[8] C. Meaney, *Transferring estimates for zonal convolution operators*, Anal. Math. 15 (1989), 175–193.
[9] A. Miyachi, *On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$*, J. Fac. Sci. Tokyo Sect. IA 27 (1980), 157–179.
[10] M. Plancherel et G. Pólya, *Fonctions entières intégrales de Fourier multiples*, Comment. Math. Helv. 9 (1937), 224–248.
[11] F. Ricci and E. M. Stein, *Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals II. Singular kernels supported on submanifolds*, J. Funct. Anal. 78 (1988), 56–84.
[12] M. H. Taibleson and G. Weiss, *The molecular characterization of certain Hardy spaces*, Astérisque 77 (1980), 68–149.

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS
TSINGHUA UNIVERSITY
BEIJING, 100084, CHINA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
BEIJING NORMAL UNIVERSITY
BEIJING, 100875, CHINA

Received March 28, 1991 (2794)
Revised version January 20, 1993

STUDIA MATHEMATICA 105 (2) (1993)

Construction de p-multiplicateurs

by

FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ VIELI (Lausanne)

Abstract. Using characteristic functions of polyhedra, we construct radial p-multipliers which are continuous over $\mathbb{R}^n$ but not continuously differentiable through S^{n-1} and give a p-multiplier criterion for homogeneous functions over $\mathbb{R}^2$. We also exhibit fractal p-multipliers over the real line.

1. Introduction. Les critères généraux permettant de décider si une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$ est un p-multiplicateur ne s'appliquent le plus souvent qu'à des fonctions suffisamment dérivables ou lipschitziennes (voir [St], chap. IV). Or, comme le remarque Stein lui-même, de tels critères ne permettent même pas de traiter le cas simple des fonctions indicatrices de polyèdres.

Aussi avons-nous choisi dans cet article une démarche «constructiviste». On sait que, si une suite de p-multiplicateurs dont la norme est uniformément bornée converge presque partout, alors sa limite est aussi un p-multiplicateur. A l'aide de ce résultat, nous montrons comment, à partir de fonctions indicatrices de polyèdres, on peut construire des exemples de p-multiplicateurs de $\mathbb{R}^2$ continus mais non dérivables partout; nous établissons un critère assez général pour les fonctions homogènes sur $\mathbb{R}^2$; nous exhibons des p-multiplicateurs sur $\mathbb{R}$ continus mais nulle part dérivables, ce qui met en évidence les limites de la caractérisation due à Stechkin ([EG], p. 105).

2. Définitions, notations. Nous désignerons par p un nombre réel > 1 *quelconque* fixé.

Soient G un groupe abélien localement compact, dx une mesure de Haar sur G, $\widehat{G}$ le groupe dual de G; la transformée de Fourier d'une fonction f dans $L^1(G)$ est définie pour $\gamma \in \widehat{G}$ comme

$$\widehat{f}(\gamma) = \mathcal{F}f(\gamma) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx\,.$$

On munit $\widehat{G}$ de la mesure de Haar $d\gamma$ permettant d'écrire $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 42B15, 42A45.

pour toute $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, ce qui autorise à étendre $\mathcal{F}$ en une unique isométrie, encore notée $\mathcal{F}$, de $L^2(G)$ dans $L^2(\widehat{G})$, d'inverse noté $\overline{\mathcal{F}}$.

La norme d'opérateur dans $\mathcal{L}(L^p(G))$ est notée simplement $\|\ \|$ (le contexte permettra toujours de la distinguer de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, aussi notée $\|\ \|$).

Si $f : G \to \mathbb{C}$ et $a \in G$, on pose $\tau_a f(x) = f(x-a)$ pour $x \in G$.

Un opérateur linéaire continu T de $L^p(G)$ dans $L^p(G)$ qui commute avec les translations (c'est-à-dire $T(\tau_a f) = \tau_a T(f)$ pour tous $a \in G$, $f \in L^p(G)$) est appelé *p-convoluteur*. L'ensemble des p-convoluteurs est noté $CV_p(G)$; c'est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{L}(L^p(G))$ ([L], p. 66).

