Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Vor einigen Jahren hat S. Ulam einen Überdeckungssatz von allgemein mengentheoretischem Charakter bewiesen; dieser Satz wurde später von W. Sierpiński erheblich verallgemeinert [1]). Im vorliegenden Artikel möchte ich zwei Sätze ähnlicher Natur aufstellen.

Es sollen hier zunächst gewisse Begriffe aus der Arithmetik der Kardinalzahlen definiert werden, die zur bequemen Formulierung der in Rede stehenden Sätze erforderlich sind.

Definition 1. Wir wollen sagen, daß die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ *von der Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *aus stark erreichbar ist, wenn* $\mathfrak{n}$ *zu jedem System* $\mathfrak{K}$ *von Kardinalzahlen gehört, das folgenden Bedingungen genügt:*

(i) $\mathfrak{m} \in \mathfrak{K}$;

(ii) *ist* $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{p} \geqslant \mathfrak{q}$, *so ist auch* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$;

(iii) *ist jedem Element* p *einer Menge* P *mit der Mächtigkeit* $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *eine Kardinalzahl* $\mathfrak{q}_p \in \mathfrak{K}$ *zugeordnet, so ist auch* $\sum_{p \in P} \mathfrak{q}_p \in \mathfrak{K}$;

(iv) *ist* $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *und ist* $\mathfrak{q}$ *die auf* $\mathfrak{p}$ *nächstfolgende Kardinalzahl, so ist auch* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$.

[1]) Vgl. S. Ulam, *Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. **16** (1930), S. 145, sowie W. Sierpiński, *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. **20** (1933), S. 214 ff. (oder das Buch von demselben Verfasser *Hypothèse du continu*, Monogr. Matem. **4**, Warszawa-Lwów 1934, S. 152 ff.).

Definition 2. Wir wollen sagen, daß die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ *von der Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *aus schwach erreichbar ist, wenn* $\mathfrak{n}$ *zu jedem System von Kardinalzahlen gehört, das den Bedingungen* (i)-(iii) *aus Definition 1 sowie folgender Bedingung genügt:*

(iv) *ist* $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$, *so ist auch* $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{K}$ [1]).

Aus diesen Definitionen ersieht man sofort, daß jede von der gegebenen Zahl $\mathfrak{m} \geqslant 2$ aus stark erreichbare Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ zugleich schwach erreichbar ist. Das Problem, ob auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, ist nicht einmal in dem einfachsten nicht trivialen Fall: $\mathfrak{m} = \aleph_0$ und $\mathfrak{n} = 2^{\aleph_0}$ entschieden; eine Lösung dieses Problems, und zwar in positiver Richtung, ergibt sich offenbar aus der Cantorschen Alefhypothese:

$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, *für jede Ordnungszahl* α.

Der Überdeckungssatz von Sierpiński (in einer etwas verallgemeinerten und veränderten Form) lautet nun folgendermaßen:

Erster Überdeckungssatz. *Es sei* $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl,* N *eine Menge und* $\boldsymbol{S}$ *ein Mengensystem, die folgenden Bedingungen genügen:*

(i) *die Mächtigkeit* $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$ *ist von* $\mathfrak{m}$ *aus stark erreichbar;*

(ii) *jedes System* $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}$ [2]) *von nicht leeren paarweise fremden Mengen hat eine Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$;

(iii) $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}} X$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein System $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$, *so daß* $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}} X$.

[1]) Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den eben definierten Begriffen und den Begriffen einer im weiteren und im engeren Sinne unerreichbaren Kardinalzahl, die in meinem Aufsatz *Über unerreichbare Kardinalzahlen*, dieser Band, S. 68 ff., erörtert werden. Und zwar ist eine Zahl $\mathfrak{n}$ dann und nur dann von der gegebenen Zahl $\mathfrak{m}$ aus stark, bzw. schwach, erreichbar, wenn es keine im weiteren, bzw. im engeren, Sinne unerreichbare Kardinalzahl gibt, die $> \mathfrak{m}$ und $\leqslant \mathfrak{n}$ ist.

[2]) Mit $\boldsymbol{Pt}(N)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von N, d. h. das System aller Teilmengen der Menge N.

Dieser Satz wurde von W. Sierpiński nur für $\mathfrak{m}=\aleph_0$ formuliert und bewiesen, der Beweis hievon kann aber fast wörtlich auf den allgemeinen Fall übertragen werden. Die Sierpińskische Formulierung dieses Satzes unterscheidet sich von der hier angegebenen noch in gewissen anderen Einzelheiten; es läßt sich aber ganz leicht nachweisen, daß beide Formulierungen äquivalent sind (davon wird übrigens noch weiter unten, S. 150 f, die Rede sein).

Der Anwendungsbereich des ersten Überdeckungssatzes ist durch die Bedingung (i) wesentlich eingeschränkt; ist z. B. $\mathfrak{m}=\aleph_0$, so gilt der Satz für die Mengen N mit den Mächtigkeiten $\aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega$ usw., dagegen kann er (ohne zusätzliche Hypothese) nicht mehr auf Mengen mit den Mächtigkeiten $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$ usw. angewendet werden.

Es wird uns nun gelingen, in den zwei weiter unten aufgestellten Überdeckungssätzen diese Einschränkung zu beseitigen und zwar in der Voraussetzung (i) das Wort *„stark"* durch *„schwach"* zu ersetzen, wobei wir aber gezwungen sein werden, entweder die Voraussetzung (ii) des oben angegebenen Satzes zu verstärken oder dessen Behauptung abzuschwächen.

Dem beiden Überdeckungssätzen schicken wir eine Hilfsdefinition und eine Reihe von Hilfssätzen voraus.

Hilfsdefinition 1. Mit $\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ bezeichnen wir das System aller Kardinalzahlen $\mathfrak{n}$, die folgender Bedingung genügen: Ist N eine Menge mit der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ und $\boldsymbol{S}$ ein Mengensystem, derart daß

(i) *das System $\boldsymbol{Pt}(N)-\boldsymbol{S}$ keine zwei nicht leere fremde Mengen als Elemente enthält,*

(ii) $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{S}}X$,

so gibt es ein System $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$ mit einer Mächtigkeit $\leqslant\mathfrak{m}$, so daß $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}X$.

Hilfssatz 1. Es gilt: $\mathfrak{m}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$.

Beweis. Es sei $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{m}$ und $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{S}}X$. Jedem Element $n\in N$ ordnen wir (mit Hilfe des Auswahlaxioms) eine bestimmte Menge $F(n)$ zu, für die $n\in F(n)$ und $F(n)\in\boldsymbol{S}$ gilt, und setzen: $\boldsymbol{M}=\underset{F(n)}{E}[n\in N]$ [1]).

[1]) Der symbolische Ausdruck von der Form $\underset{f(x)}{E}[\varphi(x)]$ bezeichnet die Menge aller Werte der Funktion f, die denjenigen Argumentwerten x entsprechen, welche die Bedingung $\varphi(x)$ erfüllen.

Man hat offenbar $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$ und $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}X$. Die Menge N wird ferner durch die Funktion F auf das System $\boldsymbol{M}$ eindeutig abgebildet; nach einem wohlbekannten Satz (der in vorliegenden Betrachtungen vielfach angewendet wird) [1]) ist also $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\overline{\overline{N}}=\mathfrak{m}$. Auf Grund der Hilfsdefinition 1 ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{m}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. Ist $\mathfrak{p}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ und $\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{q}$, so ist auch $\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Es sei $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{q}$; $\boldsymbol{S}$ sei ein Mengensystem, das die Bedingungen (i) und (ii) der Hilfsdefinition 1 erfüllt. Da $\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{q}$, gibt es offenbar eine Menge $N'\supset N$ mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{N'}}=\mathfrak{p}$. Wir setzen:

$$(1)\qquad \boldsymbol{S}'=\underset{X+Y}{E}[X\in\boldsymbol{S}\quad \textit{und}\quad Y\subset N'-N]+\boldsymbol{Pt}(N'-N).$$

Wie leicht hieraus ersichtlich, gibt es keine zwei nicht leere fremde Mengen Z_1 und Z_2, die dem System $\boldsymbol{Pt}(N')-\boldsymbol{S}'$ angehören, denn sonst würden ja $X_1=Z_1\cdot N$ und $X_2=Z_2\cdot N$ zwei nicht leere fremde Mengen des Systems $\boldsymbol{Pt}(N)-\boldsymbol{S}$ sein. Nach (1) ist ferner $N'\subset\sum_{Z\in\boldsymbol{S}'}Z$. Da hiebei $\overline{\overline{N'}}=\mathfrak{p}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, so existiert laut der Hilfsdefinition 1 ein System $\boldsymbol{M}'\subset\boldsymbol{S}'$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}}\leqslant\mathfrak{m}$ und $N'\subset\sum_{Z\in\boldsymbol{M}'}Z$.

