

*PHÉNOMÈNE DE CUTOFF POUR CERTAINES MARCHES
ALÉATOIRES SUR LE GROUPE SYMÉTRIQUE*

PAR

SANDRINE ROUSSEL (TOULOUSE)

Abstract. The main purpose of this paper is to exhibit the cutoff phenomenon, studied by Aldous and Diaconis [AD]. Let Q^{*k} denote a transition kernel after k steps and π be a stationary measure. We have to find a critical value k_n for which the total variation norm between Q^{*k} and π stays very close to 1 for $k \ll k_n$, and falls rapidly to a value close to 0 for $k \geq k_n$ with a fall-off phase much shorter than k_n . According to the work of Diaconis and Shahshahani [DS], one can naturally conjecture, for a conjugacy class with $n - c$ fixed points, with $c \ll n$, that the associated random walk presents a cutoff, with critical value equal to $\frac{1}{c}n \ln n$. Using Fourier analysis, we prove that, in this context, the critical value cannot be less than $\frac{1}{c}n \ln n$. We also prove that the conjecture is true for conjugacy classes with at least $n - 6$ fixed points and for a conjugacy class of cycle length 7.

1. Introduction. On considère une famille de groupes $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sur chacun desquels on définit une chaîne de Markov, de noyau de transition Q_n et de mesure stationnaire π_n . Nous nous intéressons dans cet article au comportement de la distance en variation totale entre Q_n^{*k} et π_n . Nous souhaitons mettre en évidence le phénomène de cutoff, étudié en particulier par Aldous et Diaconis [AD], qui traduit le fait que la norme en variation totale reste proche de sa valeur maximale 1 pendant un moment, puis, en un laps de temps très court, se rapproche de 0 avant de décroître à une vitesse exponentielle. Plus formellement, définissons a_n et b_n , deux suites tendant vers l'infini avec b_n/a_n tendant vers 0 et $k_n = [a_n + cb_n]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x . Nous dirons que la famille de chaînes (G_n, Q_n, π_n) admet un (a_n, b_n) -cutoff si pour tout réel c , il existe $f, g \geq 0$ telles que $\lim_{c \rightarrow +\infty} g(c) = 0$ et $\lim_{c \rightarrow -\infty} f(c) = 1$, vérifiant

$$(1) \quad f(c) \leq \|Q_n^{*k_n} - \pi_n\|_{\text{TV}} \leq g(c).$$

Diaconis [D1] présente beaucoup d'exemples de marches aléatoires sur les groupes avec ou sans cutoff. Parmi les exemples où ce phénomène se produit, le plus simple est celui de la marche aléatoire canonique sur $(\mathbb{Z}_2)^n$. Un deuxième exemple fondamental est celui de la marche aléatoire évoluant

2000 *Mathematics Subject Classification*: 60J05, 60B15, 20B30, 20C30.

Ce travail a reçu un support partiel de la subvention NATO CRG 950686.

sur S_n , de noyau de transition la mesure uniforme sur la classe de conjugaison des transpositions. Dans ce cas, le cutoff a été mis en évidence par Diaconis et Shahshahani [DS] avec $a_n = \frac{1}{2}n \ln n$ et $b_n = \frac{1}{2}n$. Voir aussi [SC2], paragraphe 2.4.2. Nous nous proposons d'étudier ce phénomène pour d'autres marches aléatoires sur S_n , de noyau de transition $Q_{n,\mathcal{C}}$, la mesure uniforme sur une classe de conjugaison \mathcal{C} . Notons $\delta = \delta_{\text{id}}$ la mesure de Dirac en l'identité.

Les classes de conjugaison du groupe symétrique sont caractérisées par le type de la décomposition en produit de cycles disjoints des permutations qu'elles contiennent (cf. [JK]). Il est facile de voir (cf. [R2]) que les classes ne contenant que des permutations paires forment des systèmes symétriques de générateurs du groupe alterné A_n . Dans ce cas, la marche aléatoire de noyau de transition $Q_{n,\mathcal{C}}$ et de mesure initiale δ est une chaîne de Markov irréductible sur A_n , ergodique et de mesure stationnaire $\bar{\pi}_n$, la mesure uniforme de A_n . La loi de cette chaîne à l'instant k est donnée par $Q_{n,\mathcal{C}}^{*k}$.

Les classes de conjugaison ne contenant que des permutations impaires sont, elles, des systèmes symétriques de générateurs du groupe S_n (cf. [R2]). Dans ce cas, la marche aléatoire de noyau de transition $Q_{n,\mathcal{C}}$ et de mesure initiale δ ne converge pas car elle possède deux classes de périodicité. Cependant, celle de mesure initiale $\gamma_{n,\mathcal{C}} = \frac{1}{2}(\delta + Q_{n,\mathcal{C}})$ et de même noyau de transition converge vers π_n , la mesure uniforme sur S_n . La loi à l'instant k est donnée par $Q_{k,n,\mathcal{C}} = Q_{n,\mathcal{C}}^{*k-1} * \gamma_{n,\mathcal{C}}$.

Au vu de l'article [DS], une conjecture naturelle est que si \mathcal{C} est paire, la famille $(A_n, \delta, Q_{n,\mathcal{C}}, \bar{\pi}_n)$ (respectivement $(S_n, \gamma_{n,\mathcal{C}}, Q_{n,\mathcal{C}}, \pi_n)$ lorsque \mathcal{C} est impaire) admet un $(a_{n,\mathcal{C}}, b_{n,\mathcal{C}})$ -cutoff avec

$$a_{n,\mathcal{C}} = \frac{1}{\|\mathcal{C}\|} n \ln n \quad \text{et} \quad b_{n,\mathcal{C}} = \frac{1}{\|\mathcal{C}\|} n$$

où $\|\mathcal{C}\|$ est le cardinal du complémentaire dans $\{1, \dots, n\}$ du nombre de points fixes des permutations de \mathcal{C} . Les deux énoncés suivants précisent le genre de résultats que nous souhaiterions obtenir.

CONJECTURE 1.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε et une constante positive B_ε tels que si \mathcal{C} est une classe de conjugaison paire, si $n \geq n_\varepsilon$, $\|\mathcal{C}\| \leq (1 - \varepsilon)n$ et si $k_n = \frac{n}{\|\mathcal{C}\|}(\ln n + c)$ avec $c > 0$, alors*

$$\|Q_{n,\mathcal{C}}^{*k_n} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} \leq B_\varepsilon e^{-c}.$$

CONJECTURE 1.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier m_ε et une constante positive D_ε tels que si \mathcal{C} est une classe de conjugaison paire, si $n \geq m_\varepsilon$, $\|\mathcal{C}\| \leq (1 - \varepsilon)n$ et si $k_n = \frac{n-1}{\|\mathcal{C}\|}(\ln(n-1) - c)$ avec $0 < c \leq \ln(n-1)$ alors*

$$\|Q_{n,\mathcal{C}}^{*k_n} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} \geq 1 - D_\varepsilon e^{-c} - h(n), \quad \text{où} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0.$$

Ces conjectures s'adaptent aisément pour la famille $(S_n, \gamma_{n,C}, Q_{n,C}, \pi_n)$ dans le cas impair.

Nous verrons au paragraphe 2 comment obtenir des bornes supérieures et inférieures de la norme en variation totale grâce à l'analyse de Fourier et aux représentations irréductibles du groupe symétrique. L'objet du paragraphe 3 est de démontrer le théorème 1.3 qui prouve la conjecture 1.2.

THÉORÈME 1.3. *Si C est paire, si n est tel que*

$$\|C\| < \frac{n-1}{\ln(n-1)+1}$$

et si

$$k_n = \frac{n-1}{\|C\|}(\ln(n-1) - c) \quad \text{avec } 0 < c \leq \ln(n-1)$$

alors

$$\|Q_{n,C}^{*k_n} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} \geq 1 - 11e^{-c} - \frac{11}{5} \cdot \frac{\ln(n-1)+1}{(n-1)(\ln(n-1))^2}.$$

Dans le dernier paragraphe nous prouverons deux lemmes qui, sous un certain nombre d'hypothèses techniques devant être vérifiées dans chaque cas étudié, permettent de démontrer des résultats dans l'esprit de la conjecture 1.1 pour des cas particuliers. Nous donnerons quelques exemples. La conjecture 1.1 reste ouverte.

2. Analyse de Fourier, normes et partitions

2.1. Analyse de Fourier. Soit ϱ une représentation irréductible d'un groupe G , et Q une mesure de probabilité sur ce groupe. On définit une transformation analogue à la transformée de Fourier par la relation

$$\varrho(Q) = \sum_{x \in G} Q(x)\varrho(x).$$

Si Q_1 et Q_2 sont deux fonctions sur G , leur produit de convolution est défini par

$$\forall x \in G, \quad Q_1 * Q_2(x) = \sum_{y \in G} Q_1(y^{-1}x)Q_2(y) \quad \text{et} \quad \varrho(Q_1 * Q_2) = \varrho(Q_1)\varrho(Q_2).$$

La formule de Plancherel,

$$\sum_{x \in G} |Q(x)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{\varrho \in \widehat{G}} d_\varrho \text{Tr}(\varrho(Q)(\varrho(Q))^*),$$

où \widehat{G} est l'ensemble des représentations irréductibles de G et \star désigne la matrice adjointe, associée au lemme de Schur, permet d'exprimer la norme l^2 de Q en fonction des caractères des représentations irréductibles du groupe G . Dans [D2], Diaconis montre à l'aide du lemme de Schur que lorsque Q vaut Q_C , la mesure uniforme sur la classe de conjugaison C de G ,

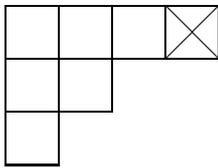
alors $\varrho(Q_{\mathcal{C}}) = \mu_{\varrho} I_{d_{\varrho}}$, où $I_{d_{\varrho}}$ est la matrice identité d'ordre d_{ϱ} et μ_{ϱ} une constante dépendant de la représentation. Il suffit ensuite de calculer la trace de $\varrho(Q_{\mathcal{C}})$ pour trouver $\mu_{\varrho} = \chi_{\varrho, \mathcal{C}}/d_{\varrho}$ où $\chi_{\varrho, \mathcal{C}}$ est la valeur du caractère de la représentation ϱ sur la classe de conjugaison \mathcal{C} . Ceci, combiné avec la formule de Plancherel, donne

$$(2) \quad \sum_{x \in G} |Q_{\mathcal{C}}(x)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{\varrho \in \widehat{G}} d_{\varrho}^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_{\varrho}} \right)^{2k}.$$

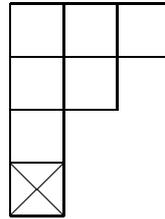
Roichman [R1] donne une borne de $\chi_{\varrho, \mathcal{C}}/d_{\varrho}$ dans un cadre tout à fait général, qu'il utilise ensuite pour estimer la vitesse de convergence des marches aléatoires sur A_n , engendrées par les classes de conjugaison. Nous souhaitons ici obtenir des résultats plus fins sur $\chi_{\varrho, \mathcal{C}}/d_{\varrho}$, nécessaires à la mise en évidence du phénomène de cutoff.