Si $T \in CV_p(G)$, il existe une et une seule fonction φ dans $L^\infty(\widehat{G})$ telle que $\mathcal{F}(Tf) = \varphi\widehat{f}$ pour toute $f \in L^2(G) \cap L^p(G)$; de plus $\|\varphi\|_\infty \leq \|T\|$. On pose alors $\widehat{T} = \varphi$ et on définit $\mathcal{M}_p(\widehat{G}) = \{\widehat{T} \mid T \in CV_p(G)\}$ dont les éléments sont appelés *p-multiplicateurs* de G.

Réciproquement, étant donné $\varphi \in L^\infty(\widehat{G})$, nous notons T_φ l'opérateur défini sur $L^2(G) \cap L^p(G)$ par $\mathcal{F}(T_\varphi f) = \varphi\widehat{f}$. Si $\varphi \in \mathcal{M}_p(\widehat{G})$, T_φ se prolonge en un opérateur de $\mathcal{L}(L^p(G))$ avec $\|\varphi\|_\infty \leq \|T_\varphi\|$.

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_p(\widehat{G})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{M}_p(\widehat{G})$ et $T_{\lambda\varphi+\mu\psi} = \lambda T_\varphi + \mu T_\psi$.

Enfin, nous notons χ_A la fonction indicatrice d'un ensemble A.

3. Propriétés. Soient G et H des groupes abéliens localement compacts et $\mu : \widehat{H} \to \widehat{G}$ un homomorphisme continu. Si $\varphi \in \mathcal{M}_p(\widehat{G})$ et est continue, $\varphi \circ \mu \in \mathcal{M}_p(\widehat{H})$ et $\|T_{\varphi\circ\mu}\| \leq \|T_\varphi\|$ ([EG], p. 184). Dans le cas où $G = H = \mathbb{R}^n$ la continuité de φ n'est pas nécessaire ([H], p. 108).

Si $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ est définie par $\mu(t) = e^{2\pi i t}$, alors $\varphi \in \mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ si et seulement si $\varphi \circ \mu \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, sans condition de continuité sur φ, et en ce cas $\|T_{\varphi\circ\mu}\| = \|T_\varphi\|$ ([dL], p. 377).

Si $G = \mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{Z}$, alors $\varphi \in L^\infty(\widehat{G})$ et φ à variation bornée sur $\widehat{G}$ entraînent $\varphi \in \mathcal{M}_p(\widehat{G})$; de plus $\|T_\varphi\| \leq C_p \max(|\varphi(0)|, \mathrm{Var}_{\widehat{G}}(\varphi))$, où C_p est une constante indépendante de φ ([EG], p. 105). En fait, cela découle du cas particulier : $\chi_{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Découle aussi de ceci le fait qu'il existe une constante $Q_p > 1$ telle que, pour tout $n \geq 1$, si E est un demi-espace affine de $\mathbb{R}^n$, $\chi_E \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ et $\|T_{\chi_E}\| \leq Q_p$ ([So], pp. 72–75).

Si $f, g \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $fg \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ et $\|T_{fg}\| \leq \|T_f\| \cdot \|T_g\|$ ([H], p. 102). C'est pourquoi la fonction indicatrice d'un polyèdre convexe B à k faces dans $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire l'intersection non vide de k demi-espaces affines fermés de $\mathbb{R}^n$) est un p-multiplicateur dont la norme d'opérateur $\|T_{\chi_B}\|$ est dominée par $(Q_p)^k$.

Par contre, dans $\mathbb{R}^n$ avec $n > 1$, la fonction indicatrice de la boule n'est un p-multiplicateur que dans le cas trivial $p = 2$ (résultat célèbre de C. Fefferman [Fe]).

Notre principal outil sera la proposition suivante, dont on trouvera des versions différentes dans [EG] (lemme 2.4.2) et [dL] (corollaire 2.7).

