r} sur u consiste en un produit de permutations circulaires de longueur q sur les paquets successifs de q blocs de u de longueur q^r . Ainsi la donnée de $h(r)$ permet de décrire les q^{r+1} premiers termes de u à partir des q^r premiers termes de u . Pour $i \in \{1, \dots, d-1\}$, l'écriture des q^{m_i+1} premiers termes de u conduisant à multiplier au plus par q le nombre de lettres à utiliser, on a $\text{card } A \leq q^{d-1}$. ■

LEMME 3. Le mot u appartient à $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ si et seulement si il existe une partition de N en d sous-ensembles $N_0, \dots, N_{d-1}$ (avec éventuellement $N_0 = \emptyset$) et une application φ de $B = \{0, \dots, q-1\}^{d-1}$ vers $\mathcal{A}$ tels que $u = \varphi \circ v$, où

$$v_0 = (0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad v_n = \prod_{r \geq 0} \pi_{h(r)}^{e_r(n)}(v_0),$$

π_i étant la permutation de B égale au produit des cycles disjoints:

$$\pi_i = \prod_{j_1 < q} \dots \prod_{j_{d-1} < q} ((j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_{d-1}), \dots, (j_1, \dots, j_{i-1}, q-1, j_{i+1}, \dots, j_{d-1}))$$

si $i \neq 0$, et $\pi_0 = \text{id}_B$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ et $N_0, \dots, N_{d-1}$ les parties de N associées à u comme précédemment, que nous supposons ordonnées de façon à ce que $m_i < m_j$ si $0 < i < j < d$.

Nous allons construire un élément v de $\mathcal{M}_q(B)$ associé à la même "partition" de N tel que le cardinal de $v(N)$ soit maximal, c'est-à-dire d'après le lemme 2, tel que $\text{card } v(N) = \text{card } B$. La suite v ainsi obtenue étant unique à une permutation près des lettres utilisées, u est obtenue en identifiant éventuellement certaines lettres de v , par une application $\varphi: B \rightarrow \mathcal{A}$. Cette suite v est obtenue de la manière inductive suivante:

On pose $v_0 = (0, \dots, 0)$, et $b_r = v_0 \dots v_{q^r-1}$ pour tout entier positif r .

• Si $h(r) = 0$, l'égalité $T_{q^r}(u) = u$ entraîne que

$$b_{r+1} = \underbrace{b_r \dots b_r}_{q \text{ fois}} = b_r \pi_0(b_r) \dots \pi_0^{q-1}(b_r) \quad \text{où} \quad \pi_0 = \text{id}_B.$$

• Si $r = m_1$, on a $b_r = \underbrace{(0, \dots, 0) \dots (0, \dots, 0)}_{q^r \text{ fois}}$ et l'égalité $T_{q^r}(u) = u^{(1)}$

conduit à introduire $(q-1)$ nouvelles lettres que nous désignerons, dans leur ordre d'apparition, par $(1, 0, \dots, 0)$, $(2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(q-1, 0, \dots, 0)$. On a donc

$$b_{r+1} = \underbrace{(0, \dots, 0) \dots (0, \dots, 0)}_{q^r \text{ fois}} \underbrace{(1, 0, \dots, 0) \dots (1, 0, \dots, 0)}_{q^r \text{ fois}} \dots \underbrace{(q-1, 0, \dots, 0) \dots (q-1, 0, \dots, 0)}_{q^r \text{ fois}}.$$

Plus généralement, on introduit les nouvelles lettres de façon à ce que les lettres de b_r aient leurs $(d-i)$ dernières coordonnées nulles tant que $r \leq m_i$ et que les nouvelles lettres dans b_{m_i+1} apparaissent dans l'ordre de leur i -ème coordonnée. Ainsi, si $h(r) \neq 0$, l'égalité $T_{q^r}(u) = T_{q^{h(r)}}(u)$ entraîne que $b_{r+1} = b_r \pi_{h(r)}(b_r) \dots \pi_{h(r)}^{q-1}(b_r)$, où pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$, π_i est la permutation de B égale au produit des cycles disjoints

$$\pi_i = \prod_{j_1 < q} \dots \prod_{j_{d-1} < q} ((j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_{d-1}), \dots, (j_1, \dots, j_{i-1}, q-1, j_{i+1}, \dots, j_{d-1})).$$

Pour $i < j < d$, $T_{q^{m_i}}$ (resp. $T_{q^{m_j}}$) opère sur des paquets de q blocs consécutifs de longueur q^{m_i} (resp. q^{m_j}) et q^{m_i} divise q^{m_j} . On en déduit que les π_i ($i \in \{0, \dots, d-1\}$) commutent deux à deux et $v_n = \prod_{r \geq 0} \pi_{h(r)}^{e_r(n)}(v_0)$.