2.2. Partitions et représentations irréductibles de S_n . La théorie des représentations linéaires de S_n a fait l'objet de nombreux ouvrages. Sagan [Sag] explique comment construire les représentations irréductibles de S_n à partir des partitions de n (i.e. des m -uplets $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ avec $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 1$ et $\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i = n$) et plus précisément, à partir des diagrammes de Young associés à chaque partition λ et construits de sorte que la première ligne contienne λ_1 cases, la seconde λ_2 etc. Le diagramme obtenu à partir du diagramme d'une partition λ en échangeant les lignes et les colonnes est le diagramme de ${}^t\lambda$, la transposée de λ . Deux représentations irréductibles correspondant à deux partitions transposées l'une de l'autre sont dites *conjuguées*.

EXEMPLE 2.1. Voici les diagrammes d'une partition et de sa transposée.



$\lambda = (4, 2, 1)$



${}^t\lambda = (3, 2, 1, 1)$

Ces diagrammes permettent un calcul simple des dimensions.

LEMME 2.2. *La dimension de la représentation irréductible issue de λ , une partition de n , est égale au nombre de façons de placer les chiffres $1, \dots, n$ dans le diagramme de Young de λ , de sorte que les nombres de chaque colonne et de chaque ligne soient inscrits dans l'ordre croissant.*

Une conséquence directe est le corollaire suivant, démontré dans [DS].

COROLLAIRE 2.3. *La dimension d_ϱ de la représentation irréductible issue de la partition $\lambda_\varrho = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ vérifie*

$$d_\varrho \leq C_n^{\lambda_1} \sqrt{(n - \lambda_1)!}.$$

Le lemme suivant (cf. [Jam]) donne les liens existants entre deux représentations irréductibles issues de deux partitions transposées.

LEMME 2.4. *Si ϱ et ϱ' sont deux représentations conjuguées l'une de l'autre, alors $d_\varrho = d_{\varrho'}$ et, pour tout τ dans S_n ,*

$$\chi_\varrho(\tau) = \text{sign}(\tau) \chi_{\varrho'}(\tau).$$

Si λ et λ' sont deux partitions de n , nous dirons que λ est inférieure à λ' , et nous noterons $\lambda \leq \lambda'$, si nous pouvons obtenir le diagramme de λ' à partir de celui de λ en remontant simplement certains des cubes situés en bout de lignes. Dans l'exemple 2.1, en considérant les cases marquées d'une croix, on remarque que $(3, 2, 1, 1) \leq (4, 2, 1)$.

On montre dans [R2] que les seules représentations irréductibles de dimension 1 sont la représentation triviale (notée ϱ_1), constante et égale à 1, issue de la partition (n) et la représentation signature (notée ϱ_2), issue de la partition $(1, 1, \dots, 1)$ et qui à tout élément de S_n associe sa signature. On montre également que la représentation irréductible associée à la partition $(n - 1, 1)$ (notée ϱ_0) est de dimension $n - 1$ et son caractère sur la classe de conjugaison \mathcal{C} vaut $\chi_{\varrho_0, \mathcal{C}} = n - \|\mathcal{C}\| - 1$.

2.3. Bornes pour la norme en variation totale. Notons E un ensemble contenant le support de la mesure $Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}$, $|E|$ son cardinal, \mathbb{I}_E la fonction indicatrice de l'ensemble E et $\|\cdot\|_p$ la norme de l'espace $l^p(E)$. La norme en variation totale est définie par

$$\left\| Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \frac{1}{|E|} \mathbb{I}_E \right\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2} \left\| Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \frac{1}{|E|} \mathbb{I}_E \right\|_1.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\left\| Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \frac{\mathbb{I}_E}{|E|} \right\|_{\text{TV}}^2 \leq \frac{|E|}{4} \left\| Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \frac{\mathbb{I}_E}{|E|} \right\|_2^2 = \frac{|E|}{4} \left(\sum_{x \in E} |Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}(x)|^2 - \frac{1}{|E|} \right),$$

et avec la relation (2) nous obtenons

$$(3) \quad \left\| Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \frac{1}{|E|} \mathbb{I}_E \right\|_{\text{TV}}^2 \leq \frac{1}{4} |E| \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\varrho \in \widehat{G}} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k} - \frac{1}{|E|} \right).$$

Si \mathcal{C} est une classe paire, ceci appliqué à $G = S_n$ et $E = A_n$ donne

$$(4) \quad \|Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}}^2 \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{\varrho \in \widehat{S}_n} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k} - 2 \right) \leq \frac{1}{8} \sum_{\varrho \in \widehat{S}_n^*} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k},$$

avec $\widehat{S}_n^\bullet = \widehat{S}_n \setminus \{\varrho_1, \varrho_2\}$ où ϱ_1 est la représentation triviale et ϱ_2 la représentation signature dont nous avons déjà parlé.

Pour la marche aléatoire évoluant sur S_n (lorsque \mathcal{C} est impaire), il est facile de montrer que

$$\varrho(Q_{k,n,\mathcal{C}}) = \frac{1}{2}(\varrho(Q_{n,\mathcal{C}}))^{k-1}(1 + \varrho(Q_{n,\mathcal{C}})) \quad \text{où} \quad Q_{k,n,\mathcal{C}} = Q_{n,\mathcal{C}}^{*k-1} * \left(\frac{\delta_{\text{id}} + Q_{n,\mathcal{C}}}{2} \right).$$

On obtient ensuite, du fait que les quotients $\chi_{\varrho,\mathcal{C}}/d_\varrho$ sont tous inférieurs à 1,

$$(5) \quad \begin{aligned} \|Q_{k,n,\mathcal{C}} - \pi_n\|_{\text{TV}}^2 &\leq \frac{1}{16} \sum_{\varrho \in \widehat{S}_n^\bullet} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho,\mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2(k-1)} \left(1 + \frac{\chi_{\varrho,\mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{\varrho \in \widehat{S}_n^\bullet} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho,\mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2(k-1)}. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.5. Au vu de la conjecture 1.1 et des majorations (4) et (5), il suffira d'étudier des sommes du type

$$\sum_{\varrho \in \widehat{S}_n^\bullet} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho,\mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2r}, \quad \text{où} \quad r = \frac{n}{\|\mathcal{C}\|} (\ln n + c).$$

Les résultats de minoration découleront du lemme suivant.

LEMME 2.6. *Considérons la marche aléatoire de noyau symétrique K , évoluant sur un groupe G . Fixons x dans G , notons K_x^k la mesure de probabilité $K^k(x, \cdot)$ et U la mesure uniforme sur G . Soit ϕ une fonction propre de K associée à la valeur propre $\mu \neq 1$. Supposons de plus $\phi(x) \neq 0$. Alors*

$$\|K_x^k - U\|_{\text{TV}} \geq 1 - \frac{4 \text{Var}_U(\phi)}{|\phi(x)|^2} \mu^{-2k} - \frac{4 \text{Var}_{K_x^k}(\phi)}{|\phi(x)|^2} \mu^{-2k}.$$

Preuve. L'idée de ce lemme a été utilisée dans [DS] et est exposée dans [D2]. Elle repose sur la définition suivante de la norme en variation totale, équivalente à celle que nous avons donnée :

$$\|K_x^k - U\|_{\text{TV}} = \max_{A \subset E} (K_x^k(A) - U(A)).$$

On obtient la minoration en calculant $K_x^k(B) - U(B)$ pour l'ensemble B défini par $B = \{y \mid \phi(y) \leq \frac{1}{2} \text{E}_{K_x^k}(\phi)\}$. Nous renvoyons au lemme 2.2 de [SC1] pour les détails. ■

Nous allons appliquer ce lemme à $G = A_n$, $x = \text{id}$, $K(\text{id}, y) = Q_{n,\mathcal{C}}(y)$ avec \mathcal{C} paire et $U = \overline{\pi}_n$. Les valeurs propres de $Q_{n,\mathcal{C}}$, vu comme un opérateur agissant sur $l^2(S_n)$, sont les $\chi_{\varrho,\mathcal{C}}/d_\varrho$, avec ϱ représentation irréductible de S_n , et les fonctions propres associées sont les caractères χ_ϱ . En remarquant

que $\chi_{\varrho}(\text{id}) = d_{\varrho}$ et en notant $\mu = \mu_{\varrho, \mathcal{C}} = \chi_{\varrho, \mathcal{C}}/d_{\varrho}$, la minoration obtenue est

$$\|Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} \geq 1 - \frac{4 \text{Var}_{\bar{\pi}_n}(\chi_{\varrho})}{d_{\varrho}^2} \mu^{-2k} - \frac{4 \text{Var}_{Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}}(\chi_{\varrho})}{d_{\varrho}^2} \mu^{-2k}.$$

La théorie des représentations irréductibles assure que $\text{Var}_{\bar{\pi}_n}(\chi_{\varrho}) = 1$. D'autre part,

$$\text{Var}_{Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}}(\chi_{\varrho}) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_{\varrho}^2(\sigma) Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}(\sigma) - (\mathbb{E}_{Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}}(\chi_{\varrho}))^2.$$

Les caractères irréductibles χ_{ϱ} étant les fonctions propres de $Q_{n, \mathcal{C}}$, on a $\mathbb{E}_{Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}}(\chi_{\varrho}) = \mu_{\varrho, \mathcal{C}}^k d_{\varrho}$. Pour l'autre terme, il suffit d'interpréter χ_{ϱ}^2 comme le caractère de la représentation $\varrho \otimes \varrho$, de dimension d_{ϱ}^2 (cf. [Ser]), qui se décompose en somme directe de représentations irréductibles,

$$\varrho \otimes \varrho = \bigoplus_{j \in J} \varrho_j \quad \text{où } J \text{ est un ensemble fini.}$$