PROPOSITION 1. *Soit $\varphi \in L^\infty(\widehat{G})$. S'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_p(\widehat{G})$ et une constante B positive telles que $\|T_{\varphi_n}\| \leq B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ presque partout, alors $\varphi \in \mathcal{M}_p(\widehat{G})$ et $\|T_\varphi\| \leq B$.*

4. Fonctions radiales. Soit $\Psi(\theta,\phi) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$ la paramétrisation habituelle de S^2, avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Notons $P(y) = P(\theta,\phi)$ le demi-espace affine de $\mathbb{R}^3$ tangent à S^2 en $y = \Psi(\theta,\phi)$ et ne contenant pas 0. Posons alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$f_m = \frac{2\pi^2}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \cos\left(\left(\frac{j}{m} - \frac{1}{2}\right)\pi\right) \cdot \chi_{P((j/m-1/2)\pi,(k/m)2\pi)}\,.$$

Il est clair, d'après le paragraphe précédent, que $f_m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^3)$ et que

$$\|T_{f_m}\| \leq \frac{2\pi^2}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} Q_p = 2\pi^2 Q_p\,.$$

Montrons que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers une fonction radiale f que nous déterminerons.

Fixons x dans $\mathbb{R}^3$ et posons $g_x(\theta,\phi) = \chi_{P(\theta,\phi)}(x)$; $g_x(\theta,\phi)$ vaut donc 1 si $x \in P(\theta,\phi)$ et 0 sinon; en particulier, $g_x \equiv 0$ si $\|x\| < 1$, puisque $P(\theta,\phi)$ est toujours extérieur à la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1. Nous supposerons donc $\|x\| \geq 1$ dans la suite de ce calcul. La valeur de f_m en x s'exprime avec g_x par

$$f_m(x) = \frac{2\pi^2}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} g_x\left(\left(\frac{j}{m} - \frac{1}{2}\right)\pi, \frac{k}{m}2\pi\right) \cos\left(\left(\frac{j}{m} - \frac{1}{2}\right)\pi\right).$$

On aura reconnu là une somme de Riemann associée à la fonction $g_x(\theta,\phi)\cos\theta$; par conséquent, cette fonction étant clairement intégrable au sens de Riemann,

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2\pi} g_x(\theta,\phi)\cos\theta\, d\theta\, d\phi\,,$$

ou encore, notant $d\sigma(y)$ l'élément d'aire sur S^2,

$$f(x) = \int_{S^2} \tilde{g}_x(y)\, d\sigma(y)\,,$$

$\tilde{g}_x(y)$ étant égal à 1 si $x \in P(y)$ et à 0 sinon.

Mais il est clair que x appartient au demi-espace extérieur tangent à S^2 en y si et seulement si y appartient à la calotte de S^2 formée des points

visibles depuis x, c'est-à-dire à l'ensemble $C(x)$ des points u de S^2 tels que le segment ouvert d'extrémités u et x n'intersecte pas S^2. Par conséquent,

$$f(x) = \int_{S^2} \chi_{C(x)}(y)\, d\sigma(y);$$

autrement dit, $f(x)$ est égal à la mesure superficielle sur S^2 de $C(x)$. Des raisonnements de géométrie élémentaire donnent finalement

$$f(x) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right).$$

Par souci de simplification nous conviendrons désormais de noter h_+ la fonction définie à partir d'une fonction quelconque h par $h_+ = (h + |h|)/2$.

Les calculs faits plus haut ainsi que la proposition 1 nous permettent d'énoncer

PROPOSITION 2. *La fonction* $(1 - 1/\|x\|)_+$ *est un p-multiplicateur de* $\mathbb{R}^3$ *et de* $\mathbb{R}^2$.

En effet, nous savons déjà que $(1 - 1/\|x\|)_+ \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^3)$. Via l'homomorphisme continu de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ donné par $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$, $(1-1/\|x\|)_+ \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^2)$.

Notre construction précédente se généralise sans difficulté à $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ quelconque. Il vient

PROPOSITION 3. *Soit* $n \geq 3$. *Notons* α_n *la fonction continue définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par* $\alpha_n(x) = 0$ *si* $\|x\| \leq 1$ *et, si* $\|x\| \geq 1$, *par*

$$\alpha_n(x) = \int_{S^{n-1}} \chi_{C(x)}(y)\, d\sigma(y)\,,$$

où $C(x)$ *désigne la calotte de* S^{n-1} *formée des points visibles depuis* x. *Alors* α_n *est un p-multiplicateur de* $\mathbb{R}^n$.