Aus (1) folgt, daß jeder Menge $Z\in\boldsymbol{M}'$ (und allgemeiner jeder Menge $Z\in\boldsymbol{S}'$), die nicht in $N'-N$ enthalten ist, eine Menge $Z^*\in\boldsymbol{S}$ zugeornet werden kann, so daß $Z-(N'-N)\subset Z^*$. Setzt man nun:

$$\boldsymbol{M}=\underset{Z^*}{E}[Z\in\boldsymbol{M}'\quad \textit{und}\quad Z-(N'-N)\neq 0],$$

so kann man ohne Schwierigkeit nachweisen, daß $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}}\leqslant\mathfrak{m}$ und

$$N=N'-(N'-N)\subset\sum_{Z\in\boldsymbol{M}'}Z-(N'-N)\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}X.$$

Im Einklang mit Hilfsdefinition 1 ist aber dadurch gezeigt, daß $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, w. z. b. w.

[1]) Vgl. z. B. meine Arbeit *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16** (1930), S. 197 f. (Lemme 11a).

Hilfssatz 3. Es sei $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$; *$N$ sei eine Menge und $\boldsymbol{S}$ ein Mengensystem derart, daß*

(i) *$\boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}$ keine zwei nicht leere fremde Mengen als Elemente enthält.*

Gibt es dann ein System $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{S}$ mit einer Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{p}$, so daß $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{P}} X$, so gibt es auch ein System $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ mit einer Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$, so daß $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}} X$.

Beweis [1]). Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes ordnen wir die Mengen des Systems $\boldsymbol{P}$ in eine transfinite Folge $X_0, X_1, \ldots, X_\xi, \ldots$ vom Typus α und bezeichnen mit $\boldsymbol{P}'$ das System, das aus allen nicht leeren Mengen von der Form $N \cdot \left(X_\xi - \sum_{\eta < \xi} X_\eta\right)$, $0 \leqslant \xi < \alpha$, besteht. Wie leicht ersichtlich, ist $\boldsymbol{P}'$ ein System von paarweise fremden Mengen und es gilt:

(1) $$N = N \cdot \sum_{X \in \boldsymbol{P}} X = \sum_{X \in \boldsymbol{P}'} X,$$

(2) $$\overline{\overline{\boldsymbol{P}'}} = \mathfrak{p}' \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{P}}} \leqslant \mathfrak{p}.$$

Da nach der Voraussetzung des Hilfssatzes 3 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, so ergibt sich aus (2) auf Grund des Hilfssatzes 2, daß

(3) $$\overline{\overline{\boldsymbol{P}'}} = \mathfrak{p}' \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m}).$$

Es sei $\mathcal{S}$ das System aller Mengensysteme $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{P}'$, die folgender Bedingung genügen: es gibt eine Menge $Z \in \boldsymbol{S}$, so daß $\sum_{X \in \boldsymbol{T}} X \subset Z$. Nehmen wir an, $\boldsymbol{T}_1$ und $\boldsymbol{T}_2$ seien zwei nicht leere elementfremde Teilsysteme von $\boldsymbol{P}'$, die nicht zu $\mathcal{S}$ gehören. Da $\boldsymbol{P}'$ aus nicht leeren paarweise fremden Teilmengen von N besteht, so sind auch $Y_1 = \sum_{X \in \boldsymbol{T}_1} X$ und $Y_2 = \sum_{X \in \boldsymbol{T}_2} Z$ zwei nicht leere fremde Teilmengen von N. Aus der

[1]) Die Beweise der Hilfssätze 3 und 5 sind im allgemeinen den Beweisen analog, die von W. Sierpiński, loc. cit., angegeben wurden. Die Grundidee des Beweises von Hilfssatz 3 geht auf S. Banach zurück; vgl. S. Banach, *Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen*, Fund. Math. **15** (1930), S. 97 ff., insbesondere S. 100 f.

Definition von $\mathcal{S}$ folgt ferner, daß Y_1 und Y_2 zu $\boldsymbol{S}$ nicht gehören (und sogar in keiner Menge $Z \in \boldsymbol{S}$ enthalten sind). Das System $\boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}$ enthält also als Elemente zwei nicht leere fremde Mengen Y_1 und Y_2, den Voraussetzungen des zu beweisenden Hilfssatzes entgegen. Dadurch ist unsere Annahme widerlegt und Folgendes nachgewiesen:

(4) sind $\boldsymbol{T}_1$ und $\boldsymbol{T}_2$ zwei nicht leere elementfremde Teilsysteme von $\boldsymbol{P}'$, so muß mindestens eines von ihnen dem System $\mathcal{S}$ angehören.

Da $\boldsymbol{P}$ aus den Mengen X_ξ und $\boldsymbol{P}'$ aus den Mengen $N \cdot \left(X_\xi - \sum_{\eta < \xi} X_\eta\right)$ besteht, so ist jede Menge von $\boldsymbol{P}'$ in einer Menge von $\boldsymbol{P}$ und demnach in einer Menge von $\boldsymbol{S}$ enthalten. Gehört also eine Menge Y zu $\boldsymbol{P}'$, so gehört das System $\boldsymbol{T} = \{Y\}$ [1]) zu $\mathcal{S}$ (weil es eine Menge $Z \in \boldsymbol{S}$ gibt, so daß $\sum_{X \in \boldsymbol{T}} X = Y \subset Z$). Daraus folgt, daß

(5) $$\boldsymbol{P}' \subset \sum_{\boldsymbol{T} \in \mathcal{S}} \boldsymbol{T}.$$

Wir wenden nun Hilfsdefinition 1 an, wobei wir N, $\mathfrak{n}$ und $\boldsymbol{S}$ beziehungsweise durch $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{p}'$ und $\mathcal{S}$ ersetzen; aus (3)-(5) ergibt sich dann die Existenz eines Systems $\mathfrak{M}$, so daß

(6) $$\mathfrak{M} \subset \mathcal{S}, \qquad \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqslant \mathfrak{m} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{P}' \subset \sum_{\boldsymbol{T} \in \mathfrak{M}} \boldsymbol{T}.$$

Auf Grund der Definition von $\mathcal{S}$ und mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man jedem System $\boldsymbol{T}$, das zu $\mathcal{S}$ und insbesondere zu $\mathfrak{M}$ gehört, eine Menge $F(\boldsymbol{T})$ zuordnen, derart daß

(7) $$F(\boldsymbol{T}) \in \boldsymbol{S} \quad \text{und} \quad \sum_{X \in \boldsymbol{T}} X \subset F(\boldsymbol{T}) \quad \text{für jedes} \quad \boldsymbol{T} \in \mathcal{S}.$$

Wir setzen nun:

(8) $$\boldsymbol{M} = \mathop{E}_{F(\boldsymbol{T})} [\boldsymbol{T} \in \mathfrak{M}].$$

[1]) Mit dem Symbol „$\{Y\}$" bezeichnen wir die Menge, die aus dem einzigen Element Y besteht.

Aus (6)-(8) gewinnt man leicht: $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\overline{\overline{\partial\mathfrak{n}}}\leqslant\mathfrak{m}$ und $\sum_{X\in\boldsymbol{P}'}X\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}X$; mit Rücksicht auf (1) ergibt die letzte Formel: $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}X$. Das System $\boldsymbol{M}$ hat somit alle gewünschten Eigenschaften, und der Beweis ist zu Ende geführt.

Bemerkung. Hilfssatz 3 bleibt gültig, wenn man sowohl in Hilfsdefinition 1 als auch im Hilfssatz selbst die Bedingung (i) folgendermaßen verallgemeinert:

(i') *jedes System* $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{Pt}(N)-\boldsymbol{S}$ *von paarweise fremden, bzw. von nicht leeren paarweise fremden Mengen hat eine Mächtigkeit* $<\mathfrak{q}$ (wobei $\mathfrak{q}$ eine beliebige vorgegebene Kardinalzahl ist).

Der Beweis des Hilfssatzes wird dabei keiner wesentlichen Änderung unterworfen.