Réciproquement, si u est définie comme dans l'énoncé, on a $v \in \mathcal{M}_q(B)$ et donc $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{A})$. ■

Cette définition de v permet d'interpréter π_i comme une addition dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{d-1}$, le cycle

$$((j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_{d-1}), \dots, (j_1, \dots, j_{i-1}, q-1, j_{i+1}, \dots, j_{d-1}))$$

représentant l'addition de

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ mod } q.$$

↑
rang i

On en déduit:

THÉORÈME 1. Le mot u appartient à $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ si et seulement si il existe une partition de N en d sous-ensembles $N_0, \dots, N_{d-1}$ (avec éventuellement $N_0 = \emptyset$), et une application $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{B} = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{d-1}$ vers $\mathcal{A}$ telles que $u = \tilde{\varphi} \circ \tilde{v}$, où $\tilde{v}$ est la suite récurrente sur $\tilde{B}$ définie par

$$\tilde{v} = b^1 \times b^2 \times \dots$$

avec $|b^i| = q$,

$$b_j^i = \begin{cases} (0, \dots, 0), & \text{si } h(i) = 0, \\ (0, \dots, 0, j, 0, \dots, 0), & \text{si } h(i) = k \neq 0 \end{cases}$$

↑
rang k

et

$$\sigma_{b_j^i}(x) = x + b_j^i, \quad \text{pour } x \in \tilde{B}.$$

5. Suites de G_q -orbite finie et sommes de chiffres. Pour tout $(a, n) \in \mathbb{N}^{*} \times \mathbb{N}$, on note $\text{mod}_a(n)$ le reste de n modulo a . Par ailleurs, si $N = \bigcup_{i < d} N_i$, on pose pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$, $m_i = \inf N_i$, et $S_i = \sum_{N_i}^q$.

THÉOREME 2. *Le mot u appartient à $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ si et seulement si il existe une partition de N en d sous-ensembles $N_0, \dots, N_{d-1}$ (avec éventuellement $N_0 = \emptyset$) et une application ψ de $B = \{0, \dots, q-1\}^{d-1}$ vers $\mathcal{A}$ tels que $u = \psi \circ w$, où w est l'élément de B^N défini par*

$$w_n = (\text{mod}_q(S_i(n)))_{i \in \{1, \dots, d-1\}}.$$

Démonstration. En effet, si $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ on a, d'après le lemme 3 et avec les notations du lemme 3, $u = \varphi \circ v$. Or

$$v_n = \prod_{r \geq 0} \pi_{h(r)}^{e_r(n)}(v_0) = \prod_{i=1}^{d-1} \pi_i^{e_{r_i(n)}(v_0)} = \prod_{i=1}^{d-1} \pi_i^{\text{mod}_q(S_i(n))}(v_0),$$

car π_i est d'ordre q .

Donc pour tout entier naturel n , v_n ne dépend que du $(d-1)$ -uplet $(\text{mod}_q(S_i(n)))_{i \in \{1, \dots, d-1\}}$ qui peut prendre $\text{card } B$ valeurs; or $\text{card } v(N) = \text{card } B$ et les suites v et w sont donc en bijection. ■

6. Caractérisation harmonique des éléments de $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$. Le groupe G_q est isomorphe au produit faible $\prod_{r \geq 0} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$; son dual $\hat{G}_q$ est donc isomorphe au groupe produit $\prod_{r \geq 0} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dont les caractères, introduits par Walsh, sont donnés par

$$\forall n \in N, \quad \omega_n(t) = \prod_{r \geq 0} e\left(\frac{t_r e_r(n)}{q}\right), \quad \text{si } t = (t_r)_{r \geq 0} \text{ et } n = \sum_{r \geq 0} e_r(n) q^r.$$

(On pose $e(x) = e^{2\pi i x}$.)

