ACTA ARITHMETICA
LVIII.1 (1991)

Dénominateurs dans le théorème des zéros de Hilbert

par

PATRICE PHILIPPON (Paris)

0. Introduction. Soit $\boldsymbol{k}$ un corps et $\bar{\boldsymbol{k}}$ sa clôture algébrique, si $P_1, \ldots, P_m$ sont des polynômes de $\boldsymbol{k}[X_1, \ldots, X_n]$ de degrés au plus $D \geqslant 1$, sans zéro commun dans $\bar{\boldsymbol{k}}^n$, il existe des polynômes $A_1, \ldots, A_m \in \boldsymbol{k}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que:

$$1 = A_1 P_1 + \ldots + A_m P_m.$$

Cet énoncé découle du théorème des zéros de Hilbert et appelle immédiatement la question suivante: Comment trouver les polynômes A_i, ou pour le moins, par quelle quantité peut-on borner les degrés des A_i?

C'est W. D. Brownawell [Br] qui, lorsque $\boldsymbol{k}$ est de caractéristique nulle, a le premier donné une réponse satisfaisante à la seconde partie de la question en montrant qu'on peut toujours choisir les A_i de degrés $\leqslant \mu n D^\mu + \mu D$ où $\mu = \min\{m, n\}$.

La démonstration de Brownawell combine de façon étonnante la théorie de l'élimination avec un théorème analytique de H. Skoda [S]. Tout récemment J. Kollár a donné dans [K] une démonstration totalement différente d'une version améliorée (sans facteur μn) du théorème de Brownawell, plus proche de la théorie de l'intersection et valable en toute caractéristique.

Si le corps $\boldsymbol{k}$ est muni d'une structure arithmétique, se pose la question d'estimer les coefficients des polynômes A_i. C. Berenstein et A. Yger ont étudié dans [BY] ce problème lorsque $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{Q}$ ou plus généralement un corps de nombres. Leur démarche suit les grandes lignes de celle de Brownawell, mais ils remplacent le théorème de Skoda par un appel à des identités de Bezout analytiques complété par des calculs de résidus. Pour préparer ces calculs ils utilisent, dans le cas général, notre théorème 4 du §4.

Si $P \in \boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ on appelle *hauteur* de P, notée $H(P)$, le maximum des valeurs absolues des coefficients de P. Soient $P_1, \ldots, P_m \in \boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ de degrés au plus $D \geqslant 1$ et hauteurs au plus $e^H \geqslant 1$, sans zéro commun dans $\bar{\boldsymbol{Q}}^n$; alors Berenstein et Yger montrent l'existence de polynômes $A_1, \ldots, A_m$ dans $\boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ et $r \in \boldsymbol{N}^*$ tels que:

$$r = A_1 P_1 + \ldots + A_m P_m,$$

$$d^0 A_i \leqslant c(n) D^n \quad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\log \max \{r, H(A_i)\} \leqslant c(n) D^{8n+3} (H + D \log D + \log m),$$

pour un réel $c(n) > 0$ explicitable.

Il faut noter qu'une borne générale obtenue à partir de l'estimation de Brownawell et d'un argument de type "principe des tiroirs" peut s'écrire:

$$d^0 A_i \leqslant n(n+1) D^n \quad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\log \max \{r, H(A_i)\} \leqslant c'(n) \cdot m \cdot D^{n^2} (H + n^2 \log D + \log m).$$

Notre propos est, ici, d'étudier la question de l'estimation des coefficients dans un cadre assez général (i.e. en remplacant $\boldsymbol{Z}$ par un anneau commutatif, unitaire, noethérien, factoriel, (semi-)régulier et "taillé"; cf. § 1 pour une définition). Disons tout de suite que nous ne saurons estimer que la taille du "dénominateur" r, laissant ouvert le problème en ce qui concerne les hauteurs des A_i. Nous pouvons, en particulier, énoncer

THÉORÈME 1. *Soient $P_1, \ldots, P_m \in \boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, de degrés au plus $D \geqslant 1$ et de hauteurs au plus $e^H \geqslant 1$, sans zéro commun dans $\bar{\boldsymbol{Q}}^n$. Il existe un entier $0 < r \leqslant \exp[(n+2)^3 (5 \log(n+1))^{n+2} (H+D) D^n]$ et des polynômes $A_1, \ldots, A_m \in \boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $d^0(A_i P_i) \leqslant (n+2) D^n$ $(i = 1, \ldots, m)$ et*

$$r = A_1 P_1 + \ldots + A_m P_m.$$

Nos résultats principaux, théorèmes 4 et 5, ne sont pas restreints à la caractéristique nulle. Si $\boldsymbol{F}_q$ désigne le corps fini à q éléments, on peut énoncer parallèlement au théorème 1

THÉORÈME 2. *Soient $P_1, \ldots, P_m \in \boldsymbol{F}_q[T][X_1, \ldots, X_n]$, de degrés par rapport aux X_i au plus $D \geqslant 1$ et de degrés par rapport à T au plus $H \geqslant 0$, sans zéro commun dans $(\overline{\boldsymbol{F}_q(T)})^n$. Il existe un polynôme non nul $r \in \boldsymbol{F}_q[T]$ de degré inférieur ou égal à $(n+2)^2 (H+D) D^n$ et des polynômes $A_1, \ldots, A_m \in \boldsymbol{F}_q[T][X_1, \ldots, X_n]$ de degrés par rapport aux X_i au plus $(n+2) D^n$ $(i = 1, \ldots, m)$ tels que*

$$r = A_1 P_1 + \ldots + A_m P_m.$$

Enfin mentionnons un résultat mixte entre les théorèmes 1 et 2.

THÉORÈME 3. *Soient $P_1, \ldots, P_m \in \boldsymbol{Z}[T][X_1, \ldots, X_n]$, de degrés par rapport aux X_i au plus $D \geqslant 1$ et satisfaisant $\max\{d_T^0 P_i + \log H(P_i);\ i = 1, \ldots, m\} \leqslant H$, sans zéro commun dans $(\overline{\boldsymbol{Q}(T)})^n$. Il existe un polynôme non nul $r \in \boldsymbol{Z}[T]$ satisfaisant*

$$d^0 r + \log H(r) \leqslant (n+3)^3 (45 \log(n+1))^{n+2} (H+D) D^n$$

et des polynômes $A_1, \ldots, A_m \in \boldsymbol{Z}[T][X_1, \ldots, X_n]$ de degrés par rapport aux X_i au plus $(n+3) D^n$ $(i = 1, \ldots, m)$ tels que

$$r = A_1 P_1 + \ldots + A_m P_m.$$

Nous expliquons dans ce texte deux approches différentes pour établir ces résultats. La première est très proche de la démarche initiale de Brownawell. Nous développons les arguments de théorie de l'élimination dans le cadre des anneaux factoriels munis d'une taille, et le point essentiel est que nous substituons au théorème de Skoda un théorème de J. Lipman et B. Teissier qui en est un pendant algébrique. La profondeur de chacun de ces théorèmes est également remarquable et en fait, à juste titre, les deus ex machina de ce type d'approche. Il serait souhaitable, qu'à l'instar du théorème de Skoda, le théorème de Lipman et Teissier puisse être étendu pour fournir des informations quantitatives sur les valuations des A_i.

La seconde approche adapte simplement la démonstration de Kollár au cadre arithmétique présent. Nous suivons la démarche algébrique déjà expliquée dans [P_3], et complémentons le théorème de Bézout utilisé par un analogue arithmétique qui se déduit de la théorie de l'élimination.

Nous avons organisé le texte comme suit. Au paragraphe 1 sont réunis les notations et rappels nécessaires. Au paragraphe 2 nous reprenons les résultats de [P_1] en remplaçant la notion de valeur absolue par celle de valuation. Le reste de l'article est divisé en deux parties, la première (§§ 3 et 4) présente l'approche "à la Brownawell", et la seconde (§§ 5 à 7) l'approche "à la Kollár".

Au paragraphe 3 nous reprenons les arguments développés dans [P_2] dans le cadre des anneaux factoriels. Et au paragraphe 4 nous appliquons le théorème de Lipman et Teissier pour établir notre premier résultat principal (th. 4).

Le paragraphe 5 contient les rappels nécessaires sur l'homologie des complexes de Koszul. Ces notions sont utilisées au paragraphe 6 et nous en déduisons notre second théorème principal (th. 5) au paragraphe 7.

Enfin nous concluons au paragraphe 8 en montrant comment les théorèmes 1, 2 et 3 de cette introduction se déduisent des théorèmes principaux.

Je signale, ici, que, pour la première partie, c'est M. Chardin qui a attiré mon attention sur le théorème de Lipman et Teissier, tandis que la seconde partie répond à une question de F. Amoroso. Je les remercie sincèrement, ainsi que le rapporteur dont la lecture attentive et les commentaires avisés m'ont permis de corriger deux erreurs et éclairer plusieurs points obscurs du manuscrit initial.

1. Notations, terminologie et rappels. Soit R un anneau commutatif, unitaire et noethérien et R^* les unités de R. Notons $\{Y_0, Y_1, \ldots\} = \{Y_i;\ i \in \boldsymbol{N}\}$ une liste de symboles indépendants sur R, nous notons, ici, $\mathrm{Pol}(R)$ le R-module des polynômes à coefficients dans R en ces indéterminées $\{Y_i;\ i \in \boldsymbol{N}\}$. En d'autres termes

$$\mathrm{Pol}(R) = \bigcup_{m \in \boldsymbol{N}} R[Y_0, \ldots, Y_m] = R[(Y_i)_{i \in \boldsymbol{N}}].$$

Pour $f \in \mathrm{Pol}(R)$ nous noterons $m(f)$ (resp. $d^0 f$) le nombre d'indéterminées apparaissant effectivement dans l'écriture de f (resp. le degré total de f). Si σ est une bijection de N dans lui-même, nous noterons encore σ l'isomorphisme de $\mathrm{Pol}(R)$ défini par $\sigma(Y_i) = Y_{\sigma(i)}$ $(i \in N)$.

Nous appellerons *taille sur R* toute application

$$t\colon \mathrm{Pol}(R) \to \mathbf{R}_+ \cup \{-\infty\}$$

satisfaisant:

(T0) $t(\sigma(f)) = t(f)$ pour tout σ associé à une bijection de N dans lui-même,

(T1) $t(0) = -\infty$, $t(u) = 0$ pour $u \in R^*$ et, plus généralement, pour u monôme unitaire (i.e. de la forme $u_0 Y_{i_1}^{\alpha_1} \ldots Y_{i_m}^{\alpha_m}$ avec $u_0 \in R^*$),

(T2) $t(fg) = t(f)+t(g)$ pour $f, g \in \mathrm{Pol}(R)$,

(T3) il existe des réels $c_1, c_2 \geqslant 1$ et $c' \geqslant 0$ tels que pour $f_1, \ldots, f_k \in \mathrm{Pol}(R)$ on ait

(a) $t(F) \leqslant c_1 \max\{\tilde{t}(f_1); \ldots; \tilde{t}(f_k)\} + c' \log k$, si $F = f_1\mathfrak{m}_1 + \ldots + f_k\mathfrak{m}_k$ avec $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ monômes unitaires, de degrés $\leqslant d$ en m indéterminées, dont aucune n'apparaît dans $f_1, \ldots, f_k$, et où $\tilde{t}(f) = t(f) + c' \log(m(f)+1)d^0 f$,

(b) $\max\{t(f_1); \ldots; t(f_k)\} \leqslant c_2 t(F) + c' \log(m+1)d$, si, de plus, les monômes $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ sont deux à deux distincts.

On appellera encore c_1, c_2 et c' les *constantes* de la taille t, et nous dirons que R est *taillé*.

Si $R[\mathscr{U}]$ est un anneau de polynômes à coefficients dans R sur un ensemble fini $\mathscr{U}$ d'indéterminées, on définit la taille d'un de ses éléments f par la formule $t(f) = t(\iota(f))$ où $\iota\colon R[\mathscr{U}] \to \mathrm{Pol}(R)$ est un homomorphisme de R-algèbre injectant $\mathscr{U}$ dans $\{Y_i;\ i \in N\}$. Cette définition ne dépend pas de l'homomorphisme ι choisi; par abus de notation nous identifierons l'image $\iota(R[\mathscr{U}])$ avec $R[\mathscr{U}]$.