Hilfssatz 4. Ist $\mathfrak{p}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ *und* $\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$, *so ist auch* $\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Es sei N eine Menge mit der Mächtigkeit $\mathfrak{q}$ und $\boldsymbol{S}$ ein Mengensystem, das den Bedingungen (i) und (ii) der Hilfsdefinition 1 genügt. Da $\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$, so gibt es laut der Hilfsdefinition 1 ein System $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{S}$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\leqslant\mathfrak{p}$ und $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{P}}X$. Da ferner $\mathfrak{p}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, so ergibt sich hieraus auf Grund von Hilfssatz 3 die Existenz eines Systems $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, das die Formeln: $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\mathfrak{m}$ und $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}X$ erfüllt. Wendet man nun Hilfsdefinition 1 zum zweiten Mal an, so kommt man zum Schluß, daß $\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, w. z. b. w.

Hilfssatz 5. Ist $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ *und ist jedem Element* $p\in P$ *eine Kardinalzahl* $\mathfrak{q}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ *zugeordnet, so ist* $\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p\in\mathfrak{Q}(2\cdot\mathfrak{m})$. *Ist dabei* $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, *so ist* $\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Wir betrachten eine Menge N mit der Mächtigkeit $\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p$ und ein Mengensystem $\boldsymbol{S}$, das den Bedingungen (i) und (ii) der Hilfsdefinition 1 genügt. Da $\overline{\overline{N}}=\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p$, so kann N in fremde Teile derart zerlegt werden: $N=\sum_{p\in P}Q_p$, daß $\overline{\overline{\mathfrak{Q}}}_p=\mathfrak{q}_p$ für jedes $p\in P$ ist. Unter den Summanden $\mathfrak{Q}_p$ kommt höchstens eine nicht leere Menge vor, die nicht zu $\boldsymbol{S}$ gehört, etwa die Menge $\mathfrak{Q}_{p_0}$. Wir setzen:

$$\boldsymbol{P}_1=\mathop{E}_{Q_p}[p\in P \text{ und } Q_p\neq Q_{p_0}].$$

Es ist offenbar: $\boldsymbol{P}'\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{P}'}}\leqslant\mathfrak{p}$ und $N-Q_{p_0}\subset\sum_{X\in\boldsymbol{P}'}X$; da hiebei $\mathfrak{p}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, so gibt es nach Hilfssatz 3 ein Mengensystem $\boldsymbol{M}_1$, derart daß

$$(1)\qquad \boldsymbol{M}_1\subset\boldsymbol{S},\qquad \overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_1\leqslant\mathfrak{m}\qquad\text{und}\qquad N-Q_{p_0}\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}_1}X.$$

Anderseits ist $\overline{\overline{Q}}_{p_0}=\mathfrak{q}_{p_0}\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ und $Q_{p_0}\subset\sum_{X\in\boldsymbol{S}}X$; laut der Hilfsdefinition 1 (für $N=Q_{p_0}$ und $\mathfrak{n}=\mathfrak{q}_{p_0}$) gibt es also ein System $\boldsymbol{M}_2$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(2)\qquad \boldsymbol{M}_2\subset\boldsymbol{S},\qquad \overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_2\leqslant\mathfrak{m}\qquad\text{und}\qquad Q_{p_0}\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}_2}X.$$

Setzt man nun: $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2$, so gewinnt man sofort aus (1) und (2): $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant 2\cdot\mathfrak{m}$ und $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}X$ (im Falle, wenn alle Mengen Q_p, $p\in P$, zu $\boldsymbol{S}$ gehören, ergibt sich die Existenz eines Systems $\boldsymbol{M}$ von dieser Beschaffenheit direkt aus Hilfssatz 3). Im Einklang mit Hilfsdefinition 1 (für $\mathfrak{n}=\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p$) folgt hieraus sofort, daß $\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p\in\mathfrak{Q}(2\cdot\mathfrak{m})$; ist dabei $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, so ist bekanntlich $2\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$ und demnach $\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p\in\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, w. z. b. w.

Hilfssatz 6. Ist P *eine Menge mit der Mächtigkeit* $\mathfrak{p}$ *und* N *eine Menge mit der Mächtigkeit* $2^{\mathfrak{p}}$, *so kann man jedem Element* $p\in P$ *zwei nicht leere elementfremde Mengen* $N_{p,0}$ *und* $N_{p,1}$ *in der Weise zuordnen, daß:*

(i) $N_{p,0}+N_{p,1}=N$ *für jedes* $p\in P$ *ist,*

(ii) *für jede Funktion* f, *deren Vorbereich* P *ist und deren Nachbereich aus den zwei Zahlen* 0 *und* 1 *oder nur aus einer dieser Zahlen besteht, der Durchschnitt* $\prod_{p\in P}N_{p,f(p)}$ *höchstens ein Element hat.*

Beweis. Bemerken wir zunächst, daß das Mengensystem $\boldsymbol{Pt}(P)$ dieselbe Mächtigkeit, nämlich $2^{\mathfrak{p}}$, wie die Menge N hat; es gibt demnach eine Funktion g, die dieses System in eineindeutiger Weise auf die Menge N abbildet. Wir setzen nun:

(1) $N_{p,0}=\underset{g(x)}{E}[p\epsilon X \textit{ und } X\subset P]$ und $N_{p,1}=\underset{g(x)}{E}[p \textit{ non } \epsilon X \textit{ und } X\subset P]$ für jedes $p\epsilon P$.

Hieraus erhält man sofort:

(2) $N_{p,0}\neq 0$, $N_{p,1}\neq 0$, $N_{p,0}\cdot N_{p,1}=0$ und $N_{p,0}+N_{p,1}=N$ für jedes $p\epsilon P$.

Betrachten wir jetzt eine beliebige Funktion f, deren Vorbereich P ist und deren Nachbereich höchstens aus den zwei Zahlen 0 und 1 besteht. Nehmen wir an, daß

(3) der Durchschnitt $\prod\limits_{p\epsilon P} N_{p,f(p)}$ zwei verschiedene Elemente $n_1\neq n_2$ enthält.

Nach (2) und (3) sind n_1 und n_2 Elemente von N. Es gibt demnach zwei Mengen X_1 und X_2, so daß

(4) $X_1\subset P$, $X_2\subset P$, $g(X_1)=n_1$ und $g(X_2)=n_2$.

Mit Rücksicht auf die Eineindeutigkeit der Funktion g müssen dabei die Mengen X_1 und X_2 verschieden sein. Eine der Differenzen X_1-X_2 und X_2-X_1, sagen wir X_1-X_2, ist also nicht leer. Es sei

(5) $$p'\epsilon X_1-X_2,$$

(d. h. $p'\epsilon X_1$ und p' *non* ϵX_2). Aus (1), (4) und (5) ergibt sich, daß

(6) $$n_1\epsilon N_{p',0} \quad \text{und} \quad n_2\epsilon N_{p',1}.$$

Aus (3) folgt ferner, daß n_1 und n_2 zu $N_{p',f(p')}$ gehören. Da hiebei $f(p')=0$ oder $=1$ ist, so gehören die Elemente n_1 und n_2 entweder beide zu $N_{p',0}$ oder beide zu $N_{p',1}$. Auf Grund von (6) schließen wir hieraus, daß die Mengen $N_{p',0}$ und $N_{p',1}$ nicht fremd sind; das steht aber im Widerspruch zu (2).

Dadurch ist die Annahme (3) widerlegt, und es gilt:

(7) für jede Funktion f, deren Vorbereich P ist und deren Nachbereich höchstens aus 0 und 1 besteht, hat der Durchschnitt $\prod\limits_{p\epsilon P} N_{p,f(p)}$ höchstens ein Element.

Mit Rücksicht auf (2) und (7) ist damit Hilfssatz 6 bewiesen.

Hilfssatz 7 [1]. *Es gilt:* $2^{\mathfrak{p}}\epsilon\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}+1)$ *für jede Kardinalzahl* $\mathfrak{p}$ *und insbesondere* $2^{\mathfrak{p}}\epsilon\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ *für* $\mathfrak{p}\geqslant\aleph_0$.

Beweis. Es sei $\overline{\overline{N}}=2^{\mathfrak{p}}$; $\boldsymbol{S}$ sei ein Mengensystem das die Bedingungen (i) und (ii) der Hilfsdefinition 1 erfüllt.

