where k is real and is $O(A+\log\log M)$ and

$$J = O\left(\frac{A\log M}{\log N}+N^{-1/4}+M^{-1}+e^{-A}A^{-1}\right).$$

We now take real parts in (2) and observe that

$$\mathrm{Exp}(r\log\log N) = (\log N)^r \gg (\log\log t)^r$$

by the inequality $\mathrm{Exp}(N^6) \geq t$. Also $t = t_\nu \to \infty$ since $t \geq N$.

This completes the proof of the statement made at the beginning of the proof and hence that of the theorem.

Note added in proof. By a modification of Lemma δ it is possible to prove by the method of the appendix that if $C\log\log T \leq H \leq T$, then

$$\max_{T\leq t\leq T+H} (\mathrm{Re}\, G(1+it))$$

exceeds a positive constant times $(\log\log H)^r$, where $C = C(r, \theta, \phi) > 0$. Moreover on Riemann hypothesis (or quasi-Riemann hypothesis), $C\log\log T$ can be replaced by $C\log\log\log T$.

Received on 15.11.1990

ACTA ARITHMETICA
LVIII.4 (1991)

Zum Ellipsoidproblem in algebraischen Zahlkörpern

von

ULRICH RAUSCH (Clausthal)

1. Einleitung. In [7] habe ich gezeigt, daß in einem total reellen algebraischen Zahlkörper vom Grade n für die Anzahl $A_k(x;\mathfrak{a})$ der k-Tupel $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ von Zahlen eines Ideals $\mathfrak{a}$, deren Konjugierte dem Ungleichungssystem

$$(\nu_1^{(p)})^2+\ldots+(\nu_k^{(p)})^2 \leq x_p \quad (x_p > 0;\ p = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

genügen, folgende Asymptotik gilt:

$$A_k(x;\mathfrak{a}) = \omega_k^n\left(\frac{X}{dN(\mathfrak{a})^2}\right)^{k/2} + O(X^{\frac{k}{2}-\frac{k}{n(k-1)+2}+\delta}) \tag{1.2}$$

für $X = x_1\ldots x_n \geq 1$ und jedes $\delta > 0$; hier bezeichnet

$$\omega_k = \pi^{k/2}/\Gamma(\tfrac{1}{2}k+1) \tag{1.3}$$

das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel, d ist die Diskriminante des Körpers und $N(\mathfrak{a})$ die Norm von $\mathfrak{a}$.

Für frühere Ergebnisse im Fall $k = 2$ (Kreisproblem) siehe Schaal [9], [10].

Die vorliegende Arbeit([1]) erweitert obige Problemstellung in dreierlei Hinsicht:

- Der zugrundeliegende Zahlkörper braucht nicht total reell zu sein.
- An die Stelle der k-dimensionalen Kugeln (1.1) treten Ellipsoide von beliebiger Gestalt und Lage, deren Mittelpunkte insbesondere keine Gitterpunkte zu sein brauchen.
- Jede der Zahlen ν_j durchläuft ein eigenes Ideal $\mathfrak{a}_j$ ($j = 1, \ldots, k$).

Es wird eine obere Abschätzung des Gitterrests erzielt, die im eingangs erwähnten Spezialfall die Gleichung (1.2) dahingehend verschärft, daß dort auch $\delta = 0$ zugelassen ist, und die sich im Falle des rationalen Zahlkörpers auf

([1]) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Technischen Universität Clausthal als Habilitationsschrift angenommen. Den Herren Professoren L. G. Lucht (Clausthal) und W. Schaal (Marburg) danke ich für ihre vielfältige Unterstützung. Auch danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die zeitweilige Förderung durch ein Habilitandenstipendium.

ein Resultat von Landau [4] reduziert, das bis heute nur unter zusätzlichen Annahmen über das betrachtete Ellipsoid verbessert werden konnte.

Liegen die Mittelpunkte der Ellipsoide im Gitter, so können auch Ω-Aussagen gemacht werden; diese enthalten teilweise ebenfalls die zur Zeit besten Resultate für den rationalen Körper als Spezialfälle.

Die Grundidee des Beweises ist im wesentlichen die gleiche wie in [7] (Übergang von einem Integralmittelwert des Gitterrests zur erzeugenden Thetareihe durch eine gewisse Integraltransformation); auch konnte die relativ aufwendige Auswertung des Integrals I_ε mittels der Sattelpunktmethode von dort übernommen werden.

Ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweis der für das Problem grundlegenden Gleichung (Hilfssatz 6.1) bildet außerdem die in [8] angegebene Weiterentwicklung der Siegelschen Summenformel.

Den Rückschluß vom Integralmittelwert auf den Gitterrest selbst ermöglicht jetzt der Taubersatz aus [8]; aus diesem Grund wird hier auch kein Gegenstück zu [7, Hilfssatz 8] mehr benötigt.

Die Herleitung der Ω-Resultate schließlich verläuft, nachdem Hilfssatz 6.1 vorhanden ist, weitgehend analog wie beim klassischen Kreisproblem; man vergleiche etwa die Darstellung bei Landau [5, VIII. Teil, Kap. 7].

Bevor die Ergebnisse im einzelnen formuliert werden können, müssen einige Definitionen vorausgeschickt werden.

Der algebraische Zahlkörper K vom Grade $[K:\mathbf{Q}] = n$ befinde sich unter den konjugierten Körpern $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$; dabei sei $K^{(p)}$ reell für $p = 1, \ldots, r_1$ und $K^{(p+r_2)}$ konjugiert komplex zu $K^{(p)}$ für $p = r_1+1, \ldots, r_1+r_2$, also $n = r_1 + 2r_2$. Es sei $r = r_1 + r_2 - 1$ und d die Diskriminante von K. Zu einer Zahl $\mu \in K$ bezeichne $\mu^{(p)}$ ihre Konjugierte in $K^{(p)}$ und $N(\mu)$ ihre Norm; für ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus K sei $N(\mathfrak{a})$ seine Norm.

Es sei $k \geqslant 2$ eine feste natürliche Zahl. Wir betrachten die Menge $\mathscr{T}$ aller Spaltenvektoren

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_k^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_k^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_k^{(n)})^T \in \mathbf{C}^{kn}$$

mit

$$\alpha_j^{(p)} \in \mathbf{R} \quad (j = 1, \ldots, k;\; p = 1, \ldots, r_1),$$

$$\alpha_j^{(p+r_2)} = \overline{\alpha_j^{(p)}} \quad (j = 1, \ldots, k;\; p = r_1+1, \ldots, r+1)$$

und setzen für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{T}$, $p = 1, \ldots, n$:

$$\boldsymbol{\alpha}^{(p)} = (\alpha_1^{(p)}, \ldots, \alpha_k^{(p)})^T.$$

Den k- oder kn-dimensionalen Nullvektor schreiben wir als $\mathbf{0}$.

Der obere Index p deutet also hier (wie auch bei den weiter unten definierten $Q^{(p)}$) lediglich eine Zuordnung zum Körper $K^{(p)}$ an, nicht notwendig ein Enthaltensein in diesem; eine Verwechslung mit den Konjugierten einer Zahl $\mu \in K$ ist indessen nicht zu befürchten.

Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ ganze oder gebrochene Ideale $\neq (0)$ aus K; wir bezeichnen das System der $\mathfrak{a}_j$ kurz mit $\mathfrak{a}$.

Für $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{T}$ schreiben wir

$$\boldsymbol{\nu} \equiv \boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{a}),$$

wenn es Zahlen $\mu_j \in \mathfrak{a}_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ gibt derart, daß

$$\nu_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)} = \mu_j^{(p)} \quad (p = 1, \ldots, n;\; j = 1, \ldots, k),$$

wobei hier $\mu_j^{(p)}$ die p-te Konjugierte von μ_j bezeichnet.

Gegeben sei schließlich für $p = 1, \ldots, n$ eine positiv definite hermitesche Form $Q^{(p)}$ mit der Matrix

$$\boldsymbol{Q}^{(p)} = (Q_{jl}^{(p)})_{j,l=1,\ldots,k} \in \mathbf{C}^{k \times k},$$

also

$$Q_{jl}^{(p)} = \overline{Q_{lj}^{(p)}} \quad (j, l = 1, \ldots, k)$$

und

$$Q^{(p)}(\boldsymbol{\nu}^{(p)}) = (\overline{\boldsymbol{\nu}^{(p)}})^T \boldsymbol{Q}^{(p)} \boldsymbol{\nu}^{(p)} \quad \text{für } \boldsymbol{\nu} \in \mathscr{T}.$$

Dabei sei $\boldsymbol{Q}^{(p)}$ reell — also symmetrisch — für $p = 1, \ldots, r_1$ und

$$\boldsymbol{Q}^{(p+r_2)} = \overline{\boldsymbol{Q}^{(p)}} = (\boldsymbol{Q}^{(p)})^T \quad \text{für } p = r_1+1, \ldots, r+1,$$

so daß also für $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{T}$ gilt:

$$Q^{(p+r_2)}(\boldsymbol{\nu}^{(p+r_2)}) = Q^{(p)}(\boldsymbol{\nu}^{(p)}) \quad (p = r_1+1, \ldots, r+1). \tag{1.4}$$

Das System der $Q^{(p)}$ schreiben wir kurz als Q.

Es sei nun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n$ ($\mathbf{R}_+$ bezeichnet die Menge der positiven reellen Zahlen) mit

$$x_{p+r_2} = x_p \quad (p = r_1+1, \ldots, r+1), \tag{1.5}$$

und es sei $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{T}$ beliebig. Wir betrachten die Anzahl

$$A_k(x) = A_k(x; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha})$$

aller $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{T}$ mit $\boldsymbol{\nu} \equiv \boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{a})$ und

$$Q^{(p)}(\boldsymbol{\nu}^{(p)}) \leqslant x_p \quad \text{für } p = 1, \ldots, n.$$

(Wegen (1.4) und (1.5) sind natürlich die letzten r_2 dieser Ungleichungen eine Folge der übrigen.)