Nota Bene. Si R est lui-même un anneau de polynômes de la forme $R'[T_1, \ldots, T_s]$, on prendra soin de ne pas mélanger dans la définition ci-dessus les variables $T_1, \ldots, T_s$ et les indéterminées $\{Y_i;\ i \in N\}$. En particulier, dans la condition (T3), les monômes $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$ ne doivent pas faire intervenir les variables $T_1, \ldots, T_s$.

On pose $A = R[X_0, \ldots, X_n]$ et soit I un idéal homogène de A. On dit qu'un élément $p \in A$ est *entier sur I* si et seulement s'il vérifie une relation de la forme

$$p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

avec $a_i \in I^i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$; cf. [LT], définition 1.1. L'idéal des éléments de A entiers sur I, noté $\bar{I}$, est appelé la *clôture intégrale* de I dans A.

Soit v une valuation sur A, c'est-à-dire une application $v\colon A \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $v(xy) = v(x)+v(y)$, $v(x+y) \geqslant \min\{v(x); v(y)\}$ où $x, y \in R$, $v(R^*) = 0$ et $v(0) = +\infty$, v est dite *discrète* si et seulement si $v(A)$ est isomorphe au semi-groupe ordonné $N \cup \{+\infty\}$. On pose encore $v(I) = \min\{v(a);\ a \in I\}$ et on a le critère valuatif d'intégralité suivant.

Critère valuatif d'intégralité. *Si R est intégralement clos, $p \in A$ est entier sur I si et seulement si pour toute valuation discrète v sur A on a $v(p) \geqslant v(I)$.*

Démonstration. L'anneau A est noethérien et intégralement clos, c'est donc un anneau de Krull (cf. [B], VII, §3. corollaire et tableau p. 348). Et il existe une famille $\mathscr{V}$ de valuations discrètes du corps des fractions K de A, à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, telle que A soit l'intersection des anneaux $A_v = \{p \in K;\ v(p) \geqslant 0\}$ pour $v \in \mathscr{V}$. Aussi a-t-on, d'après [ZS], théorème 1, p. 350,

$$\bar{I} = \bigcap_{v \in \mathscr{V}} I \cdot A_v.$$

Mais, si $p \in A \subset K$ vérifie $v(p) \geqslant v(I)$, il existe $q \in I$ tel que $v(p) \geqslant v(q)$ et on écrit $p = q \cdot (p/q)$ avec $v(p/q) \geqslant 0$ donc $p/q \in A_v$, et par suite $p \in I \cdot A_v$. Il en résulte $p \in \bigcap_{v \in \mathscr{V}} I \cdot A_v = \bar{I}$ dès que $v(p) \geqslant v(I)$ pour toute valuation discrète v sur A. Dans l'autre sens, s'il existe une valuation v sur A telle que $v(p) < v(I)$, pour toute famille $a_1, \ldots, a_k$ avec $a_i \in I^i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ on a

$$v(p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_k) = k \cdot v(p) < +\infty,$$

montrant que p ne peut-être entier sur I. ∎

On étend une valuation v de A à $\mathrm{Pol}(A)$ par la formule:

$$v(f) = \min\{v(f_\alpha); \alpha\}$$

où $\{f_\alpha; \alpha\}$ désigne l'ensemble des coefficients dans A de f.

Soit v une valuation de A et S un ensemble multiplicatif de A tel que $v(s) \neq +\infty$ pour tout $s \in S$. On étend la valuation v en une valuation de l'anneau localisé $S^{-1}A$ à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ en posant $v(a/b) = v(a) - v(b)$ où $a, b \in A$.

Soit $\varphi\colon S^{-1}A[T_1, \ldots, T_m] \to S^{-1}A[S_1, \ldots, S_l]$ un homomorphisme de $S^{-1}A$-algèbres tel que

$$\varphi(T_i) = \varphi_{i,0} + \sum_{j=1}^{l} \varphi_{i,j} S_j \quad (\varphi_{i,j} \in S^{-1}A;\ i, j).$$

On peut énoncer

Lemme de spécialisation. *Si $f \in \mathrm{Pol}(A)$ est de degré $\leqslant D_0$ par rapport à un groupe d'indéterminées $T_1, \ldots, T_m$ on a, avec $v(\varphi) = \min\{v(\varphi_{i,j}); i, j\}$,*

$$v(\varphi(f)) \geqslant v(f) + D_0 v(\varphi),$$

pour toute valuation v de A.

Soit $f \in \mathrm{Pol}(R)$ de degré $\leqslant D_0$ par rapport à un groupe d'indéterminées $T_1, \ldots, T_m$ et de degrés $D_1, \ldots, D_r$ par rapport à ses autres groupes *d'indéterminées* $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_r$. *Si* $\varphi_{i,j} \in R$ *pour tout couple* (i, j) *on a*

$$t(\varphi(f)) \leqslant c_1 c_2^r \max\{c_1; c_2\}\Big(t(f) + D_0 t(\varphi) + 2c'\Big[D_0 \log(l+1) + \sum_{i=0}^{r} D_i \log(m_i+1)\Big]\Big),$$

en notant $t(\varphi) = \max\{t(\varphi_{i,j}); i,j\}$, $m_0 = m$ *et* $m_i = \operatorname{card} \mathcal{U}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Démonstration. On écrit

$$f = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha,\beta} T_1^{\alpha_1} \ldots T_m^{\alpha_m} \mathfrak{m}_\beta$$

où $f_{\alpha,\beta} \in A$ ou R suivant le cas et $\mathfrak{m}_\beta$ sont des monômes unitaires en les indéterminées de $\mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_r$. On a, si $f \in \operatorname{Pol}(A)$,

$$v(\varphi(f)) \geqslant \min\Big\{v\Big(f_{\alpha,\beta} \prod_{i=1}^{m} \big(\varphi_{i,0} + \sum_{j=1}^{l} \varphi_{i,j} S_j\big)^{\alpha_i}\Big); \alpha, \beta\Big\},$$

et d'après la propriété (T3.a) de la taille, si $f \in \operatorname{Pol}(R)$,

$$t(\varphi(f)) \leqslant c_1 \max\Big\{t\Big(f_{\alpha,\beta} \prod_{i=1}^{m} \big(\varphi_{i,0} + \sum_{j=1}^{l} \varphi_{i,j} S_j\big)^{\alpha_i}\Big); \alpha, \beta\Big\} + \ldots$$

$$\ldots + c' \sum_{i=0}^{r} D_i \log(m_i+1) + c_1 c' D_0 \log(l+1).$$

Pour cette dernière inégalité, on pose

$$\{f_1, \ldots, f_k\} = \Big\{f_{\alpha,\beta} \prod_{i=1}^{m} \big(\varphi_{i,0} + \sum_{j=1}^{l} \varphi_{i,j} S_j\big)^{\alpha_i}; \alpha, \beta\Big\},$$

$$\{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k\} = \{\mathfrak{m}_\beta;\ \beta \text{ convenablement répété}\},$$

dans la propriété (T3.a), on a

$$\log k \leqslant \sum_{i=0}^{r} D_i \log(m_i+1), \quad m(f_1), \ldots, m(f_k) \leqslant l \quad \text{et} \quad d^0 f_1, \ldots, d^0 f_k \leqslant D_0.$$

Or on a encore, si $f \in \operatorname{Pol}(A)$,

$$v(f) = \min\{v(f_{\alpha,\beta}); \alpha, \beta\},$$

$$v\Big(\varphi_{i,0} + \sum_{j=1}^{l} \varphi_{i,j} S_j\Big) \geqslant v(\varphi) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

et d'après les propriétés (T3.b) et (T3.a) de la taille, si $f \in \operatorname{Pol}(R)$,

$$t(f_{\alpha,\beta}) \leqslant c_2^{r+1} t(f) + c' \sum_{i=0}^{r} c_2^i D_i \log(m_i+1),$$

$$t\Big(\varphi_{i,0} + \sum_{j=1}^{l} \varphi_{i,j} S_j\Big) \leqslant c_1 t(\varphi) + c' \log(l+1) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Ceci, avec la propriété (T2) de la taille, achève la preuve du lemme car $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leqslant D_0$ pour tout α. ■

Nous dirons que l'anneau R est *régulier* si et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{a}$ de R, l'anneau local $R_\mathfrak{a}$ obtenu avec l'ensemble multiplicatif $R \backslash \mathfrak{a}$ est de dimension égale à la dimension du $R/\mathfrak{a}$-espace vectoriel $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ (cf. [ZS], § 11). L'anneau A est alors également régulier. Nous dirons que l'anneau R est *semi-régulier* (ou *Cohen–Macaulay*) si et seulement si tout idéal de rang r engendré par r éléments est pur. L'anneau A est alors également semi-régulier. Un anneau régulier est en particulier semi-régulier.

Enfin, rappelons que l'anneau R (commutatif, unitaire et noethérien) est dit *factoriel* s'il est intègre, l'intersection de deux idéaux principaux de R est un idéal principal et toute famille non vide d'idéaux principaux de R possède un élément maximal. L'anneau A est alors également factoriel. Un anneau factoriel est intégralement clos. Voir [B], VII, § 3.5 et tableaux pp. 348 & 351.

Nous supposons dans la suite que l'anneau R est commutatif, unitaire, noethérien et (généralement) factoriel. L'hypothèse R taillé apparaîtra au paragraphes 3, 4 et 7, tandis que l'hypothèse R régulier (resp. semi-régulier) n'interviendra qu'au paragraphe 4 (resp. 7).

2. Valuations et formes éliminantes. On reprend les notations de [P_1], en particulier $\mathcal{M}_d$ désigne l'ensemble des monômes $X_0^{\alpha_0} \ldots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = d$ et $\mathcal{U}_*$ l'ensemble des indéterminées $u_\mathfrak{m}^{(*)}$ où $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{d_*}$. On considère une forme U-éliminante, soit $f_{I,\boldsymbol{d}} \in R[\boldsymbol{d}]$, d'indice $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ de I. L'anneau R étant factoriel on définit une telle forme comme un pgcd des éléments de l'idéal U-éliminant $\mathfrak{E}_{\boldsymbol{d}}(I)$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A de rang $n+1-r$ satisfaisant $\mathfrak{p} \cap R = (0)$, il suit des faits 1.6 et 1.7 de [P_1] que $\mathfrak{E}_{\boldsymbol{d}}(\mathfrak{p})$ est principal (noter que le fait 1.6 n'utilise que la propriété de factorialité).

Dans la suite on notera $\mathfrak{M} = (X_0, \ldots, X_n)$ et v une valuation sur A. On supposera également $d_1 \leqslant d_j$ $(j = 2, \ldots, r)$. Montrons tout d'abord,

Proposition 1. *Si* $X_0 \in I$ *on a*

$$(v(X_0) - v(\mathfrak{M})) d^0_{\mathcal{U}_1} f_{I,\boldsymbol{d}} \geqslant v(\mathfrak{d} f_{I,\boldsymbol{d}}) - \Big(\sum_{i=1}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}}\Big) v(\mathfrak{M}) - v(f_{I,\boldsymbol{d}}).$$

Démonstration. Soit $i_0 \in \{0, \ldots, n\}$ un indice tel que $v(X_{i_0}) = v(\mathfrak{M})$. On pose

$$V_1 = X_0 X_{i_0}^{d_1 - 1} \quad \text{et} \quad V_i = U_1 X_{i_0}^{d_i - d_1} \quad (i = 2, \ldots, r)$$

et on écrit

$$V_i = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{d_i}} v_\mathfrak{m}^{(i)} \mathfrak{m} \quad (i = 1, \ldots, r).$$

On se donne de nouvelles indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$; soit ϱ l'homomorphisme

$$\varrho\colon\ R[\boldsymbol{d}] \ \to\ R[\boldsymbol{d}][\lambda_1, \ldots, \lambda_r],$$

défini par $\varrho(u_{\mathfrak{m}}^{(i)}) = u_{\mathfrak{m}}^{(i)} - \lambda_i v_{\mathfrak{m}}^{(i)}$ pour $i = 1, \ldots, r$ et $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{d_i}$. On prolonge ϱ à $A[\boldsymbol{d}]$ de façon évidente, on vérifie que $\varrho(\mathfrak{E}_{\boldsymbol{d}}(I)) = \mathfrak{E}_{\boldsymbol{d}}(I)$ car $X_0 \in I$ et $\varrho(U_i) = U_i - \lambda_i V_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, en particulier $\varrho(f_{I,\boldsymbol{d}})$ divise $f_{I,\boldsymbol{d}}$ et en développant selon les puissances des λ_i on obtient $\varrho(f_{I,\boldsymbol{d}}) = f_{I,\boldsymbol{d}}$ par comparaison des degrés en les indéterminées $u_{\mathfrak{m}}^{(i)}$.