Si μ est une mesure borélienne de probabilité sur $\hat{G}_q$, sa transformée de Fourier-Walsh $\hat{\mu}$ est la suite de nombres complexes définie par $\hat{\mu}(n) = \int_{\hat{G}_q} \omega_n(t) \mu(dt)$, pour tout entier naturel n .

THÉOREME 3. *Les éléments de $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ sont exactement les composés par une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ des transformées de Fourier-Walsh de combinaisons $\mathcal{C}$ -linéaires finies de mesures de Dirac sur $\hat{G}_q$.*

Démonstration. D'après le théorème 2 et avec ses notations, tout élément u de $\mathcal{M}_q(\mathcal{A})$ est de la forme $u = \psi \circ w$ où ψ est une application de B vers $\mathcal{A}$ et $w_n = (\text{mod}_q(S_i(n)))_{i \in \{1, \dots, d-1\}}$. Par ailleurs, w s'identifie naturellement à l'élément z de $\mathbb{C}^N$ défini par

$$z_n = \prod_{i=1}^{d-1} e\left(\frac{\text{mod}_q S_i(n)}{q^i}\right), \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$ considérons χ_i l'élément de $\hat{G}_q$ représentant la fonction indicatrice de N_i et $(a_{ij})_{j \in \{0, \dots, q-1\}}$ la solution du système de Vandermonde:

$$\sum_{j < q} a_{ij} e\left(\frac{jS}{q}\right) = e\left(\frac{S}{q^i}\right), \quad S \in \{0, \dots, q-1\}.$$

Alors, si δ_χ désigne la mesure de Dirac en un élément χ de $\hat{G}_q$ et

$$\mu = \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j < q} a_{ij} \delta_{j\chi_i}, \quad \text{on a pour tout entier naturel } n,$$

$$\hat{\mu}(n) = \prod_{i=1}^{d-1} \sum_{j < q} a_{ij} \omega_n(j\chi_i) = \prod_{i=1}^{d-1} \sum_{j < q} a_{ij} e\left(\frac{jS_i(n)}{q}\right) = z_n.$$

Réciproquement, soit μ une mesure discrète à support fini sur $\hat{G}_q$, $\mu = \sum_{i \leq k} \alpha_i \delta_{\chi_i}$, où pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $\chi_i = (\chi_{ij})_{j \in N} \in \hat{G}_q$. Vérifions que $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que lorsque r décrit N , $(\hat{\mu}(n \oplus q^r))_{n \in N}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(n \oplus q^r) &= \sum_{i \leq k} \alpha_i e\left(\frac{\sum_{j \geq 0} \chi_{ij} e_j(n \oplus q^r)}{q}\right) \\ &= \sum_{i \leq k} \alpha_i e\left(\frac{\sum_{j \geq 0} \chi_{ij} e_j(n)}{q}\right) e\left(\frac{\chi_{ir}((e_r(n) \oplus 1) - e_r(n))}{q}\right). \end{aligned}$$

Or χ_{ir} ne peut prendre que q valeurs distinctes lorsque r parcourt N , et

$$((e_r(n) \oplus 1) - e_r(n)) \in \{1 - q, 1\} \quad \text{pour tout } r,$$

donc $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. ■

7. Une propriété de disjonction. Dans cette dernière partie, nous supposons connus les résultats relatifs à l'analyse spectrale des suites, qui sont exposés par exemple dans [26]. Soient p et q deux entiers naturels ≥ 2 , E et E' deux parties infinies de N . Les suites

$$f_n = e\left(\frac{s_E^p(n)}{p}\right) \quad \text{et} \quad g_n = e\left(\frac{s_{E'}^q(n)}{q}\right)$$

sont des éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ respectivement, dont nous nous proposons de comparer les types spectraux. Ce sont des suites récurrentes; elles sont également q -multiplicatives [4], [20], [24].

Suivant [8], [14], introduisons pour tout $m = (m_0, \dots, m_s)$ dans $\mathbb{Z}^{s+1}$ les suites

$$P_f^m(n) = f^{m_0}(n) \dots f^{m_s}(n+s) \quad \text{et} \quad P_g^m(n) = g^{m_0}(n) \dots g^{m_s}(n+s).$$

On pose $|m| = m_0 + \dots + m_s$.