En particulier, pour les dimensions impaires, le calcul de α_n montre que, si $n = 2m + 3$, $m \geq 0$, la fonction

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{m}{k} \left(1 - \frac{1}{\|x\|^{2k+1}}\right)_+$$

est un p-multiplicateur de $\mathbb{R}^{2m+3}$. Par suite, en passant à $\mathbb{R}^3$ via μ : $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0, \ldots, 0)$, nous obtenons

COROLLAIRE 1. *Pour tout entier* $m \geq 1$, *la fonction* $(1 - 1/\|x\|^m)_+$ *est un p-multiplicateur de* $\mathbb{R}^3$ *(et de* $\mathbb{R}^2$*).*

P r e u v e. Nous le savons déjà pour m impair; pour m pair cela résulte de l'égalité

$$\left(1 - \frac{1}{\|x\|^{2k+1}}\right)_+ \cdot \left(1 - \frac{1}{\|x\|^{2l+1}}\right)_+ = \left(1 - \frac{1}{\|x\|^{2k+1}}\right)_+ + \left(1 - \frac{1}{\|x\|^{2l+1}}\right)_+ - \left(1 - \frac{1}{\|x\|^{2k+2l+2}}\right)_+$$

et du fait que le produit de deux p-multiplicateurs de $\mathbb{R}^n$ est encore un p-multiplicateur de $\mathbb{R}^n$.

Par des méthodes semblables, il est aussi possible d'obtenir des fonctions non radiales. Ainsi, par exemple, $(\operatorname{Arccos}|x_1| - \operatorname{Arcsin}|x_2|)_+$ appartient à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^2)$ (indication au lecteur intéressé : utiliser des rectangles). On peut même établir un critère assez général pour les fonctions homogènes sur $\mathbb{R}^2$: c'est l'objet du paragraphe suivant.

5. Fonctions homogènes. Une *fonction homogène* sera pour nous ici une fonction homogène de degré 0.

Notons $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ la paramétrisation habituelle de S^1, avec $t \in]0, 1]$. Posons $S^1_+ = \gamma(]0, 1/2])$ et $S^1_- = \gamma(]1/2, 1])$.

Toute fonction homogène h sur $\mathbb{R}^2$ est entièrement déterminée par sa restriction à $S^1 \cup \{0\}$. Nous notons alors $\Phi(h)$ la fonction définie sur $]0, 1]$ par $\Phi(h) = h \circ \gamma$. Réciproquement, si g est une fonction réelle définie sur $]0, 1]$, nous pouvons lui associer une fonction homogène $\Psi(g)$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\Psi(g)(x) = g \circ \gamma^{-1}(x/\|x\|)$ si $x \neq 0$ et $\Psi(g)(0) = 0$. Il est immédiat que si h est homogène sur $\mathbb{R}^2$, alors $h = \Psi(\Phi(h))$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. De plus Φ et Ψ sont des applications linéaires.

Prenons maintenant une fonction h homogène sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, nulle sur S^1_- et telle que $g = \Phi(h)$ soit positive croissante sur $]0, 1/2]$ (donc g est nulle sur $]1/2, 1]$). Notons $M = g(1/2)$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$g_m = \frac{M}{m} \sum_{k=1}^{m} \chi_{g^{-1}([kM/m,\, M])}.$$

On vérifie aisément que $0 \leq g(x) - g_m(x) \leq M/m$ pour tout $x \in]0, 1]$ et que donc $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $]0, 1]$. Puisque g est croissante sur $]0, 1/2]$ et nulle ailleurs, $g^{-1}([kM/m, M])$ est l'intervalle $[g^{-1}(kM/m), 1/2]$ que nous notons $[a(k, m), 1/2]$. Posons alors $h_m = \Psi(g_m)$, c'est-à-dire

$$h_m = \frac{M}{m} \sum_{k=1}^{m} \Psi\left(\chi_{[a(k,m),\, 1/2]}\right).$$

Si $a, b \in]0, 1]$, notons $S(a, b)$ le secteur plan $\{r\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq 0, a \leq t \leq b\}$.