Considérons maintenant l'homomorphisme

$$\mathfrak{s}\colon\ \mathfrak{S}A[\boldsymbol{d}] \ \to\ A[\boldsymbol{d}][1/X_0, 1/X_{i_0}, 1/U_1]$$

défini par

$$\mathfrak{s}(s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(j)}) = \begin{cases} \left(u_{\mathfrak{m}}^{(j)} - \dfrac{U_j}{V_j} v_{\mathfrak{m}}^{(j)}\right) \Big/ X_{i_0}^{d_j} & \text{si } \mathfrak{m} \neq X_{i_0}^{d_j} = \mathfrak{m}', \\ -\left(u_{\mathfrak{m}'}^{(j)} - \dfrac{U_j}{V_j} v_{\mathfrak{m}'}^{(j)}\right) \Big/ X_{i_0}^{d_j} & \text{si } \mathfrak{m} = X_{i_0}^{d_j} \neq \mathfrak{m}', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie encore

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}}) = \mathfrak{t} \circ \varrho(f_{I,\boldsymbol{d}}) = f_{I,\boldsymbol{d}},$$

où $\mathfrak{t}\colon R[\boldsymbol{d}][\boldsymbol{\lambda}] \to A[\boldsymbol{d}][1/X_0, 1/X_{i_0}, 1/U_1]$ est l'homomorphisme défini par $\mathfrak{t}(\lambda_i) = U_i/V_i$. En effet, l'action de $\mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}$ comme celle de $\mathfrak{t} \circ \varrho$ consiste à substituer à $u_{\mathfrak{m}}^{(i)}$ dans $f_{I,\boldsymbol{d}}$ l'expression $u_{\mathfrak{m}}^{(i)} - (U_i/V_i) v_{\mathfrak{m}}^{(i)}$ d'où la première égalité, et comme on a vu que $\varrho(f_{I,\boldsymbol{d}}) = f_{I,\boldsymbol{d}}$ la seconde est claire.

Soit S l'ensemble multiplicatif $\{1/X_{i_0}^{\alpha} U_1^{\beta},\ \alpha, \beta \in N\}$ et posons $F = (X_0/X_{i_0})^{d^0_{\mathcal{U}_1} f_{I,\boldsymbol{d}}}$, alors $F \cdot \mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})$ est obtenu à partir de $\mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})$ en substituant aux $s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(j)}$ des éléments de $S^{-1}A[\boldsymbol{d}]$ de valuations $\geqslant -d_j v(X_{i_0})$ car $v(U_j) = v(X_{i_0}^{d_j})$. Il suit du lemme de spécialisation que

$$v(F \cdot f_{I,\boldsymbol{d}}) = v(F \cdot \mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})) \geqslant v(\mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})) - v(X_{i_0}) \sum_{i=1}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}},$$

or

$$v(F) = (v(X_0) - v(X_{i_0})) d^0_{\mathcal{U}_1} f_{I,\boldsymbol{d}},$$

d'où enfin

$$(v(X_0) - v(X_{i_0})) d^0_{\mathcal{U}_1} f_{I,\boldsymbol{d}} \geqslant v(\mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})) - v(X_{i_0}) \Big(\sum_{i=1}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}} \Big) - v(f_{I,\boldsymbol{d}}),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. ∎

Nous aurons encore besoin de la proposition suivante:

Proposition 2. *Soit I un idéal homogène de A et p un polynôme homogène de degré $d_1 > 0$ de A non-diviseur de zéro dans A/I. On note ϱ l'homomorphisme de $R[\boldsymbol{d}]$ dans $R[(d_2, \ldots, d_r)]$ défini par $\varrho(U_1) = p$. On a $\varrho(f_{I,\boldsymbol{d}}) \neq 0$ et*

$$v(\mathfrak{d} \circ \varrho(f_{I,\boldsymbol{d}})) - \sum_{i=2}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}} v(\mathfrak{M})$$

$$\geqslant \min\Big\{ v(\mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})) - \sum_{i=1}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}} v(\mathfrak{M});\ v(p) - d_1 v(\mathfrak{M}) \Big\}.$$

Démonstration. Soit comme précédemment i_0 un indice tel que $v(X_{i_0}) = v(\mathfrak{M})$ et posons $\mathfrak{m}_0 = X_{i_0}^{d_1}$. On écrit

$$f_{I,\boldsymbol{d}} = \sum_{\alpha \geqslant 0} f_\alpha \cdot (u_{\mathfrak{m}_0}^{(1)})^{\alpha},$$

où, pour tout α, $f_\alpha \in R[\boldsymbol{d}]$ ne dépend pas de la variable $u_{\mathfrak{m}_0}^{(1)}$. On considère l'homomorphisme $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{S}A[\boldsymbol{d}]$ dans $\mathfrak{S}A[(d_2, \ldots, d_r)][1/X_{i_0}]$ défini par

$$\mathfrak{s}(s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(1)}) = \begin{cases} p_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_0 & \text{si } \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}', \\ -p_{\mathfrak{m}'}/\mathfrak{m}_0 & \text{si } \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \neq \mathfrak{m}', \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où les $p_{\mathfrak{m}}$ sont les coefficients de p dans A. On vérifie aisément $\mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(u_{\mathfrak{m}}^{(1)}) = p_{\mathfrak{m}}$ si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$, et $\mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(u_{\mathfrak{m}_0}^{(1)}) = p_{\mathfrak{m}_0} - p/\mathfrak{m}_0$.

Ainsi a-t-on

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}}) = \sum_{\alpha \geqslant 0} (p_{\mathfrak{m}_0} - p/\mathfrak{m}_0)^{\alpha} \mathfrak{d} \circ \varrho(f_\alpha) = \mathfrak{d} \circ \varrho(f_{I,\boldsymbol{d}}) + \sum_{\alpha \geqslant 1} \left(\frac{p}{\mathfrak{m}_0}\right)^{\alpha} G_\alpha,$$

où $G_\alpha \in \mathfrak{S}A[(d_2, \ldots, d_r)]$ est homogène de degré $\sum_{i=2}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}}$ en $X_0, \ldots, X_n$. On réécrit encore cette formule sous la forme

$$\mathfrak{d} \circ \varrho(f_{I,\boldsymbol{d}}) = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}}) - \sum_{\alpha \geqslant 1} \left(\frac{p}{\mathfrak{m}_0}\right)^{\alpha} G_\alpha.$$

Comme $p \in \mathfrak{M}^{d_1}$ on a $v(p) \geqslant v(\mathfrak{M}^{d_1}) = v(\mathfrak{m}_0)$; on a aussi

$$v(G_\alpha) \geqslant v(\mathfrak{M}) \sum_{i=2}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}}.$$

Enfin, $\mathfrak{m}_0^{d^0_{\mathcal{U}_1} f_{I,\boldsymbol{d}}} \mathfrak{s} \circ \mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})$ est obtenu à partir de $\mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})$ en substituant aux $s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(1)}$ des éléments de $A[\boldsymbol{d}]$, on obtient avec le lemme de spécialisation

$$v(\mathfrak{d} \circ \varrho(f_{I,\boldsymbol{d}})) \geqslant \min\Big\{ v(\mathfrak{d}(f_{I,\boldsymbol{d}})) - d_1 d^0_{\mathcal{U}_1} f_{I,\boldsymbol{d}} v(\mathfrak{M});\ v(p) - v(\mathfrak{M}) \Big(d_1 - \sum_{i=2}^{r} d_i d^0_{\mathcal{U}_i} f_{I,\boldsymbol{d}}\Big) \Big\},$$

ce qui établit la proposition. ∎

PARTIE I

3. Inégalités valuatives. On suppose toujours l'anneau R noethérien, factoriel et maintenant, de plus, taillé de taille t.

Un *cycle* Z de A sera la donnée d'une famille $(l_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A}$ d'entiers $\geqslant 0$ tous nuls sauf un nombre fini. Les premiers $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A$ tels que $l_{\mathfrak{p}}\neq 0$ seront appelés les *premiers associés* à Z et $l_{\mathfrak{p}}$ la *multiplicité* de $\mathfrak{p}$ dans Z. On dira encore que Z est *homogène* si tous les premiers associés à Z sont homogènes. Si I est un idéal homogène de A on en déduit un cycle homogène en posant $l_{\mathfrak{p}}$ égal à l'exposant de la composante $\mathfrak{p}$-primaire de I, nous noterons encore I ce cycle.

Si $\boldsymbol{d}=(d'_1,\ldots,d'_{n+1})\in \boldsymbol{N}^{n+1}$, et $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_{n+1})\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$, on associe à un cycle Z de A la *forme de Chow*

$$f_{Z,\boldsymbol{d}}=\prod_{\mathfrak{p}}(f_{\mathfrak{p},\boldsymbol{d}_{\mathfrak{p}}})^{l_{\mathfrak{p}}},$$

où le produit porte sur les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ associés à Z et où $\boldsymbol{d}_{\mathfrak{p}}=(d'_1,\ldots,d'_{r_{\mathfrak{p}}})$ si $n+1-r_{\mathfrak{p}}$ est le rang de $\mathfrak{p}$. Et on pose encore

$$D_{i,\boldsymbol{d}}(Z)=d^0_{\mathscr{U}_i}f_{Z,\boldsymbol{d}}\qquad (i=1,\ldots,n+1),$$

$$T_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}}(Z)=t(f_{Z,\boldsymbol{d}})+\sum_{i=1}^{n+1}(h_i+d'_i)D_{i,\boldsymbol{d}}(Z),$$

$$\tilde{v}_{\boldsymbol{d}}(Z)=v\big(\mathfrak{d}(f_{Z,\boldsymbol{d}})\big)-\Big(\sum_{i=1}^{n+1}d'_iD_{i,\boldsymbol{d}}(Z)\Big)v(\mathfrak{M}),$$

pour toute valuation v sur A.

Nota Bene. En toute rigueur une forme de Chow d'un cycle Z de A n'est définie qu'à un facteur de R^* près, mais on a imposé $t(R^*)=v(R^*)=0$ et les quantités ci-dessus sont, elles, bien définies.

Soient maintenant $p_1,\ldots,p_m$ des polynômes homogènes de A de degrés $d_1,\ldots,d_m$ (on supposera $1\leqslant d_1\leqslant d_m\leqslant d_{m-1}\leqslant\ldots\leqslant d_2$) et de tailles $\leqslant H$. Si J est l'idéal qu'ils engendrent, on a $v(J)=\min\{v(p_i);\ i=1,\ldots,m\}$ et on pose $\tilde{v}(J)=\min\{v(p_i)-d_iv(\mathfrak{M});\ i=1,\ldots,m\}$.