Nous avons alors $\chi_{\varrho}^2 = \sum_{j \in J} \chi_{\varrho_j}$ où les χ_{ϱ_j} sont des fonctions propres de $Q_{n, \mathcal{C}}$ associées aux valeurs propres $\mu_{j, \mathcal{C}} = \chi_{\varrho_j, \mathcal{C}}/d_{\varrho}$. Il est alors clair que

$$\sum_{\sigma \in S_n} \chi_{\varrho}^2(\sigma) Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}(\sigma) = \sum_{j \in J} \mu_{j, \mathcal{C}}^k d_{\varrho_j}.$$

De plus, nous avons $d_{\varrho}^2 = \sum_{j \in J} d_{\varrho_j}$, donc

$$(\mathbb{E}_{Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}}(\chi_{\varrho}))^2 = \mu_{\varrho, \mathcal{C}}^{2k} d_{\varrho}^2 = \mu_{\varrho, \mathcal{C}}^{2k} \sum_{j \in J} d_{\varrho_j} \quad \text{et} \quad \text{Var}_{Q_{n, \mathcal{C}}^{*k}}(\chi_{\varrho}) = \sum_{j \in J} d_{\varrho_j} (\mu_{j, \mathcal{C}}^k - \mu_{\varrho, \mathcal{C}}^{2k}).$$

Finalement, la minoration obtenue est

$$(6) \quad \|Q_{n, \mathcal{C}}^{*k} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} \geq 1 - \frac{4}{d_{\varrho}^2} \mu_{\varrho, \mathcal{C}}^{-2k} - \frac{4}{d_{\varrho}^2} \sum_{j \in J} d_{\varrho_j} \left(\left(\frac{\mu_{j, \mathcal{C}}}{\mu_{\varrho, \mathcal{C}}^2} \right)^k - 1 \right).$$

On obtient de façon similaire une minoration pour les marches aléatoires évoluant sur S_n (lorsque \mathcal{C} est impaire) :

$$(7) \quad \|Q_{k, n, \mathcal{C}} - \pi_n\|_{\text{TV}} \geq 1 - \frac{4}{d_{\varrho}^2} \nu_{k, \varrho, \mathcal{C}}^{-2} - \frac{4}{d_{\varrho}^2} \sum_{j \in J} d_{\varrho_j} \left(\frac{\nu_{j, k, \mathcal{C}}}{\nu_k^2} - 1 \right),$$

où

$$\nu_{k, \varrho, \mathcal{C}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_{\varrho}} \right)^{k-1} \left(1 + \frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_{\varrho}} \right), \quad \nu_{j, k, \mathcal{C}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_{\varrho_j, \mathcal{C}}}{d_{\varrho_j}} \right)^{k-1} \left(1 + \frac{\chi_{\varrho_j, \mathcal{C}}}{d_{\varrho_j}} \right).$$

3. Preuve du théorème 1.3. Les détails de la preuve sont donnés dans [R2]. Nous allons appliquer la formule (6) avec la fonction propre χ_{ϱ_0} où ϱ_0 est la représentation irréductible issue de la partition $(n-1, 1)$, de

dimension $n - 1$, associée à la valeur propre

$$\mu_{0,\mathcal{C}} = \frac{\chi_{\varrho_0,\mathcal{C}}}{d_{\varrho_0}} = \frac{n-1-\|\mathcal{C}\|}{n-1} \neq 1.$$

Sachant que $\varrho_0 \otimes \varrho_0 = \varrho_0 \oplus \varrho_1 \oplus \varrho_3 \oplus \varrho_4$ où ϱ_3 est la représentation irréductible issue de la partition $(n-2, 2)$ et ϱ_4 celle issue de $(n-2, 1, 1)$, en utilisant $d_{\varrho_0} = n-1$ et $d_{\varrho_1} = \chi_{\varrho_1,\mathcal{C}} = 1$ nous obtenons

$$(8) \quad \begin{aligned} \|Q_{n,\mathcal{C}}^{*k_n} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} &\geq 1 - \frac{8}{(n-1)^2} \mu_{0,\mathcal{C}}^{-2k_n} - \frac{4}{n-1} \mu_{0,\mathcal{C}}^{-k_n} \\ &\quad - \frac{4}{(n-1)^2} \sum_{j=3}^4 d_{\varrho_j} \left(\left(\frac{\mu_{j,\mathcal{C}}}{\mu_{0,\mathcal{C}}^2} \right)^{k_n} - 1 \right). \end{aligned}$$

On montre facilement, connaissant $\mu_{0,\mathcal{C}}$ et en utilisant la valeur de k_n donnée dans le théorème 1.3, que

$$\mu_{0,\mathcal{C}}^{-2k_n} \leq (n-1)^2 e^{-2c} \exp\left(\frac{\|\mathcal{C}\| \ln(n-1)}{n-1-\|\mathcal{C}\|}\right)$$

et donc

$$\frac{8}{(n-1)^2} \mu_{0,\mathcal{C}}^{-2k_n} \leq 8e^{-2c} \exp\left(\frac{\|\mathcal{C}\| \ln(n-1)}{n-1-\|\mathcal{C}\|}\right).$$

Sous la condition $\|\mathcal{C}\| \leq \frac{n-1}{\ln(n-1)+1}$ le terme dans l'exponentielle est majoré par 1, donc

$$\frac{8}{(n-1)^2} \mu_{0,\mathcal{C}}^{-2k_n} \leq 8e^1 e^{-2c}.$$

Les mêmes calculs conduisent à

$$\frac{4}{n-1} \mu_{0,\mathcal{C}}^{-k_n} \leq 4e^{1/2} e^{-c},$$

et la minoration (8) devient alors

$$(9) \quad \begin{aligned} \|Q_{n,\mathcal{C}}^{*k_n} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} &\geq 1 - 8e^1 e^{-2c} - 4e^{1/2} e^{-c} \\ &\quad - \frac{4}{(n-1)^2} \sum_{j=3}^4 d_{\varrho_j} \left(\left(\frac{\mu_{j,\mathcal{C}}}{\mu_{0,\mathcal{C}}^2} \right)^{k_n} - 1 \right). \end{aligned}$$

On ne connaît pas explicitement les valeurs de $\mu_{3,\mathcal{C}}$ et de $\mu_{4,\mathcal{C}}$, mais Roichman [R1] en donne une majoration que nous allons utiliser pour terminer la preuve.

LEMME 3.1. *Si d_{ϱ_λ} est la dimension de la représentation issue de la partition λ ,*

$$\frac{\chi_{\varrho_3, \mathcal{C}}}{d_{\varrho_3}} \leq \frac{d_{\varrho_{(n-2-\|\mathcal{C}\|, 2)}}}{d_{\varrho_3}} + \frac{\|\mathcal{C}\|}{2d_{\varrho_3}},$$

$$\frac{\chi_{\varrho_4, \mathcal{C}}}{d_{\varrho_4}} \leq \frac{d_{\varrho_{(n-2-\|\mathcal{C}\|, 1, 1)}}}{d_{\varrho_4}}.$$

Il suffit d'utiliser le lemme 2.2 pour calculer les dimensions :

$$d_{\varrho_3} = \frac{n(n-3)}{2}, \quad d_{\varrho_{(n-2-\|\mathcal{C}\|, 2)}} = \frac{(n-\|\mathcal{C}\|)(n-3-\|\mathcal{C}\|)}{2},$$

$$d_{\varrho_4} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad d_{\varrho_{(n-2-\|\mathcal{C}\|, 1, 1)}} = \frac{(n-1-\|\mathcal{C}\|)(n-2-\|\mathcal{C}\|)}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\mu_{4, \mathcal{C}}}{\mu_{0, \mathcal{C}}^2} \leq 1 - \frac{\|\mathcal{C}\|}{(n-\|\mathcal{C}\|-1)(n-2)} < 1.$$

Comme la suite $(\|Q_{n, \mathcal{C}}^{* \alpha} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}})_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on peut supposer que k_n est impair, ainsi la fonction qui à x associe x^{k_n} est croissante sur \mathbb{R} , donc $(\mu_{4, \mathcal{C}}/\mu_{0, \mathcal{C}}^2)^{k_n} < 1$, et le terme correspondant dans la minoration (9) peut être négligé.

Pour la représentation ϱ_3 , le lemme 3.1 permet d'écrire

$$\frac{\mu_{3, \mathcal{C}}}{\mu_{0, \mathcal{C}}^2} \leq 1 + \|\mathcal{C}\| \frac{\|\mathcal{C}\|(n+1) + 4 - 4n}{n(n-3)(n-\|\mathcal{C}\|-1)^2}.$$

Sous la condition $\|\mathcal{C}\| \leq \frac{n-1}{\ln(n-1)+1}$, on arrive à montrer que

$$\frac{\mu_{2, \mathcal{C}}}{\mu_{0, \mathcal{C}}^2} \leq 1 + \frac{\|\mathcal{C}\|}{n-1} \cdot \frac{(\ln(n-1)+1)(n-3-4\ln(n-1))}{n(n-3)(\ln(n-1))^2}.$$

Supposant k_n impair, on montre, en le remplaçant par sa valeur, que

$$\left(\frac{\mu_{2, \mathcal{C}}}{\mu_{0, \mathcal{C}}^2}\right)^{k_n} - 1 \leq \frac{11}{10} \cdot \frac{(\ln(n-1)+1)(n-3-4\ln(n-1))}{n(n-3)\ln(n-1)},$$

puis que

$$\|Q_{n, \mathcal{C}}^{*k_n} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} \geq 1 - 8e^1 e^{-2c} - 4e^{1/2} e^{-c} - \frac{11}{5} \cdot \frac{\ln(n-1)+1}{(n-1)(\ln(n-1))^2}.$$

En supposant par exemple $c \geq 2$, on obtient la minoration du théorème 1.3. Le même genre de considérations conduit au théorème suivant pour les marches aléatoires sur S_n (lorsque \mathcal{C} est impaire).

THÉORÈME 3.2. *Si \mathcal{C} est impaire, si n est tel que*

$$\|\mathcal{C}\| < \frac{n-1}{4(\ln(n-1)+1)},$$

et si

$$k_n = \frac{n-1}{\|\mathcal{C}\|}(\ln(n-1) - c) \quad \text{avec} \quad 0 < c \leq \ln(n-1) - 2$$

alors il existe une fonction f telle que

$$\|Q_{k_n, n, c} - \pi_n\|_{\text{TV}} \geq 1 - 7e^{-c} - f(n), \quad \text{où} \quad f(n) \sim \frac{2}{\ln n}.$$

4. Etude de la conjecture 1.1. D'après la remarque 2.5, démontrer cette conjecture revient à rechercher une constante $\tilde{B} \geq 0$ telle que

$$\sum_{\lambda_\varrho \in \mathcal{P}} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq \tilde{B} e^{-2c},$$

où \mathcal{P} est l'ensemble des partitions de n privé des partitions $(1, 1, \dots, 1)$ et (n) , et où k_n vaut $(n/\|\mathcal{C}\|)(\ln n + c)$. La démarche est celle que Diaconis et Shahshahani [DS] ont développée en étudiant les transpositions. Les détails des calculs se trouvent dans [R2].