Unsere Bemühungen gelten dabei dem Gitterrest

$$P_k(x) = P_k(x; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}) = A_k(x) - C_0 X^{k/2}.$$

Hier ist, wie im folgenden stets,

$$X = x_1 \ldots x_n$$

gesetzt, und

$$C_0 = \frac{2^{kr_2}\omega_k^{r_1}\omega_{2k}^{r_2}}{|d|^{k/2} N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)\sqrt{D}},$$

wobei die Zahlen ω_k, ω_{2k} durch (1.3) definiert sind und

$$D = \prod_{p=1}^{n} \det Q^{(p)}.$$

Satz 1. *Für $X \geqslant 1$ ist*

$$P_k(x) \ll X^{\frac{k}{2} - \frac{k}{nk-r+1}},$$

wo die $\ll$-Konstante nur von K, k, Q und $\mathfrak{a}$ abhängt, jedoch nicht von $\boldsymbol{\alpha}$.

Hierin ist im Falle des rationalen Zahlkörpers ($n = 1$) das Resultat

$$P_k(x) \ll x^{\frac{k-1}{2} \cdot \frac{k}{k+1}}$$

von Landau [4] enthalten, das, wie bereits oben erwähnt, für beliebige Ellipsoide das beste bis heute Bekannte darstellt. Speziell für das klassische Kreisproblem erhält man Sierpińskis

$$P_2(x) \ll x^{1/3}.$$

Zur Formulierung der Ω-Resultate benötigen wir eine weitere Definition. Für $p = 1, \ldots, r+1$ sei $L'_p = \mathbf{Q}(\Lambda_p)$ der durch Adjunktion der Menge

$$\Lambda_p = K^{(p)} \cup \overline{K^{(p)}} \cup \{Q_{jl}^{(p)}/Q_{11}^{(p)} \colon j, l = 1, \ldots, k\}$$

an $\mathbf{Q}$ entstehende Körper; ferner sei $L_p = L'_p \cap \mathbf{R}$, $\Delta_p = [L_p : \mathbf{Q}]$ der (eventuell unendliche) Grad von L_p sowie

$$\Delta^* = \frac{1}{n} \cdot \max\{\Delta_p \colon p = 1, \ldots, r+1\}.$$

Satz 2. *Es sei $\boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{0}\,(\mathfrak{a})$. Im Falle $r_1 > 0$ sei darüber hinaus $k \not\equiv 1$* (mod 4). *Dann gilt für $X \to \infty$*

$$(-1)^V P_k(x) = \Omega_+\left((X \log^{1/\Delta} X)^{(k - \frac{r+1}{n})/4}\right),$$

wo

$$V = r_1 \left[\frac{k+2}{4}\right] + r_2 \left[\frac{k+1}{2}\right] \quad \textit{und} \quad \Delta = \min\{k/2, \Delta^*\}.$$

Das hieraus für $n = 1$ folgende

$$(-1)^{[(k+2)/4]} P_k(x) = \Omega_+\left((x \log^{2/k} x)^{(k-1)/4}\right)$$

ist implizit in einer Arbeit von Hafner [2, § 5.2] enthalten und bei beliebigem Ellipsoid das Beste, was zur Zeit bekannt ist; allerdings gilt Hafners Resultat auch für $k \equiv 1$ (mod 4) und liefert für $k \geqslant 4$ sogar $\Omega_\pm$-Aussagen.

Speziell für das Kreisproblem in $\mathbf{Q}$ erhält man das Ergebnis

$$P_2(x) = \Omega_-\left((x \log x)^{1/4}\right)$$

von Hardy [3, S. 23], das erst in jüngerer Zeit von Hafner [1] um Faktoren von der Größenordnung iterierter Logarithmen verschärft wurde.

Ist K total reell und liegen sämtliche Koeffizienten der quadratischen Form $Q^{(p)}$ jeweils in $K^{(p)}$ ($p = 1, \ldots, n$), so ist stets $L_p = K^{(p)}$, also $\Delta^* = 1$, und Satz 2 ergibt für $k \not\equiv 1$ (mod 4)

$$(1.6) \qquad (-1)^{n[(k+2)/4]} P_k(x) = \Omega_+\left((X \log X)^{(k-1)/4}\right).$$

Dabei mag überraschen, daß die $Q_{jl}^{(p)}$ für verschiedene p nicht etwa zueinander konjugiert sein müssen.

Für das Kugelproblem im rationalen Zahlkörper reduziert sich (1.6) auf das Ergebnis der Arbeit [12] von Szegö, wobei der Spezialfall

$$P_3(x) = \Omega_-\left((x \log x)^{1/2}\right)$$

bis heute nicht verbessert worden ist.

Im Falle $n > 1$ war bisher nur für das Kreisproblem in reell-quadratischen Zahlkörpern

$$P_2(x) = \Omega(X^{1/4})$$

durch Schaal [9] bekannt.

Ganz elementar beweisen läßt sich schließlich der

Satz 3. *Es sei $\boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{0}\,(\mathfrak{a})$ und*

$$\Delta_* = \frac{1}{n} \cdot \min\{\Delta_p \colon p = 1, \ldots, r+1\} < \infty.$$

Dann gilt für $X \to \infty$

$$P_k(x) = \Omega(X^{k/2 - \Delta_*}).$$

Für das Kugelproblem der Dimension $k \geqslant 5$ im rationalen Zahlkörper ist dieses Resultat bekanntlich optimal, denn dort weiß man auch

$$P_k(x) \ll x^{k/2-1}.$$

Es seien nun noch einige Festsetzungen getroffen, die für die ganze Arbeit Gültigkeit haben.

Wir definieren

$$e_p = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 1, \ldots, r_1, \\ 2 & \text{für } p = r_1 + 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Für $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathscr{T}$ sei $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ die reelle Zahl

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{p=1}^{n} \alpha_j^{(p)} \beta_j^{(p)}.$$

Mit $\mathfrak{c}$ bezeichnen wir das System der Ideale

$$\mathfrak{c}_j = \frac{1}{\mathfrak{a}_j \mathfrak{d}} \quad (j = 1, \ldots, k),$$

wo $\mathfrak{d}$ die Differente von K ist, und für $p = 1, \ldots, n$ sei $\tilde{Q}^{(p)}$ die zur invers-transponierten Matrix

$$\tilde{Q}^{(p)} := (\overline{Q^{(p)}})^{-1}$$

gehörige hermitesche Form; für das System der $\tilde{Q}^{(p)}$ schreiben wir kurz $\tilde{Q}$.

In der Regel werden wir mit x einen Vektor $(x_1, \ldots, x_{r+1}) \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ bezeichnen und uns die Komponenten $x_{r+2}, \ldots, x_n$ bei Bedarf gemäß (1.5) ergänzt denken. In diesem Sinne betrachten wir insbesondere $P_k(x)$ und $X = \prod_{p=1}^{r+1} x_p^{e_p}$ meist als Funktionen von $x_1, \ldots, x_{r+1}$.

Was die Abhängigkeit der durch die Symbole O, $\ll$ und $\gg$ implizierten Konstanten von Parametern betrifft, so wird diese in der Formulierung des jeweiligen Satzes oder Hilfssatzes ein- für allemal genannt und gilt dann auch durchgehend für dessen Beweis.

2. Eine Thetaformel. Für $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathscr{T}$ und $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}_+^n$ mit

$$u_{p+r_2} = u_p \quad (p = r_1 + 1, \ldots, r+1)$$

wird definiert:

$$\Theta(u; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{a})} \exp\Big(-\pi \sum_{p=1}^{n} Q^{(p)}(\boldsymbol{v}^{(p)}) u_p + 2\pi i \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{v}\Big).$$

HILFSSATZ 2.1. *$\Theta(u; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ konvergiert absolut und genügt der Transformationsformel*

$$\Theta(u; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{e^{2\pi i \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}}{|d|^{k/2} N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k) \sqrt{D}\, (u_1 \ldots u_n)^{k/2}} \cdot \Theta(1/u; \tilde{Q}, \mathfrak{c}, \boldsymbol{\beta}, -\boldsymbol{\alpha}),$$

wobei $1/u$ eine Abkürzung für $(1/u_1, \ldots, 1/u_n)$ ist.

Bemerkung. Wir werden diese Formel nur für $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ verwenden, aber der Beweis des allgemeinen Falles bereitet keine zusätzliche Mühe.

Beweis. Mit der Diagonal-Übermatrix

$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{Q}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{Q}^{(n)})$$

und

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{Diag}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{k}, \underbrace{u_2, \ldots, u_2}_{k}, \ldots, \underbrace{u_n, \ldots, u_n}_{k})$$

gilt offenbar $\boldsymbol{QU} = \boldsymbol{UQ}$ und

$$\sum_{p=1}^{n} Q^{(p)}(\boldsymbol{v}^{(p)}) u_p = \bar{\boldsymbol{v}}^T \boldsymbol{QU} \boldsymbol{v}.$$

Für $j = 1, \ldots, k$ sei $\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jn}$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}_j$ und

$$\boldsymbol{B}_j = \begin{bmatrix} \gamma_{j1}^{(1)} & \ldots & \gamma_{jn}^{(1)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \gamma_{j1}^{(n)} & \ldots & \gamma_{jn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

die aus den Konjugierten gebildete $n \times n$-Matrix sowie

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_k).$$

Bezeichnet dann $\boldsymbol{P}$ die Permutationsmatrix (also $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T$) derart, daß für $\boldsymbol{v} \in \mathscr{T}$ gilt

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P} \cdot (v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(n)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_2^{(n)}, \ldots, v_k^{(1)}, \ldots, v_k^{(n)})^T,$$

so erhält man alle $\boldsymbol{v} \in \mathscr{T}$ mit $\boldsymbol{v} \equiv \mathbf{0}\ (\mathfrak{a})$ genau einmal, wenn in

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{PBm}$$

$\boldsymbol{m}$ durch $\mathbf{Z}^{kn}$ läuft.

Bestimmt man nun noch Spaltenvektoren $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^{kn}$ mit

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{PBz}, \qquad \boldsymbol{h}^T = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{PB}$$

(man überzeugt sich leicht, daß diese Vektoren tatsächlich reelle Komponenten haben) und setzt

$$\boldsymbol{M} = (\overline{\boldsymbol{PB}})^T \boldsymbol{QU} (\boldsymbol{PB}),$$

so erhält man für $\Theta := \Theta(u; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ die Darstellung

$$\Theta = \sum_{\boldsymbol{m}} \exp\big(-\pi(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{z})^T \boldsymbol{M} (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{z}) + 2\pi i \boldsymbol{h}^T (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{z})\big), \tag{2.1}$$

wo also über alle $\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^{kn}$ summiert wird.