Nous supposons que tous les premiers $\mathfrak{p}$ associés à J vérifient

$$X_0\in\mathfrak{p}\quad\text{ou}\quad \mathfrak{p}\cap R\neq(0),$$

et nous appelons *rang restreint* d'un cycle Z le minimum des rangs des premiers associés à Z ne contenant pas X_0 et intersectant R en (0). On note

$c=c_1c_2^{n+1}\max\{c_1;c_2\}(1+4c'\log(n+1))$,

$\mu=\min\{m,n\},\ \ \nu=\min\{m,\ n+1\}$,

$\boldsymbol{d}=(d'_1,\ldots,d'_{n+1})=(1,\ldots,1,d_\nu,\ldots,d_1)\in\boldsymbol{N}^{n+1}$,

$\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_{n+1})=(0,\ldots,0,H,\ldots,H)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ (H répété ν fois).

A $r\in\{n+1-\nu,\ldots,n+1\}$ nous associons le r-uplet $\boldsymbol{d}_r$ (resp. $\boldsymbol{h}_r$) formé à partir des r premières composantes de $\boldsymbol{d}$ (resp. $\boldsymbol{h}$). On peut alors énoncer

Lemme 1. *Soit $\mathfrak{P}$ un premier homogène de rang $n+1-r\in\{n+2-\nu,\ldots,n+1\}$, contenant $p_1,\ldots,p_{n+1-r}$, et tel que $X_0\notin\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}\cap R=(0)$. Alors il existe un cycle homogène $Z_{\mathfrak{P}}$ de A, de rang restreint $n+2-r$, dont tous les premiers associés contiennent $p_1,\ldots,p_{n+2-r}$, et satisfaisant*

$$D_{i,\boldsymbol{d}}(Z_{\mathfrak{P}})=D_{i,\boldsymbol{d}_r}(\mathfrak{P})\qquad(i=1,\ldots,r-1),$$

$$T_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}}(Z_{\mathfrak{P}})\leqslant cT_{\boldsymbol{h}_r,\boldsymbol{d}_r}(\mathfrak{P}),$$

$$\tilde{v}_{\boldsymbol{d}}(Z_{\mathfrak{P}})\geqslant\min\Big\{v\big(\mathfrak{d}(f_{\mathfrak{P},\boldsymbol{d}_r})\big)-\sum_{i=1}^{r}d'_iD_{i,\boldsymbol{d}_r}(\mathfrak{P})v(\mathfrak{M});\ \tilde{v}(J)\Big\}.$$

Démonstration. Comme $X_0\notin\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}\cap R=(0)$, l'idéal $\mathfrak{P}$ ne contient pas J et il existe un indice i tel que p_i n'appartient pas à $\mathfrak{P}$. Si $p_{n+2-r}\notin\mathfrak{P}$, on pose $q=p_{n+2-r}$ et sinon on pose $q=X_0^{d_{n+2-r}-d_i}p_i$. On a $d^0q=d_{n+2-r}$, $t(q)\leqslant H$, et $v(q)-d_{n+2-r}v(\mathfrak{M})\geqslant\tilde{v}(J)$ pour toute valuation v sur A.

Soit ϱ l'homomorphisme de $R[\boldsymbol{d}_r]$ dans $R[\boldsymbol{d}_{r-1}]$ défini par $\varrho(U_r)=q$. Soit $\boldsymbol{k}$ le corps des fractions de l'anneau factoriel R, d'après la proposition 2.4 de [P₁], il existe des entiers $l_1,\ldots,l_s\in\boldsymbol{N}^*$ et $\lambda\in\boldsymbol{k}\backslash\{0\}$ tels que

$$\varrho(f_{\mathfrak{P},\boldsymbol{d}_r})=\lambda\tilde{f}_1^{l_1}\ldots\tilde{f}_s^{l_s},$$

où $\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_s$ sont des formes U-éliminantes d'indice $\boldsymbol{d}_{r-1}$ des premiers minimaux $\tilde{\mathfrak{p}}_1,\ldots,\tilde{\mathfrak{p}}_s$ associés à l'idéal engendré par I et q dans $\boldsymbol{k}[X_0,\ldots,X_n]$. On pose $\mathfrak{p}_j=\tilde{\mathfrak{p}}_j\cap A$ $(j=1,\ldots,s)$; c'est un idéal premier de rang $n+2-r$ de A satisfaisant $\mathfrak{p}_j\cap R=(0)$ et on désigne par $f_1,\ldots,f_s$ des formes U-éliminantes d'indice $\boldsymbol{d}_{r-1}$ de $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_s$. Ainsi, on a $\tilde{f}_j=\lambda_jf_j$ $(j=1,\ldots,s)$ pour des $\lambda_j\in\boldsymbol{k}\backslash\{0\}$ convenables. On pose encore $x=\lambda\lambda_1^{l_1}\ldots\lambda_s^{l_s}$; comme $f_1,\ldots,f_s$ sont de contenu un, x est le contenu de $\varrho(f_{\mathfrak{P},\boldsymbol{d}_r})$, c'est donc un élément non nul de R. Regardant la décomposition de x en éléments extrémaux de R, on associe à cet élément x un cycle de R dont il est précisément une forme de Chow (d'indice $\boldsymbol{d}$), cf. [P₁], proposition 1.5 (i). Comme les premiers de R s'étendent naturellement en des premiers de A, on peut voir le cycle de R asscocié à x comme un cycle Z_x de A. Par ailleurs, on introduit le cycle $\tilde{Z}_{\mathfrak{P}}$ de A défini par $l_{\mathfrak{p}}=0$ si $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_s$ et $l_{\mathfrak{p}_j}=l_j$ $(j=1,\ldots,s)$, enfin on pose $Z_{\mathfrak{P}}=\tilde{Z}_{\mathfrak{P}}+Z_x$. Le rang restreint de $Z_{\mathfrak{P}}$ est $n+2-r$, et on a

$$\varrho(f_{\mathfrak{P},\boldsymbol{d}_r})=f_{Z_{\mathfrak{P}},\boldsymbol{d}_{r-1}},$$

d'où

$$D_{i,\boldsymbol{d}}(Z_{\mathfrak{P}})=D_{i,\boldsymbol{d}_r}(\mathfrak{P})\qquad(i=1,\ldots,r-1),$$

et, par définition,

$$T_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}}(Z_{\mathfrak{P}})=t\big(\varrho(f_{\mathfrak{P},\boldsymbol{d}_r})\big)+\sum_{i=1}^{r-1}(h_i+d'_i)D_{i,\boldsymbol{d}_r}(\mathfrak{P}),$$

$$\tilde{v}_{\boldsymbol{d}}(Z_{\mathfrak{P}})=v\big(\mathfrak{d}\circ\varrho(f_{\mathfrak{P},\boldsymbol{d}_r})\big)-v(\mathfrak{M})\sum_{i=1}^{n+1}d'_id^0_{\mathscr{U}_i}\varrho(f_{\mathfrak{P},\boldsymbol{d}_r}).$$

On a $t(\varrho) \leqslant c_2 H + c'' d'_r \log(n+1)$, et, d'après le lemme de spécialisation,

$$t(\varrho(f_{\mathfrak{P},d_r}))$$
$$\leqslant c_1 c_2^{r-1} \max\{c_1; c_2\}\big(t(f_{\mathfrak{P},d_r}) + c_2 H D_{r,d_r}(\mathfrak{P}) + 4c' \log(n+1) \sum_{i=1}^{r} d'_i D_{i,d_r}(\mathfrak{P})\big),$$

d'où

$$T_{h,d}(Z_{\mathfrak{P}}) \leqslant c\big(t(f_{\mathfrak{P},d_r}) + \sum_{i=1}^{r} (h_i + d'_i) D_{i,d_r}(\mathfrak{P})\big) \leqslant c T_{h_r,d_r}(\mathfrak{P}).$$

D'après la proposition 2 on a, pour toute valuation v sur A,

$$\tilde{v}_d(Z_{\mathfrak{P}}) \geqslant \min\{v(\mathfrak{d}(f_{\mathfrak{P},d_r})) - \sum_{i=1}^{r} d'_i D_{i,d_r}(\mathfrak{P}) v(\mathfrak{M});\ v(q) - d'_r v(\mathfrak{M})\}.$$

Or $v(q) - d'_r v(\mathfrak{M}) \geqslant \tilde{v}(J)$ car $d'_r = d_{n+2-r} = d^0 q$; ceci achève de démontrer le lemme, car tous les premiers associés à $Z_{\mathfrak{P}}$ contiennent $\mathfrak{P}$, donc $p_1, \ldots, p_{n+1-r}$ et aussi p_{n+2-r} par le choix de q. ∎

PROPOSITION 3. *Avec les notations du début du paragraphe, il existe un entier $n+1-v \leqslant r \leqslant n$ et un cycle homogène Z de A, de rang restreint $\geqslant n+1$, satisfaisant la propriété $(\mathscr{P}_r)$ suivante:*

$(\mathscr{P}_r)$ $\quad D_{1,d}(Z) \leqslant d_1 \ldots d_\mu$,

$$T_{h,d}(Z) \leqslant c^{n+2-r} H d_1 \ldots d_v\big((1/H) + \sum_{i=1}^{v} (1/d_i)\big),$$

$\tilde{v}_d(Z) \geqslant \tilde{v}(J)$ *pour toute valuation v de A.*

Démonstration. On procède pas à pas. Le cycle déduit de l'idéal premier (0) est de rang restreint 0 et satisfait la propriété $(\mathscr{P}_{n+1})$. Soit Z_r un cycle homogène de rang restreint $\geqslant n+1-r$, dont tous les premiers associés contiennent $p_1, \ldots, p_{n+1-r}$, et satisfaisant la propriété $(\mathscr{P}_r)$. Pour tout premier associé à Z_r de rang $> n+1-r$ ou vérifiant $X_0 \in \mathfrak{P}$ ou $\mathfrak{P} \cap R \neq (0)$ on note $Z_{\mathfrak{P}}$ le cycle déduit de $\mathfrak{P}$. Considérons les premiers $\mathfrak{P}$ de rang $n+1-r$ associés à Z_r tels que $X_0 \notin \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P} \cap R = (0)$; substituant à ces $\mathfrak{P}$ dans le cycle Z_r les cycles $Z_{\mathfrak{P}}$ de rang restreint $n+2-r$ fournis par le lemme 1, on obtient un cycle homogène Z_{r-1} de rang restreint $n+2-r$ et vérifiant, avec $i \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{r\}$, pour toute valuation v sur A,

$$D_{i,d}(Z_{r-1}) = \sum_{\mathfrak{P}} l_{\mathfrak{P}} D_{i,d}(Z_{\mathfrak{P}}) = \sum_{\mathfrak{P}} l_{\mathfrak{P}} D_{i,d_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{P}) = D_{i,d}(Z_r),$$

$$D_{r,d}(Z_{r-1}) = \sum_{\mathfrak{P}} l_{\mathfrak{P}} D_{r,d}(Z_{\mathfrak{P}}) = \sum_{\mathfrak{P}}' l_{\mathfrak{P}} D_{r,d_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{P}) = D_{r,d}(Z_r) - \sum_{\mathfrak{P}}'' l_{\mathfrak{P}} D_{r,d_r}(\mathfrak{P}),$$

$$T_{h,d}(Z_{r-1}) = \sum_{\mathfrak{P}} l_{\mathfrak{P}} T_{h,d}(Z_{\mathfrak{P}}) \leqslant \sum_{\mathfrak{P}} c \cdot l_{\mathfrak{P}} T_{h_{\mathfrak{P}},d_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{P}) \leqslant c T_{h,d}(Z_r),$$

$$\tilde{v}_d(Z_{r-1}) = \sum_{\mathfrak{P}} l_{\mathfrak{P}} \tilde{v}_d(Z_{\mathfrak{P}}),$$

où les sommes $\sum$ portent sur l'ensemble des idéaux premiers associés à Z_r, la somme $\sum'$ porte sur le sous-ensemble des idéaux premiers associés à Z_r de rang $> n+1-r$ ou vérifiant $X_0 \in \mathfrak{P}$ ou $\mathfrak{P} \cap R = (0)$, et $\sum''$ est la somme complémentaire de $\sum'$ dans $\sum$. Egalement on a noté $d_{\mathfrak{P}}$ à la place de $d_{n+1-\operatorname{rang}\mathfrak{P}}$.