Jedem Element $p\epsilon P$ ordnen wir zwei Mengen $N_{p,0}$ und $N_{p,1}$ zu, die den beiden in der Behauptung des Hilfssatzes 6 angegebenen Bedingungen (i) und (ii) genügen. Da $N_{p,0}$ und $N_{p,1}$ zwei nicht leere elementfremde Teilmengen von N sind, so muß eine von ihnen zu $\boldsymbol{S}$ gehören. Wir definieren nun eine Funktion f in folgender Weise: ist $p\epsilon P$, so setzen wir $f(p)=0$ oder $=1$ je nachdem, ob $N_{p,1}$ zu $\boldsymbol{S}$ gehört oder nicht. Es folgt daraus, daß

(1) $$N_{p,1-f(p)}\epsilon\boldsymbol{S} \quad \text{für jedes} \quad p\epsilon P.$$

Da nach der Bedingung (i) des Hilfssatzes 6 $N_{p,1-f(p)}+N_{p,f(p)}=N$ für jedes $p\epsilon P$ ist, so erhalten wir auf Grund der Regeln des Mengenkalküls:

(2) $$N=\sum_{p\epsilon P}N_{p,1-f(p)}+\prod_{p\epsilon P}N_{p,f(p)}.$$

Nach der Bedingung (ii) des Hilfssatzes 6 hat dabei der Durchschnitt $\prod\limits_{p\epsilon P}N_{p,f(p)}$ höchstens ein Element; da $N\subset\sum\limits_{X\epsilon\boldsymbol{S}}X$, so ergibt sich hieraus die Existenz einer Menge X_0, derart daß

(3) $$X_0\epsilon\boldsymbol{S} \quad \text{und} \quad \prod N_{p,f(p)}\subset X_0.$$

Die Formeln (2) und (3) ergeben sofort:

(4) $$N\subset\sum_{p\epsilon P}N_{p,1-f(p)}+X_0.$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\boldsymbol{M}$ das Mengensystem, das aus allen Mengen $N_{p,1-f(p)}$ sowie aus der Menge X_0 besteht; auf Grund von (1), (3) und (4) gewinnen wir: $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\mathfrak{p}+1$ und $N\subset\sum\limits_{X\epsilon\boldsymbol{M}}X$. Durch Anwendung der Hilsdefinition 1 (für $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}+1$ und $\mathfrak{n}=2^{\mathfrak{p}}$) schließen wir hieraus, daß $2^{\mathfrak{p}}\epsilon\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}+1)$. Ist $\mathfrak{p}\geqslant\aleph_0$ und demnach $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}+1$, so haben wir schließlich: $2^{\mathfrak{p}}\epsilon\mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$, w. z. b. w.

[1]) Dieser Hilfssatz (in einer anderen Formulierung) wurde schon früher unabhängig von S. Ulam und vom Verfasser gefunden; vgl. S. Ulam, op. cit., S. 146 (Satz 1 und Anmerkung [1])).

Hilfssatz 8. Ist $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ *und* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, *so ist* $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Ist $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} < \aleph_0$, so ist $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}$ und folglich, nach Hilfssätzen 1 und 2, $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$. Ist aber $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \geqslant \aleph_0$, so ist auch $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \geqslant \aleph_0$; daraus folgt, wie bekannt, daß $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ oder $= \mathfrak{q}$ ist, wonach, gemäß den Voraussetzungen des Hilfssatzes 8, $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$. Nach Hilfssatz 7 haben wir ferner: $2^{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q})$, da $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} + 1 = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}$ ist; durch Anwendung des Hilfssatzes 4 bekommen wir hieraus: $2^{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$. Schließlich ist $2^{\mathfrak{p}} > \mathfrak{p}$ und demnach $2^{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}} = (2^{\mathfrak{p}})^{\mathfrak{q}} \geqslant \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}$; auf Grund von Hilfssatz 2 ergibt sich daraus wiederum: $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, w. z. b. w.

Hilfssatz 9. Ist $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ *und ist die Kardinalzahl* $\mathfrak{n}$ *von* $\mathfrak{m}$ *aus schwach erreichbar, so ist* $\mathfrak{n} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Beweis. Es genügt zu bemerken, daß das System $\mathfrak{K} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, den Hilfssätzen 1, 2, 5 und 8 zufolge, alle Bedingungen der Definition 2 erfüllt und daß demnach jede von $\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbare Kardinalzahl zu diesem System gehört.

Bemerkung. Hilfssätze 8 und 9 können auch auf endliche Kardinalzahlen erstreckt werden, wenn man nur in ihren Behauptungen „$\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$" durch „$\mathfrak{Q}(\mathfrak{m}+1)$" ersetzt. Der Beweis für endliche Kardinalzahlen gründet sich auf Hilfssätze 2, 4 und 7.

Hilfssatz 10 [1]. *Es seien* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{q}$ *zwei Kardinalzahlen,* N *eine Menge und* $\boldsymbol{S}$ *ein Mengensystem, die folgenden Bedingungen genügen:*

(i) $\mathfrak{m} \geqslant \sum_{\mathfrak{p} < \mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}}$ *und* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$;

(ii) *jedes System* $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}$ *von nicht leeren paarweise fremden Mengen hat eine Mächtigkeit* $< \mathfrak{q}$;

(iii) $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}} X$;

(iv) *ist* $Y \subset N$ *und ist* $Y \operatorname{non} \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}} X$ *für jedes System* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$, *so gibt es eine Menge* $Z \subset Y$, *derart daß sowohl* $Z \operatorname{non} \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}} X$, *als auch* $Y - Z \operatorname{non} \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}} X$ *für jedes System* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein System $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$, *so daß* $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}} X$.

[1]) Hilfssätze 10 und 11 hängen mit gewissen Ergebnissen von S. Ulam, l. cit., S. 147 ff. (Satz 2 und Satz 3) zusammen, sind aber viel allgemeiner Natur.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{I}$ das System aller Mengen Y, die folgender Bedingung genügen: es gibt ein System $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} \leqslant m$ und $Y \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}} X$. Aus dieser Definition ergeben sich leicht folgende Eigenschaften des Systems $\boldsymbol{I}$:

(1) $\quad 0 \in \boldsymbol{I}$ und $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{I}$.

(2) $\quad$ ist $Y \in \boldsymbol{I}$ und $Z \subset Y$, so ist auch $Z \in \boldsymbol{I}$;

(3) $\quad$ ist $\boldsymbol{M}' \subset \boldsymbol{I}$ und $\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \mathfrak{m}$, so ist auch $\sum_{Y \in \boldsymbol{M}'} Y \in \boldsymbol{I}$.

Wir wollen beispielsweise (3) begründen. Jeder Menge $Y \in \boldsymbol{I}$ und insbesondere jeder Menge $Y \in \boldsymbol{M}'$ entspricht ex definitione ein System $\boldsymbol{M}_Y \subset \boldsymbol{S}$, derart daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}_Y}} \leqslant \mathfrak{m}$ und $Y \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}_Y} X$. Es sei $\boldsymbol{M} = \sum_{Y \in \boldsymbol{M}'} \boldsymbol{M}_Y$. Es gilt dann: $\boldsymbol{M}' \subset \boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ (da $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$) und

$$\sum_{Y \in \boldsymbol{M}'} Y \subset \sum_{Y \in \boldsymbol{M}'} \Big(\sum_{X \in \boldsymbol{M}_Y} X \Big) = \sum_{X \in \boldsymbol{M}} X,$$

wonach, im Einklang mit der Definition von $\boldsymbol{I}$, $\sum_{Y \in \boldsymbol{M}'} Y \in \boldsymbol{I}$.

Auf Grund der Voraussetzung (iv) kann man (mit Hilfe des Auswahlaxioms) jeder Menge $Y \subset N$ eine Menge $F(Y)$ zuordnen, die folgende Bedingungen erfüllt:

(4) $\quad F(Y) \subset Y \quad$ für jedes $\quad Y \subset N$;

(5) $\quad$ ist $Y \subset N$ und $Y \operatorname{non} \in \boldsymbol{I}$, so ist weder $F(Y) \in \boldsymbol{I}$ noch $Y - F(Y) \in \boldsymbol{I}$

[ist $Y \subset N$ und $Y \in \boldsymbol{I}$, so kann man einfach $F(Y) = Y$ setzen].