Die Matrix $\boldsymbol{M}$ ist hermitesch kongruent zu $\boldsymbol{QU}$ und damit sicherlich hermitesch und positiv definit; sie ist sogar reell, also symmetrisch, denn man rechnet leicht nach, daß $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{A}_{jl})_{j,l=1,\ldots,k}$ mit

$$\boldsymbol{A}_{jl} = \Big(\sum_{p=1}^{n} \gamma_{j\varrho}^{(p)} Q_{jl}^{(p)} \gamma_{l\sigma}^{(p)} u_p\Big)_{\varrho,\sigma=1,\ldots,n}.$$

Rechts in (2.1) steht somit eine Thetareihe von bekanntem Typ, die absolut konvergiert und deren Transformationsformel die Gleichung

$$\Theta = \frac{e^{2\pi i \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{h}}}{\sqrt{\det \boldsymbol{M}}} \sum_{\boldsymbol{m}} \exp\big(-\pi(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{h})^T \boldsymbol{M}^{-1} (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{h}) - 2\pi i \boldsymbol{z}^T (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{h})\big)$$

liefert. Mit der Abkürzung $\tilde{\boldsymbol{A}} := (\boldsymbol{A}^{-1})^T$ für reguläre quadratische Matrizen $\boldsymbol{A}$ gilt hier

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{M}} = (\overline{\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{B}}})^T \tilde{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{U}^{-1} (\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{B}}), \qquad \boldsymbol{z}^T = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{B}}.$$

Nun ist $\tilde{\boldsymbol{B}}_j$ bekanntlich genauso aufgebaut wie $\boldsymbol{B}_j$, nur mit einer Basis des Ideals $\mathfrak{c}_j = (\mathfrak{a}_j\mathfrak{d})^{-1}$ $(j = 1, \ldots, k)$. Also durchläuft

$$\boldsymbol{v} := \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\beta}$$

für $\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^{kn}$ genau die $\boldsymbol{v} \in \mathscr{T}$ mit $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{\beta}(\mathfrak{c})$.

Beachtet man noch, daß $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$ und

$$\sqrt{\det \boldsymbol{M}} = |d|^{k/2} N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)\sqrt{D}(u_1 \ldots u_n)^{k/2}$$

gilt, so erhält man die Behauptung. ∎

3. Hilfssätze über Integrale. Hier stelle ich einige in der Folge benötigte Ergebnisse aus meiner Arbeit [7] zusammen.

Für $\varepsilon > 0$ wird Φ_ε: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ erklärt durch

$$\Phi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \frac{u^{s-1}}{\Gamma(s+1)} e^{\varepsilon s^2} ds \qquad (u > 0),$$

wobei längs der Geraden $\operatorname{Re} s = \sigma$ integriert wird; diese Definition ist unabhängig von σ. Es gilt

$$\Phi_\varepsilon(u) \ll u^\sigma \quad \text{für jedes } \sigma \in \mathbf{R}, \tag{3.1}$$

wo die $\ll$-Konstante von σ und ε abhängt.

Wir definieren ferner

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ 0 & \text{für } \alpha > 1 \end{cases}$$

und

$$I_\varepsilon(B, \beta) = \int_0^\infty e^{-Bu} u^{\beta-2} \Phi_\varepsilon(1/u) du \qquad (B \geqslant 0, \beta \geqslant 0).$$

Hilfssatz 3.1. *Für $\alpha \geqslant 0$ gilt*

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u}\Phi_\varepsilon(u) du = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^\infty \chi(\alpha e^v)\exp(-v^2/(4\varepsilon)) dv.$$

Beweis. Für $\alpha > 0$ ist die Behauptung im Beweis von [7, Hilfssatz 1] enthalten (daß χ hier im Punkt $\alpha = 1$ anders definiert ist als dort, ist unerheblich).

Im Fall $\alpha = 0$ haben beide Seiten obiger Gleichung den Wert 1, was für die linke Seite aus [7, Hilfssatz 2] folgt. ∎

Hilfssatz 3.2. *Es ist*

$$I_\varepsilon(0, \beta) = e^{\varepsilon\beta^2}/\Gamma(\beta+1)$$

und für $B > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$

$$I_\varepsilon(B, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\varepsilon B}}{B^{\beta/2+1/4}} \cos\left(2\sqrt{B} - \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{-\varepsilon B/2}}{B^{\beta/2+1/2}}\right) + O(e^{-(\log B)^2/4}), \tag{3.2}$$

wobei die O-Konstanten nur von β abhängen.

Beweis. Der Wert von $I_\varepsilon(0, \beta)$ ergibt sich aus [7, Hilfssatz 2].

Nach [7, Hilfssatz 3] gilt (3.2) für $B \geqslant 1$, und nach [7, Hilfssatz 4] ist $I_\varepsilon(B, \beta) \ll 1$ für $0 < B \leqslant 1$, so daß (3.2) trivialerweise auch in diesem Fall gilt. ∎

4. Eine Summenformel und ein Taubersatz. Dieser Paragraph enthält Hilfsmittel aus [8].

Für $\varepsilon > 0$ und Lebesgue-meßbare Funktionen F: $\mathbf{R}_+^{r+1} \to \mathbf{C}$ sei – im Falle der Existenz – der Integralmittelwert $\mathscr{I}_\varepsilon(F)$: $\mathbf{R}_+^{r+1} \to \mathbf{C}$ definiert durch

$$\mathscr{I}_\varepsilon(F)(x) = (4\pi\varepsilon)^{-(r+1)/2} \int_{\mathbf{R}^{r+1}} F(xe^v) e^{-|v|^2/(4\varepsilon)} dv,$$

wobei zur Abkürzung $xe^v = (x_1 e^{v_1}, \ldots, x_{r+1} e^{v_{r+1}})$ und $|v| = \left(\sum_{p=1}^{r+1} v_p^2\right)^{1/2}$ gesetzt ist. Der Bequemlichkeit halber schreiben wir $\mathscr{I}_\varepsilon(F(x))$ statt $\mathscr{I}_\varepsilon(F)(x)$.

Speziell im Falle $F(x) = X^{k/2} = \prod_{p=1}^{r+1} x_p^{e_p k/2}$ hat man

Hilfssatz 4.1.

$$\mathscr{I}_\varepsilon(X^{k/2}) = X^{k/2} e^{\varepsilon(r_1+4r_2)k^2/4}.$$

Beweis. Für $p = 1, \ldots, r+1$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^\infty e^{e_p k v_p/2 - v_p^2/(4\varepsilon)} dv_p = e^{\varepsilon e_p^2 k^2/4}. \;∎$$

Die folgende Summenformel wird im nächsten Paragraphen dazu dienen, gewisse Reihen abzuschätzen.

Hilfssatz 4.2. *Es sei φ: $\mathbf{R}_+^{r+1} \to \mathbf{C}$ Lebesgue-meßbar, und es gebe ein $\sigma > 1/2$ derart, daß*

$$\int_{\mathbf{R}_+^{r+1}} |\varphi(u)| \prod_{p=1}^{r+1} u_p^{e_p\sigma-1} du < \infty.$$

Dann ist die über alle ganzen $\nu \neq 0$ aus K erstreckte Reihe

$$F(x) = \sum_\nu{}' \varphi(|\nu^{(1)}|^2 x_1, \ldots, |\nu^{(r+1)}|^2 x_{r+1})$$

für fast alle $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ absolut konvergent, und für alle $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt die Gleichung

$$\mathscr{I}_\varepsilon(F(x)) = \frac{2^{-r}w}{2\pi i R} \sum_m \int_{(\sigma)} \psi(s - iE_1(m), \ldots, s - iE_{r+1}(m)) \times \zeta(2s; \lambda_m^2) \prod_{p=1}^{r+1} x_p^{-e_p(s-iE_p(m))} \cdot \exp\left\{\varepsilon \sum_{p=1}^{r+1} e_p^2 (s - iE_p(m))^2\right\} ds, \tag{4.1}$$

deren beide Seiten ebenfalls absolut konvergieren. Hier bezeichnet w die Anzahl der Einheitswurzeln und R den Regulator von K, summiert wird über alle $m = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbf{Z}^r$, *der Integrationsweg ist die Gerade* $\operatorname{Re} s = \sigma$, *die Zahlen* $E_p(m)$ *sind bezüglich irgendeines festen Systems* $\eta_1, \ldots, \eta_r$ *von Grundeinheiten des Körpers definiert durch*

$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p E_p(m) = 0,$$

$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p E_p(m) \log |\eta_q^{(p)}|^2 = 2\pi m_q \qquad (q = 1, \ldots, r),$$

und ψ *ist die Mellin-Transformierte von* φ:

$$\psi(s_1, \ldots, s_{r+1}) = 2^{r_2} \int_{\mathbf{R}_+^{r+1}} \varphi(u) \prod_{p=1}^{r+1} u_p^{e_p s_p - 1} du \qquad (\operatorname{Re} s_p = \sigma).$$

$\zeta(s; \lambda_m^2)$ *schließlich bezeichnet die zur Hauptklasse gehörige Heckesche Zetafunktion mit dem Größencharakter*

$$\lambda_m^2(v) = \prod_{p=1}^{r+1} |v^{(p)}|^{2ie_p E_p(m)},$$

die für $\operatorname{Re} s > 1$ *definiert ist durch die über alle ganzen Hauptideale* $(v) \neq (0)$ *aus K erstreckte Reihe*

$$\zeta(s; \lambda_m^2) = \sum_{(v)}' \frac{\lambda_m^2(v)}{|N(v)|^s}.$$

Im Falle $r = 0$ *ist* (4.1) *dahingehend zu interpretieren, daß* $R = 1$ *gesetzt wird und von der Summe über m nur das Glied mit* $m = 0$ *auftritt, wobei* $E_1(0) = 0$.

Beweis. Es handelt sich um einen Spezialfall von [8, Theorem 2.2], der sich aber am schnellsten durch Rückgriff auf [8, Theorem 2.1] beweisen läßt. In den dortigen Bezeichnungen hat man, wenn $\mathscr{U}$ die von $\eta_1^2, \ldots, \eta_r^2$ erzeugte Gruppe von Einheiten ist, zunächst formal,

$$\mathscr{I}_\varepsilon(F(x)) = w \sum_{(v)}' \mathscr{I}_\varepsilon(H(|v|^2 x; 1, \varphi, \mathscr{U}))$$

$$= \frac{w}{2\pi i R(\mathscr{U})} \sum_{(v)}' \sum_m \int_{(\sigma)} \psi(s - iE(m)) \frac{\lambda_m^2(v)}{|N(v)|^{2s}}$$

$$\times \prod_{p=1}^{r+1} x_p^{-e_p(s - iE_p(m))} \cdot \exp\{\varepsilon \sum_{p=1}^{r+1} e_p^2 (s - iE_p(m))^2\} ds.$$

Zieht man hier die Summation bezüglich (v) unter das Integral und beachtet $R(\mathscr{U}) = 2^r R$, so folgt (4.1).