En particulier, on a

$$D_{1,d}(Z_{r-1}) \leqslant d_1 \ldots d_\mu,$$

$$T_{h,d}(Z_{r-1}) \leqslant c^{n+3-r} H d_1 \ldots d_v\big((1/H) + \sum_{i=1}^{v} (1/d_i)\big).$$

Comme $\tilde{v}_d(Z_{\mathfrak{P}}) \geqslant 0$ pour tout $\mathfrak{P}$, si l'un des $\mathfrak{P}$ de rang $n+1-r$ satisfait

$$v(\mathfrak{d}(f_{\mathfrak{P},d_r})) - \sum_{i=1}^{r} d'_i D_{i,d_r}(\mathfrak{P}) v(\mathfrak{M}) \geqslant \tilde{v}(J),$$

on a certainement, d'après le lemme 1,

$$\tilde{v}_d(Z_{r-1}) \geqslant \tilde{v}(J).$$

Sinon on a, toujours avec le lemme 1,

$$\tilde{v}_d(Z_{r-1}) \geqslant \sum_{\mathfrak{P}} l_{\mathfrak{P}} v(\mathfrak{d}(f_{\mathfrak{P},d_{\mathfrak{P}}})) - \big(\sum_{i=1}^{n+1} d'_i D_{i,d}(Z_{r-1}) + d'_r \sum_{\mathfrak{P}}'' l_{\mathfrak{P}} D_{r,d_r}(\mathfrak{P})\big) v(\mathfrak{M})$$
$$\geqslant \tilde{v}_d(Z_r) \geqslant \tilde{v}(J).$$

Le cycle homogène Z_{r-1}, de rang restreint $\geqslant n+2-r$, satisfait $(\mathscr{P}_{r-1})$, et tous ses premiers associés contiennent $p_1, \ldots, p_{n+2-r}$. Réitérant la construction tant que $r > n+1-v$, on accroît le rang restreint des cycles Z_r aboutissant nécessairement, car J est de rang restreint $\geqslant n+1$, à un cycle $Z = Z_r$ de rang restreint $\geqslant n+1$ qui satisfait une propriété $(\mathscr{P}_r)$ pour un $r \geqslant n+1-v$. Ceci achève d'établir la proposition. ∎

Nous pouvons maintenant établir l'inégalité valuative de type Liouville–Łojasiewicz recherchée.

PROPOSITION 4. *Avec les notations du début du paragraphe, il existe un élément $x \in R$, de taille $\leqslant c^{n+2} H d_1 \ldots d_v\big((1/H) + \sum_{i=1}^{v} (1/d_i)\big)$, tel que $x X_0^{d_1 \ldots d_\mu}$ soit entier sur J.*

Démonstration. Reprenons le cycle Z donné par la proposition 3; il vérifie

$(\mathscr{P}_0)$ $\quad D_{1,d}(Z) \leqslant d_1 \ldots d_\mu$,

$$T_{h,d}(Z) \leqslant c^{n+2} H d_1 \ldots d_v\big((1/H) + \sum_{i=1}^{v} (1/d_i)\big),$$

$$\tilde{v}_d(Z) \geqslant \tilde{v}(J).$$

Un premier $\mathfrak{p}$ associé à Z contient X_0 ou intersecte R non trivialement. Dans cette dernière éventualité, une forme U-éliminante de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est un pgcd des éléments de $\mathfrak{p} \cap R$, et on a $v(\mathfrak{d}(f_{\mathfrak{p},\boldsymbol{d}_\mathfrak{p}})) = v(f_{\mathfrak{p},\boldsymbol{d}_\mathfrak{p}})$. Si $\mathfrak{p} \cap R = (0)$, alors $X_0 \in \mathfrak{p}$ et la proposition 1 entraîne

$$v(\mathfrak{d}(f_{\mathfrak{p},\boldsymbol{d}_\mathfrak{p}})) - \Big(\sum_{i=1}^{r_\mathfrak{p}} d'_i d^0_{\mathfrak{U}_i} f_{\mathfrak{p},\boldsymbol{d}_\mathfrak{p}}\Big) v(\mathfrak{M}) \leqslant (v(X_0) - v(\mathfrak{M})) d^0_{\mathfrak{U}_1} f_{\mathfrak{p},\boldsymbol{d}_\mathfrak{p}} + v(f_{\mathfrak{p},\boldsymbol{d}_\mathfrak{p}}).$$

Après sommation sur $\mathfrak{p}$ et combinant avec la propriété $(\mathscr{P}_0)$, on en déduit

$$\begin{aligned} \tilde{v}(J) \leqslant \tilde{v}_{\boldsymbol{d}}(Z) &\leqslant (v(X_0) - v(\mathfrak{M})) D_{1,\boldsymbol{d}}(Z) + v(f_{Z,\boldsymbol{d}}) \\ &\leqslant d_1 \dots d_\mu (v(X_0) - v(\mathfrak{M})) + v(f_{Z,\boldsymbol{d}}), \end{aligned}$$

pour toute valuation discrète de A. En posant x le contenu dans R de $f_{Z,\boldsymbol{d}}$, on a donc $v(xX_0^{d_1 \dots d_\mu}) \geqslant \tilde{v}(J) + d_1 \dots d_\mu v(\mathfrak{M})$, d'où $v(xX_0^{d_1 \dots d_\mu}) \geqslant v(J)$. Le critère valuatif d'intégralité entraîne que $xX_0^{d_1 \dots d_\mu}$ est entier sur J. Enfin la taille de x est majorée par

$$t(f_{Z,\boldsymbol{d}}) \leqslant T_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}}(Z) \leqslant c^{n+2} H d_1 \dots d_\nu \Big((1/H) + \sum_{i=1}^{\nu} (1/d_i)\Big),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 4. ■

4. Théorème des zéros sans dénominateur: première méthode. Soit R un anneau commutatif, unitaire, noethérien, factoriel, taillé, régulier, de dimension de Krull $\varkappa$. Soient $p_1, \dots, p_m$ des polynômes homogènes de degrés $d_1, \dots, d_m$ respectivement et de tailles $\leqslant H$ de $R[X_0, \dots, X_n]$, on suppose $d_1 \leqslant d_m \leqslant d_{m-1} \leqslant \dots \leqslant d_2$. Si l'idéal J engendré par $p_1, \dots, p_m$ est de rang restreint $\geqslant n+1$, la proposition 4 montre l'existence d'un élément $x \in R$ de taille

$$\leqslant c^{n+2} H d_1 \dots d_\nu \left(\frac{1}{H} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{d_i}\right),$$

tel que $q = xX_0^{d_1 \dots d_\mu}$ soit entier sur J.

L'anneau R étant régulier, on a, pour tout idéal maximal $\mathfrak{a}$ de R,

$$\dim_{R/\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) = \dim(R_\mathfrak{a}) = \varkappa,$$

où $R_\mathfrak{a}$ désigne l'anneau local obtenu avec l'ensemble multiplicatif $R \backslash \mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{L}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{L}$ est de la forme $(\mathfrak{a}, X_0, \dots, X_n)$ pour un certain idéal maximal $\mathfrak{a}$ de R. L'anneau local $A_\mathfrak{L}$, obtenu à partir de l'ensemble multiplicatif $A \backslash \mathfrak{L}$, est régulier (cf. [ZS], § 11, p. 301 et suivantes). En effet, $\mathfrak{L}$ est l'idéal maximal de $A_\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}^2$ est un $A_\mathfrak{L}/\mathfrak{L} \simeq R/\mathfrak{a}$-espace vectoriel de dimension $n+1+\dim_{R/\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) = n+1+\varkappa$; or $A_\mathfrak{L}$ est précisément de dimension $n+1+\dim(R_\mathfrak{a}) = n+1+\varkappa$.

Il résulte donc du paragraphe 4 de [LT] que $A_\mathfrak{L}$ est *pseudo-rationnel* de dimension $n+1+\varkappa$; appliquant le théorème 2.1 de [LT] à l'idéal $JA_\mathfrak{L}$ on en déduit (avec $\lambda = 1$)

$$(*) \qquad q^{n+1+\varkappa} \in (\overline{JA_\mathfrak{L}})^{n+1+\varkappa} \subset JA_\mathfrak{L},$$

car l'image dans $A_\mathfrak{L}$ d'un élément entier sur J est entière sur $JA_\mathfrak{L}$ (ici $\overline{JA_\mathfrak{L}}$ désigne la clôture intégrale de $JA_\mathfrak{L}$ dans $A_\mathfrak{L}$).

On peut réécrire ce résultat sous la forme suivante:

LEMME 2. *A tout idéal maximal $\mathfrak{a}$ de R, on peut associer un élément $\psi(\mathfrak{a}) \in R \backslash \mathfrak{a}$ tel que*

$$\psi(\mathfrak{a}) q^{n+1+\varkappa} \in J.$$

Démonstration. Pour tout $\mathfrak{a}$, on déduit de $(*)$ ci-dessus l'existence d'un $y \in A \backslash \mathfrak{L}$ tel que $yq^{n+1+\varkappa} \in J$; mais J est homogène et il existe $\psi(\mathfrak{a}) \in R$ tel que $y \equiv \psi(\mathfrak{a}) \pmod{\mathfrak{M}}$, d'où le lemme, car $y \notin \mathfrak{L}$ entraîne $\psi(\mathfrak{a}) \notin \mathfrak{a}$. ■

On peut alors montrer

THÉORÈME 4. *Soit R un anneau factoriel, taillé, régulier, de corps des fractions $\mathbf{k}$, et de dimension de Krull $\varkappa$. Soient $P_1, \dots, P_m \in R[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes de degrés $\leqslant d_1, \dots, d_m$ respectivement et de tailles $\leqslant H$.*

Si les polynômes $P_1, \dots, P_m$ sont sans zéro commun dans $\bar{\mathbf{k}}^n$, il existe un élément $r \in R \backslash \{0\}$ de taille $\leqslant c_0 H d_1 \dots d_\nu ((1/H) + \sum_{i=1}^{\nu} (1/d_i))$ où

$$c_0 = (n+1+\varkappa)[c_1 c_2^{n+1} \max\{c_1; c_2\}(1 + 4c' \log(n+1))]^{n+2},$$

et des polynômes $A_1, \dots, A_m$ de $R[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$d^0(A_i P_i) \leqslant (n+1+\varkappa) d_1 \dots d_\mu,$$

$$r = A_1 P_1 + \dots + A_m P_m,$$

où $\mu = \min\{m, n\}$, $\nu = \min\{m, n+1\}$ et c_1, c_2, c' sont les constantes de la taille sur R.