L'idée consiste à majorer $\chi_{\varrho, \mathcal{C}}/d_\varrho$ lorsque $\lambda_\varrho = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ appartient à différentes zones définies à l'aide d'une suite croissante finie de nombres b_1, \dots, b_p et d'encadrements de λ_1 .

ZONE 1 : “ $1 \leq \lambda_1 \leq b_1 n$ et $m \leq b_1 n$ ” ou “ $1 \leq m \leq b_1 n$ et $\lambda_1 \leq b_1 n$ ”.

ZONE i , $2 \leq i \leq p-1$: “ $b_{i-1} n < \lambda_1 \leq b_i n$ et $m \leq b_i n$ ” ou “ $b_{i-1} n < m \leq b_i n$ et $\lambda_1 \leq b_i n$ ”.

ZONE p : “ $(1-b)n < \lambda_1 \leq n-1$ ” ou “ $(1-b)n < m \leq n-1$ ” où $1-b = b_{p-1}$.

Notons P^i l'ensemble des partitions vérifiant les conditions de la zone i ; nous devons alors borner

$$\sum_{\lambda_\varrho \in \mathcal{P}} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} = \sum_{i=1}^p \sum_{\lambda_\varrho \in P^i} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n}.$$

De façon générale, nous pourrions toujours montrer, pour les marches aléatoires que nous étudierons, qu'il existe des constantes positives β_i et des suites $u(n)$ et $v(n)$ (qui apparaîtront naturellement au cours de la majoration) telles que :

(\mathcal{H}_∞) Pour $1 \leq i \leq p-1$ et $\lambda_\varrho \in P^i$,

$$\left| \frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right| \leq \beta_i < 1.$$

(\mathcal{H}_∞) Pour $\lambda_\varrho \in P^p$,

$$\left| \frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right| \leq 1 - \|\mathcal{C}\| u_C(n) \frac{n - \lambda_1}{n} + v_C(n) \left(\frac{n - \lambda_1}{n} \right)^2.$$

LEMME 4.1. *Supposons que (\mathcal{H}_∞) est vérifiée et que les $(b_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ (qui définissent les zones 1 à $p-1$) ainsi que les $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ de (\mathcal{H}_∞) vérifient les conditions :*

- (1) $1 + \frac{2}{\|\mathcal{C}\|} \ln(\beta_1) < 0$,
- (2) $1 - b_{i-1} + \frac{2}{\|\mathcal{C}\|} \ln(\beta_i) < 0$ pour $2 \leq i \leq p-1$.

Supposons de plus que n est tel que $(n/\|\mathcal{C}\|) \ln(\max_{1 \leq i \leq p-1} \beta_i) \leq -1$. Alors pour tout $1 \leq i \leq p-1$, il existe des constantes $B_i \geq 0$ telles que

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^i} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq B_i e^{-2c}.$$

LEMME 4.2. *Supposons que $(1-b)n < \lambda_1 \leq n-1$ et que $(\mathcal{H}_\varepsilon)$ est vérifiée avec des suites $u(n)$ et $v(n)$ telles que :*

(1) *il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u(n)$ décroît et tend vers 1 lorsque n tend vers ∞ ,*

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = v < \infty \text{ et } \frac{2vb}{\|\mathcal{C}\|} - 1 \leq -\frac{1}{2},$$

$$(3) -\|\mathcal{C}\| u(n) \frac{n - \lambda_1}{n} + v(n) \left(\frac{n - \lambda_1}{n} \right)^2 \leq -\frac{\|\mathcal{C}\|}{n}.$$

Alors il existe une constante $B_p \geq 0$ telle que

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^p} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq B_p e^{-2c}.$$

Il est clair que si les hypothèses de ces deux lemmes sont vérifiées pour une classe \mathcal{C} , la majoration de la conjecture 1.1 est alors vraie pour cette classe \mathcal{C} avec une constante B_ε dépendant de \mathcal{C} .

Preuve du lemme 4.1

ZONE 1. D'après (\mathcal{H}_∞) , il vient

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^1} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq (\beta_1)^{2k_n} \sum_{\lambda_\varrho \in P^1} d_\varrho^2 \leq (\beta_1)^{2k_n} n!,$$

la dernière inégalité étant obtenue en utilisant la majoration brutale

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^1} d_\varrho^2 \leq \sum_{\varrho \in \widehat{S}_n} d_\varrho^2 = |S_n|.$$

En utilisant le raffinement de la formule de Stirling présentée dans [Fel],

nous obtenons

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^1} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq \sqrt{2\pi} \exp \left(2k_n \ln(\beta_1) - n + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n + \frac{1}{12n} \right),$$

puis, remplaçant k_n par sa valeur,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_\varrho \in P^1} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \\ \leq \sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{2cn}{\|\mathcal{C}\|} \ln(\beta_1) \right) \exp \left(\left(1 + \frac{2}{\|\mathcal{C}\|} \ln(\beta_1) + \varepsilon_1(n) \right) n \ln n \right) \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{1}{\ln n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2 \ln n}$$

est une fonction tendant vers 0 lorsque n tend vers ∞ .

La fonction $n \mapsto \exp\left(\left(1 + \frac{2}{\|\mathcal{C}\|}\right) \ln(\beta_1) + \varepsilon_1(n)\right) n \ln n$ est bornée d'après l'hypothèse (1) du lemme 4.1 et si n est tel que $(n/\|\mathcal{C}\|) \ln(\max_{1 \leq i \leq p-1} \beta_i) \leq -1$ alors il existe une constante $B_1 \geq 0$ telle que

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^1} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq B_1 e^{-2c}.$$

ZONE i (i entier variant de 2 à $p-1$). Les hypothèses pour ces zones sont que $b_{i-1}n < \lambda_1 \leq b_i n$ avec b_{i-1} et b_i des réels positifs et qu'il existe un réel positif β_i tel que $|\chi_{\varrho, \mathcal{C}}/d_\varrho| \leq \beta_i < 1$. Ayoub montre dans le chapitre 3 de [Ay] que le nombre de partitions de n vérifie $p(n) \leq e^{\pi\sqrt{2n/3}}$ et d'après le corollaire 2.3, nous avons

$$d_\varrho \leq C_n^{\lambda_1} \sqrt{(n - \lambda_1)!} \leq 2^n \sqrt{[n - b_{i-1}n]!}.$$

Ainsi,

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^i} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq [n - b_{i-1}n]! \exp(\pi\sqrt{2n/3} + n \ln 4 + 2k_n \ln(\beta_i)).$$

Les mêmes calculs que pour la zone 1 conduisent à la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_\varrho \in P^i} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \\ \leq \sqrt{2\pi} \exp \left(\frac{2cn}{\|\mathcal{C}\|} \ln(\beta_i) \right) \exp \left(\left(1 - b_{i-1} + \frac{2}{\|\mathcal{C}\|} \ln(\beta_i) + \varepsilon_i(n) \right) n \ln n \right) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_i(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ et on conclut de la même manière

qu'il existe des constantes $B_i \geq 0$ telles que

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^i} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, C}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq B_i e^{-2c}.$$

Preuve du lemme 4.2. Il s'agit d'étudier $\sum_{\lambda_\varrho \in P^p} d_\varrho^2 (\chi_{\varrho, C}/d_\varrho)^{2k_n}$ dans la dernière zone. On raisonne à λ_1 fixé. Si $j = n - \lambda_1$ et $(1-b)n < \lambda_1 \leq n-1$ nous avons d'après (\mathcal{H}_ϵ)

$$\left| \frac{\chi_{\varrho, C}}{d_\varrho} \right| \leq 1 - \|\mathcal{C}\| u(n) \frac{j}{n} + v(n) \left(\frac{j}{n} \right)^2 \leq \exp \left(-\|\mathcal{C}\| u(n) \frac{j}{n} + v(n) \left(\frac{j}{n} \right)^2 \right).$$

La majoration des dimensions donnée par le corollaire 2.3 est $d_\varrho^2 \leq n^{2j}/j!$ et le nombre de partitions à λ_1 fixé est $p(n - \lambda_1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{bn} \left(\sum_{\substack{\lambda_\varrho \in P^p, \\ \lambda_1 = n-j}} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, C}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \right) \\ & \leq \sum_{j=1}^{bn} \frac{p(j)}{j!} \exp \left(2j \ln n + 2k_n \left(-\|\mathcal{C}\| u(n) \frac{j}{n} + v(n) \frac{j^2}{n^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Remplaçant k_n par sa valeur, les hypothèses (1) et (3) du lemme 4.2 permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} e^{2c} \sum_{\lambda_\varrho \in P^p} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, C}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} & \leq \sum_{j=1}^{bn} \underbrace{\frac{p(j)}{j!} \exp \left(\frac{2v(n)}{\|\mathcal{C}\|} \cdot \frac{\ln n}{n} j^2 \right)}_{l_{j,n}} \\ & \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{\sqrt{n/\ln n}} l_{j,n}}_A + \underbrace{\sum_{j=\sqrt{n/\ln n}}^{n/\ln n} l_{j,n}}_B + \underbrace{\sum_{j=n/\ln n}^{bn} l_{j,n}}_C, \end{aligned}$$

où nous allons étudier chacune des sommes A , B et C .

SOMME A. On a $(\ln n)j^2/n \leq 1$ et en utilisant la majoration d'Ayoub pour $p(j)$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{\sqrt{n/\ln n}} l_{j,n} \leq \exp \left(\frac{2v(n)}{\|\mathcal{C}\|} \right) \sum_{j=1}^{\sqrt{n/\ln n}} \frac{e^{\pi\sqrt{2j/3}}}{j!},$$

où le terme de droite est borné puisque la somme est la somme partielle d'une série convergente et d'après l'hypothèse (2) du lemme 4.2, $v(n)$ admet une limite finie.