Die Rechtfertigung der Limesvertauschungen und der Nachweis der Konvergenzaussagen verläuft nun wie in [8].

Es sei noch angemerkt, daß λ_m^2 ein Größencharakter für Ideale ist:

$$\lambda_m^2(\eta) = 1 \qquad \text{für jede Einheit } \eta \in K,$$

so daß $\zeta(s; \lambda_m^2)$ korrekt definiert ist. ∎

Wir benötigen noch ein Resultat, das es uns erlaubt, vom Verhalten des Integralmittelwerts $\mathscr{I}_\varepsilon(F(x))$ auf das der Funktion $F(x)$ zurückzuschließen. Dazu zunächst eine Definition:

Eine Funktion α: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, zu der es Zahlen $\varkappa_1 > 0$ und $\varkappa_2 \geqslant 0$ gibt derart, daß

$$\alpha(\xi e^{\xi'}) \leqslant \varkappa_1 \alpha(\xi) e^{\varkappa_2 |\xi'|} \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbf{R}_+ \text{ und } \xi' \in \mathbf{R},$$

nennen wir $(\varkappa_1, \varkappa_2)$-*mäßig wachsend.*

Hilfssatz 4.3. *Die Funktionen* α, β: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *seien* $(\varkappa_1, \varkappa_2)$-*mäßig wachsend, und es seien* F, M: $\mathbf{R}_+^{r+1} \to \mathbf{R}$ *sowie* ε: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *gegeben derart, daß für alle* $x = (x_1, \ldots, x_{r+1}) \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ *folgende Bedingungen erfüllt sind* ($\varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5$ *bezeichnen positive von x unabhängige Zahlen*):

$F(x)$ *ist nicht-negativ und bezüglich jeder Variablen* x_p *monoton wachsend;*

M besitzt stetige partielle Ableitungen erster Ordnung mit

$$\left| x_p \frac{\partial}{\partial x_p} M(x) \right| \leqslant \varkappa_3 \beta(X) \qquad (p = 1, \ldots, r+1);$$

$$\varepsilon \text{ ist stetig und } 0 < \varepsilon(X) \leqslant 1;$$

$$\sqrt{\varepsilon(X)} \beta(X) \leqslant \varkappa_4 \alpha(X);$$

$$|\mathscr{I}_{\varepsilon(X)}(F(x) - M(x))| \leqslant \varkappa_5 \alpha(X).$$

Dann ist

$$F(x) = M(x) + O(\alpha(X)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbf{R}_+^{r+1},$$

wobei die O-Konstante nur von $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_5$ *und n abhängt.*

Beweis. [8, Theorem 3.1]. ∎

5. Abschätzungen.

Hilfssatz 5.1. *Für* $v \in \mathscr{T}$, $p = 1, \ldots, n$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{k} |v_j^{(p)}|^2 \ll Q^{(p)}(v^{(p)}) \ll \sum_{j=1}^{k} |v_j^{(p)}|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{k} |v_j^{(p)}|^2 \ll \tilde{Q}^{(p)}(v^{(p)}) \ll \sum_{j=1}^{k} |v_j^{(p)}|^2,$$

wobei die $\ll$-*Konstanten nur von Q abhängen.*

Beweis. Dies folgt in bekannter Weise aus der Tatsache, daß eine positiv definite hermitesche Form in k Variablen $z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{C}$ auf dem Kompaktum $|z_1|^2 + \ldots + |z_k|^2 = 1$ ihr Maximum und ihr positives Minimum annimmt. ∎

HILFSSATZ 5.2.

$$\Theta(u; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ll (u_1 \ldots u_n)^{-k/2} + 1,$$

wobei die $\ll$*-Konstante nur von* K, k, Q *und* $\mathfrak{a}$ *abhängt (jedoch nicht von* $\boldsymbol{\alpha}$ *und* $\boldsymbol{\beta}$*).*

Beweis. Wegen Hilfssatz 5.1 gilt mit passender Konstante $c = c(Q) > 0$:

$$\Theta(u; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ll \prod_{j=1}^{k} \sum_{\nu \in \mathfrak{a}_j} \exp\Big\{-c \sum_{p=1}^{r+1} |\nu^{(p)} + \alpha_j^{(p)}|^2 u_p\Big\}.$$

Bekanntlich (der Beweis verläuft analog zu dem von [11, Hilfssatz 6]) gibt es eine Einheit $\eta \in K$ derart, daß

$$u_p' := |\eta^{(p)}|^{-2} u_p \gg (u_1 \ldots u_n)^{1/n} \quad \text{für } p = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Es seien nun $l_1, \ldots, l_n \in \mathbf{Z}$ beliebig. Aufgrund der Gitterstruktur von $\mathfrak{a}_j$ genügen höchstens $O(1)$ Zahlen $\nu \in \mathfrak{a}_j$ dem Ungleichungssystem

$$l_p - \tfrac{1}{2} \leqslant \nu^{(p)} + \eta^{(p)} \alpha_j^{(p)} \leqslant l_p + \tfrac{1}{2} \quad (p = 1, \ldots, r_1),$$

$$\left.\begin{aligned} l_p - \tfrac{1}{2} &\leqslant \operatorname{Re}(\nu^{(p)} + \eta^{(p)} \alpha_j^{(p)}) \leqslant l_p + \tfrac{1}{2}, \\ l_{p+r_2} - \tfrac{1}{2} &\leqslant \operatorname{Im}(\nu^{(p)} + \eta^{(p)} \alpha_j^{(p)}) \leqslant l_{p+r_2} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad (p = r_1 + 1, \ldots, r+1);$$

für diese ist

$$|\nu^{(p)} + \eta^{(p)} \alpha_j^{(p)}|^2 \geqslant \begin{cases} l_p^2/4 & (p = 1, \ldots, r_1), \\ (l_p^2 + l_{p+r_2}^2)/4 & (p = r_1 + 1, \ldots, r+1). \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu \in \mathfrak{a}_j} \exp\Big\{-c \sum_{p=1}^{r+1} |\nu^{(p)} + \alpha_j^{(p)}|^2 u_p\Big\} \\ &= \sum_{\nu \in \mathfrak{a}_j} \exp\Big\{-c \sum_{p=1}^{r+1} |\nu^{(p)} + \eta^{(p)} \alpha_j^{(p)}|^2 u_p'\Big\} \\ &\ll \prod_{p=1}^{n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-cl^2 u_p'/4} \ll \prod_{p=1}^{n} \big((u_p')^{-1/2} + 1\big) \ll (u_1 \ldots u_n)^{-1/2} + 1; \end{aligned}$$

letzteres wegen (5.1). Es folgt die Behauptung. ∎

HILFSSATZ 5.3. *Es sei* $\{1, \ldots, r+1\} = T_1 \cup T_2$ *eine Zerlegung von* $\{1, \ldots, r+1\}$ *in zwei disjunkte Teilmengen, wobei auch* $T_1 = \emptyset$ *oder* $T_2 = \emptyset$ *zugelassen ist. Es seien ferner* $y, \varkappa \in \mathbf{R}$ *mit* $0 < y < \varkappa$ *und* $\varkappa > 1/2$.

Für $p = 1, \ldots, r+1$ *und* $u > 0$ *sei*

$$\varphi_p(u) = e^{-u} u^{-e_p y_p} \quad \textit{mit } 0 \leqslant y_p < y, \quad \textit{falls } p \in T_1;$$

$$\varphi_p(u) = (u+1)^{-e_p \varkappa}, \quad \textit{falls } p \in T_2.$$

Die über alle Zahlen $\nu \neq 0$ *eines ganzen oder gebrochenen Ideals* $\mathfrak{b} \neq (0)$ *aus* K *erstreckte Reihe*

$$F(x) = F(x; y_p, \varkappa, \mathfrak{b}) = \sum_{\nu \in \mathfrak{b}}{}' \prod_{p=1}^{r+1} \varphi_p(|\nu^{(p)}|^2 x_p)$$

genügt dann für alle $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ *der Ungleichung*

$$F(x) \ll X^{-\max\{1/2, y\}},$$

wobei die $\ll$*-Konstante nur von* K, $\mathfrak{b}$, $\varkappa$, y *und den* y_p *abhängt.*

Beweis. Es gibt eine natürliche Zahl b derart, daß $b\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal ist; wegen

$$F(x; y_p, \varkappa, \mathfrak{b}) = F(b^{-2}x; y_p, \varkappa, b\mathfrak{b}) \leqslant F(b^{-2}x; y_p, \varkappa, (1))$$

dürfen wir $\mathfrak{b} = (1)$ annehmen.

Wir wenden Hilfssatz 4.2 an. Die Mellin-Transformierte ψ hat hier die Gestalt

$$\psi(s_1, \ldots, s_{r+1}) = 2^{r_2} \prod_{p=1}^{r+1} \psi_p(s_p),$$

wobei im Falle $p \in T_1$ gilt

$$\psi_p(s) = \int_0^\infty e^{-u} u^{e_p(s-y_p)-1} du = \Gamma\big(e_p(s-y_p)\big) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > y_p$$

und im Falle $p \in T_2$ (siehe etwa [6, § 53]):

$$\psi_p(s) = \int_0^\infty \frac{u^{e_p s - 1}}{(u+1)^{e_p \varkappa}} du = \frac{\Gamma(e_p s)\Gamma\big(e_p(\varkappa - s)\big)}{\Gamma(e_p \varkappa)} \quad \text{für } 0 < \operatorname{Re} s < \varkappa.$$

Wir setzen $y_0 = \max\{y_p\colon p \in T_1\}$, falls $T_1 \neq \emptyset$, sonst $y_0 = 0$; dann hat man also für $\max\{\frac{1}{2}, y_0\} < \sigma < \varkappa$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(F(x)) = \frac{2^{-r_1} w}{\pi i R} \sum_m \int_{(\sigma)} \prod_{p=1}^{r+1} \psi_p(s - iE_p(m)) \\ \times \zeta(2s; \lambda_m^2) \prod_{p=1}^{r+1} x_p^{-e_p(s-iE_p(m))} \cdot \exp\Big\{\varepsilon \sum_{p=1}^{r+1} e_p^2 (s - iE_p(m))^2\Big\} ds. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Es wäre nun nicht schwer nachzuweisen, daß man hier zur Grenze $\varepsilon \to 0+$ übergehen kann, wobei links $F(x)$ erscheint, während der Grenzübergang auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen vollzogen werden darf.