Comme $\Psi(\chi_{[a,b]}) = \chi_{S(a,b)}$ sauf en 0, nous avons, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$h_m = \frac{M}{m} \sum_{k=1}^{m} \chi_{S(a(k,m),\,1/2)}\,.$$

Comme $\lim_{m\to\infty} g_m = g$ sur $]0,1]$, $\lim_{m\to\infty} \Psi(g_m) = \Psi(g)$ ponctuellement, c'est-à-dire $\lim_{m\to\infty} h_m = h$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Enfin, l'angle au sommet de $S(a(k,m),1/2)$ étant inférieur à π, vu que $0 < a(k,m) \le 1/2$, $S(a(k,m),1/2)$ est un polyèdre convexe à deux côtés; par conséquent, sa fonction indicatrice est un p-multiplicateur de $\mathbb{R}^2$ et la norme de l'opérateur associé est inférieure ou égale à $(Q_p)^2$. Il en découle que $h_m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^2)$ et $\|T_{h_m}\| \le M(Q_p)^2$.

Par la proposition 1 nous obtenons $h \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^2)$ et $\|T_h\| \le M(Q_p)^2$. D'où le critère :

THÉORÈME 1. *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est homogène et si sa restriction à S^1 est à variation bornée, h est un p-multiplicateur de $\mathbb{R}^2$.*

Preuve. Nous décomposons h en deux fonctions homogènes h_1 et h_2, celle-ci nulle sur S^1_+, celle-là sur S^1_-, avec $h = h_1 + h_2$. La restriction à S^1 de chacune de ces fonctions étant, via Φ, à variation bornée sur un intervalle ($]0,1/2]$ ou $]1/2,1]$), elle est la différence de deux fonctions positives croissantes sur cet intervalle ([L], p. 18) et nulles ailleurs. Nous avons donc $\Phi(h) = (g_1^+ - g_1^-) + (g_2^+ - g_2^-)$; par Ψ il vient $h = (h_1^+ - h_1^-) + (h_2^+ - h_2^-)$ et le raisonnement fait ci-dessus s'applique aux quatre fonctions h_1^+, h_1^-, h_2^+ et h_2^- : ce sont des p-multiplicateurs, donc h également.

6. Multiplicateurs fractaux. Nous n'avons construit jusqu'ici que des p-multiplicateurs assez réguliers. Or nous possédons les moyens suffisants pour exhiber quelques fonctions «monstrueuses» qui soient des p-multiplicateurs!, et ceci sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 1. *Si h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ et à variation bornée sur $[0,T]$, alors $h \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et il existe une constante positive C_p indépendante de h telle que $\|T_h\| \le C_p \max(|h(0)|, \mathrm{Var}_0^T(h))$.*

Preuve. Soient $\mu(t) = e^{2\pi i t}$, $\alpha(t) = t/T$ et $g(e^{2\pi i t}) = h(Tt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; g est bien définie sur $\mathbb{T}$, puisque h est périodique de période T; de plus g est à variation bornée sur $\mathbb{T}$. Donc $g \in \mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ et $\|T_g\| \le C_p \max(|g(0)|, \mathrm{Var}_{\mathbb{T}}(g))$ (voir §3). Alors, parce que μ et α sont des homomorphismes continus, $h = g \circ \mu \circ \alpha$ est un p-multiplicateur de $\mathbb{R}$ et $\|T_h\| \le \|T_g\| \le C_p \max(|h(0)|, \mathrm{Var}_0^T(h))$.

LEMME 2. *Soient $\varphi \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. Alors la fonction*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n x)$$

est un p-multiplicateur de $\mathbb{R}$.