SOMMES B ET C . D'après la formule de Stirling et la majoration d'Ayoub nous avons $p(j)/j! \leq e^{-j \ln j + f(j)}$, avec f une fonction telle qu'il existe une constante J vérifiant $f(j)/j \leq J$. Dans ces conditions,

$$\ln(l_{j,n}) \leq -j \ln j + \frac{2v(n)}{\|\mathcal{C}\|} \cdot \frac{\ln n}{n} j^2 + f(j) \leq j \ln n \underbrace{\left(\frac{2v(n)}{\|\mathcal{C}\|} \cdot \frac{j}{n} - \frac{\ln j}{\ln n} + \frac{J}{\ln n} \right)}_{L(j,n)}.$$

On montre ensuite que pour la somme B (respectivement C), $L(j,n)$ est uniformément majorée par une fonction de n dont la limite en ∞ est $-1/2$ (respectivement $2vb/\|\mathcal{C}\| - 1/2 \leq -1/2$). Nous sommes alors sûrs qu'à partir d'un certain rang, il existe $l \in \mathbb{R}_+^*$ (respectivement $l' \in \mathbb{R}_+^*$) tel que $L(j,n) \leq -l$ (respectivement $L(j,n) \leq -l'$) et

$$\sum_{j=\sqrt{n/\ln n}}^{n/\ln n} l_{j,n} \leq \sum_{j=\sqrt{n/\ln n}}^{n/\ln n} e^{-jl \ln n} \quad \left(\text{resp.} \quad \sum_{j=n/\ln n}^{bn} l_{j,n} \leq \sum_{j=n/\ln n}^{bn} e^{-j'l' \ln n} \right).$$

Comme $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-jl \ln n}$ est une série géométrique convergente, les sommes B et C sont bornées et il existe alors une constante $B_p \geq 0$ telle que

$$\sum_{\lambda_\varrho \in P^p} d_\varrho^2 \left(\frac{\chi_{\varrho, \mathcal{C}}}{d_\varrho} \right)^{2k_n} \leq B_p e^{-2c}.$$

5. Exemples. Nous allons montrer l'existence du phénomène de cut-off pour quelques marches aléatoires.

THÉORÈME 5.1. *Les marches aléatoires de noyau de transition $Q_{n,\mathcal{C}}$ (où \mathcal{C} est une classe de conjugaison telle que $\|\mathcal{C}\| \leq 6$ ou la classe des cycles de longueur 7) et de mesure initiale δ ou $\gamma_{n,\mathcal{C}}$ selon la parité de \mathcal{C} , admettent un $(n(\ln n)/\|\mathcal{C}\|, n/\|\mathcal{C}\|)$ -cutoff. En d'autres termes, il existe deux fonctions positives, f et g telles que $\lim_{c \rightarrow \infty} g(c) = 0$ et $\lim_{c \rightarrow -\infty} f(c) = 1$, pour lesquelles nous avons, selon la parité de \mathcal{C} ,*

$$f(c) \leq \|Q_{n,\mathcal{C}}^{*k_n} - \bar{\pi}_n\|_{\text{TV}} \leq g(c) \quad \text{ou} \quad f(c) \leq \|Q_{k_n,n,\mathcal{C}} - \pi_n\|_{\text{TV}} \leq g(c).$$

Le théorème 1.3 donne la minoration souhaitée de la norme en variation totale. Pour obtenir la borne supérieure, il suffit de montrer que les hypothèses des lemmes 4.1 et 4.2 sont vérifiées. Nous noterons $\chi_{x,\lambda}$ la valeur du caractère χ_λ sur la classe de conjugaison des cycles de longueur x , $\chi_{x,y,\lambda}$ sa valeur sur la classe des produits de deux cycles à support disjoint, l'un de longueur x , l'autre de longueur y et ainsi de suite. Notons également $r_x(\lambda) = \chi_{x,\lambda}/d_\lambda$, $r_{x,y}(\lambda) = \chi_{x,y,\lambda}/d_\lambda$ etc. Pour borner $r_{\mathcal{C}}(\lambda) = \chi_{\lambda,\mathcal{C}}/d_\lambda$, nous disposons de formules littérales, calculées pour les petites valeurs de $\|\mathcal{C}\|$ par Ingram [Ing].

LEMME 5.2. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ une partition de n . On définit pour tous $l \in \mathbb{N}^*$,

$$M_{2l,\lambda} = \sum_{j=1}^m \{(\lambda_j - j)^l (\lambda_j - j + 1)^l - j^l (j - 1)^l\},$$

$$M_{2l+1,\lambda} = \sum_{j=1}^m \{(\lambda_j - j)^l (\lambda_j - j + 1)^l (2\lambda_j - 2j + 1) + j^l (j - 1)^l (2j - 1)\}.$$

Avec ces notations, nous avons alors

$$r_3(\lambda) = \frac{(n-3)!}{n!} \left(\frac{M_{3,\lambda}}{2} - \frac{3}{2}n(n-1) \right),$$

$$r_4(\lambda) = \frac{(n-4)!}{n!} (M_{4,\lambda} - 2(2n-3)M_{2,\lambda}),$$

$$r_{2,2}(\lambda) = \frac{(n-4)!}{n!} (M_{2,\lambda}^2 - 2M_{3,\lambda}(\lambda) + 4n(n-1)),$$

$$r_5(\lambda) = \frac{(n-5)!}{n!} \left(\frac{M_{5,\lambda}}{2} + \frac{49-15n}{6}M_{3,\lambda} - \frac{5}{2}M_{2,\lambda}^2 + \frac{5}{6}n(n-1)(5n-19) \right),$$

$$r_{3,2}(\lambda) = \frac{(n-5)!}{n!} \left(\frac{1}{2}M_{2,\lambda}M_{3,\lambda} - 6M_{4,\lambda} - \frac{3}{2}(n^2 - 13n + 16)M_{2,\lambda} \right),$$

$$r_6(\lambda) = \frac{(n-6)!}{n!} (M_{6,\lambda} - (6n-37)M_{4,\lambda} - 3M_{2,\lambda}M_{3,\lambda} + 6(3n^2 - 19n + 20)M_{2,\lambda}),$$

$$r_{4,2}(\lambda) = \frac{(n-6)!}{n!} \left(M_{2,\lambda}M_{4,\lambda} - 4M_{5,\lambda} - 2(2n-11)M_{2,\lambda}^2(\lambda) + \frac{8}{3}(6n-17)M_{3,\lambda} - \frac{32}{3}n(n-1)(2n-7) \right),$$

$$r_{3,3}(\lambda) = \frac{(n-6)!}{n!} \frac{1}{4} (M_{3,\lambda}^2 - 18M_{5,\lambda} + 54M_{2,\lambda}^2 - 6(n^2 - 13n + 29)M_{3,\lambda} + 9n(n-1)(n^2 - 13n + 34)),$$

$$r_{2,2,2}(\lambda) = \frac{(n-6)!}{n!} (M_{2,\lambda}^3 - 6M_{2,\lambda}M_{3,\lambda} + 40M_{4,\lambda} + 12(n^2 - 9n + 10)M_{2,\lambda}),$$

$$r_7(\lambda) = \frac{(n-7)!}{n!} \left(\frac{M_{7,\lambda}}{2} - 7M_{2,\lambda}M_{4,\lambda} - \frac{M_{5,\lambda}}{2} \left(7n - \frac{145}{2} \right) - \frac{7}{8}M_{3,\lambda}^2 + \frac{7}{2}M_{2,\lambda}^2(7n-36) + \frac{M_{3,\lambda}}{12}(147n^2 - 1673n + 3383) - \frac{7}{24}n(n-1)(149n^2 - 609n + 1502) \right).$$

Preuve. On trouve dans [Ing] toutes les formules énoncées ci-dessus sauf celle pour la classe des cycles de longueur 6 et ceux de longueur 7. Ces deux formules sont calculées par la méthode présentée par Ingram pour les cycles de longueur p quelconque. Des erreurs numériques pour les formules de $r_{3,2}(\lambda)$ et de $r_{3,3}(\lambda)$ données dans [Ing] sont corrigées ici. ■

PROPOSITION 5.3. *Pour toute partition λ et tout entier l , $M_{2l, {}^t\lambda} = -M_{2l, \lambda}$ et $M_{2l+1, {}^t\lambda} = M_{2l+1, \lambda}$.*

Preuve. Nous allons utiliser une autre paramétrisation des partitions. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est une partition de n , si s est le nombre de cases sur la diagonale du diagramme de Young de λ alors pour tous j variant de 1 à s , on définit $b_j = \lambda_j - j$ et $a_j = \lambda'_j - j$ où λ'_j est la longueur de la colonne j . Les définitions de $M_{2l, \lambda}$ et de $M_{2l+1, \lambda}$ correspondant à cette nouvelle paramétrisation se trouvent dans [Ing] et sont

$$M_{2l, \lambda} = \sum_{j=1}^s \{b_j^l (b_j + 1)^l - a_j^l (a_j + 1)^l\},$$

$$M_{2l+1, \lambda} = \sum_{j=1}^s \{b_j^l (b_j + 1)^l (2b_j + 1) + a_j^l (a_j + 1)^l (2a_j + 1)\}.$$

Comme, si $\lambda = (b_1, \dots, b_s \mid a_1, \dots, a_s)$, ${}^t\lambda = (a_1, \dots, a_s \mid b_1, \dots, b_s)$, il est clair que $M_{2l, {}^t\lambda} = -M_{2l, \lambda}$ et que $M_{2l+1, {}^t\lambda} = M_{2l+1, \lambda}$. ■

Comparaison des M_i . Nous allons ici déterminer, dans chaque zone, la partition qui donne la plus grande valeur des M_i .

LEMME 5.4. *Dans chaque zone, si $1 \leq l \leq 3$, $M_{2l, \lambda}$ est maximal (respectivement minimal) en la partition dont les cubes du diagramme de Young sont le plus haut (respectivement le plus bas) possible.*

Preuve. Considérons deux partitions de n , $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, et comparons $M_{2l, \lambda}$ et $M_{2l, \tilde{\lambda}}$. Il suffit de considérer deux partitions qui se déduisent l'une de l'autre par le déplacement d'un cube. Soit donc $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_p + 1, \dots, \lambda_q - 1, \dots, \lambda_m)$ où $p < q$. Il est clair que $\lambda \leq \tilde{\lambda}$ et pour $1 \leq l \leq 3$, on vérifie dans [R2] que

$$M_{2l, \lambda} - M_{2l, \tilde{\lambda}} = \sum_{j=1}^l \alpha_j ((\lambda_q - q)^{2j-1} - (\lambda_p - p + 1)^{2j-1}),$$

où $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha_l = 2l$. Sous la condition $p < q$, nous avons $\lambda_p \geq \lambda_q$ et $M_{2l, \lambda} \leq M_{2l, \tilde{\lambda}}$ puisque $\lambda_q - q - (\lambda_p - p + 1) = \lambda_q - \lambda_p + p - q - 1 \leq 0$. ■

EXEMPLE 5.5. Si $n/3 < \lambda_1 \leq n/2$ et $m \leq n/2$ alors $M_{2l, \lambda_M} \leq M_{2l, \lambda} \leq M_{2l, (n/2, n/2)}$, où λ_M est la partition de longueur $n/2$ telle que

$$\lambda_M = ((n+1)/3, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1).$$

Ceci n'est plus vrai pour les $M_{2l+1, \lambda}$. Nous avons par exemple pour $M_{3, \lambda}$,

$$M_{3, \lambda} - M_{3, \tilde{\lambda}} = 6(\lambda_p + \lambda_q - q - p + 1)(\lambda_q - \lambda_p - q + p - 1).$$

Si on interprète le membre de droite comme un polynôme de degré 2 en λ_p , dont les racines sont $x_1 = p + q - \lambda_q - 1$ et $x_2 = \lambda_q + p - q - 1$, alors le signe de $M_{3, \lambda} - M_{3, \tilde{\lambda}}$ en fonction des valeurs de λ_p , λ_q et q est donné par le tableau suivant.