Da wir jedoch nur an einer oberen Schranke interessiert sind, schließen wir aus der Tatsache, daß $F(x)$ positiv und bezüglich jeder Variablen x_p monoton fallend ist:

$$\begin{aligned}2^{-(r+1)}F(x) &= (4\pi\varepsilon)^{-(r+1)/2} \int_{\mathbf{R}_+^{r+1}} F(x)e^{-|v|^2/(4\varepsilon)}dv \\ &\leqslant (4\pi\varepsilon)^{-(r+1)/2} \int_{\mathbf{R}_+^{r+1}} F(xe^{-v})e^{-|v|^2/(4\varepsilon)}dv \leqslant \mathscr{J}_\varepsilon(F(x))\end{aligned}$$

und haben demnach nur $\mathscr{J}_\varepsilon(F(x))$ für ein festes $\varepsilon > 0$, etwa für $\varepsilon = 1$, auszuwerten.

Mit Hilfe von Abschätzungen, wie sie in [8, §4] ausführlich dargestellt sind, sieht man leicht ein, daß die rechte Seite von (5.2) für jedes feste $\sigma > 0$ absolut konvergiert und $\ll X^{-\sigma}$ ist, sofern der Integrationsweg für kein m durch eine der Polstellen des Integranden geht.

Im Falle $y > \frac{1}{2}$ ergibt also die Wahl $\sigma = y$, daß $\mathscr{J}_\varepsilon(F(x)) \ll X^{-y}$. Ist $y \leqslant \frac{1}{2}$ und $X \geqslant 1$, so wählen wir $\sigma = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\varkappa) > \frac{1}{2}$ und erhalten $\mathscr{J}_\varepsilon(F(x)) \ll X^{-1/2}$.

Ist schließlich $y \leqslant \frac{1}{2}$ und $X < 1$, so verschieben wir in (5.2) den Integrationsweg nach links auf die Gerade $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}(y_0+y) < \frac{1}{2}$. Der dabei überstrichene einfache Pol der ζ-Funktion bei $s = \frac{1}{2}$, der nur für $m = 0$ auftritt, liefert dann einen Beitrag $\ll X^{-1/2}$, und die Summe der Integrale längs $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}(y_0+y)$ ist ebenfalls $\ll X^{-1/2}$. ∎

HILFSSATZ 5.4. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 5.3 sei $k/2 \leqslant y < \varkappa = k$, und es sei*

$$G(x) = \sum_{\mathbf{v}\equiv 0(\mathfrak{c})}' \prod_{p=1}^{r+1} \varphi_p(\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})x_p), \tag{5.3}$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ auszulassen ist.

Dann gilt für alle $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$

$$G(x) \ll X^{-y},$$

wo die $\ll$-Konstante nur von K, k, Q, $\mathfrak{a}$, y und den y_p abhängt.

Beweis. Wir fassen von den k-Tupeln $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ $(\nu_j \in \mathfrak{c}_j;\ j = 1, \ldots, k)$, über die in (5.3) summiert wird, jeweils die zusammen, bei denen dieselben Komponenten verschwinden.

Es sei etwa $G_l(x)$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$ diejenige Teilreihe von $G(x)$, bei der genau $\nu_1, \ldots, \nu_l$ von Null verschieden sind. Wir wählen gemäß Hilfssatz 5.1 eine Konstante $c = c(Q) > 0$ derart, daß

$$\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)}) \geqslant c \sum_{j=1}^{l} |\nu_j^{(p)}|^2 \qquad (p = 1, \ldots, r+1),$$

und schätzen mit Hilfe der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel weiter ab, und zwar für $p \in T_1$:

$$\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})x_p \geqslant \sum_{j=1}^{l} |\nu_j^{(p)}|^2 cx_p \gg \prod_{j=1}^{l} (|\nu_j^{(p)}|^2 cx_p)^{1/l}$$

und für $p \in T_2$:

$$\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})x_p + 1 \gg \sum_{j=1}^{l} (|\nu_j^{(p)}|^2 cx_p + 1) \gg \prod_{j=1}^{l} (|\nu_j^{(p)}|^2 cx_p + 1)^{1/l}.$$

Damit folgt

$$G_l(x) \ll \prod_{j=1}^{l} F(cx;\ y_p/l,\ \varkappa/l,\ \mathfrak{c}_j),$$

und Hilfssatz 5.3 ergibt

$$G_l(x) \ll X^{-\max\{1/2,\, y/l\}\cdot l} = X^{-y}. \ ∎$$

HILFSSATZ 5.5. *Es sei $\{1, \ldots, r+1\} = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ eine Zerlegung von $\{1, \ldots, r+1\}$ in drei disjunkte Teilmengen, deren jede auch leer sein darf. Für $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ und $\varepsilon > 0$ sei*

$$\begin{aligned}S_k^*(x, \varepsilon;\ M_1, M_2, M_3) &= X^{k/2} \sum_{\mathbf{v}\equiv 0(\mathfrak{c})}' \prod_{p\in M_1} \frac{e^{-\varepsilon B_p(\mathbf{v})}}{(B_p(\mathbf{v}))^{(e_pk+1)/4}} \\ &\times \prod_{p\in M_2} \frac{e^{-\varepsilon B_p(\mathbf{v})/2}}{(B_p(\mathbf{v}))^{(e_pk+2)/4}} \cdot \prod_{p\in M_3} e^{-(\log B_p(\mathbf{v}))^2/4}\end{aligned}$$

mit

$$B_p(\mathbf{v}) = \pi^2 e_p^2 \tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})x_p \qquad (p = 1, \ldots, r+1).$$

Es sei ferner

$$\begin{aligned}&0 \leqslant \delta < k/2, \quad \text{falls } k \geqslant 3 \text{ oder } M_2 \cap \{1, \ldots, r_1\} = \emptyset;\\ &0 < \delta < k/2 \quad \text{sonst}.\end{aligned}$$

Für $0 < \varepsilon \leqslant 1$ und alle $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ gilt dann

$$\begin{aligned}&S_k^*(x, \varepsilon;\ M_1, M_2, M_3) \ll \varepsilon^{-(nk-r-1)/4}, \quad \text{falls } M_2 = M_3 = \emptyset;\\ &S_k^*(x, \varepsilon;\ M_1, M_2, M_3) \ll (\varepsilon^n X)^{-\delta}\varepsilon^{-(nk-r-2)/4} \quad \text{sonst}.\end{aligned}$$

Die $\ll$-Konstanten hängen hierbei nur von K, k, Q, $\mathfrak{a}$ und δ ab.

Beweis. Mittels der Abschätzung

$$e^{-(\log B_p(\mathbf{v}))^2/4} \ll (B_p(\mathbf{v})+1)^{-e_pk} \qquad (p \in M_3)$$

läßt sich obige Reihe auf den in Hilfssatz 5.4 behandelten Typ mit $T_1 = M_1 \cup M_2$, $T_2 = M_3$ zurückführen. Setzt man nämlich $y = k/2+\delta$, so gilt

$$k > y > y_p := \begin{cases}(k+1/e_p)/4 & (p \in M_1),\\ (k+2/e_p)/4 & (p \in M_2),\end{cases}$$

wobei ersichtlich die Wahl $\delta = 0$ genau dann unzulässig ist, wenn $k = 2$ und $e_p = 1$ für ein $p \in M_2$.

Mit $a := \sum_{p\in T_1} e_p y_p$ hat man somit

$$\varepsilon^{-a} S_k^*(x, \varepsilon; M_1, M_2, M_3) \ll X^{k/2} G(x'),$$

wo

$$x_p' = \begin{cases} \varepsilon\pi^2 e_p^2 x_p & (p\in M_1), \\ \varepsilon\pi^2 e_p^2 x_p/2 & (p\in M_2), \\ \pi^2 e_p^2 x_p & (p\in M_3), \end{cases}$$

also $X' \gg \varepsilon^b X$ mit $b := \sum_{p\in T_1} e_p$. Hilfssatz 5.4 ergibt daher

$$S_k^*(x, \varepsilon; M_1, M_2, M_3) \ll X^{-\delta}\varepsilon^{-(by-a)}.$$

Hier ist

$$by - a \leqslant n\delta + \sum_{p\in T_1} (e_p k - 1)/4 - |M_2|/4$$

und

$$\sum_{p\in T_1} (e_p k - 1) - |M_2| \begin{cases} = nk - r - 1, & \text{falls } M_2 = M_3 = \emptyset; \\ \leqslant nk - r - 2 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Damit folgen die behaupteten Ungleichungen, wenn man noch beachtet, daß im Falle $M_2 = M_3 = \emptyset$ die Wahl $\delta = 0$ zulässig ist. ∎

Hilfssatz 5.6. *Für $x\in \mathbf{R}_+^{r+1}$ und $0 < \varepsilon \leqslant 1$ sei*

$$S_k^*(x, \varepsilon) = X^{k/2} \sum_{\nu\equiv 0(c)}' \prod_{p=1}^{r+1} \frac{e^{-\varepsilon B_p(\nu)}}{(B_p(\nu))^{(e_p k+1)/4}}$$

mit

$$B_p(\nu) = \pi^2 e_p^2 \tilde{Q}^{(p)}(\nu^{(p)}) x_p \quad (p = 1, \ldots, r+1).$$

Dann gilt stets

(5.4) $$S_k^*(x, \varepsilon) \ll \varepsilon^{-(nk-r-1)/4}$$

und im Falle $\varepsilon^n X \leqslant c$ auch

(5.5) $$S_k^*(x, \varepsilon) \gg \varepsilon^{-(nk-r-1)/4}.$$

Dabei bezeichnet c eine positive Konstante, die ebenso wie die durch die Symbole $\ll$ und $\gg$ implizierten Konstanten nur von K, k, Q und $\mathfrak{a}$ abhängt.