Es sei α eine beliebige Ordnungszahl. Mit Φ_α wollen wir das System aller Funktionen φ bezeichnen, deren Vorbereich gleich $\underset{\xi}{E}[\xi < \alpha]$ ist und die nur zwei Werte 0 und 1, bzw. nur einen dieser Werte, annehmen (d.h. das System aller Folgen vom Typus α, deren Glieder 0 oder 1 sind). Ist $\varphi \in \Phi_\alpha$ und $\beta \leqslant \alpha$, so soll $\varphi^{(\beta)}$ diejenige Funktion $\varphi' \in \Phi_\beta$ bezeichnen, die durch die Formel: $\varphi'(\xi) = \varphi(\xi)$ für jedes $\xi < \beta$ bestimmt ist (die Folge $\varphi^{(\beta)}$ ist also entweder ein Abschnitt der Folge φ oder mit φ identisch).

Wir ordnen jetzt durch Rekurrenz jeder Funktion $\varphi \in \Phi_\alpha$ (α eine beliebige Ordnungszahl) eine bestimmte Menge X_φ zu; und zwar setzen wir:

(6) $$X_\varphi = N \quad \text{für} \quad \varphi \in \Phi_0$$

[das System Φ_0 besteht offensichtlich aus einer einzigen Funktion φ, nämlich aus der „leeren" Funktion];

(7) ist $\varphi \in \Phi_{\alpha+1}$, so ist $X_\varphi = F(X_{\varphi^{(\alpha)}})$ oder $= X_{\varphi^{(\alpha)}} - F(X_{\varphi^{(\alpha)}})$, je nachdem ob $\varphi(\alpha)=0$ oder $=1$ ist;

(8) ist α eine Limeszahl, so ist $X_\varphi = \prod_{\xi<\alpha} X_{\varphi^{(\xi)}}$.

Durch ein leichtes Induktionsverfahren gewinnt man hieraus:

(9) ist α eine beliebige Ordnungszahl und $\varphi \in \Phi_\alpha$, so ist $X_\varphi \subset X_{\varphi^{(0)}} = N$; ist, allgemeiner, $\alpha \geqslant \beta$, so ist $X_\varphi \subset X_{\varphi^{(\beta)}}$.

Man hat ferner:

(10) ist $\alpha \geqslant \beta$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, $\psi \in \Phi_\beta$ und $\varphi^{(\beta)} \neq \psi$, so ist $X_\varphi \cdot X_\psi = 0$.

Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir mit γ die kleinste Ordnungszahl γ, so daß $\varphi(\gamma) \neq \psi(\gamma)$. Es ist also $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$ für $\xi < \gamma$ und demnach $\varphi^{(\gamma)} = \psi^{(\gamma)}$; da $\varphi^{(\beta)} \neq \psi = \psi^{(\beta)}$, so muß $\beta > \gamma$ und $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma+1$ sein. Es ist ferner entweder $\varphi(\gamma)=0$ und $\psi(\gamma)=1$ oder umgekehrt. Im ersten Fall erhält man aus (7):

$$X_{\varphi^{(\gamma+1)}} = F(X_{\varphi^{(\gamma)}}) \quad \text{und} \quad X_{\psi^{(\gamma+1)}} = X_{\psi^{(\gamma)}} - F(X_{\psi^{(\gamma)}}),$$

im zweiten aber $X_{\varphi^{(\gamma+1)}} = X_{\varphi^{(\gamma)}} - F(X_{\varphi^{(\gamma)}})$ und $X_{\psi^{(\gamma+1)}} = F(X_{\psi^{(\gamma)}})$; da hiebei $X_{\varphi^{(\gamma)}} = X_{\varphi^{(\gamma)}}$ ist, so gilt in beiden Fällen: $X_{\varphi^{(\gamma+1)}} \cdot X_{\varphi^{(\gamma+1)}} = 0$. Nach (9) hat man anderseits: $X_\varphi \subset X_{\varphi^{(\gamma+1)}}$ und $X_\psi \subset X_{\psi^{(\gamma+1)}}$, so daß schließlich $X_\varphi \cdot X_\psi = 0$.

Wir wollen noch zeigen (mit Hilfe der transfiniten Induktion), daß für jede Ordnungszahl α folgende Formel besteht:

(11) $$N = \sum_{\varphi \in \Phi_\alpha} X_\varphi.$$

Mit Rücksicht auf (6) gilt in der Tat (11) für $\alpha=0$. Wenn ferner dieser Formel irgend eine Zahl α genügt, so genügt ihr auch die Zahl $\alpha+1$, denn auf Grund von (7) kann die Summe $\sum_{\varphi \in \Phi_{\alpha+1}} X_\varphi$

in der Weise aus der Summe $\sum_{\varphi \in \Phi_\alpha} X_\varphi$ gewonnen werden, daß jeder Summand X_φ der letzteren Summe durch zwei Summanden $X_\psi = F(X_\varphi)$ und $X_\chi = X_\varphi - F(X_\varphi)$ ersetzt wird, wobei mit Rücksicht auf (7) und (12) $F(X_\varphi) \subset X_\varphi$ und demnach $X_\varphi = X_\psi + X_\chi$ ist. Ist schließlich α eine Limenzahl und gilt (11) für jede Zahl $\xi < \alpha$, so hat man:

$$N = \prod_{\xi<\alpha} \sum_{\varphi \in \Phi_\xi} X_\varphi,$$

wonach auf Grund des allgemeinen Distributivitätsgesetzes:

(12) $$N = \sum_\sigma \prod_{\xi<\alpha} X_{\sigma_\xi};$$

die Summation wird hier auf alle Folgen σ vom Typus α erstreckt, deren Glieder Funktionen sind, und zwar derart daß $\sigma_\xi \in \Phi_\xi$. Unter den Summanden aus (12) kommen insbesondere alle Durchschnitte von der Form $\prod_{\xi<\alpha} X_{\varphi^{(\xi)}}$ vor, wo φ eine beliebige Funktion des Systems Φ_α ist; mit Rücksicht auf (10) kann man sich leicht klarmachen, daß alle übrigen Durchschnitte leer sind und deshalb weggelassen werden können, Die Formel (12) reduziert sich folglich auf

$$N = \sum_{\varphi \in \Phi_\alpha} \prod_{\xi<\alpha} X_{\varphi^{(\xi)}};$$

nach (8) geht aber diese Formel in (11) über. Somit gilt (11) für jede Ordnungszahl α.

Es sei ϱ die kleinste Ordnungszahl, die der Formel:

(13) $$\bar{\varrho} = \overline{\overline{\underset{\xi}{E}[\xi<\varrho]}} = \mathfrak{q}$$

genügt; ϱ ist also entweder endlich oder eine Anfangszahl und es gilt:

(14) $$\bar{\xi} < \mathfrak{q} \quad \text{für jedes} \quad \xi < \varrho$$

[die Existenz einer Zahl ϱ von dieser Beschaffenheit ergibt sich bekanntlich aus dem Wohlordnungssatz].

Setzen wir:

(15) $$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{I} \cdot \underset{X_\varphi}{E}\Big[\varphi \in \sum_{\xi<\varrho} \Phi_\xi\Big]$$

und schätzen wir die Mächtigkeit des so definierten Mengensystems $\boldsymbol{M}'$ ab. Aus (15) folgt sofort, daß

$$\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \overline{\overline{\underset{X_\varphi}{\boldsymbol{E}}\Big[\varphi \in \sum_{\xi<\varrho}{}' \Phi_\xi\Big]}} \leqslant \overline{\overline{\sum_{\xi<\varrho}{}' \Phi_\xi}} \leqslant \sum_{\xi<\varrho}{}' \overline{\overline{\Phi_\xi}};$$

aus der Definition von Φ_ξ schließen wir dabei, daß $\overline{\overline{\Phi_\xi}} = 2^{\overline{\overline{\xi}}}$ für jede Zahl ξ ist, wonach

(16) $$\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \sum_{\xi<\varrho}{}' 2^{\overline{\overline{\xi}}}.$$

Nach (14) ist $2^{\overline{\overline{\xi}}} \leqslant \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}}{}' 2^{\mathfrak{p}}$ für jedes $\xi<\varrho$; es ist auch bekanntlich mit Rücksicht auf (13) $\overline{\overline{\underset{\xi}{\boldsymbol{E}}[\xi<\varrho]}} = \mathfrak{q} \leqslant \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}}{}' 2^{\mathfrak{p}}$. Hienach auf Grund der Voraussetzung (i):

$$\sum_{\xi<\varrho}{}' 2^{\overline{\overline{\xi}}} \leqslant \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}}{}' 2^{\mathfrak{p}} \cdot \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}}{}' 2^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m};$$

diese Formel zusammen mit (16) ergibt:

(17) $$\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Auf Grund von (3) erhält man aus (15) und (17):

(18) $$\sum_{Y \in \boldsymbol{M}'}{}' Y \in \boldsymbol{I}.$$

Betrachten wir nun eine beliebige Funktion $\varphi \in \Phi_\varrho$ und stellen uns die Frage, ob es möglich ist, daß keine der Mengen $X_{\varphi(\xi)}$, $\xi<\varrho$, zu $\boldsymbol{I}$ gehöre. Um diese Frage zu beantworten, bestimmen wir für jedes $\xi<\varrho$ eine Funktion $\psi_\xi \in \Phi_{\xi+1}$ durch folgende Formeln:

$$\psi_\xi(\eta) = \varphi(\eta) \quad \text{für} \quad \eta<\xi; \qquad \psi_\xi(\xi) = 1-\varphi(\xi).$$

Aus (9) und (10) schließen wir leicht, daß die Mengen X_{ψ_ξ} in N enthalten und paarweise fremd sind. Aus (7) ergibt sich, daß $X_{\psi_\xi} = F(X_{\varphi(\xi)})$ oder $= X_{\varphi(\xi)} - F(X_{\varphi(\xi)})$ ist. Ist also $X_{\varphi(\xi)}\, non \in \boldsymbol{I}$, so ist auch nach (5) $X_{\psi_\xi}\, non \in \boldsymbol{I}$ und folglich nach (1) $X_{\psi_\xi} \neq 0$ und $X_{\psi_\xi}\, non \in \boldsymbol{S}$. Gehörte also keine der Mengen $X_{\varphi(\xi)}$ dem System $\boldsymbol{I}$ an, so würde das System $\boldsymbol{T} = \underset{X_{\psi_\xi}}{\boldsymbol{E}}[\xi<\varrho]$ aus nicht leeren paarweise fremden Teilmengen von N bestehen, die zu $\boldsymbol{S}$ nicht gehören; mit Rücksicht auf (13) würde dabei $\boldsymbol{T}$ die Mächtigkeit $\mathfrak{q}$ haben. Dies widerspricht aber der Voraussetzung (ii).

Somit haben wir festgestellt, daß jeder Funktion $\varphi \in \Phi_\varrho$ eine Zahl $\xi<\varrho$ entspricht, so daß $X_{\varphi(\xi)} \in \boldsymbol{I}$. Nach (9) und (15) ergibt sich hieraus Folgendes: zu jeder Funktion $\varphi \in \Phi_\varrho$ gibt es eine Menge $Y \in \boldsymbol{M}'$, so daß $X_\varphi \subset Y$. Da hiebei nach (11) $N = \sum_{\varphi \in \Phi_\varrho}{}' X_\varphi$, so haben wir ferner:

(19) $$N \subset \sum_{Y \in \boldsymbol{M}'}{}' Y.$$

(2), (18) und (19) ergeben: $N \in \boldsymbol{I}$. Im Einklang mit der Definition von $\boldsymbol{I}$ folgt daraus unmittelbar die Behauptung des zu beweisenden Hilfssatzes: es gibt ein System $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} \leqslant \mathfrak{m}$ und $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}}{}' X$.

Hilfssatz 11. Sind die Voraussetzungen (i)-(iii) *des Hilfssatzes 10 erfüllt, die Behauptung aber nicht, so gibt es ein System $\boldsymbol{S}'$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *das System $\boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}'$ enthält keine zwei fremde Mengen als Elemente;*

(II) *es ist $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}'$ und demnach $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}'}{}' X$;*

(III) *es gilt $N\, non \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}'}{}' X$ für jedes System $\boldsymbol{M}' \subset \boldsymbol{S}'$ mit einer Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$.*

Beweis. Da die Voraussetzungen (i)-(iii) des Hilfssatzes 10 erfüllt sind, die Behauptung aber nicht, so kann nicht die Voraussetzung (iv) dieses Hilfssatzes erfüllt sein; es gibt also eine Menge N' folgenden Eigenschaften:

(1) $N' \subset N$ und $N'\, non \in \boldsymbol{I}$;

(2) für jede Menge $Y \subset N'$ ist entweder $Y \in \boldsymbol{I}$ oder $N' - Y \in \boldsymbol{I}$.

$\boldsymbol{I}$ hat hiebei dieselbe Bedeutung wie im vorangehenden Beweise und genügt demnach folgenden Bedingungen:

(3) $0 \in \boldsymbol{I}$ und $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{I}$;

(4) ist $Y \in \boldsymbol{I}$ und $Z \subset Y$, so ist $Z \in \boldsymbol{I}$;

(5) ist $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{I}$ und $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} \leqslant \mathfrak{m}$, so ist $\sum_{Y \in \boldsymbol{M}}{}' Y \in \boldsymbol{I}$.

Setzen wir nun:

(6) $$\boldsymbol{S}' = \underset{Y}{E}\Big[Y \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}}' X \quad \textit{und} \quad N' \cdot Y \in \boldsymbol{I}\Big].$$

Ist Y eine beliebige Menge des Systems $\boldsymbol{S}$, so ist offenbar $Y \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}}' X$; da hiebei $N' \cdot Y \subset Y$, so schließt man sofort aus (3) und (4), daß $N' \cdot Y \in \boldsymbol{I}$. Nach (6) und mit Rücksicht auf die Voraussetzung (iii) des Hilfssatzes 10 hat man also:

(7) $$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}' \quad \text{und demnach} \quad N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}'}' X.$$

Nehmen wir an, das System $\boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}'$ enthalte zwei zueinander fremde Mengen Y_1 und Y_2 als Elemente. Da $Y_1 \subset N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}}' X$, und analog $Y_2 \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}}' X$, so folgt aus (6), daß $N' \cdot Y_1$ und $N' \cdot Y_2$ zu $\boldsymbol{I}$ nicht gehören. Aus $N' \cdot Y_1 \; non \in \boldsymbol{I}$ und $Y_1 \cdot Y_2 = 0$ erhält man aber mit Hilfe von (2): $N' - N' \cdot Y_1 = N' - Y_1 \in \boldsymbol{I}$ und $N' \cdot Y_2 \subset N' - Y_1$, wonach auf Grund von (4): $N' \cdot Y_2 \in \boldsymbol{I}$; somit sind wir zu einem Widerspruch angelangt. Es gilt foglich:

(8) das System $\boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}'$ enthält keine zwei fremde Mengen als Elemente.

Nehmen wir schließlich an, es gebe ein System $\boldsymbol{M}' \subset \boldsymbol{S}'$, derart daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \mathfrak{m}$ und $N \subset \sum_{Y \in \boldsymbol{M}'}' Y$, und setzen wir: $\boldsymbol{M} = \underset{N' \cdot Y}{E}[Y \in \boldsymbol{M}']$. Es ist offenbar $\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{M}}}$ und gemäß (6) $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{I}$; nach (5) ist also $\sum_{Y \in \boldsymbol{M}}' Y \in \boldsymbol{I}$. Da ferner $N' \subset N$, so ist $N' \subset \sum_{Y \in \boldsymbol{M}'}' (N' \cdot Y) = \sum_{Y \in \boldsymbol{M}}' Y$; auf Grund von (3) ist folglich $N' \in \boldsymbol{I}$, der Bedingung (1) entgegen. Dadurch ist unsere Annahme widerlegt, also:

(9) es gibt kein System $\boldsymbol{M}' \subset \boldsymbol{S}'$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}} \leqslant \mathfrak{m}$ und $N \subset \sum_{Y \in \boldsymbol{M}'}' Y$.

Nach (7), (8) und (9) hat das System $\boldsymbol{S}'$ alle behaupteten Eigenschaften

Hilfssatz 12. Es seien $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{p}$ *zwei Kardinalzahlen,* N *eine Menge und* $\boldsymbol{S}$ *ein Mengensystem, die folgenden Bedingungen genügen:*

(i) $\mathfrak{m} \geqslant \sum_{\mathfrak{p} < \mathfrak{q}}' 2^{\mathfrak{p}}$ *und* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$;

(ii) *die Mächtigkeit* $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$ *ist von* $\mathfrak{m}$ *aus schwach erreichbar;*

(iii) *jedes System* $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}$ *von nicht leeren paarweise fremden Mengen hat eine Mächtigkeit* $< \mathfrak{q}$;

(iv) $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}}' X$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein System $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$, *so daß* $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}}' X$.