Tableau 1

| | $\lambda_q \leq q$ | | $\lambda_q \geq q$ | | |
|--|--------------------|-------|--------------------|-------|---|
| λ_p | x_2 | x_1 | x_1 | x_2 | |
| Signe de $M_3(\lambda) - M_3(\tilde{\lambda})$ | - | + | - | + | - |

REMARQUE 5.6. Sous la condition $p \leq q$, $x_2 \leq \lambda_q \leq \lambda_p$, c'est-à-dire que si on remonte un cube d'une ligne q telle que $q \leq \lambda_q$ alors $M_3(\lambda) \leq M_3(\tilde{\lambda})$. Si $q \geq \lambda_q$, il existe des cas de figure où $M_3(\lambda) \geq M_3(\tilde{\lambda})$.

LEMME 5.7. Soit $M_{2l+1, \lambda} = \sum_{j=1}^m d_{j,l}(\lambda_j)$ avec

$$d_{j,l}(\lambda_j) = (\lambda_j - j)^l (\lambda_j - j + 1)^l (2\lambda_j - 2j + 1) + j^l (j - 1)^l (2j - 1).$$

Pour tous j et l tel que $1 \leq l \leq 3$, $x \mapsto d_{j,l}(x)$ est une fonction croissante et positive. En particulier, si $a \in \mathbb{R}^+$ et si $\lambda_1 \geq a$ alors $M_{2l+1, \lambda} \geq d_{1,l}(a)$.

Pour la majoration, l'étude des $M_{2l+1, \lambda}$ se ramène à celles des $M_{3, \lambda}$. En effet, pour $1 \leq l \leq 4$,

$$M_{2l+1, \lambda} - M_{2l+1, \tilde{\lambda}} = (M_{3, \lambda} - M_{3, \tilde{\lambda}}) \sum_{\substack{i,j=0 \\ 0 \leq i+j \leq l-1}}^{l-1} \alpha_{i,j} (\lambda_q - q)^{2j} (\lambda_p - p + 1)^{2i},$$

où $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}^+$. La proposition suivante donne les partitions pour lesquelles $M_{3, \lambda}$ est maximal.

PROPOSITION 5.8. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

– Si $\lambda_1 > n/2$, alors $\lambda_{\max} = (\lambda_1, 1, \dots, 1)$.

– Si $\lambda_1 \leq (n-b)/l$, $m \leq (n-b)/l$, $l \geq 2$ et n congru à b modulo l , on a :

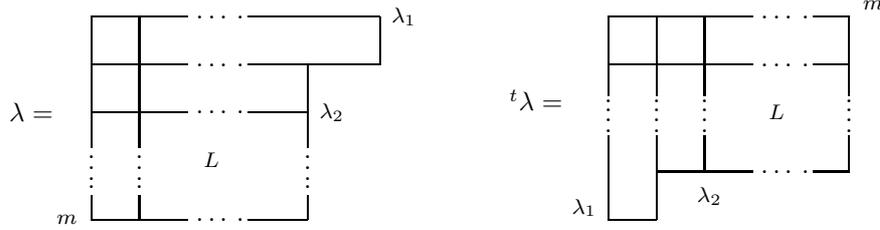
- si $l = 2h$, $(n - b)/l \geq h^2 + h + b$ et $c = (n - b)/l - h^2 - h - b$ alors

$$\lambda_{\max} = \left(\underbrace{\frac{n-b}{l}, \dots, \frac{n-b}{l}}_h, \underbrace{h+1, \dots, h+1}_{h^2+b}, \underbrace{h, \dots, h}_c \right);$$

- si $l = 2h + 1$, $(n - b)/l \geq (h + 1)^2 + b$ et $d = n/l - (h + 1)^2 - b$ alors

$$\lambda_{\max} = \left(\underbrace{\frac{n-b}{l}, \dots, \frac{n-b}{l}}_{h+1}, \underbrace{h+1, \dots, h+1}_{h(h+1)+b}, \underbrace{h, \dots, h}_d \right).$$

Preuve. 1^{er} CAS : Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ avec $\lambda_1 > n/2$ et $m \geq 3$.



REMARQUE 5.9. Les cubes des lignes 3 à m (respectivement 2 à λ_2) ne sont pas représentés. Ils sont contenus dans le rectangle L .

Si $m \leq \lambda_2$, alors on remonte tous les cubes du diagramme de λ sur la ligne 2. On crée ainsi une suite croissante de partitions

$$\lambda \leq \lambda^1 \leq \dots \leq \lambda^d = (\lambda_1, n - \lambda_1).$$

On passe de λ^i à λ^{i+1} en remontant un cube de la ligne q à la ligne p avec $p = 2$, $3 \leq q \leq m$, $\lambda_p \geq \lambda_2$ et $1 \leq \lambda_q \leq \lambda_2$, donc

$$x_1 = p + q - \lambda_q - 1 = 1 + q - \lambda_q \leq q \leq m \leq \lambda_2 \leq \lambda_p,$$

$$x_2 = \lambda_q + p - q - 1 = 1 + \lambda_q - q \leq \lambda_q \leq \lambda_2 \leq \lambda_p.$$

Nous avons alors, d'après le tableau 1, $M_{3,\lambda^i} \leq M_{3,\lambda^{i+1}}$ et finalement $M_{3,\lambda} \leq M_{3,(\lambda_1, n - \lambda_1)}$. De plus, $M_{3,(\lambda_1, n - \lambda_1)} \leq M_{3,(\lambda_1, 1, \dots, 1)}$ car

$$M_{3,(\lambda_1, 1, \dots, 1)} - M_{3,(\lambda_1, n - \lambda_1)} = 12(n - \lambda_1)(n - \lambda_1 - 1) \geq 0.$$

Si $m \geq \lambda_2$, comme $M_{3,t\lambda} = M_{3,\lambda}$ (cf. corollaire 5.3), on considère la partition $t\lambda$ et on remonte tous les cubes sur la première ligne. On vérifie comme précédemment que $M_{3,t\lambda} \leq M_{3,(n - \lambda_1, 1, \dots, 1)}$, ce qui revient, en retransposant, à $M_{3,\lambda} \leq M_{3,(\lambda_1, 1, \dots, 1)}$.

2^{ème} CAS : Pour la démonstration, nous supposons que $l = 2h$, l divise n et $n/l \geq h^2 + h$. Les autres cas se traitent de la même manière.

Soit donc λ telle que $\lambda_1 \leq n/l$ et $m \leq n/l$. Ceci suppose que $l \leq \sqrt{n}$. Nous devons montrer que $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\lambda_{\max}}$ où λ_{\max} est définie dans la proposition

5.8. Nous raisonnons par récurrence sur le nombre r de lignes contenant n/l cubes.

INITIALISATION : $r = l$. On a

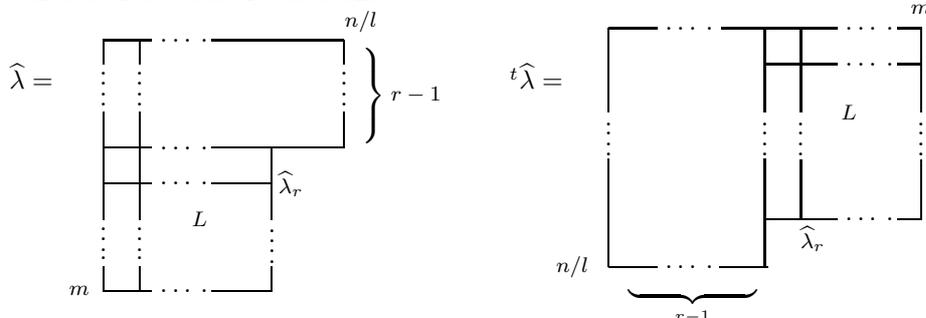
$$M_{3,\lambda_{\max}} - M_{3,(\frac{n}{l}, \dots, \frac{n}{l})} = \frac{1}{32} \underbrace{(l^2(l^2 - 4)^2 + 48n(n - l^2))}_{\geq 0}.$$

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE : Supposons que si $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = n/l$, $r \leq l$ et $\lambda_{r+1} < n/l$ alors $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\lambda_{\max}}$.

ETAPE $r - 1$: Nous avons $\lambda_1 = \dots = \lambda_{r-1} = n/l$ et $\lambda_r < n/l$.

L'idée consiste à essayer de remonter assez de cubes sur la ligne r pour que l'hypothèse de récurrence s'applique. Soit $\hat{\lambda}$ la partition obtenue à partir de λ en remontant sur la ligne r , tant qu'elle contient moins de n/l cubes, les cubes des lignes q telles que $q \leq \lambda_q$. D'après la remarque 5.6, nous avons $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\hat{\lambda}}$.

Si $\hat{\lambda}_r = n/l$, alors l'hypothèse de récurrence permet de conclure que $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\hat{\lambda}} \leq M_{3,\lambda_{\max}}$. Dans le cas contraire, il faut essayer de remonter d'autres cubes. Nous avons



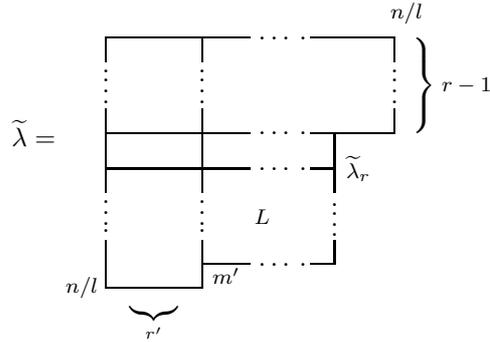
avec $\hat{\lambda}_r < n/l$, $m \leq n/l$ et pour tous $q \geq r + 1$, $\hat{\lambda}_q < q$ (donc, d'après le tableau 1, $x_2 \leq x_1$).