On sait que les mesures spectrales Λ_f^m et Λ_g^m de P_f^m et P_g^m respectivement sont ou bien continues, ou bien discrètes. Ainsi, pour comparer la composante continue des types spectraux de f et de g , il suffit de comparer Λ_f^m et $\Lambda_g^{m'}$ pour tous les éléments m de $\mathbb{Z}^{s+1}$ et m' de $\mathbb{Z}^{s'+1}$ tels que ces deux mesures soient continues, ce qui n'est possible que si $|m|$ et $|m'|$ sont non nuls (cf. [14]).

Dans le cas $p = q = 2$, les composantes continues des types spectraux de f et de g sont disjointes dès que les mesures spectrales de f et de g le sont. On sait que c'est le cas si $E \triangle E'$ est infini (cf. [5]).

Soient λ une mesure borélienne sur le tore et r un entier strictement positif; on note $\lambda(rt) dt$ la mesure borélienne donnée, pour tout élément f de $C(T)$, par

$$\int_T f(t) \lambda(rt) dt = \int_T \frac{1}{r} \sum_{l < r} f\left(\frac{u}{r} + \frac{l}{r}\right) \lambda(du).$$

Désignons par $A_{f^{(h)}, |m|}$ la mesure spectrale de la suite p -multiplicative $(f^{(h)})^{|m|}$, avec $f^{(h)}(n) = f(np^h)$. Toujours d'après [14], A_f^m est limite au sens de la convergence forte de la suite de mesures

$$\left| \frac{1}{p^h} \sum_{j < p^h} P_f^m(j) e(-jt) \right|^2 A_{f^{(h)}, |m|}(p^h t) dt.$$

Il suffit donc de montrer que $A_{f^{(h)}, |m|}$ et $A_{g^{(h)}, |m'|}$ sont singulières pour en déduire que A_f^m et $A_g^{m'}$ le sont aussi.

D'après un critère de G. Brown (cf. [2], [16], [24]), pour que les mesures $A_{f^{(h)}, |m|}$ et $A_{g^{(h)}, |m'|}$ soient disjointes, il suffit que la série

$$\sum_{k \geq 0} |\hat{A}_{f^{(h)}, |m|}(p^k) - \hat{A}_{g^{(h)}, |m'|}(q^k)|^2$$

diverge. C'est ce que nous allons utiliser, dans le cas $(p, q) \neq (2, 2)$:

Pour un élément n de N donné, $s_E^p(n + p^k) - s_E^p(n)$ dépend du nombre l de chiffres consécutifs de n égaux à $(p-1)$ à partir du rang k :

$$s_E^p(n + p^k) - s_E^p(n) = \chi_E(k+l) - (p-1) \sum_{l' \leq l} \chi_E(k+l').$$

On en déduit que pour $k \geq h$,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{f^{(h)}, |m|}(p^k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} [f^{(h)}(n + p^k) \overline{f^{(h)}(n)}]^{|m|} \\ &= \frac{p-1}{p} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{p^l} e\left(\frac{|m|}{p} \sum_{l' \leq l} \chi_E(k+l')\right). \end{aligned}$$

Il suffit donc pour vérifier le critère de Brown de montrer la proposition suivante:

PROPOSITION 2. Soient E et E' deux parties infinies de N , p et q deux entiers ≥ 2 , θ et θ' deux éléments de $]0, 1[$; posons:

$$a_k = \frac{p-1}{p} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{p^l} e\left(\theta \sum_{l' \leq l} \chi_E(k+l')\right), \quad b_k = \frac{q-1}{q} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{q^l} e\left(\theta' \sum_{l' \leq l} \chi_{E'}(k+l')\right).$$

(a) Si $p \neq q$, $\sum_{k \geq 0} |a_k - b_k|^2$ diverge;

(b) Si $p = q > 2$, les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\sum_{k \geq 0} |a_k - b_k|^2$ converge,
- (ii) $\theta = \theta'$ et $E \triangle E'$ est fini,
- (iii) $a_k = b_k$ à partir d'un certain rang.

Remarque. On vérifie que la proposition (b) est fausse dans le cas $p = q = 2$ ($E = \{n^2; n \geq 1\}$, $E' = E \cup \{n^2 - 1; n \geq 1\}$).