Beweis. Wäre die Behauptung des Hilfssatzes falsch, so würde es ein System $\boldsymbol{S}'$ geben, das der in der Behauptung des Hilfssatzes 11 angegeben Bedingungen (I)-(III) genügt; das würde im Einklang mit Hilfsdefinition 1 bedeuten, daß die Kardinalzahl $\mathfrak{n} = \overline{\overline{N}}$ dem System $\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ nicht angehört. Da nun nach Hilfssatz 9 und nach der Voraussetzung (ii) $\mathfrak{n} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ ist, so muß man die Behauptung als gültig anerkennen.

Der eben formulierte Hilfssatz ist der allgemeinste Satz des vorliegenden Artikels; er hat bereits (so wie übrigens manche der vorangehenden Hilfssätze) den Charakter eines Überdeckungssatzes. Da aber seine Formulierung etwas kompliziert ist, so wollen wir hier als eigentliche Überdeckungssätze zwei Spezialfälle dieses Hilfssatzes angeben.

Zweiter Überdeckungssatz. *Es sei* $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl,* N *eine Menge und* $\boldsymbol{S}$ *ein Mengensystem, die folgenden Bedingungen genügen:*

(i) *die Mächtigkeit* $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$ *ist von* $\mathfrak{m}$ *aus schwach erreichbar;*

(ii) *jedes System* $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Pt}(N) - \boldsymbol{S}$ *von nicht leeren paarweise fremden Mengen ist endlich;*

(iii) $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{S}}' X$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein System $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$, *so daß* $N \subset \sum_{X \in \boldsymbol{M}}' X$.

Beweis. Es genügt in Hilfssatz 12 $\mathfrak{q}=\aleph_0$ setzen (da offenbar $\sum_{\mathfrak{p}<\aleph_0}{}' 2^{\mathfrak{p}}=\aleph_0$).

Dritter Überdeckungssatz. *Es sei* $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl,* N *eine Menge und* $\boldsymbol{S}$ *ein Mengensystem, die folgenden Bedingungen genügen:*

(i) *die Mächtigkeit* $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$ *ist von* $\mathfrak{m}$ *aus schwach erreichbar;*

(ii) *jedes System* $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{Pt}(N)-\boldsymbol{S}$ *von nicht leeren paarweise fremden Mengen hat eine Mächtigkeit* $\leqslant\mathfrak{m}$;

(iii) $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{S}}{}' X$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein System $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$ *mit einer Mächtigkeit* $\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, *so daß* $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}}{}' X$.

Beweis. Man wendet wiederum Hilfssatz 12 an, wobei man $\mathfrak{m}$ durch $2^{\mathfrak{m}}$ ersetzt und mit $\mathfrak{q}$ die kleinste Kardinalzahl $>\mathfrak{m}$ bezeichnet (man hat dann offenbar

$$\sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}}{}' 2^{\mathfrak{p}}=\sum_{\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{m}}{}' 2^{\mathfrak{p}}\leqslant 2^{\mathfrak{m}}\cdot\overline{\overline{\sum_{\mathfrak{p}}{}' [\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{m}]}}\leqslant 2^{\mathfrak{m}}\cdot\mathfrak{m}\leqslant 2^{\mathfrak{m}}\cdot 2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}},$$

und man schließt leicht aus Definition 2, daß die Zahl $\mathfrak{n}$, die von $\mathfrak{m}$ aus erreichbar ist, umsomehr von $2^{\mathfrak{m}}$ aus erreichbar ist).

Die drei oben aufgestellten Überdeckungssätze lassen verschiedene Umformungen und Verallgemeinerungen zu. Eine naheliegende Umformung besteht darin, daß man in diesen Sätzen die Voraussetzung (iii) wegläßt, der Behauptung dagegen eine etwas schwächere Form gibt (die Formulierung des ersten Überdeckungssatzes nähert sich dadurch der ursprünglichen Formulierung von Sierpiński). Auf diese Weise gewinnt man folgendes

Korollar 1. Unter den Voraussetzungen (i) *und* (ii) *des ersten Überdeckungssatzes gibt es ein System* $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, *so daß* $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\mathfrak{m}$ *und* $\overline{\overline{N-\sum_{X\in\boldsymbol{M}}{}' X}}\leqslant\mathfrak{m}$ *ist.*

Unter den Voraussetzungen (i) *und* (ii) *des zweiten Überdeckungssatzes gibt es ein System* $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, *so daß* $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\mathfrak{m}$ *und* $N-\sum_{X\in\boldsymbol{M}}{}' X$ *endlich ist.*

Unter den Voraussetzungen (i) *und* (ii) *des dritten Überdeckungssatzes gibt es ein System* $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, *so daß* $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ *und* $\overline{\overline{N-\sum_{X\in\boldsymbol{M}}{}' X}}\leqslant\mathfrak{m}$ *ist.*

Beweis. Da die Schlußweise in Bezug auf jeden der drei Überdeckungssätze dieselbe ist, wollen wir uns hier auf den Fall des zweiten Satzes beschränken.

Es sei also $\mathfrak{m}$ eine Kardinalzahl, N eine Menge und $\boldsymbol{S}$ ein Mengensystem, die den Voraussetzungen (i) und (ii) dieses Satzes genügen. Wir erweitern $\boldsymbol{S}$ zu einem System $\boldsymbol{S}'$, indem wir setzen:

$$\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{S}+\sum_{\{x\}}{}' [x\in N].$$

Wie leicht ersichtlich, erfüllt $\boldsymbol{S}'$ alle Voraussetzungen (i)-(iii) des zweiten Überdeckungssatzes; es gibt folglich ein System $\boldsymbol{M}'\subset\boldsymbol{S}'$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}}\leqslant\mathfrak{m}$ und $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}'}{}' X$.

Es sei nun $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}'\cdot\boldsymbol{S}$. Man hat offenbar $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{M}'}}\leqslant\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\leqslant\mathfrak{m}$ und $N-\sum_{X\in\boldsymbol{M}}{}' X\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}'-\boldsymbol{S}}{}' X$. Da das System $\boldsymbol{M}'-\boldsymbol{S}$ aus paarweise fremden Teilmengen von N besteht, die zu $\boldsymbol{S}$ nicht gehören, so ist es nach der Voraussetzung (ii) endlich; daraus folgt aber, daß auch die Menge $\sum_{X\in\boldsymbol{M}'-\boldsymbol{S}}{}' X$ und ihre Teilmenge $N-\sum_{X\in\boldsymbol{M}}{}' X$ endlich ist. Somit hat das System $\boldsymbol{M}$ alle behaupteten Eigenschaften.

Es sei bemerkt, daß man ebenso leicht aus Kollorar 1 die drei Überdeckungssätze ableiten kann. Sind z. B. die Voraussetzungen (i)-(iii) des ersten Überdeckungssatzes erfüllt, so gewinnt man zunächst auf Grund des Korollars 1 ein System $\boldsymbol{M}_1\subset\boldsymbol{S}$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}_1}}\leqslant\mathfrak{m}$ und $\overline{\overline{N-\sum_{X\in\boldsymbol{M}_1}{}' X}}\leqslant\mathfrak{m}$ ist. Mit Rücksicht auf die Voraussetzung (iii) schließt man aus der letzteren Formel auf die Existenz eines Systems $\boldsymbol{M}_2\subset\boldsymbol{S}$, so daß $\overline{\overline{\boldsymbol{M}_2}}\leqslant\mathfrak{m}$ und $N-\sum_{X\in\boldsymbol{M}_1}{}' X\subset\sum_{X\in\boldsymbol{M}_2}{}' X$ (vgl. den Beweis von Hilfssatz 1). Man setzt nun: $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2$ und zeigt mühelos, daß das System $\boldsymbol{M}$ der Behauptung des ersten Überdeckungssatzes genügt.

Eine weitere Verallgemeinerung der drei Überdeckungssätze besteht in einer Abschwächung der Voraussetzungen (i) und (iii):

Korollar 2. Der erste (bzw. der zweite und der dritte) Überdeckungssatz bleibt gültig, wenn man in ihm die Voraussetzungen (i) *und* (iii) *durch folgende Voraussetzung ersetzt:*

(i′) *es gibt ein System* $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{S}$, *so daß* $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}=\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{m}$ *aus stark (bzw. schwach) erreichbar ist und daß* $N\subset\sum_{X\in\boldsymbol{P}}X$.