Démonstration. Posons $r = x^{n+1+\varkappa}$ et $p_1 = {}^hP_1, \dots, p_m = {}^hP_m$ les homogénéisés, dans $R[X_0, \dots, X_n]$, des polynômes $P_1, \dots, P_m$. L'hypothèse sur les P_i se traduit simplement par le fait que l'idéal J engendré par les p_i est de rang restreint $\geqslant n+1$. Comme l'idéal engendré par tous les $\psi(\mathfrak{a})$, fournis par le lemme 2, lorsque $\mathfrak{a}$ décrit tous les idéaux maximaux de R est égal à R, il suit que

$$q^{n+1+\varkappa} = rX_0^{(n+1+\varkappa)d_1 \dots d_\mu} \in (p_1, \dots, p_m).$$

Et donc il existe des polynômes $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m \in R[X_0, \dots, X_n]$ homogènes tels que

$$rX_0^{(n+1+\varkappa)d_1 \dots d_\mu} = \bar{A}_1 p_1 + \dots + \bar{A}_m p_m.$$

Posant $X_0 = 1$ dans cette équation on obtient le théorème. ■

PARTIE II

5. Rappels sur les complexes de Koszul (cf. [N], chapitre 8). Soit R un anneau commutatif et unitaire; on pose $A = R[X_0, \ldots, X_n]$. Soient M un A-module noethérien et $a_1, \ldots, a_s$ $(s \geqslant 0)$ des éléments de A; on note $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ et on considère, pour $0 \leqslant \sigma \leqslant s$, le A-module $M^{\binom{s}{\sigma}}$ dont on écrit un élément q générique sous la forme

$$q = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\sigma \leqslant s} q_{i_1, \ldots, i_\sigma},$$

avec $q_{i_1, \ldots, i_\sigma}$ dans le facteur choisi en correspondance dans $M^{\binom{s}{\sigma}}$. Le complexe de Koszul attaché à $(\boldsymbol{a}|M)$ s'écrit alors

$$0 \xrightarrow{\partial_{s+1}} M \xrightarrow{\partial_s} M^s \to \ldots \to M^{\binom{s}{\sigma}} \xrightarrow{\partial_\sigma} M^{\binom{s}{\sigma-1}} \to \ldots \to M^s \xrightarrow{\partial_1} M \xrightarrow{\partial_0} 0$$

où l'application ∂_σ est décrite, avec les notations ci-dessus, par

$$\partial_\sigma(q_{i_1, \ldots, i_\sigma}) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{\sigma-1} \leqslant s} q'_{j_1, \ldots, j_{\sigma-1}},$$

où

$$q'_{j_1, \ldots, j_{\sigma-1}} = \begin{cases} (-1)^{\alpha-1} a_{i_\alpha} q_{i_1, \ldots, i_\sigma} & \text{si } \{j_1, \ldots, j_{\sigma-1}, i_\alpha\} = \{i_1, \ldots, i_\sigma\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On associe naturellement à ce complexe de Koszul des modules d'homologie, notés $H_\sigma(\boldsymbol{a}|M)$ et définis par

$$H_\sigma(\boldsymbol{a}|M) = \operatorname{Ker} \partial_\sigma / \operatorname{Im} \partial_{\sigma+1} \quad (\sigma = 0, \ldots, s).$$

On calcule facilement

$$H_0(\boldsymbol{a}|M) = M/(a_1 M + \ldots + a_s M),$$

$$H_s(\boldsymbol{a}|M) = 0 :_M (a_1, \ldots, a_s) = \{q \in M;\ a_1 q = \ldots = a_s q = 0\},$$

et si un élément de A annule le module M, il annule tous les modules $H_\sigma(\boldsymbol{a}|M)$.

Un résultat essentiel est le suivant (cf. [N], p. 362),

Théorème de la suite longue d'homologie. *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Alors on a la suite exacte longue de A-modules*

$$0 \to H_s(\boldsymbol{a}|M') \to H_s(\boldsymbol{a}|M) \to H_s(\boldsymbol{a}|M'') \to H_{s-1}(\boldsymbol{a}|M') \to \ldots$$

$$\ldots \to H_1(\boldsymbol{a}|M'') \to H_0(\boldsymbol{a}|M') \to H_0(\boldsymbol{a}|M) \to H_0(\boldsymbol{a}|M'') \to 0.$$

Le résultat suivant éclaire un aspect important des modules d'homologie introduits (cf. [N], §8.5).

Interprétation homologique de la profondeur. *Le plus grand entier p tel que*

$$H_\sigma(\boldsymbol{a}|M) = 0 \quad \textit{pour tout } \sigma > s - p$$

est la profondeur de M dans $\mathfrak{a} := (a_1, \ldots, a_s)$. En particulier, on a $H_\sigma(\boldsymbol{a}|M) = 0$ pour tout $\sigma \neq 0$ (ce qui est équivalent à $H_1(\boldsymbol{a}|M) = 0$) si et seulement si la suite $a_1, \ldots, a_s$ est régulière sur M (i.e. pour $\sigma = 1, \ldots, s$, a_σ est non diviseur de zéro sur $M/(a_1 M + \ldots + a_{\sigma-1} M)$).

6. Dévissage et estimations. Soit R un anneau commutatif, unitaire, noethérien, intègre et semi-régulier (ou Cohen–Macaulay, cf. [N], §5.3), soit $\boldsymbol{k}$ son corps des fractions. On note encore $A = R[X_0, \ldots, X_n]$, et prenons des polynômes $q_1, \ldots, q_\nu$ homogènes dans A. Pour $p \in A$ on notera $\tilde{p}$ l'image de p dans $\boldsymbol{k}[X_1, \ldots, X_n]$. On supposera, dans ce paragraphe, $\nu \leqslant n+1$ et la suite $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_\nu$ régulière dans $\boldsymbol{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Prolongeant la terminologie du paragraphe 3 nous appellerons *composante restreinte* d'un idéal J de A toute composante $\mathfrak{p}$-primaire $\mathfrak{q}$, associée à J telle que

$$X_0 \notin \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} \cap R = (0).$$

(a) *Dévissage.* La suite $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_\nu$ étant supposée régulière dans $\boldsymbol{k}[X_1, \ldots, X_n]$, on vérifie que, pour $i = 1, \ldots, \nu$, l'idéal $(q_1, \ldots, q_i)$ n'a pas de composante restreinte immergée. Pour $i = 1, \ldots, \nu$ écrivons

$$(q_1, \ldots, q_i) = I_i \cap I'_i,$$

où I_i est l'intersection de toutes les composantes primaires restreintes de $(q_1, \ldots, q_i)$ et I'_i est l'intersection des autres composantes primaires. On pose

$$C_i = \operatorname{Ann}_{R[X_0]}(I_i/(q_1, \ldots, q_i)),$$

l'annulateur dans $R[X_0]$ du module $I_i/(q_1, \ldots, q_i)$.

Ecrivons encore

$$(I_i, q_{i+1}) = J_{i+1} \cap K_{i+1} \cap L_{i+1},$$

où J_{i+1} est l'intersection de toutes les composantes primaires restreintes de (I_i, q_{i+1}), K_{i+1} l'intersection des autres composantes primaires isolées et L_{i+1} l'intersection des composantes primaires immergées. Posons

$$D_{i+1} = \operatorname{Ann}_{R[X_0]}(A/K_{i+1}) = K_{i+1} \cap R[X_0],$$

$$E_{i+1} = \operatorname{Ann}_{R[X_0]}(J_{i+1} \cap K_{i+1}/(I_i, q_{i+1})).$$

Ainsi $D_{i+1} E_{i+1}(J_{i+1}/(I_i, q_{i+1})) = 0$ et comme

$$C_i((I_i, q_{i+1})/(q_1, \ldots, q_{i+1})) = 0,$$

on a

$$C_i D_{i+1} E_{i+1}(J_{i+1}/(q_1, \ldots, q_{i+1})) = 0.$$

Enfin on a clairement $I_{i+1} = J_{i+1}$, d'où

(1) $$C_i D_{i+1} E_{i+1} \subseteq C_{i+1}.$$

(b) *Estimation des* E_{i+1}. Nous noterons $\mathrm{rg}(I)$ le rang de l'idéal I de A. On notera également $\mathscr{A}$ l'ensemble des familles $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ d'éléments de A tels que tout premier associé à l'idéal $\mathfrak{a}$ engendré par $a_1, \ldots, a_s$ contienne X_0 ou intersecte R non trivialement. En suivant Kollár [K], définition 3.3, posons

DÉFINITION. Soit I un idéal de A; on note

$$\mathrm{Nil}(I) = \big(q \in R[X_0];\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathscr{A},\ \forall \sigma < \mathrm{rg}(\mathfrak{a}) - \mathrm{rg}(I),\ qH_{s-\sigma}(\boldsymbol{a}|A/I) = 0\big).$$

Prenons pour $\boldsymbol{a}$ une base de L_{i+1}; on a alors $\boldsymbol{a} \in \mathscr{A}$ et

$$\mathrm{rg}(L_{i+1}) > \mathrm{rg}(I_{i+1}) = \mathrm{rg}(I_i) + 1,$$

donc $1 < \mathrm{rg}(L_{i+1}) - \mathrm{rg}(I_i)$ et ainsi $\mathrm{Nil}(I_i)H_{s-1}(\boldsymbol{a}|A/I_i) = 0$.

Comme L_{i+1} annule le A-module $M = (I_{i+1} \cap K_{i+1})/(I_i, q_{i+1})$ on a aussi

$$H_s(\boldsymbol{a}|M) = 0 :_M L_{i+1} = M = (I_{i+1} \cap K_{i+1})/(I_i, q_{i+1}).$$

Des suites exactes évidentes

(SE1) $$0 \to M \to I_{i+1}/(I_i, q_{i+1}) \to I_{i+1}/I_{i+1} \cap K_{i+1} \to 0,$$

(SE2) $$0 \to I_{i+1}/(I_i, q_{i+1}) \to A/(I_i, q_{i+1}) \to A/I_{i+1} \to 0,$$

on déduit successivement (grâce à la suite longue d'homologie)

$$H_s(\boldsymbol{a}|M) \hookrightarrow H_s\big(\boldsymbol{a}|I_{i+1}/(I_i, q_{i+1})\big) \hookrightarrow H_s\big(\boldsymbol{a}|A/(I_i, q_{i+1})\big).$$

De la suite exacte (encore évidente, car q_{i+1} est non diviseur de zéro sur A/I_i)

(SE3) $$0 \to A/I_i \xrightarrow{\times q_{i+1}} A/I_i \to A/(I_i, q_{i+1}) \to 0,$$

on déduit $H_s\big(\boldsymbol{a}|A/(I_i, q_{i+1})\big) \hookrightarrow H_{s-1}(\boldsymbol{a}|A/I_i)$, car $H_s(\boldsymbol{a}|A/I_i) = 0$ (tous les premiers associés à L_{i+1} contiennent X_0 ou un élément de $R\backslash\{0\}$ non diviseur de zéro sur A/I_i, donc $0 :_{A/I_i} L_{i+1} = (0)$).

Finalement, on a $H_s(\boldsymbol{a}|M) \hookrightarrow H_{s-1}(\boldsymbol{a}|A/I_i)$ et donc $\mathrm{Nil}(I_i)H_s(\boldsymbol{a}|M) = 0$, c'est-à-dire

(2) $$\mathrm{Nil}(I_i) \subseteq E_{i+1}.$$

PROPOSITION 5. $D_{i+1}\,\mathrm{Nil}(I_i)^3 \subseteq \mathrm{Nil}(I_{i+1})$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{a} \in \mathscr{A}$ et

$$\sigma < \mathrm{rg}(\mathfrak{a}) - \mathrm{rg}(I_{i+1}) < \mathrm{rg}(\mathfrak{a}) - \mathrm{rg}(I_i).$$

D'après la suite exacte (SE3) on a la suite exacte d'homologie

$$H_{s-\sigma}(\boldsymbol{a}|A/I_i) \to H_{s-\sigma}\big(\boldsymbol{a}|A/(I_i, q_{i+1})\big) \to H_{s-\sigma-1}(\boldsymbol{a}|A/I_i),$$

et donc $\mathrm{Nil}(I_i)^2$ annule $H_{s-\sigma}\big(\boldsymbol{a}|A/(I_i, q_{i+1})\big)$.

De la suite exacte (SE2) on déduit la suite exacte

$$H_{s-\sigma}\big(\boldsymbol{a}|A/(I_i, q_{i+1})\big) \to H_{s-\sigma}(\boldsymbol{a}|A/I_{i+1}) \to H_{s-\sigma-1}\big(\boldsymbol{a}|I_{i+1}/(I_i, q_{i+1})\big).$$

Par ailleurs on a vu que $\mathrm{Nil}(I_i)$ annule $H_s(\boldsymbol{a}|M) = (I_{i+1} \cap K_{i+1})/(I_i, q_{i+1})$, donc $D_{i+1}\,\mathrm{Nil}(I_i)$ annule $I_{i+1}/(I_i, q_{i+1})$ et par conséquent tous les modules $H_\tau\big(\boldsymbol{a}|I_{i+1}/(I_i, q_{i+1})\big)$. On déduit alors de la suite exacte ci-dessus que $D_{i+1}\,\mathrm{Nil}(I_i)^3$ annule $H_{s-\sigma}(\boldsymbol{a}|A/I_{i+1})$, ainsi

$$D_{i+1}\,\mathrm{Nil}(I_i)^3 \subseteq \mathrm{Nil}(I_{i+1}),$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

Reprenant (1) et (2) on obtient

(3) $$C_i D_{i+1}\,\mathrm{Nil}(I_i) \subseteq C_{i+1}.$$

LEMME 3. *Pour tout* $i = 1, \ldots, \nu$ *on a*

$$\prod_{\alpha=1}^{i} D_\alpha^{(1+3^{i-\alpha})/2} \subseteq C_i.$$

Démonstration. On estime d'abord $\mathrm{Nil}(I_i)$ par récurrence sur i. On a $(q_1) = I_1 \cap K_1$ et l'idéal I_1 est principal, l'anneau R étant semi-régulier il en est de même de A/I_1 (cf. [N], §5.3, th. 14).