LEMME 4. Soient p et q deux entiers ≥ 2 , A et B deux nombres complexes de module égal à un. Si $\frac{A-1}{pA-q} = q \frac{B-1}{pB-q}$, alors $A = B = 1$.

Démonstration. Posons $r = \operatorname{Re} A$ et $s = \operatorname{Re} B$; on a par égalité des modules

$$\frac{1-r}{p^2+q^2-2pqr} = q^2 \frac{1-s}{p^2+q^2-2pqs},$$

et par égalité des parties réelles

$$\frac{1-r}{p^2+q^2-2pqr} = q \frac{1-s}{p^2+q^2-2pqs}.$$

D'où $r = s = 1$, c'est-à-dire $A = B = 1$. ■

LEMME 5. Soient p et q deux entiers ≥ 2 , A et B deux nombres complexes de module égal à un. Si $\frac{p-1}{pA-1} = \frac{q-1}{qB-1}$, alors $p = q$ et $A = B$.

Démonstration. Posons $r = \operatorname{Re} A$ et $s = \operatorname{Re} B$; on a par égalité des modules

$$\frac{(p-1)^2}{p^2-2pr+1} = \frac{(q-1)^2}{q^2-2qs+1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p(1-r)}{(p-1)^2} = \frac{q(1-s)}{(q-1)^2},$$

et par égalité des parties réelles

$$\frac{(p-1)(pr-1)}{p^2-2pr+1} = \frac{(q-1)(qs-1)}{q^2-2qs+1}.$$

On a donc

$$\frac{pr-1}{p-1} = \frac{qs-1}{q-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p(1-r)}{p-1} = \frac{q(1-s)}{q-1},$$

ce qui conduit à $p = q$, et finalement à $A = B$. ■

Démonstration de la proposition 2. On a les formules de récurrence suivantes:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{k+1} = pe(-\theta\chi_E(k))a_k - (p-1), \\ b_{k+1} = qe(-\theta'\chi_{E'}(k))b_k - (q-1). \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} a_{k+1} - b_{k+1} &= pe(-\theta\chi_E(k))(a_k - b_k) + (pe(-\theta\chi_E(k)) - qe(-\theta'\chi_{E'}(k)))(b_k - (p-q)). \end{aligned}$$

Supposons que $(a_k - b_k)$ tende vers zéro quand k tend vers l'infini; il vient alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (pe(-\theta\chi_E(k)) - qe(-\theta'\chi_{E'}(k)))b_k = p - q.$$

(a) Si $p \neq q$, alors pour tout k on a

$$|p - q| \leq |pe(-\theta\chi_E(k)) - qe(-\theta'\chi_{E'}(k))|,$$

et

$$b_k = \frac{p-q}{pe(-\theta\chi_E(k)) - qe(-\theta'\chi_{E'}(k))} + \varepsilon_k, \quad \text{avec } \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0.$$

On obtient en reportant ceci dans (*)

$$\begin{aligned} (**) \quad & \frac{p(1 - e(-\theta\chi_E(k+1))) - q(1 - e(-\theta'\chi_{E'}(k+1)))}{pe(-\theta\chi_E(k+1)) - qe(-\theta'\chi_{E'}(k+1))} \\ &= -pq \frac{e(-\theta\chi_E(k)) - e(-\theta'\chi_{E'}(k))}{pe(-\theta\chi_E(k)) - qe(-\theta'\chi_{E'}(k))} + qe(-\theta'\chi_{E'}(k))\varepsilon_k - \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Cas 1: $E \triangle E'$ est infini. Supposons par exemple que $E^c \cap E$ soit infini. Il existe alors une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $\chi_E(k_n + 1) = 1$ et $\chi_{E'}(k_n + 1) = 0$ pour tout entier naturel n . De plus, quitte à extraire une sous-suite de $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(-(\theta\chi_E(k_n) - \theta'\chi_{E'}(k_n))) = B, \quad \text{avec } |B| = 1.$$

On en déduit par passage à la limite dans (**),

$$\frac{e(-\theta) - 1}{pe(-\theta) - q} = q \frac{B - 1}{pB - q},$$

ce qui est contradictoire avec $\theta \in]0, 1[$, d'après le lemme 4.