Beweis. (5.4) ist der Spezialfall $M_2 = M_3 = \emptyset$ von Hilfssatz 5.5. Was (5.5) betrifft, so folgt aus den Ungleichungen

$$e^v \cdot v^{-(e_p k+1)/4} \gg 1 \quad (v > 0;\ p = 1, \ldots, r+1),$$

daß

$$S_k^*(x, \varepsilon) \gg X^{k/2} \varepsilon^{(nk+r+1)/4} \sum_{\nu\equiv 0(c)}' \prod_{p=1}^{r+1} e^{-2\varepsilon B_p(\nu)}$$
$$= X^{k/2}\varepsilon^{(nk+r+1)/4} \{\Theta(u; \tilde{Q}, \mathfrak{c}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) - 1\},$$

wo $u_p = 2\pi e_p \varepsilon x_p$ für $p = 1, \ldots, r+1$ und $u_{p+r_2} = u_p$ für $p = r_1+1, \ldots, r+1$, also $u_1 \ldots u_n \ll \varepsilon^n X$. Nach Hilfssatz 2.1 gilt aber

$$\Theta(u; \tilde{Q}, \mathfrak{c}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \gg (u_1 \ldots u_n)^{-k/2} \Theta(1/u; Q, \mathfrak{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \gg (\varepsilon^n X)^{-k/2},$$

da $\Theta(1/u; Q, \mathfrak{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \geqslant 1$. Für genügend kleines $\varepsilon^n X$ folgt (5.5). ∎

6. Die grundlegende Gleichung. Für $x\in\mathbf{R}_+^{r+1}$ und $0 < \varepsilon \leqslant 1$ betrachten wir die über alle $\nu \equiv \mathbf{0}\,(\mathfrak{c})$ mit $\nu \neq \mathbf{0}$ erstreckte und nach Hilfssatz 5.6 absolut konvergente Reihe

$$S_k(x, \varepsilon) = C_1 X^{k/2} \sum_{\nu\equiv 0(c)}' e^{-2\pi i \alpha\cdot\nu} \prod_{p=1}^{r+1} \left\{ \frac{e^{-\varepsilon B_p(\nu)}}{(B_p(\nu))^{(e_p k+1)/4}} \cos\left(2\sqrt{B_p(\nu)} - \tfrac{1}{4}(e_p k+1)\pi\right) \right\},$$

wo

$$C_1 = \frac{2^{kr_2}\pi^{(nk-r-1)/2}}{|d|^{k/2} N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)\sqrt{D}}$$

und

$$B_p(\nu) = \pi^2 e_p^2 \tilde{Q}^{(p)}(\nu^{(p)}) x_p \quad (p = 1, \ldots, r+1)$$

gesetzt ist.

Das folgende Resultat bildet den Ausgangspunkt für den Beweis der Sätze 1 und 2:

Hilfssatz 6.1. *Für $x\in\mathbf{R}_+^{r+1}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ und $0 < \delta < k/2$ gilt*

$$\mathscr{I}_\varepsilon(P_k(x)) = S_k(x, \varepsilon) + O\left((\varepsilon^n X)^{-\delta} \varepsilon^{-(nk-r-2)/4}\right),$$

wo die O-Konstante nur von K, k, Q, $\mathfrak{a}$ und δ abhängt. Ist $k \geqslant 3$ oder $r_1 = 0$, so gilt diese Gleichung auch mit $\delta = 0$.

Beweis. Für $x = (x_1, \ldots, x_{r+1}) \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ sei

$$T := \int_{\mathbf{R}_+^{r+1}} \Theta\left(\frac{u_1}{\pi e_1 x_1}, \ldots, \frac{u_n}{\pi e_n x_n}; Q, \mathfrak{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}\right) \prod_{p=1}^{r+1} \Phi_\varepsilon(u_p)\,du,$$

wo nach $u = (u_1, \ldots, u_{r+1})$ integriert wird und

$$u_{p+r_2} = u_p, \quad x_{p+r_2} = x_p \quad \text{für } p = r_1+1, \ldots, r+1$$

ergänzt ist. Wegen (3.1) und Hilfssatz 5.2 ist T absolut konvergent; also kann man, nachdem man für Θ die definierende Reihe eingesetzt hat, Summation und Integration vertauschen und erhält

$$T = \sum_{\nu\equiv\alpha(\mathfrak{a})} \prod_{p=1}^{r+1} \int_0^\infty e^{-Q^{(p)}(\nu^{(p)})u_p/x_p} \Phi_\varepsilon(u_p)\,du_p$$
$$= (4\pi\varepsilon)^{-(r+1)/2} \sum_{\nu\equiv\alpha(\mathfrak{a})} \prod_{p=1}^{r+1} \int_{-\infty}^{\infty} \chi\left(Q^{(p)}(\nu^{(p)}) e^{v_p}/x_p\right) \exp\left(-v_p^2/(4\varepsilon)\right) dv_p$$

nach Hilfssatz 3.1. Substituiert man hier $v_p \to -v_p$, schreibt das Produkt als $r+1$-faches Integral und vertauscht abermals Summation und Integration, so erscheint

$$T = (4\pi\varepsilon)^{-(r+1)/2} \int_{\mathbf{R}^{r+1}} \sum_{\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{a})} \prod_{p=1}^{r+1} \chi\left(\frac{Q^{(p)}(\boldsymbol{v}^{(p)})}{x_p e^{v_p}}\right) \cdot e^{-|v|^2/(4\varepsilon)} dv = \mathscr{I}_\varepsilon(A_k(x)).$$

Andererseits ergibt die Anwendung der Transformationsformel aus Hilfssatz 2.1, daß

$$T = C_2 X^{k/2} \int_{\mathbf{R}_+^{r+1}} \Theta\left(\frac{\pi e_1 x_1}{u_1}, \ldots, \frac{\pi e_n x_n}{u_n}; \tilde{Q}, \mathfrak{c}, \mathbf{0}, -\boldsymbol{\alpha}\right) \prod_{p=1}^{r+1} \left(u_p^{-e_p k/2} \Phi_\varepsilon(u_p)\right) du$$

mit

$$C_2 = \frac{(4^{r_2}\pi^n)^{k/2}}{|d|^{k/2} N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)\sqrt{D}}.$$

Hier substituieren wir $u_p \to 1/u_p$, setzen für Θ erneut die Reihendarstellung ein und vertauschen Summation und Integration, was wieder aufgrund absoluter Konvergenz erlaubt ist; damit wird

$$T = C_2 X^{k/2} \sum_{\boldsymbol{v} \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{c})} e^{-2\pi i \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v}} \prod_{p=1}^{r+1} I_\varepsilon(B_p(\boldsymbol{v}), e_p k/2).$$

Den Hilfssätzen 3.2 und 4.1 zufolge liefert das Glied mit $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ den Beitrag

$$C_0 X^{k/2} e^{\varepsilon(r_1+4r_2)k^2/4} = \mathscr{I}_\varepsilon(C_0 X^{k/2}).$$

Im Falle $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ (d.h. hier: alle $\boldsymbol{v}^{(p)} \neq \mathbf{0}$) tragen wir für I_ε die Asymptotik aus Hilfssatz 3.2 ein und multiplizieren aus; das ergibt insgesamt

$$T = \mathscr{I}_\varepsilon(C_0 X^{k/2}) + S_k(x, \varepsilon) + O\left(\sum S_k^*(x, \varepsilon; M_1, M_2, M_3)\right),$$

wobei die Summe im Restglied erstreckt ist über sämtliche Zerlegungen von $\{1, \ldots, r+1\}$ in drei disjunkte Teilmengen M_1, M_2, M_3 derart, daß $|M_1| \leqslant r$.

Die Behauptung folgt nun aus Hilfssatz 5.5 und der Linearität von $\mathscr{I}_\varepsilon$. ∎

7. Beweis von Satz 1. Bei der Wahl $\delta = 1/(4n)$ ergibt Hilfssatz 6.1 in Verbindung mit Hilfssatz 5.6, daß

$$\mathscr{I}_\varepsilon(P_k(x)) \ll \varepsilon^{-(nk-r-1)/4} \cdot \{1 + X^{-1/(4n)}\} \tag{7.1}$$

für $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ und jedes $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$.

Wir wenden Hilfssatz 4.3 an, dessen Voraussetzungen für $F(x) = A_k(x)$ und $M(x) = C_0 X^{k/2}$ erfüllt sind mit

$$\left|x_p \frac{\partial}{\partial x_p} M(x)\right| \ll X^{k/2} =: \beta(X) \quad (p = 1, \ldots, r+1).$$

Wählen wir nun

$$\varepsilon = \varepsilon(X) = \tfrac{1}{2}(X+1)^{-2k/(nk-r+1)} \leqslant \tfrac{1}{2},$$

so ergibt (7.1)

$$\mathscr{I}_{\varepsilon(X)}(P_k(x)) \ll (X+1)^{\frac{k}{2} - \frac{k}{nk-r+1}} \cdot \{1 + X^{-1/(4n)}\} =: \alpha(X),$$

und da ebenfalls $\sqrt{\varepsilon(X)}\beta(X) \ll \alpha(X)$ ist, hat man

$$P_k(x) \ll \alpha(X) \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R}_+^{r+1}, \tag{7.2}$$

woraus für $X \geqslant 1$ die Behauptung folgt. ∎

Als Konsequenz aus (7.2) halten wir zur späteren Verwendung noch fest

$$P_k(x) \ll X^{k/2} + X^{-k/2} \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R}_+^{r+1}. \tag{7.3}$$

Natürlich kann man auf elementarem Wege (ähnlich wie bei Hilfssatz 5.2) leicht das bessere Resultat $P_k(x) \ll X^{k/2} + 1$ erzielen, aber (7.3) genügt vollauf für unsere Zwecke.

8. Vorbereitung des Beweises von Satz 2. Mit $c_1, \ldots, c_{22}$ bezeichnen wir in diesem und den folgenden Paragraphen positive Konstanten, die, ebenso wie sämtliche O- und $\ll$-Konstanten, nur von K, k, Q und $\mathfrak{a}$ abhängen.