Preuve. Comme φ est bornée et que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$, la série définissant f converge bien sur tout $\mathbb{R}$. Pour chaque entier n, posons $\beta_n(t) = b_n t$ et $\varphi_n = \varphi \circ \beta_n$; β_n étant un homomorphisme continu de $\mathbb{R}$, $\varphi_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $\|T_{\varphi_n}\| \le \|T_\varphi\|$ (voir §3). Posons

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\,.$$

La suite $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend ponctuellement vers f sur $\mathbb{R}$ et, quel que soit l'entier N, $f_N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec

$$\|T_{f_N}\| \le \sum_{n=1}^{N} |a_n|\,\|T_{\varphi_n}\| \le \|T_\varphi\| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,.$$

Par la proposition 1, $f \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Application. Sont donc des p-multiplicateurs les fonctions du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \sin(\lambda^n x)$$

(avec $1 < s < 2$, $\lambda > 1$), qu'on sait être continues, nulle part dérivables et avoir un graphe fractal pour λ assez grand ([Fa], chap. 11).

Bibliographie

[EG] R. E. Edwards and G. I. Gaudry, *Littlewood–Paley and Multiplier Theory*, Springer, Berlin 1977.

[Fa] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Wiley, Chichester 1990.

[Fe] C. Fefferman, *The multiplier problem for the ball*, Ann. of Math. 94 (1971), 330–336.

[H] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. 104 (1960), 94–140.

[L] R. Larsen, *An Introduction to the Theory of Multipliers*, Springer, New York 1971.

[dL] K. de Leeuw, *On L_p multipliers*, Ann. of Math. 81 (1965), 364–379.

[L] S. Lojasiewicz, *An Introduction to the Theory of Real Functions*, Wiley, Chichester 1988.

[So] P. M. Soardi, *Serie di Fourier in più variabili*, Pitagora Editrice, Bologna 1984.

[St] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE LAUSANNE
CH-1015 LAUSANNE, SUISSE

Received April 7, 1992 (2925)

STUDIA MATHEMATICA 105 (2) (1993)

Two characterizations of automorphisms on $B(X)$

by

PETER ŠEMRL (Ljubljana)

Abstract. Let X be an infinite-dimensional Banach space, and let ϕ be a surjective linear map on $B(X)$ with $\phi(I) = I$. If ϕ preserves injective operators in both directions then ϕ is an automorphism of the algebra $B(X)$. If X is a Hilbert space, then ϕ is an automorphism of $B(X)$ if and only if it preserves surjective operators in both directions.

Let X be an infinite-dimensional Banach space and let $B(X)$ denote the algebra of all bounded linear operators on X. Recall that the *point spectrum* $\sigma_p(T)$ of an operator $T \in B(X)$ is the set of all eigenvalues of T. The *surjectivity spectrum* $\sigma_s(T)$ of an operator $T \in B(X)$ is defined as $\sigma_s(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)X \neq X\}$. For basic facts concerning the surjectivity spectrum we refer the reader to [7]. It should be mentioned that the surjectivity spectrum has been called other things by other authors, e.g. approximate defect spectrum in [3].

We shall consider linear mappings ϕ on $B(X)$ which satisfy $\phi(I) = I$ and preserve injective operators in both directions: i.e., for every $T \in B(X)$ the operator $\phi(T)$ is injective if and only if T is injective. It is easy to see that such mappings preserve the point spectrum, that is, $\sigma_p(T)$ equals $\sigma_p(\phi(T))$ for every $T \in B(X)$. Conversely, if $\phi : B(X) \to B(X)$ is a point spectrum preserving surjective linear mapping, then one can prove using the same approach as in [5, Lemma 3] that $\phi(I) = I$. Moreover, such a ϕ preserves injective operators in both directions. We shall prove that for every point spectrum preserving surjective linear mapping $\phi : B(X) \to B(X)$ there exists a bounded invertible linear operator $A : X \to X$ such that $\phi(T) = ATA^{-1}$ for every $T \in B(X)$. Hence, we will show that a surjective linear mapping ϕ on $B(X)$ is an automorphism if and only if ϕ preserves injective operators in both directions and satisfies $\phi(I) = I$. In the case that X is an infinite-dimensional Hilbert space we shall prove an analogous

1991 *Mathematics Subject Classification*: 47A10, 47B49.
This work was supported by the Research Council of Slovenia.