Cas 2: Il existe un rang K_0 à partir duquel $\chi_E(k) = \chi_{E'}(k)$.

Cas 2a: E^c est fini. Alors, il existe un rang K_1 à partir duquel $\chi_E(k) = \chi_{E'}(k) = 1$. Pour $k \geq K_1$, on a alors

$$a_k = \frac{p-1}{pe(-\theta)-1} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{q-1}{qe(-\theta')-1},$$

et $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - b_k) = 0$ conduit à une contradiction, d'après le lemme 5.

Cas 2b: E^c est infini. On remarque dans ce cas que $\theta \neq \theta'$, car si l'on avait $\theta = \theta'$, on aurait en reportant dans (**), $\lim_{k \rightarrow \infty} e(\theta\chi_E(k+1)) = 1$, ce qui contredirait le fait que E est infini.

Soit maintenant $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $k_0 \geq K_0$ et $\chi_E(k_n) = 0$ pour tout entier naturel n . Pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{p(1 - e(-\theta\chi_E(k_n+1))) - q(1 - e(-\theta'\chi_{E'}(k_n+1)))}{pe(-\theta\chi_E(k_n+1)) - qe(-\theta'\chi_{E'}(k_n+1))} = q\varepsilon_{k_n} - \varepsilon_{k_n+1}.$$

Or le premier membre ne peut prendre que deux valeurs:

- 0 si $\chi_E(k_n+1) = 0$,
- $\frac{p(1 - e(-\theta)) - q(1 - e(-\theta'))}{pe(-\theta) - qe(-\theta')}$ si $\chi_E(k_n+1) = 1$.

Comme $(\theta, \theta') \in]0, 1[^2$, cette seconde valeur est non nulle. Choisissons un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur à k_{n_0} , on ait

$$|q\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| < \left| \frac{p(1 - e(-\theta)) - q(1 - e(-\theta'))}{pe(-\theta) - qe(-\theta')} \right|.$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à n_0 , $\chi_E(k_n+1) = 0$, et par itération que pour tout entier n assez grand, $\chi_E(n) = 0$, ce qui contredit le fait que E est infini.

(b) Si $p = q > 2$, alors pour tout entier naturel k on a

$$|b_k| \geq \frac{p-1}{p} \left| 1 - \frac{1}{p} \left| \sum_{l \geq 0} \frac{1}{p^l} e(\theta' \sum_{l' < l} \chi_{E'}(k+l'+2)) \right| \right| \geq \frac{p-2}{p},$$

car

$$\frac{1}{p} \left| \sum_{l \geq 0} \frac{1}{p^l} e(\theta' \sum_{l' < l} \chi_{E'}(k+l'+2)) \right| \leq \frac{1}{p-1}.$$

On déduit donc de $\lim_{k \rightarrow \infty} (e(-\theta\chi_E(k)) - e(-\theta'\chi_{E'}(k)))b_k = 0$ que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (e(-\theta\chi_E(k)) - e(-\theta'\chi_{E'}(k))) = 0.$$

Or cette différence ne peut prendre que quatre valeurs distinctes au plus:

- 0 si $\chi_E(k) = \chi_{E'}(k) = 0$,
- $e(-\theta) - e(-\theta')$ si $\chi_E(k) = \chi_{E'}(k) = 1$,
- $e(-\theta) - 1$ ou $1 - e(-\theta')$ si $\chi_E(k) \neq \chi_{E'}(k)$.

La nullité de la limite précédente entraîne donc, E et E' étant infinis, que $\theta = \theta'$ et que $E \triangle E'$ est fini, et finalement que $a_k = b_k$ à partir d'un certain rang, d'où le résultat annoncé. ■

THÉORÈME 4. Soient p et q deux entiers naturels ≥ 2 , E et E' deux parties infinies de $\mathbb{N}$, et f et g les suites définies par :

$$f_n = e\left(\frac{s_E^p(n)}{p}\right) \quad \text{et} \quad g_n = e\left(\frac{s_{E'}^q(n)}{q}\right).$$

1) Si $p \neq q$, les composantes continues des types spectraux de f et de g sont singulières entre elles.

2) Si $p = q$, les composantes continues des types spectraux de f et de g sont équivalentes si et seulement si $E \triangle E'$ est fini. Elles sont singulières entre elles dans le cas contraire.