Für $\lambda > 0$ sei

$$M_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in \mathscr{T}:\ \boldsymbol{v} \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{c});\ \tilde{Q}^{(p)}(\boldsymbol{v}^{(p)}) \leqslant \lambda \text{ für } p = 1, \ldots, r+1\}$$

und

$$\mathscr{N}_p(\lambda) = |\{\tilde{Q}^{(p)}(\boldsymbol{v}^{(p)}):\ \boldsymbol{v} \in M_\lambda\}| \quad (p = 1, \ldots, r+1),$$

die Anzahl der verschiedenen Werte, die $\tilde{Q}^{(p)}(\boldsymbol{v}^{(p)})$ für $\boldsymbol{v} \in M_\lambda$ annimmt, sowie

$$\mathscr{N}(\lambda) = \mathscr{N}_1(\lambda) + \ldots + \mathscr{N}_{r+1}(\lambda).$$

Hilfssatz 8.1. *Im Falle $r_1 > 0$ sei $k \not\equiv 1 \pmod 4$. Die Konstanten c_1 und $\Delta = c_2$ seien so beschaffen, daß*

$$\mathscr{N}(\lambda) \leqslant c_1 \lambda^{n\Delta} \quad \textit{für } \lambda \geqslant 1. \tag{8.1}$$

Zu jedem $\lambda \geqslant 1$ gibt es dann ein t im Intervall

$$10^{4c_1\lambda^{n\Delta}} \leqslant t \leqslant 10^{8c_1\lambda^{n\Delta}} \tag{8.2}$$

derart, daß für alle $\boldsymbol{v} \in M_\lambda$ gilt:

$$(-1)^V \prod_{p=1}^{r+1} \cos\left(2e_p\pi\sqrt{\tilde{Q}^{(p)}(\boldsymbol{v}^{(p)})t} - \tfrac{1}{4}(e_p k+1)\pi\right) \geqslant c_3, \tag{8.3}$$

wo

$$V = r_1\left[\frac{k+2}{4}\right] + r_2\left[\frac{k+1}{2}\right].$$

Beweis. Nach dem Approximationssatz von Dirichlet (siehe etwa [5, Satz 462]) gibt es ein t_0 im Intervall

$$100^{c_1\lambda^{n\Delta}} \leqslant t_0 \leqslant 100^{2c_1\lambda^{n\Delta}}$$

derart, daß

$$\|\sqrt{\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})}\,t_0\| \leqslant 1/100 \qquad \text{für } \mathbf{v}\in M_\lambda,\ p=1,\dots,r+1,$$

wobei

$$\|u\| = \min\{|u-g|:\ g\in\mathbf{Z}\} \qquad \text{für } u\in\mathbf{R}.$$

Nun ist

$$(-1)^{[(l+2)/4]}\cos\left(\frac{l+1}{4}\pi\right) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \text{für } l\in\mathbf{Z},\ l\not\equiv 1 \pmod 4;$$

mit $t=t_0^2$ gilt also (8.2) und, für $\mathbf{v}\in M_\lambda$ und $p=1,\dots,r+1$,

$$\begin{aligned}(-1)^{[(e_pk+2)/4]}&\cos\big(2e_p\pi\sqrt{\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})t}-\tfrac{1}{4}(e_pk+1)\pi\big)\\ &=(-1)^{[(e_pk+2)/4]}\cos\big(\tfrac{1}{4}(e_pk+1)\pi\pm 2e_p\pi\|\sqrt{\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})}\,t_0\|\big)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2e_p\pi}{100}>\frac{1}{2},\end{aligned}$$

wie man anhand des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung leicht einsieht. Es folgt (8.3). ■

HILFSSATZ 8.2. *Es sei* $\boldsymbol{\alpha}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{a})$. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* 8.1 *gibt es dann zu jedem* $X_0>0$ *ein* $x\in\mathbf{R}_+^{r+1}$ *(sogar mit* $x_1=x_2=\dots=x_{r+1}$*) und ein* $\varepsilon>0$ *derart, daß*

$$X>X_0;$$

(8.4) $$\varepsilon=c_4(X\log^{1/\Delta}X)^{-1/n};$$

(8.5) $$(-1)^V S_k(x,\varepsilon)\geqslant c_5(X\log^{1/\Delta}X)^{(k-(r+1)/n)/4}.$$

Beweis. Für $\boldsymbol{\alpha}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{a})$ und $\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{c})$ ist stets $e^{-2\pi i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}=1$. Wählt man daher zu $\lambda\geqslant 1$ eine Zahl t gemäß Hilfssatz 8.1 und setzt $x=(t,\dots,t)$, also $X=t^n$, so ergibt (8.3) für $0<\varepsilon\leqslant 1$:

$$\begin{aligned}(-1)^V S_k(x,\varepsilon)&\geqslant C_1X^{k/2}\Big(c_3\sum_{\mathbf{v}\in M_\lambda}{}'-\sum_{\substack{\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{c})\\ \mathbf{v}\notin M_\lambda}}\Big)\prod_{p=1}^{r+1}\frac{e^{-\varepsilon B_p(\mathbf{v})}}{(B_p(\mathbf{v}))^{(e_pk+1)/4}}\\ &=C_1X^{k/2}\Big(c_3\sum_{\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{c})}{}'-(1+c_3)\sum_{\substack{\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{c})\\ \mathbf{v}\notin M_\lambda}}\Big)\prod_{p=1}^{r+1}\frac{e^{-\varepsilon B_p(\mathbf{v})}}{(B_p(\mathbf{v}))^{(e_pk+1)/4}}\\ &\geqslant C_1\{c_3S_k^*(x,\varepsilon)-(1+c_3)e^{-\varepsilon\lambda t}S_k^*(x,\varepsilon/2)\},\end{aligned}$$

denn für $\mathbf{v}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{c})$, $\mathbf{v}\notin M_\lambda$ ist

$$\sum_{p=1}^{r+1}B_p(\mathbf{v})\geqslant\lambda t+\tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{r+1}B_p(\mathbf{v}).$$

Mit Hilfssatz 5.6 folgt

$$(-1)^V S_k(x,\varepsilon)\geqslant\varepsilon^{-(nk-r-1)/4}\cdot\{c_6-c_7e^{-\varepsilon\lambda t}\},$$

sobald $\varepsilon t=(\varepsilon^nX)^{1/n}\leqslant c_8$, also

(8.6) $$(-1)^V S_k(x,\varepsilon)\geqslant c_9\varepsilon^{-(nk-r-1)/4},$$

sobald außerdem $\varepsilon\lambda t\geqslant c_{10}$, wo $c_6-c_7e^{-c_{10}}\geqslant c_6/2$.

Für t gelten nach (8.2) die Ungleichungen

$$c_{11}\lambda\leqslant(\log t)^{1/(n\Delta)}\leqslant c_{12}\lambda.$$

Wir wählen jetzt

$$\varepsilon=c_{13}t^{-1}(\log t)^{-1/(n\Delta)}\qquad\text{mit } c_{13}:=c_{10}c_{12};$$

dann hat ε die in (8.4) angegebene Form, und Einsetzen in (8.6) ergibt (8.5).

Wir haben demnach nur noch zu zeigen, daß sämtliche im Lauf der Rechnung an x, t, ε, λ gestellten Forderungen erfüllt sind, wenn λ hinreichend groß ist. Für die Bedingung $X>X_0$ trifft dies wegen (8.2) sicherlich zu; ebenso hat man für genügend großes λ

$$\varepsilon\leqslant\varepsilon t=c_{13}(\log t)^{-1/(n\Delta)}\leqslant c_{13}/(c_{11}\lambda)\leqslant\min\{c_8,1\},$$

und schließlich gilt

$$\varepsilon\lambda t=c_{13}(\log t)^{-1/(n\Delta)}\lambda\geqslant c_{13}/c_{12}=c_{10}.\ ■$$

HILFSSATZ 8.3. *Es sei* $\boldsymbol{\alpha}\equiv\mathbf{0}(\mathfrak{a})$. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* 8.1 *gilt dann für* $X\to\infty$

$$(-1)^V P_k(x)=\Omega_+\big((X\log^{1/\Delta}X)^{(k-(r+1)/n)/4}\big).$$

Beweis. Es seien $X_0>1$ und $\varrho>0$ gegeben derart, daß

(8.7) $$(-1)^V P_k(x)\leqslant\varrho(X\log^{1/\Delta}X)^{(k-(r+1)/n)/4}$$

für alle $x\in\mathbf{R}_+^{r+1}$ mit $X\geqslant X_0$. Wir zeigen

(8.8) $$\varrho\geqslant c_{14}.$$

Es sei $x\in\mathbf{R}_+^{r+1}$ mit $X\geqslant e^nX_0$. Für $v\in\mathbf{R}^{r+1}$ mit $|v|\leqslant 1$ liegt dann auch xe^v im Gültigkeitsbereich von (8.7); also ist

$$\begin{aligned}(-1)^V P_k(xe^v)&\leqslant\varrho\left((X\log^{1/\Delta}X)e^{n|v|}\left(1+\frac{n|v|}{\log X}\right)^{1/\Delta}\right)^{(k-(r+1)/n)/4}\\ &\leqslant\varrho(X\log^{1/\Delta}X)^{(k-(r+1)/n)/4}e^{c_{15}|v|}.\end{aligned}$$

Ist dagegen $|v| > 1$, so hat man

$$|v|^2 \geqslant 4c_{16} + |v|^2/2$$

und nach (7.3):

$$P_k(xe^v) \ll X^{k/2} e^{c_{17}|v|}.$$

Damit folgt für $0 < \varepsilon \leqslant 1$

$$\begin{aligned}(-1)^V \mathscr{I}_\varepsilon(P_k(x)) &\leqslant \varrho (X \log^{1/\Delta} X)^{(k-(r+1)/n)/4} \cdot (4\pi\varepsilon)^{-(r+1)/2} \int_{\mathbf{R}^{r+1}} e^{c_{15}|v| - |v|^2/(4\varepsilon)} dv \\ &\quad + O\Big(X^{k/2} e^{-c_{16}/\varepsilon} \cdot (4\pi\varepsilon)^{-(r+1)/2} \int_{\mathbf{R}^{r+1}} e^{c_{17}|v| - |v|^2/(8\varepsilon)} dv\Big) \\ &\leqslant c_{18} \varrho (X \log^{1/\Delta} X)^{(k-(r+1)/n)/4} + O(X^{k/2} e^{-c_{16}/\varepsilon}),\end{aligned}$$

wie man mit Hilfe der Substitution $v \to \sqrt{\varepsilon} v$ leicht einsieht. Speziell für das in (8.4) angegebene ε ist also

$$(8.9) \qquad (-1)^V \mathscr{I}_\varepsilon(P_k(x)) \leqslant c_{18} \varrho (X \log^{1/\Delta} X)^{(k-(r+1)/n)/4} + O(1).$$

Andererseits folgt aus den Hilfssätzen 8.2 und 6.1 (mit $\delta = 1/(4n)$), daß es $x \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ mit beliebig großem X gibt, so daß mit ε gemäß (8.4) gilt

$$(-1)^V \mathscr{I}_\varepsilon(P_k(x)) \geqslant c_5 (X \log^{1/\Delta} X)^{(k-(r+1)/n)/4} \cdot \{1 + O(X^{-1/(4n)})\}.$$

Zusammen mit (8.9) impliziert dies aber (8.8), sobald X genügend groß ist. ∎

9. Beweis von Satz 2. Nach den Vorbereitungen in § 8 bleibt noch zu zeigen, daß das Δ des Satzes 2 die Bedingung (8.1) von Hilfssatz 8.1 erfüllt.