Il s'ensuit que la profondeur de A/I_1 dans un idéal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ propre est égale à

$$\mathrm{rg}(I_1, \mathfrak{a}) - \mathrm{rg}(I_1) \geqslant \mathrm{rg}(\mathfrak{a}) - \mathrm{rg}(I_1).$$

On a donc (avec l'interprétation homologique de la profondeur) $H_{s-\sigma}(\boldsymbol{a}|A/I_1) = 0$ pour tout $\sigma < \mathrm{rg}(\mathfrak{a}) - \mathrm{rg}(I_1)$, ce qui entraîne $\mathrm{Nil}(I_1) = R[X_0]$. Si

$$\prod_{\alpha=1}^{i} D_\alpha^{3^{i-\alpha}} \subseteq \mathrm{Nil}(I_i) \qquad (1 \leqslant i < \nu),$$

on calcule, à partir de la proposition 5,

$$\mathrm{Nil}(I_{i+1}) \supseteq D_{i+1}\,\mathrm{Nil}(I_i)^3 \supseteq D_{i+1} \prod_{\alpha=1}^{i} D_\alpha^{3^{i-\alpha+1}} = \prod_{\alpha=1}^{i+1} D_\alpha^{3^{i+1-\alpha}}.$$

Maintenant, de $I_1 \cap K_1 = (q_1)$ il suit $C_1 = D_1$, et, de (3), par récurrence sur i,

$$C_i \supseteq C_1 \prod_{\alpha=2}^{i} \big(D_\alpha\,\mathrm{Nil}(I_{\alpha-1})\big)$$

$$\supseteq \prod_{\alpha=1}^{i} \Big(D_\alpha \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} D_\beta^{3^{\alpha-\beta-1}}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{i} D_\alpha^{1+\sum_{\beta=\alpha+1}^{i} 3^{\beta-\alpha-1}} = \prod_{\alpha=1}^{i} D_\alpha^{(1+3^{i-\alpha})/2}. \quad ∎$$

7. Théorème des zéros sans dénominateur: seconde méthode. Soit R un anneau commutatif, unitaire, noethérien, factoriel, semi-régulier et taillé de taille t. Nous supposons, de plus, qu'il existe $\tau > 0$ tel que le nombre d'éléments de R de tailles $\leqslant T$ est au moins $[e^{T/\tau}]$ pour tout $T \geqslant 0$. Nous dirons alors que la taille t de R est *à croissance sous-logarithmique de type* $\leqslant \tau$. Cette condition est imposée par le lemme 4 préparatoire ci-dessous. Soient $p_1, \ldots, p_m$ des polynômes homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_m$ respectivement et de tailles $\leqslant H$ de $A = R[X_0, \ldots, X_n]$; on suppose

$$1 \leqslant d_1 \leqslant d_m \leqslant d_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant d_2,$$

et l'idéal J engendré par $p_1, \ldots, p_m$ de rang restreint $\geqslant n+1$.

LEMME 4. *Il existe une suite $q_1, \ldots, q_\nu$ ($\nu = \min\{m, n+1\}$) de polynômes homogènes dans J telle que $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_\nu$ soit une suite régulière dans $\boldsymbol{k}[X_1, \ldots, X_n]$ et, pour $i = 1, \ldots, \nu$, on ait*

$$d^0 q_i = d_i \quad \text{et} \quad t(q_i) \leqslant c_1 H + c_1 c' d_i \log(n+1) + 4n(c' + c_1\tau)\log(d_i).$$

Démonstration. L'idéal J étant de rang restreint $\geqslant n+1$, on applique directement le lemme 1.9 de [P_1], p.16, si R est de caractéristique zéro. Lorsque R est de caractéristique > 0, on remarque que ce même lemme 1.9 de [P_1] reste valable à condition d'y remplacer les entiers rationnels par des éléments de R de tailles $\leqslant \tau \log(d_1 \ldots d_{i-1} + 1)$. ∎

On reprend, pour la suite $q_1, \ldots, q_\nu$ ci-dessus, les notations du paragraphe précédent. On reprend également les notations du paragraphe 3

$$\mu = \min\{m, n\}, \qquad \nu = \min\{m, n+1\},$$

$$\boldsymbol{d} = (d'_1, \ldots, d'_{n+1}) = (1, \ldots, 1, d_\nu, \ldots, d_1) \in \boldsymbol{N}^{n+1},$$

$$\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_{n+1}) = (0, \ldots, 0, H, \ldots, H) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1} \quad (H \text{ répété } \nu \text{ fois}),$$

mais maintenant on note

$$c = c_1^2 c_2^{n+1} \max\{c_1; c_2\}(8n(c' + c_1\tau) + 1).$$

Cela étant posé, on peut énoncer

PROPOSITION 6. *Pour $i = 1, \ldots, \nu-1$ il existe un cycle homogène Z_{i+1} tel que $\mathfrak{d}(f_{Z_{i+1},\boldsymbol{d}}) \in K_{i+1}\mathfrak{S}A[\boldsymbol{d}]$ et satisfaisant*

$$D_{\alpha,\boldsymbol{d}_{n-i}}(I_{i+1}) + D_{\alpha,\boldsymbol{d}}(Z_{i+1}) \leqslant D_{\alpha,\boldsymbol{d}_{n+1-i}}(I_i), \qquad \text{pour } \alpha = 1, \ldots, n-i,$$

$$T_{\boldsymbol{h}_{n-i},\boldsymbol{d}_{n-i}}(I_{i+1}) + T_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}}(Z_{i+1}) \leqslant c T_{\boldsymbol{h}_{n+1-i},\boldsymbol{d}_{n+1-i}}(I_i),$$

où $\boldsymbol{d}_*$ (resp. $\boldsymbol{h}_*$) désigne le $*$-uplet formé à partir des $*$ premières composantes de $\boldsymbol{d}$ (resp. $\boldsymbol{h}$).

Démonstration. Soient $i \in \{1, \ldots, \nu-1\}$ et f une forme U-éliminante d'indice $\boldsymbol{d}_{n+1-i}$ de I_i. Soit ϱ l'homomorphisme de $R[\boldsymbol{d}_{n+1-i}]$ dans $R[\boldsymbol{d}_{n-i}]$

défini par $\varrho(U_{n+1-i}) = q_{i+1}$; alors $\varrho(f) \in \mathfrak{E}_{\boldsymbol{d}_{n-i}}((I_i, q_{i+1}))$ d'après la proposition 1.10 de [P_1]. Notons K'_{i+1} l'intersection des composantes primaires isolées de (I_i, q_{i+1}) contenant X_0 et intersectant R trivialement. Si x désigne le contenu de $\varrho(f)$, alors x n'appartient à aucun premier associé à $I_{i+1} \cap K'_{i+1}$, et donc, avec le lemme 1.2 de [P_1], on a $\varrho(f)/x \in \mathfrak{E}_{\boldsymbol{d}_{n-i}}(I_{i+1} \cap K'_{i+1})$. Soit Z_x le cycle associé à x; l'anneau R étant factoriel on a $f_{Z_x,\boldsymbol{d}} = x$. On pose $Z_{i+1} = K'_{i+1} + Z_x$. De cette façon $\varrho(f)$ est un multiple de la forme de Chow du cycle $I_{i+1} + Z_{i+1}$ et on en déduit, pour $\alpha = 1, \ldots, n-i$,

$$D_{\alpha,\boldsymbol{d}_{n-i}}(I_{i+1}) + D_{\alpha,\boldsymbol{d}}(Z_{i+1}) \leqslant d^0_{\mathfrak{U}_\alpha}\varrho(f),$$

$$T_{\boldsymbol{h}_{n-i},\boldsymbol{d}_{n-i}}(I_{i+1}) + T_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}}(Z_{i+1}) \leqslant t(\varrho(f)) + \sum_{\alpha=1}^{n-i}(h_\alpha + d'_\alpha)d^0_{\mathfrak{U}_\alpha}\varrho(f).$$

On déduit du lemme de spécialisation et du lemme 4,

$$d^0_{\mathfrak{U}_\alpha}\varrho(f) \leqslant D_{\alpha,\boldsymbol{d}_{n+1-i}}(I_i),$$

$$t(\varrho(f)) + \sum_{\alpha=1}^{n-i}(h_\alpha + d'_\alpha)d^0_{\mathfrak{U}_\alpha}\varrho(f) \leqslant c T_{\boldsymbol{h}_{n+1-i},\boldsymbol{d}_{n+1-i}}(I_i),$$

comme à la fin de la preuve du lemme 1. En particulier, on a maintenant

$$t(\varrho) \leqslant c_1 c_2 H + c'(c_1 c_2 + 1)d'_{n+1-i}\log(n+1) + 4n(c' + c_1\tau)c_2\log(d'_{n+1-i}). \quad ∎$$

On déduit de la proposition 6, par récurrence sur $i = 1, \ldots, \mu$, les relations

$$D_{1,\boldsymbol{d}_{n+1-\mu}}(I_\mu) + \sum_{i=1}^{\mu} D_{1,\boldsymbol{d}}(Z_i) \leqslant D_{1,\boldsymbol{d}_{n+1}}((0)) \leqslant d_1 \ldots d_\mu, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} c^{i-1} T_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{d}}(Z_i) \leqslant c^\nu T_{\boldsymbol{h}_{n+1},\boldsymbol{d}_{n+1}}((0)) \tag{6}$$

$$\leqslant c^{\nu+1} H d_1 \ldots d_\nu\Big((1/H) + \sum_{i=1}^{\nu}(1/d_i)\Big).$$

LEMME 5. *Il existe $x \in R \setminus \{0\}$, de taille*

$$\leqslant (3c)^\nu H d_1 \ldots d_\nu\Big((1/H) + \sum_{i=1}^{\nu}(1/d_i)\Big)$$

et un entier $\delta \leqslant (3/2)^\chi(d_1 \ldots d_\mu - D_{1,\boldsymbol{d}_{n+1-\mu}}(I_\mu))$ où χ est le nombre de d_i ($1 \leqslant i \leqslant \mu$) égaux à 2, tels que $xX_0^\delta \in C_\mu$.