Démonstration. Il nous reste à montrer que dans le cas $p = q$ et $E \triangle E'$ fini, les composantes continues des types spectraux de f et de g sont absolument continues l'une par rapport à l'autre.

Avec les notations précédentes, soit m un élément de $\mathbb{Z}^{s+1}$ tel que Λ_f^m soit une mesure continue. Nous allons montrer que Λ_g^m lui est alors équivalente.

Considérons comme précédemment la mesure $\Lambda_{f^{(h)}, |m|}$. On remarque tout d'abord que c'est une mesure continue: la suite $[f^{(h)}]^{(h)}_{|m|}$ étant p -multiplicative, elle est pseudo-aléatoire si et seulement si

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{2 \leq a \leq p} |(f^{(h)}(ap^j))^{(h)}_{|m|} - (f^{(h)}(p^j))^{(h)}_{|m|}|^2$$

diverge (cf. [24]). Or

$$\begin{aligned} (f^{(h)}(pp^j))^{(h)}_{|m|} - (f^{(h)}(p^j))^{(h)}_{|m|} &= e\left(\frac{|m| s_E^p(p^{h+j+1})}{p}\right) - e\left(\frac{|m| p s_E^p(p^{j+h})}{p}\right) \\ &= e\left(\frac{|m| \chi_E(h+j+1)}{p}\right) - 1 \end{aligned}$$

prend pour une infinité d'entiers j la valeur $e(|m|/p) - 1$.

Comme $|m|$ n'appartient pas à $p\mathbb{N}$ (nous avons exclu le cas Λ_f^m discrète), la série étudiée diverge, et $\Lambda_{f^{(h)}, |m|}$ est continue.

Il suffit ainsi de montrer que $\Lambda_{f^{(h)}, |m|}$ et $\Lambda_{g^{(h)}, |m|}$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre pour en déduire que Λ_f^m et Λ_g^m le sont également.

Comme $(f^{(h)})^{(h)}_{|m|}$ est p -multiplicative, on a d'après [24]

$$\Lambda_{f^{(h)}, |m|} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{p} \left| \sum_{j=0}^{p-1} (f^{(h)}(jp^n))^{(h)}_{|m|} e(-jp^n x) \right|^2 h(dx),$$

h désignant la mesure de Haar sur le tore. Ce produit ne diffère de $\Lambda_{g^{(h)}, |m|}$ que par un nombre fini de termes polynomiaux. Les produits considérés étant des mesures continues, $\Lambda_{f^{(h)}, |m|}$ et $\Lambda_{g^{(h)}, |m|}$ sont équivalentes. Ceci achève la démonstration du théorème 4. ■

Remerciements. Nous remercions Michael Keane et Pierre Liardet pour leurs remarques ainsi que pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Bibliographie