Si on remonte dans le diagramme de $\hat{\lambda}$ un cube d'une ligne q sur la ligne $p = r$, alors $r + 1 \leq q \leq m$, $1 \leq \hat{\lambda}_q \leq \hat{\lambda}_r$, et

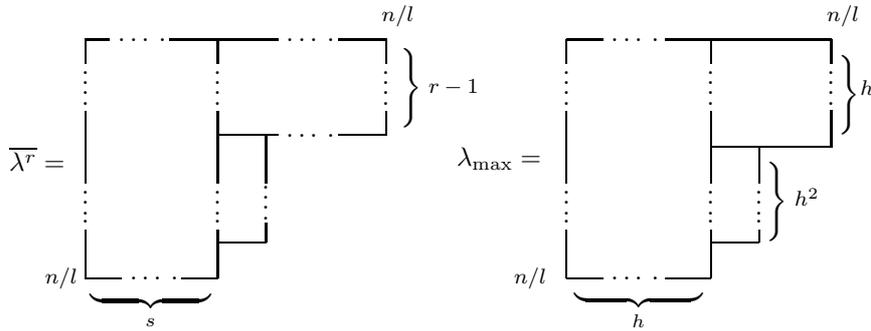
$$x_2 \leq x_1 = p + q - 1 - \lambda_q \leq p + q \leq r + m.$$

Ainsi, si $\hat{\lambda}_r - r \geq m$, on a $\hat{\lambda}_r \geq x_1 \geq x_2$ et en répétant ce procédé, on crée une suite croissante de partitions $(\hat{\lambda}^i)_{i=1}^d$ telles que $\hat{\lambda}_r^d = n/l$ et $M_{3,\hat{\lambda}} \leq M_{3,\hat{\lambda}^d}$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\hat{\lambda}} \leq M_{3,\lambda_{\max}}$.

Si au contraire $\hat{\lambda}_r - r < m$, on s'intéresse au diagramme de ${}^t\hat{\lambda}$ et on vérifie que l'on peut remonter les cubes sur la ligne r' où $r' = \inf\{u \mid 1 \leq u \leq \hat{\lambda}_r \text{ et } {}^t\hat{\lambda}_u < n/l\}$. Nous obtenons alors $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\hat{\lambda}} \leq M_{3,\tilde{\lambda}}$ où



Si $\tilde{\lambda}_r - r \geq m'$, alors on montre comme précédemment que $M_{3,\tilde{\lambda}} \leq M_{3,\lambda_{\max}}$. Sinon, on remonte les cubes sur la ligne $r' + 1$ de ${}^t\tilde{\lambda}$ et ainsi de suite. Finalement, soit on réussit à mettre n/l cubes sur la ligne r et c'est terminé, soit on doit comparer $M_{3,\lambda_{\max}}$ et $M_{3,\bar{\lambda}^r}$ avec



On obtient alors $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\hat{\lambda}} \leq M_{3,\bar{\lambda}^r}$ et le lemme 5.10 permet de conclure que $M_{3,\lambda} \leq M_{3,\hat{\lambda}} \leq M_{3,\lambda_{\max}}$. ■

LEMME 5.10. $M_{3,\bar{\lambda}^r} \leq M_{3,\lambda_{\max}}$.

Preuve. Si $r-1 = h$, on a $\bar{\lambda}^r = \lambda_{\max}$. Si $r-1 < h$ alors obligatoirement $s \geq h \geq r$ et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à ${}^t\bar{\lambda}^r$. Si $r \geq h+2$, on montre que nécessairement $s = l - r + 1$ et il suffit de calculer $M_{3,\lambda_{\max}} - M_{3,\bar{\lambda}^r}$ pour montrer que c'est positif. ■

Bornes des $r_{\mathcal{C}}(\lambda)$. Il s'agit de découper l'ensemble des partitions en différentes zones selon les valeurs de λ_1 , de borner $r_{\mathcal{C}}(\lambda)$ dans chacune de ces zones, puis de s'assurer que les bornes obtenues vérifient les hypothèses des lemmes 4.1 et 4.2.

Cas de la dernière zone. On raisonne à λ_1 fixé, par exemple $\lambda_1 \geq 3n/4$. D'après le corollaire 5.3, $|r_{\mathcal{C}}(\lambda)| = |r_{\mathcal{C}}({}^t\lambda)|$. Ceci permet de ne s'occuper que des partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ telles que $\lambda_1 \geq m$. Dans ces conditions, d'après les lemmes 5.4, 5.7 et la proposition 5.8, nous avons

$$0 \leq M_{2l,(\lambda_1,1,\dots,1)} \leq M_{2l,\lambda} \leq M_{2l,(\lambda_1,n-\lambda_1)},$$

$$0 \leq d_{1,l}(\lambda_1) \leq M_{2l+1,\lambda} \leq M_{2l+1,(\lambda_1,1,\dots,1)}.$$

Ces relations jointes à celles du lemme 5.2 conduisent à

$$0 \leq r_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq 1 - \|\mathcal{C}\|U(n)\frac{n-\lambda_1}{n} + V(n)\frac{(n-\lambda_1)^2}{n^2} + \sum_{i=3}^{\|\mathcal{C}\|-1} R_i(n)\frac{(n-\lambda_1)^i}{n^i}$$

où $U(n), V(n)$ et $R_i(n)$ sont des fractions rationnelles de n . On cherche ensuite des suites $u_{\mathcal{C}}(n)$ et $v_{\mathcal{C}}(n)$ telles que

$$0 \leq r_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq 1 - \|\mathcal{C}\|u_{\mathcal{C}}(n)\frac{n-\lambda_1}{n} + v_{\mathcal{C}}(n)\frac{(n-\lambda_1)^2}{n^2}$$

et qui vérifient les conditions du lemme 4.2. En particulier, on choisit b , le réel qui définit la dernière zone (celle où $(1-b)n \leq \lambda_1 \leq n-1$), de sorte que $2vb/\|\mathcal{C}\| - 1 \leq -1/2$. Les détails sont donnés dans [R2].

Le tableau suivant résume les résultats obtenus pour les marches aléatoires engendrées par les classes de conjugaison \mathcal{C} telles que $\|\mathcal{C}\| \leq 6$ et celle des cycles de longueur 7.

| | $u_{\mathcal{C}}(n)$ | $v_{\mathcal{C}}(n)$ | Valeur de b |
|-------------------------------------|--|---|----------------|
| $r_3(\lambda)$ $n \geq 10$ | $\frac{n}{n-2}$ | $\frac{3n^2}{(n-1)(n-2)}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $r_4(\lambda)$ $n \geq 14$ | $\frac{n(2n^2 - 7n + 7)}{2(n-1)(n-2)(n-3)}$ | $\frac{2n^2(3n-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $r_{2,2}(\lambda)$ $n \geq 10$ | $\frac{n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{(n-1)(n-2)(n-3)}$ | $\frac{8n(n+2)}{(n-2)(n-3)}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $r_5(\lambda)$ $n \geq 10$ | $\frac{2n(5n-4)}{(n-3)(n-4)}$ | $\frac{n^2 - 3n + 1}{(n-2)(n-4)}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $r_{3,2}(\lambda)$ $n \geq 20$ | $\frac{n}{n-3}$ | $\frac{n^2(11n-31)}{(n-2)(n-3)(n-4)}$ | $\frac{1}{9}$ |
| $r_6(\lambda)$ $n \geq 20$ | $\frac{n^3 - 5n^2 - n + 2}{(n-1)(n-3)(n-4)}$ | $\frac{5n(3n^2 - 15n + 25)}{(n-3)(n-4)(n-5)}$ | $\frac{1}{10}$ |
| $r_{4,2}(\lambda)$ $n \geq 6$ | $\frac{n(3n-10)}{3(n-2)(n-5)}$ | $\frac{4n(4n^2 - 17n + 21)}{(n-3)(n-4)(n-5)}$ | $\frac{1}{11}$ |
| $r_{3,3}(\lambda)$ $n \geq 21$ | $\frac{n^3 - 8n^2 + 16n - 6}{(n-2)(n-4)(n-5)}$ | $\frac{3n(n-1)(5n-16)}{(n-2)(n-4)(n-5)}$ | $\frac{1}{10}$ |
| $r_{2,2,2}(\lambda)$ $n \geq 12$ | $\frac{(n-2)(n^2 - 4n + 1)}{(n-1)(n-4)(n-5)}$ | $\frac{18n(n^2 - 3n + 11)}{(n-3)(n-4)(n-5)}$ | $\frac{1}{12}$ |
| $r_7(\lambda)$ $n \geq 22$ | $\frac{n(n-1)}{(n-2)(n-3)}$ | $\frac{3n^2(7n-25)}{(n-1)(n-5)(n-6)}$ | $\frac{1}{12}$ |

Cas des autres zones. On étudie $r_C(\lambda)$ pour des partitions telles que λ_1 appartient à un certain intervalle dépendant de n . On obtient ainsi un encadrement de $r_C(\lambda)$ par des fonctions de n qu'il suffit ensuite de minorer ou de majorer. Si la borne obtenue ne remplit pas les conditions du lemme 4.1 alors, soit on choisit n assez grand pour trouver une borne qui convienne, soit on rétrécit l'intervalle où varie λ_1 . Pour que toutes les marches aléatoires étudiées dans cet article aient le maximum de zones communes, nous avons décidé de choisir n assez grand pour que les bornes soient satisfaisantes. Voici les différentes zones d'étude et les moyens d'obtenir les bornes de $r_C(\lambda)$. Pour plus de détails, voir [R2].

Les bornes de $r_C(\lambda)$ sont obtenues grâce au lemme 5.2, à partir des encadrements suivants des $M_{i,\lambda}$.