Zunächst ergibt sich aus Satz 1 für $p = 1, \ldots, r+1$ die triviale Abschätzung

$$\mathscr{N}_p(\lambda) \leqslant |M_\lambda| = A_k(\lambda, \ldots, \lambda; \tilde{Q}, \mathfrak{c}, \mathbf{0}) \ll \lambda^{nk/2} \qquad (\lambda \geqslant 1),$$

so daß in (8.1) die Wahl $\Delta = k/2$ sicherlich zulässig ist.

Es sei nun $p \in \{1, \ldots, r+1\}$ beliebig, fest mit $\Delta_p < \infty$. Dann hat auch L'_p endlichen Grad über $\mathbf{Q}$, denn jede der Zahlen $Q_{jl}^{(p)}/Q_{11}^{(p)} =: \theta$ ist algebraisch über L_p; es ist nämlich auch $\bar{\theta} \in L'_p$, und θ ist Wurzel von

$$(x-\theta)(x-\bar{\theta}) = x^2 - (\theta + \bar{\theta})x + \theta\bar{\theta} \in L_p[x].$$

Es sei $\tilde{\mathbf{Q}}^{(p)} = (q_{jl})_{j,l=1,\ldots,k}$, $D_p = \det \mathbf{Q}^{(p)}$. Dann ist $D_p q_{jl}$ die zu $Q_{jl}^{(p)}$ adjungierte Unterdeterminante von $\mathbf{Q}^{(p)}$; also liegen die Elemente der Matrix $(Q_{11}^{(p)})^{-k+1} D_p \tilde{\mathbf{Q}}^{(p)}$ sämtlich in L'_p. Wir wählen nun die natürliche Zahl m so, daß alle Elemente von $\gamma\tilde{\mathbf{Q}}^{(p)}$, wo $\gamma = m(Q_{11}^{(p)})^{-k+1} D_p$, sogar ganze Zahlen aus L'_p sind, und daß darüber hinaus $m\mathfrak{c}_1, \ldots, m\mathfrak{c}_k$ ganze Ideale sind; dann gilt (in leichtverständlicher Schreibweise)

$$\mathscr{N}_p(\lambda; \tilde{Q}, \mathfrak{c}) = \mathscr{N}_p(m^2\gamma\lambda; \gamma\tilde{Q}, m\mathfrak{c}).$$

Somit dürfen wir uns im folgenden auf den Fall beschränken, daß alle Elemente q_{jl} von $\tilde{\mathbf{Q}}^{(p)}$ ganze Zahlen aus L'_p und alle $\mathfrak{c}_j$ ganze Ideale sind, so daß also $\tilde{Q}^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})$ für $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}\,(\mathfrak{c})$ stets eine ganze Zahl aus L_p ist.

Es sei nun τ einer der Δ_p Isomorphismen von L_p in $\mathbf{C}$; dieser sei irgendwie zu einem Isomorphismus von L'_p in $\mathbf{C}$ fortgesetzt, den wir ebenfalls mit τ bezeichnen. Die τ-Bilder von $K^{(p)}$ und $\overline{K^{(p)}}$ befinden sich dann unter den zu K konjugierten Körpern, d.h. es gibt Zahlen $p', p'' \in \{1, \ldots, n\}$ derart, daß

$$\tau(v^{(p)}) = v^{(p')}, \quad \tau(\overline{v^{(p)}}) = v^{(p'')} \quad \text{für alle } v^{(p)} \in K^{(p)}$$

(im Falle $p \leqslant r_1$ ist natürlich $p' = p''$).

Ist also $\mathbf{v} \in M_\lambda$, so gilt für $\mu = Q^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)})$:

$$\begin{aligned}|\tau(\mu)| &= \Big|\sum_{j,l=1}^{k} v_j^{(p'')} \tau(q_{jl}) v_l^{(p')}\Big| \ll \sum_{j,l=1}^{k} |v_j^{(p'')}||v_l^{(p')}| \\ &\ll \Big(\sum_{j=1}^{k} |v_j^{(p'')}|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{l=1}^{k} |v_l^{(p')}|^2\Big)^{1/2} \\ &\ll \sqrt{\tilde{Q}^{(p'')}(\mathbf{v}^{(p'')})} \cdot \sqrt{\tilde{Q}^{(p')}(\mathbf{v}^{(p')})}\end{aligned}$$

nach Hilfssatz 5.1, und dies ist $\leqslant \lambda$ wegen $\mathbf{v} \in M_\lambda$ und (1.4).

$\mathscr{N}_p(\lambda)$ ist also höchstens gleich der Anzahl der ganzen Zahlen aus L_p, deren sämtliche Konjugierten dem Betrage nach $\leqslant c_{19}\lambda$ sind. Wegen der Gittereigenschaft der ganzen Zahlen aus L_p ist diese Anzahl aber $\ll \lambda^{\Delta_p}$.

Somit darf in (8.1) auch $\Delta = \Delta^*$ genommen werden, sofern alle Δ_p endlich sind. ∎

10. Beweis von Satz 3. Es sei etwa $\Delta_* = \Delta_1/n < \infty$.

Wir dürfen voraussetzen, daß die Koeffizienten von $Q^{(1)}$ ganze Zahlen aus L'_1 und die $\mathfrak{a}_j$ ganze Ideale sind; für passendes $m \in \mathbf{N}$ sind nämlich alle Elemente von $\gamma\mathbf{Q}^{(1)}$ ($\gamma = m/Q_{11}^{(1)}$) und alle $m\mathfrak{a}_j$ ganz, und

$$P_k(x; Q, \mathfrak{a}, \mathbf{0}) = P_k(m^2\gamma x; \gamma Q, m\mathfrak{a}, \mathbf{0}).$$

Es seien $\tau_1 = \mathrm{id}, \tau_2, \ldots, \tau_{\Delta_1}$ die Isomorphismen von L_1 in $\mathbf{C}$.

Ebenso wie in § 9 beweist man die Existenz einer Konstanten c_{20} derart, daß für $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}\,(\mathfrak{a})$ und $y > 0$ aus

$$(10.1) \qquad Q^{(p)}(\mathbf{v}^{(p)}) \leqslant y \qquad (p = 1, \ldots, r+1)$$

stets folgt

$$|\tau_j(\mu)| \leqslant c_{20} y \qquad (j = 1, \ldots, \Delta_1),$$

wo $\mu = Q^{(1)}(\mathbf{v}^{(1)}) \in L_1$.

Zu $l \in \mathbf{N}$ und $\varrho = \frac{1}{2}(c_{21} l)^{1-\Delta_1}$, wo $c_{21} = 2c_{20} + 1$, betrachten wir nun $x', x'' \in \mathbf{R}_+^{r+1}$ mit

$$x' = (l, l, \ldots, l), \qquad x'' = (l + \varrho, l, \ldots, l).$$

Dann ist $A_k(x') = A_k(x'')$. Anderenfalls gäbe es nämlich ein $\nu \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{a})$ mit

$$l < Q^{(1)}(\nu^{(1)}) \leqslant l+\varrho; \quad Q^{(p)}(\nu^{(p)}) \leqslant l \quad (p = 2, \ldots, r+1). \tag{10.2}$$

Also wäre (10.1) mit $y = 2l$ erfüllt, und daher würde für $\mu = Q^{(1)}(\nu^{(1)})$ gelten:

$$\tau_1(\mu) = \mu; \quad |\tau_j(\mu)| \leqslant 2c_{20}l \quad (j = 2, \ldots, \Delta_1).$$

Für die Norm (in L_1) der ganzen Zahl $\mu - l \in L_1$ folgte dann

$$\Big|\prod_{j=1}^{\Delta_1} (\tau_j(\mu)-l)\Big| \leqslant \varrho(c_{21}l)^{\Delta_1 - 1} = 1/2,$$

also $\mu = l$ im Widerspruch zu (10.2).

Somit hat man

$$P_k(x') - P_k(x'') = C_0\{((l+\varrho)^{e_1} l^{n-e_1})^{k/2} - l^{nk/2}\} = c_{22} l^{nk/2 - \Delta_1} + O(l^{nk/2 - 2\Delta_1}),$$

und deshalb kann nicht

$$P_k(x) = o(X^{k/2 - \Delta_*}) \quad (X \to \infty)$$

gelten, denn dies würde auf

$$P_k(x') - P_k(x'') = o(l^{nk/2 - \Delta_1}) \quad (l \to \infty)$$

führen. ∎

Literatur

[1] J. L. Hafner, *New omega theorems for two classical lattice point problems*, Invent. Math. 63 (1981), 181–186.

[2] —, *On the average order of a class of arithmetical functions*, J. Number Theory 15 (1982), 36–76.

[3] G. H. Hardy, *On Dirichlet's divisor problem*, Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1916), 1–25.

[4] E. Landau, *Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen. (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid.)*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 31 (1915), 458–476.

[5] —, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Nachdruck, Chelsea, New York 1969.

[6] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Nachdruck, Chelsea, New York 1965.

[7] U. Rausch, *Eine Formel für die Koeffizientensumme von Potenzreihen mit Anwendung auf das Kreis- und Kugelproblem in total reellen algebraischen Zahlkörpern*, Acta Arith. 50 (1988), 381–404.

[8] —, *A summation formula in algebraic number fields and applications, I*, J. Number Theory 36 (1990), 46–79.

[9] W. Schaal, *Übertragung des Kreisproblems auf reell-quadratische Zahlkörper*, Math. Ann. 145 (1962), 273–284.

[10] —, *On the expression of a number as the sum of two squares in totally real algebraic number fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 529–537.

[11] C. L. Siegel, *Additive Theorie der Zahlkörper II*, Math. Ann. 88 (1923), 184–210.

[12] G. Szegö, *Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II: Zahlentheoretische Anwendungen*, Math. Z. 25 (1926), 388–404.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Erzstraße 1
W-3392 Clausthal-Zellerfeld
Germany

Eingegangen am 29.3.1990 (2022)