Démonstration. Posons $\delta_i = \min\{e \mid RX_0^e \cap D_i \neq (0)\}$. Pour tout $i = 1, \ldots, \mu$ le coefficient δ_i est majoré par le maximum des exposants des composantes primaires de K_i intersectant R en (0). Or la somme de ces exposants est majorée par $D_{1,\boldsymbol{d}}(Z_i)/d_{i+1} \ldots d_\mu$, donc on a, avec (5),

$$\sum_{i=1}^{\mu} \delta_i d_{i+1} \ldots d_\mu \leqslant d_1 \ldots d_\mu - D_{1,\boldsymbol{d}_{n+1-\mu}}(I_\mu).$$

Soit χ_i le nombre de d_α $(i+1 \leqslant \alpha \leqslant \mu)$ égaux à 2. On a

$$(1+3^{\mu-i})/2 \leqslant 3^{\mu-i} \leqslant (3/2)^{\chi_i} d_{i+1} \dots d_\mu,$$

et donc, d'après ce qui précède,

$$\sum_{i=1}^{\mu}\left(\delta_i \frac{1+3^{\mu-i}}{2}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\mu} (3/2)^{\chi_i}\delta_i d_{i+1}\dots d_\mu \leqslant (3/2)^{\chi} \sum_{i=1}^{\mu} \delta_i d_{i+1}\dots d_\mu$$
$$\leqslant (3/2)^{\chi}(d_1 \dots d_\mu - D_{1,d_{n+1-\mu}}(I_\mu)).$$

D'autre part on pose q le produit des contenus de formes U-éliminantes des cycles Z_i $(i = 1, \dots, \mu)$; q appartient à l'intersection des composantes primaires des K_i rencontrant R non trivialement. Il suit de (6) que

$$t(q) \leqslant c^{\nu+1} H d_1 \dots d_\nu((1/H) + \sum_{i=1}^{\nu} (1/d_i)).$$

On pose

$$x = q^{3^\mu} \quad \text{et} \quad \delta = \sum_{i=1}^{\mu}\left(\delta_i \frac{1+3^{\mu-i}}{2}\right);$$

on déduit alors du lemme 3

$$x X_0^\delta \in \prod_{i=1}^{\mu} D_i^{(1+3^{\mu-i})/2} \subseteq C_\mu,$$

ce qui établit le lemme 5. ∎

Lorsque $\mu < m$ nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 6. *Si $\nu = n+1$, il existe $x' \in R\setminus\{0\}$, de taille*

$$\leqslant (3c)^{\nu+1} H d_1 \dots d_\nu((1/H) + \sum_{i=1}^{\nu} (1/d_i))$$

et un entier $\delta' \leqslant 3(3/2)^{\chi} d_1 \dots d_n + d_{n+1} - 1$ où χ est le nombre de d_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ égaux à 2, tels que

$$x' X_0^{\delta'} \in C_\nu.$$

Démonstration. On a $\nu = n+1$ et $\mu = n$, et avec le lemme 3 de [P₃]

$$X_0^{D_{1,d'_1}(I_\mu)+d_\nu-1} \in (I_\mu, q_\nu)\mathbf{k}[X_0, \dots, X_n] \subset K_\nu \mathbf{k}[X_0, \dots, X_n].$$

Soit q le contenu d'une forme U-éliminante de Z_ν. On a alors

$$q \cdot X_0^{D_{1,d'_1}(I_\mu)+d_\nu-1} \in K_\nu \cap R[X_0] = D_\nu.$$

Avec les notations du lemme 5, posons $x' = q \cdot x^3$; on obtient

$$x' \cdot X_0^{3\delta + D_{1,d'_1}(I_\mu)+d_\nu-1} \in \prod_{i=1}^{\nu} D_i^{(1+3^{\nu-i})/2} \subseteq C_\nu.$$

L'estimation de la taille découle de (6), tandis qu'on vérifie

$$3\delta + D_{1,d'_1}(I_\mu) + d_\nu - 1 \leqslant 3(3/2)^{\chi} d_1 \dots d_n + d_{n+1} - 1$$

avec le lemme 5. ∎

On peut alors établir

THÉORÈME 5. *Soit R un anneau factoriel, semi-régulier, de corps des fractions $\mathbf{k}$ et taillé, de taille à croissance sous-logarithmique de type $\leqslant \tau$. Soient $P_1, \dots, P_m \in R[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes de degrés $\leqslant d_1, \dots, d_m$ respectivement et de tailles $\leqslant H$.*

Si les polynômes $P_1, \dots, P_m$ sont sans zéro commun dans $\bar{\mathbf{k}}^n$, il existe un élément $r \in R\setminus\{0\}$ de taille $\leqslant \tilde{c}_0 H d_1 \dots d_\nu((1/H) + \sum_{i=1}^{\nu}(1/d_i))$ où

$$\tilde{c}_0 = [3c_1^2 c_2^{n+1} \max\{c_1; c_2\}(8n(c' + c_1\tau) + 1)]^{n+2},$$

et des polynômes $A_1, \dots, A_m$ de $R[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$d^0(A_i P_i) \leqslant 3(3/2)^{\chi} d_1 \dots d_\mu + d_\nu - 1,$$
$$r = A_1 P_1 + \dots + A_m P_m,$$

où $\mu = \min\{m, n\}$, $\nu = \min\{m, n+1\}$, χ est le nombre de d_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ égaux à 2 et c_1, c_2, c' sont les constantes de la taille sur R.

Démonstration. Posons $p_1 = {}^hP_1, \dots, p_m = {}^hP_m$ les homogénéisés, dans $R[X_0, \dots, X_n]$, des polynômes $P_1, \dots, P_m$. L'hypothèse sur les P_i se traduit simplement par le fait que l'idéal J engendré par les p_i est de rang restreint $\geqslant n+1$. Avec les notations du lemme 4 et du début du paragraphe on distingue deux cas.

Si $\mu = \nu$ alors $I_\mu = I_\nu = A$, d'où $C_\mu = \mathrm{Ann}_{R[X_0]}(A/(q_1, \dots, q_\mu))$ et, avec les notations du lemme 5,

$$x \cdot X_0^\delta \in C_\mu \subset (q_1, \dots, q_\mu);$$

on pose dans ce cas $r = x$ et on a $\delta \leqslant (3/2)^{\chi} d_1 \dots d_\mu$.

Si $\mu = n$ et $\nu = n+1$, on a $C_\nu = \mathrm{Ann}_{R[X_0]}(A/(q_1, \dots, q_\nu))$. Ainsi, avec le lemme 6,

$$x' \cdot X_0^{\delta'} \in C_\nu \subset (q_1, \dots, q_\nu);$$

on pose dans ce cas $r = x'$ et on a $\delta' \leqslant 3(3/2)^{\chi} d_1 \dots d_\mu + d_\nu - 1$.

Et donc en tout cas, il existe des polynômes $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m \in R[X_0, \dots, X_n]$ homogènes tels que

$$r \cdot X_0^{3(3/2)^{\chi} d_1 \dots d_\mu + d_\nu - 1} = \bar{A}_1 p_1 + \dots + \bar{A}_m p_m.$$

Posant $X_0 = 1$ dans cette équation on obtient le théorème, les estimations de tailles se déduisent des lemmes 5 et 6 respectivement. ∎

8. Déduction des théorèmes 1, 2 et 3. Pour établir les théorèmes 1, 2 et 3 à partir des théorèmes 4 ou 5 on pose successivement $R = \mathbf{Z}, \mathbf{F}_q[T]$ et $\mathbf{Z}[T]$. Ces trois anneaux sont bien commutatifs, unitaires, noethériens, factoriels et réguliers de dimensions de Krull respectives 1, 1 et 2. Il suffit donc de définir des tailles sur ces trois anneaux et d'en calculer les constantes.

Sur $\mathbf{Z}$ on définit une taille de la façon suivante. Pour $f \in \mathrm{Pol}(\mathbf{Z})$ on pose $t(f) = -\infty$ si $f = 0$ et sinon

$$t(f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \log |f(e^{2i\pi u_1}, \dots, e^{2i\pi u_m})| du_1 \dots du_m.$$

C'est la *mesure de Mahler* de f qui vérifie les propriétés (T0), (T1), (T2) et (T3) des tailles avec $c_1 = c_2 = 1$ et $c' = 1$. Si $f \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ on a $t(f) = \log |f|$. Pour les propriétés (T3.a) et (T3.b) on utilise le lemme 1.13 de [P_1]. On établit (T3.a) en remarquant que

$$t(F) \leqslant \int_0^1 \dots \int_0^1 \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\log |f_i(e^{2i\pi u_1}, \dots, e^{2i\pi u_{m'}})|\} du_1 \dots du_{m'} + \log k,$$

$$\log |f_i(e^{2i\pi u_1}, \dots, e^{2i\pi u_{m'}})| \leqslant \log\Big(\sum_\alpha |f_{i,\alpha}|\Big) \leqslant t(f_i) + \log(m(f_i)+1) d^0 f_i,$$

où $\{f_{i,\alpha}; \alpha\}$ désigne les coefficients dans $\mathbf{Z}$ de f_i (cf. [P_1], remarque, p. 22). Pour montrer (T3.b) on fixe $u_1, \dots, u_{m'}$ et on déduit du lemme 1.13 de [P_1], pour $i = 1, \dots, k$,

$$\log |f_i(e^{2i\pi u_1}, \dots, e^{2i\pi u_{m'}})|$$
$$\leqslant \int_0^1 \dots \int_0^1 \log |F(e^{2i\pi u_1}, \dots, e^{2i\pi u_{m'}}, e^{2i\pi v_1}, \dots, e^{2i\pi v_m})| dv_1 \dots dv_m + \log(m+1)d,$$

d'où, par intégration, $t(f_i) \leqslant t(F) + \log(m+1)d$.

Sur $\mathbf{F}_q[T]$ on définit une taille par $t(0) = -\infty$ et $t(f) = d_T^0 f$ si $f \in \mathrm{Pol}(\mathbf{F}_q[T]) \setminus \{0\}$. On vérifie aisément les propriétés (T0), (T1), (T2) et (T3) avec $c_1 = c_2 = 1$, $c' = 0$.

Sur $\mathbf{Z}[T]$ on définit une taille en posant $t(0) = -\infty$ et, pour $f \in \mathrm{Pol}(\mathbf{Z}[T]) \setminus \{0\}$,

$$t(f) = d_T^0 f + \int_0^1 \dots \int_0^1 \log |f(e^{2i\pi v}, e^{2i\pi u_1}, \dots, e^{2i\pi u_m})| dv\, du_1 \dots du_m.$$

On vérifie sans difficulté les propriétés (T0), (T1) et (T2). Et, à l'aide du lemme 1.13 de [P_1], on montre comme ci-dessus les propriétés (T3.a) et (T3.b) avec $c_1 = 2 + \log 2$, $c_2 = 1$ et $c' = 1$. Pour la propriété (T3.a), on remarque que

$$d_T^0 F \leqslant \max\{\tilde{t}(f_1); \dots; \tilde{t}(f_k)\},$$

$$t(F) \leqslant d_T^0 F + \max\{\tilde{t}(f_1) + \log 2 \cdot d_T^0 f_1; \dots; \tilde{t}(f_k) + \log 2 \cdot d_T^0 f_k\} + \log k$$
$$\leqslant (1 + \log 2) d_T^0 F + \max\{\tilde{t}(f_1); \dots; \tilde{t}(f_k)\} + \log k.$$

Dans les trois cas considérés les tailles définies sont à croissance sous-logarithmique de type $\leqslant 1$, $1/\log q$, 1 respectivement.

Nota Bene. Nous avons utilisé de préférence les estimations du théorème 4 pour évaluer les "constantes" des théorèmes 1, 2 et 3.

Références

[B] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chap. 5 à 7*, Masson, Paris 1985.

[Br] W. D. Brownawell, *Bounds for the degrees in the Nullstellensatz*, Ann. of Math. 126 (1987), 577–591.

[BY] C. Berenstein et A. Yger, *Effective Bézout identities in* $\mathbf{Q}[z_1, \dots, z_n]$, Acta Math. (1991), à paraître.

[K] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz*, J. Amer. Math. Soc. 1 (4)(1988), 963–975.

[LT] J. Lipman et B. Teissier, *Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon–Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math. J. 28 (1981), 97–116.

[N] D. G. Northcott, *Lessons on Rings, Modules and Multiplicities*, Cambridge Univ. Press, 1968.

[P_1] P. Philippon, *Critères pour l'indépendance algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. 64 (1986), 5–52.

[P_2] —, *A propos du texte de W. D. Brownawell: "Bounds for the degrees in the Nullstellensatz"*, Ann. of Math. 127 (1988), 367–371.

[P_3] —, *Théorème des zéros effectifs, d'après J. Kollár*, dans *Problèmes Diophantiens 1988/89*, Publ. Math. Univ. P. et M. Curie — Paris VI, n°88, 1988, n°6.

[S] H. Skoda, *Applications des techniques* L^2 *à la théorie des idéaux d'algèbres de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 5 (1972), 545–579.

[ZS] P. Samuel et O. Zariski, *Commutative Algebra II*, Van Nostrand, Princeton 1960.

U.A. 763 du CNRS
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75231 Paris Cedex

Reçu le 27.12.1988
et révisé le 29.12.1989
(1893)