ZONE 1 : $3 \leq \lambda_1 \leq n/3$ et $m \leq n/3$ ou $3 \leq m \leq n/3$ et $\lambda_1 \leq n/3$. Cette zone contient les partitions et leurs transposées. Elle contient aussi des partitions λ_0 vérifiant ${}^t\lambda_0 = \lambda_0$ donc telles que $M_{2l,\lambda_0} = 0$ (cf. corollaire 5.3). Les lemmes 5.4, 5.7 et la proposition 5.8 permettent ensuite d'écrire

$$\begin{aligned} -M_{2l,(n/3,n/3,n/3)} &\leq M_{2l,\lambda} \leq M_{2l,(n/3,n/3,n/3)}, \\ 0 &\leq M_{2l,\lambda}^2 \leq M_{2l,(n/3,n/3,n/3)}^2, \\ 0 &\leq d_{1,l}(3) \leq M_{2l+1,\lambda} \leq M_{2l+1,(n/3,n/3,2,2,1,\dots,1)}, \\ -M_{2,(n/3,n/3,n/3)}M_{4,(n/3,n/3,n/3)} &\leq M_{2,\lambda}M_{4,\lambda} \\ &\leq M_{2,(n/3,n/3,n/3)}M_{4,(n/3,n/3,n/3)}, \\ -M_{2,(n/3,n/3,n/3)}M_{3,(n/3,n/3,2,2,1,\dots,1)} &\leq M_{2,\lambda}M_{3,\lambda} \\ &\leq M_{2,(n/3,n/3,n/3)}M_{3,(n/3,n/3,2,2,1,\dots,1)}. \end{aligned}$$

ZONE 2 : $n/3 \leq \lambda_1 \leq n/2$ et $m \leq n/2$ ou $n/3 \leq m \leq n/2$ et $\lambda_1 \leq n/2$. Nous pouvons nous restreindre aux partitions telles que $\lambda_1 \geq m$ puisque le passage aux transposées ne change pas la borne en valeur absolue (cf. corollaire 5.3). Nous avons alors, d'après les lemmes 5.4, 5.7 et la proposition 5.8, et puisque si $\lambda_0 = (n/2, 2, 1, \dots, 1)$, $M_{2l,\lambda_0} = 0$,

$$\begin{aligned} M_{2l,\lambda_M} &\leq M_{2l,\lambda} \leq M_{2l,(n/2,n/2)}, \\ 0 &\leq M_{2l,\lambda}^2 \leq M_{2l,(n/2,n/2)}^2, \\ (10) \quad 0 &\leq d_{1,l}((n+1)/3) \leq M_{2l+1,\lambda} \leq M_{2l+1,(n/2,2,1,\dots,1)}, \\ M_{2,\lambda_M}M_{3,(n/2,2,1,\dots,1)} &\leq M_{2,\lambda}M_{3,\lambda} \leq M_{2,(n/2,n/2)}M_{3,(n/2,2,1,\dots,1)}, \\ M_{2,(n/2,n/2)}M_{4,\lambda_M} &\leq M_{2,\lambda}M_{4,\lambda} \leq M_{2,(n/2,n/2)}M_{4,(n/2,n/2)}, \end{aligned}$$

où λ_M est définie dans l'exemple 5.5.

Nous traiterons simultanément le cas des zones restantes.

AUTRES ZONES : $b_{i-1}n \leq \lambda_1 \leq b_i n$ ou $b_{i-1}n \leq m \leq b_i n$ avec $b_{i-1} = s_{i-1}/t_{i-1}$. On peut continuer à supposer $\lambda_1 \geq m$ et d'après les lemmes 5.4, 5.7 et la proposition 5.8, nous avons, si $\lambda_{s_i} = ((s_{i-1}n + 1)/t_{i-1}, 1, \dots, 1)$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_{2l, \lambda_{s_i}} \leq M_{2l, \lambda} \leq M_{2l, (b_i n, (1-b_i)n)}, \\ (11) \quad 0 &\leq d_{1,l} \left(\frac{s_{i-1}n + 1}{t_{i-1}} \right) \leq M_{2l+1, \lambda} \leq M_{2l+1, (b_i n, 1, \dots, 1)}, \\ d_{1,l} \left(\frac{s_{i-1}n + 1}{t_{i-1}} \right) M_{2, \lambda_{s_i}} &\leq M_{2, \lambda} M_{3, \lambda} \leq M_{2, (b_i n, (1-b_i)n)} M_{3, (b_i n, 1, \dots, 1)}, \\ M_{2, \lambda_{s_i}} M_{4, \lambda_{s_i}} &\leq M_{2, \lambda} M_{4, \lambda} \leq M_{2, (b_i n, (1-b_i)n)} M_{4, (b_i n, (1-b_i)n)}. \end{aligned}$$

REMARQUE 5.11. Pour tous l et n dans \mathbb{N} ,

$$M_{2l, ((n+1)/2, 1, \dots, 1)} = 0.$$

Cas particuliers. L'étude de la marche aléatoire engendrée par les $(2, 2, 2)$ -cycles est légèrement différente. Soit λ'_M la partition de longueur $4n/9$ telle que $\lambda'_M = ((n+1)/3, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$. Alors :

- Si $n/3 \leq \lambda_1 \leq 4n/9$, nous utiliserons les inégalités $M_{2l, \lambda'_M} \leq M_{2l, \lambda} \leq M_{2l, (4n/9, 4n/9, n/9)}$ et la relation (10) pour $M_{3, \lambda}$.
- Si $4n/9 \leq \lambda_1 \leq 5n/9$ nous utiliserons $M_{2l, ((4n+1)/9, 2, 1, \dots, 1)} \leq M_{2l, \lambda} \leq M_{2l, (5n/9, 4n/9)}$ et la relation (11) pour $M_{3, \lambda}$.

Le tableau en page suivante présente les zones étudiées (en bas), les bornes obtenues pour les marches aléatoires engendrées par les classes de conjugaison \mathcal{C} telles que $\|\mathcal{C}\| \leq 6$ et celle des cycles de longueur 7 et les valeurs de n pour lesquelles les bornes sont valables. Le signe * signale que la borne est optimale au sens où elle est égale à la borne supérieure sur n du maximum de $r_{\mathcal{C}}(\lambda)$ pour λ appartenant à la zone considérée.

Certaines valeurs, trop larges par rapport aux cases du tableau, sont définies ci-dessous :

$$\begin{aligned} A_6 &= \frac{265721}{500000}, & A_{3,3} &= \frac{5329}{10000}, & A_{2,2,2} &= \frac{68921}{125000}, \\ B_{2,2,2} &= \frac{226981}{373248}, & A_7 &= \frac{1623931}{2985984}. \end{aligned}$$

Remerciements. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une thèse de doctorat dirigée par Laurent Saloff-Coste que je tiens à remercier vivement pour tous les précieux conseils et judicieuses remarques qu'il a formulés lors de la rédaction de cet article.

| | | | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|---------------|---------------|-----------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------|------------------|----------------|-----------------|------------------|
| $r_3(\lambda)$ $n \geq 10$ | * | * | * | | | | | | | | |
| | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{16}$ | | | | | | | | |
| $r_4(\lambda)$ $n \geq 14$ | 0.0677 | 0.204 | 0.256 | $\frac{41}{128}$ | $\frac{313}{648}$ | | | | | | |
| $r_{2,2}(\lambda)$ $n \geq 10$ | * | * | * | * | * | * | | | | | |
| | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{25}{81}$ | $\frac{25}{64}$ | $\frac{169}{324}$ | $\frac{625}{1024}$ | | | | | |
| $r_5(\lambda)$ $n \geq 12$ | 0.072 | 0.157 | 0.21 | 0.246 | 0.437 | $\frac{2101}{4096}$ | $\frac{8n}{9}$ | | | | |
| $r_{3,2}(\lambda)$ $n \geq 17$ | 0.0467 | 0.186 | 0.268 | 0.275 | 0.432 | $\frac{1235}{2187}$ | * | | | | |
| $r_6(\lambda)$ $n \geq 20$ | 0.0348 | 0.133 | 0.195 | 0.227 | 0.417 | 0.467 | A_6 | $\frac{10n}{11}$ | | | |
| $r_{4,2}(\lambda)$ $n \geq 20$ | 0.0305 | 0.134 | 0.204 | 0.261 | 0.446 | 0.486 | 0.6 | | | | |
| $r_{3,3}(\lambda)$ $n \geq 20$ | 0.028 | 0.114 | 0.193 | 0.23 | 0.412 | 0.465 | $A_{3,3}$ | | | | |
| $r_{2,2,2}(\lambda)$ $n \geq 28$ | 0.0426 | 0.093 | 0.188 | 0.233 | 0.298 | 0.449 | 0.502 | $A_{2,2,2}$ | $B_{2,2,2}$ | * | |
| $r_7(\lambda)$ $n \geq 25$ | 0.0131 | 0.0795 | 0.138 | 0.205 | 0.408 | 0.454 | 0.499 | A_7 | * | | |
| Bornes de λ_1 | 3 | $\frac{n}{3}$ | $\frac{4n}{9}$ | $\frac{n}{2}$ | $\frac{5n}{9}$ | $\frac{2n}{3}$ | $\frac{3n}{4}$ | $\frac{5n}{6}$ | $\frac{7n}{8}$ | $\frac{9n}{10}$ | $\frac{11n}{12}$ |

RÉFÉRENCES

- [AD] D. Aldous and P. Diaconis, *Strong uniform times and finite random walks*, Adv. Appl. Math. 8 (1987), 69–97.
- [Ay] R. Ayoub, *An Introduction to the Analytic Theory of Numbers*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.
- [D1] P. Diaconis, *The cutoff phenomenon in finite Markov chains*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 93 (1996), 1659–1664.

- [D2] —, *Group Representations in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes Monogr. Ser. 11, Hayward, CA, 1988.
- [DS] P. Diaconis and M. Shahshahani, *Generating a random permutation with random transpositions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 57 (1981), 159–179.
- [Fel] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 1, 3rd ed., Wiley, New York, 1968.
- [Ing] R. E. Ingram, *Some characters of the symmetric group*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 358–369.
- [Jam] G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Lecture Notes in Math. 682, Springer, Berlin, 1978.
- [JK] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [R1] Y. Roichman, *Upper bound on the characters of the symmetric groups*, Invent. Math. 125 (1996), 451–485.
- [R2] S. Roussel, *Marches aléatoires sur le groupe symétrique*, thèse de doctorat (en préparation), 1999.
- [Sag] B. E. Sagan, *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Wadsworth and Brooks/Cole Math. Ser., 1991.
- [SC1] L. Saloff-Coste, *Precise estimates on the rate at which certain diffusions tend to equilibrium*, Math. Z. 217 (1994), 641–677.
- [SC2] —, *Lectures on finite Markov chains*, in: Lectures on Probability Theory and Statistics, Lecture Notes in Math. 1665, Springer, 1997, 301–413.
- [Ser] J. P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1977.

Université P. Sabatier
F-31062 Toulouse Cedex, France
E-mail: roussel@cict.fr

Received 29 January 1999;
revised 3 October 1999

(3694)