- [1] J. Bésineau, *Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres"*, Acta Arith. 20 (1972), 401–416.
- [2] G. Brown, *Singular infinitely divisible distributions whose characteristic functions vanish at infinity*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 82 (1977), 277–287.
- [3] J. Coquet, *Mesures spectrales de Walsh associées à certaines suites arithmétiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 35 (2) (1985), 1–12.
- [4] J. Coquet, T. Kamae et M. Mendès-France, *Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France 105 (1977), 369–384.
- [5] S. Kakutani, *Ergodic theory of shift transformation*, Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. 2, University of California Press, Berkeley 1967, 405–414.
- [6] — *Strictly ergodic symbolic dynamical systems*, Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. 2, University of California Press, Berkeley 1972, 319–326.
- [7] T. Kamae, *Sums of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures*, Osaka J. Math. 15 (1978), 569–574.
- [8] — *Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by sums of digits to different bases*, Astérisque 49 (1977), 109–114.
- [9] M. Keane, *Generalized Morse sequences*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 10 (1968), 335–353.
- [10] — *Strongly mixing g -measures*, Invent. Math. 16 (4) (1972), 309–324.
- [11] J. Kwiatkowski, *Spectral isomorphism of Morse dynamical systems*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 29 (3–4) (1981), 105–114.
- [12] — *Isomorphism of regular Morse dynamical systems*, Studia Math. 72 (1982), 59–89.
- [13] M. Lemańczyk and M. K. Mentzen, *Generalized Morse sequences on n symbols and m symbols are not isomorphic*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 33 (1985), 239–245.
- [14] P. Liardet, *Regularities of distribution*, Compositio Math. 61 (3) (1987), 267–293.
- [15] — *Propriétés harmoniques de la numération suivant Jean Coquet*, Colloque de Théorie Analytique des Nombres "Jean Coquet", Public. Math. d'Orsay, 88-02, 1988, Orsay.
- [16] — *Some metric properties of subsequences*, Acta Arith. 55 (1990), 119–135.
- [17] J. C. Martin, *Generalized Morse sequences on n symbols*, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), 379–383.
- [18] C. Mauduit, *Substitutions et ensembles normaux*, Thèse d'Habilitation, janvier 1989, Université d'Aix-Marseille II.
- [19] C. Mauduit et B. Mossé, *Etude spectrale de la multiplication q -adique*, Compositio Math. 67 (1988), 129–147.
- [20] M. Mendès-France, *Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1*, J. Number Theory 5 (1973), 1–15.
- [21] B. Mossé, *Propriétés ergodiques de l'addition sans retenue*, Thèse de Doctorat, mars 1986, Université d'Aix-Marseille I.
- [22] — *q -adic spectral analysis of some arithmetic sequences*, International Colloquium on Arithmetics and Coding Systems, CIRM-Luminy, juin 1987, Theoret. Comput. Sci. 65 (1989), 249–263.
- [23] G. Poch, *Suites récurrentes sur les groupes abéliens*, C. R. Acad. Sci. Paris 283 (1976), 1111–1113.
- [24] M. Queffélec, *Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France 107 (1979), 385–421.

- [25] M. Queffélec, *Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme des chiffres*, Israel J. Math. 34 (4) (1979), 337–342.
- [26] — *Substitution Dynamical Systems — Spectral Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, 1294, Springer-Verlag, 1987.
- [27] T. Rojek, *On metric isomorphism of Morse dynamical systems*, Studia Math. 84 (1986), 247–267.

Christian Mauduit

URA 225 CNRS
FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE
70, route Léon-Lachamp
13288 Marseille Cedex 9
France

Brigitte Mossé

URA 225 CNRS
UNIVERSITÉ DE PROVENCE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
3, place Victor-Hugo
13331 Marseille Cedex 3
France

Reçu le 2.5.1989

(1931)

INFORMATION FOR AUTHORS

Manuscripts should be typed on one side only, with double or triple spacing and wide margins, and submitted in duplicate, including the original typewritten copy. Poor quality copies will not be accepted.

Abstracts are not published. The AMS Mathematics Subject Classification will be included if desired.

Formulae should be typewritten, and with the number (if any) placed in parentheses at the left margin.

A complete list of all handwritten symbols with indications for the printer should be enclosed. Special typefaces should be indicated according to the following code: **script letters** — by encircling the typed Roman letters in black, **German letters** — by typing the Roman equivalent and underlining in green, **boldface letters** — by straight black underlining.

No underlining is necessary for the titles, the text of theorems, the words "Theorem", etc. These will be set automatically according to the style of the journal. No titles should be written in capital letters.

Figures should be drawn accurately on separate sheets, preferably twice the size in which they are required to appear. The author should indicate in the margin of the manuscript where figures are to be inserted.

References should be arranged in alphabetical order, typed with double spacing, and styled and punctuated according to the examples given below. Abbreviations of journal names should follow Mathematical Reviews. Titles in Russian should be translated into the language of the paper.

Examples:

- [1] R. C. Baker, *Diophantine Inequalities*, Clarendon Press, Oxford 1986.
 - [2] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *Khintchine's problem in metric diophantine approximation*, Duke Math. J. 8 (1941), 243–255.
 - [3] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math. 785, Springer, 1980.
- Or:
- [Ka] A. A. Karatsuba, *Elements of Analytic Number Theory* (in Russian), Nauka, Moscow 1975.
 - [Le] J. Lehner, *Automorphic forms*, in *Discrete Groups and Automorphic Functions* (W. J. Harvey ed.), Academic Press, 1977, 73–120.

Authors' **affiliations** should be given at the end of the manuscript.

Authors receive **proofs** only once. If the proofs are not returned promptly, the article will be proofread against the manuscript by the publisher and printed without the author's corrections.

Authors receive 50 **reprints** of their articles.