Beweis davon ist dem Beweise von Hilfssatz 3 völlig analog (am einfachsten kann man Korollar 2 aus den drei Überdeckungssätzen durch Anwendung des verallgemeinerten Hilfssatzes 3 ableiten; vgl. hiezu die Bemerkung auf S. 138).

Es ist zu bemerken, daß nicht nur die drei eingentlichen Überdeckungssätze, sondern auch andere Sätze von analogen Charakter (z. B. Hilfssätze 9 und 12) einer den Korollaren 1 und 2 entsprechenden Verallgemeinerung unterworfen werden können.

Man kann ferner die Überdeckungssätze in die Form der Sätze über sog. Ideale, d. h. über additive und erbliche Mengensysteme, kleiden. Manche der so gewonnenen Ergebnisse sind einer weiteren Verallgemeinerung fähig und zwar führen sie zu gewissen Sätzen über additive und multiplikative Mengenfunktionen; die letzteren Sätze haben ihrerseits gewisse interessante Anwendungen, namentlich in der allgemeinen Booleschen Algebra und insbesondere in den Untersuchungen über das von J. v. Neumann und M. H. Stone erörterte Repräsentationsproblem. Wir haben vor, alle diese Ergebnisse anderswo ausführlich darzustellen [1]).

Die zweifellos wichtigsten Folgerungen aus den Überdeckungssätzen betreffen das abstrakte Maßproblem [2]). Eine Funktion m wird bekanntlich als eine endlich-, bzw. abzählbar-additive Maßfunktion in der Menge N bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

[1]) Die zuletzt erwähnten Ergebnisse sind ohne Beweise in meiner Mitteilung *Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen*, C. R. Soc. Sc. Vars. **30** (1937), S. 151 ff. angeführt (vgl. insbesondere Sätze 2.13—2.15, 3.19, 3.20, 3.23—3.25, 5.7—5.9, 7.12 und 7.13).

[2]) Zum Folgenden vgl. S. Banach et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fund. Math. **14** (1929), S. 127 ff., ferner die oben zitierten Arbeiten von S. Banach und S. Ulam und das Buch von W. Sierpiński (S. 44 f., 107 ff. und 159), schließlich meine Mitteilung *Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure*, C. R. Soc. Sc. Vars. **22** (1929), S. 114 ff., sowie meinen Aufsatz *Une contribution à la théorie de la mesure*, Fund. Math. **16** (1930), S. 42 ff.

(i) jeder Menge $X\subset N$ ist eine endliche reelle Zahl $m(X)\geqslant 0$ zugeordnet;

(ii) für jede endliche, bzw. unendliche Folge von paarweise fremden Teilmengen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ der Menge N gilt:

$$m(X_0+X_1+X_2+\ldots)=m(X_0)+m(X_1)+m(X_2)+\ldots;$$

(iii) für jedes $x\in N$ ist $m(\{x\})=0$;

(iv) es gibt eine Menge $X\subset N$, so daß $m(X)\neq 0$.

Nach einem von dem Verfasser aufgestellten Satz gibt es in jeder unendlichen Menge N endlich-additive Maßfunktionen. Aus dem ersten Überdeckungssatz (für $\mathfrak{m}=\aleph_0$) ergibt sich dagegen der bekannte Satz von S. Ulam, nach dem es keine abzählbar-additive Maßfunktion in einer Menge N gibt, wenn nur die Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ dieser Menge von $\aleph_0$ aus stark erreichbar ist. Beschränkt man sich auf Maßfunktionen mit einem endlichen Nachbereich d. h. auf Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, so kann man aus dem zweiten Überdeckungssatz schließen, daß es keine derartige Funktion in einer Menge N nicht einmal dann gibt, wenn $\mathfrak{n}=\overline{\overline{N}}$ von $\aleph_0$ aus schwach erreichbar, also z. B. $\mathfrak{n}=2^{\aleph_0}$ ist [1]) (wollte man aus dem dritten Überdeckungssatz eine Folgerung für das Maßproblem ableiten, so müßte man neben endlich- und abzählbar-additiven Maßfunktionen noch Maßfunktionen von einem höheren Additivitätsgrade in Betracht ziehen; doch scheint eine solche Begriffsbildung etwas künstlich zu sein) [2]). Es lohnt sich vielleicht zu bemerken, daß diese negativen Ergebnisse etwas schärfer gefaßt werden können; es gilt nämlich

Korollar 3. Ist die Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ *der Menge* N *von* $\aleph_0$ *aus stark erreichbar und ist* m *eine endlich-additive Maßfunktion in* N, *so entspricht jeder Menge* $X\subset N$ *eine endliche oder unendliche Folge von Mengen* $X_0, X_1, X_2, \ldots$, *derart daß* $m(X_0)=m(X_1)=m(X_2)=\ldots=0$ *und* $X=X_0+X_1+X_2+\ldots$ *ist.*

Die Behauptung des Korollars gilt auch dann, wenn $\mathfrak{n}$ *von* $\aleph_0$ *aus schwach erreichbar ist, wenn aber zugleich der Nachbereich von* m *endlich ist.*

[1]) In Bezug auf Maßfunktionen, die nur zwei verschiedene Werte annehmen, wurde dieses Ergebnis schon früher von S. Ulam und von mir gefunden; vgl. S. 141, Anm. [1]).

[2]) Alle diese Ergebnisse bleiben auch dann gültig, wenn man in der Definition der Maßfunktion die Bedingung der Nichtnegativität wegläßt.

Beweis. Um den ersten Teil des Korollars zu begründen, setzen wir: $\boldsymbol{S}=\underset{Y}{E}[Y\subset N \textit{ und } m(Y)=0]$ Durch eine bekannte Schlußweise zeigt man, daß N und $\boldsymbol{S}$ allen Voraussetzungen des ersten Überdeckungssatzes genügen (gäbe es nämlich — der Voraussetzung (ii) entgegen — ein unabzählbares System $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{Pt}(N)-\boldsymbol{S}$ von paarweise fremden Mengen, so gäbe es auch eine Zahl $\varepsilon>0$ und eine unendliche Folge von paarweise fremden Mengen $X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$, für die $m(X)>\varepsilon$ wäre; dann aber könnte $m(X_0+X_1+\ldots+X_k+\ldots)$ keine endliche reelle Zahl sein)[1]). Es gibt demnach ein höchst abzählbares System $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$, so daß $N\subset\sum_{Y\in\boldsymbol{M}}Y$. Ist nun $X\subset N$, so hat man $X=\sum_{Y\in\boldsymbol{M}}(X\cdot Y)$; die Mengen des Systems $\underset{X\cdot Y}{E}[Y\in M]$ kann man offenbar in eine (endliche oder unendliche) Folge $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ordnen, und man gewinnt: $m(X_0)=m(X_1)=m(X_2)=\ldots=0$ (da $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$ ist) sowie $X=X_0+X_1+X_2+\ldots$, w. z. b. w.

In einer ganz analogen Weise wird der zweite Teil des Korollars aus dem zweiten Überdeckungssatz abgeleitet.

Zum Schluß wollen wir unser Augenmerk auf zwei Probleme aus diesem Ideenkreis richten, die bisher unentschieden sind.

Vergleicht man die Formulierungen der drei Überdeckungssätze, so ersieht man sofort, daß man einen Satz $\mathcal{S}$ angeben kann, der als eine Verschärfung jedes der drei Sätze gelten könnte, wenn er sich einmal erweisen läßt. Man gewinnt den Satz $\mathcal{S}$ dadurch, daß man entweder im ersten Überdeckungssatz die Voraussetzung (i) durch die Voraussetzung (i) des zweiten Satzes ersetzt, oder im zweiten die Voraussetzung (ii) durch die Voraussetzung (ii) des dritten Satzes, oder schließlich im dritten die Behauptung durch die Behauptung des ersten Satzes. Es ist jedoch bis jetzt noch nicht gelungen, diesen Satz zu beweisen. Aus dem ersten Überdeckungssatz erhellt, daß der in Frage kommende Satz aus der Cantorschen Alefhypothese ableitbar ist und sogar aus einer schwächeren Hypothese, dergemäß für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ die Zahl $2^{\mathfrak{m}}$ von $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar ist; mit Rücksicht darauf scheint die Möglichkeit, den Satz $\mathcal{S}$ zu widerlegen, sehr gering zu sein. Aus

[1]) Vgl. z. B. das oben zitierte Buch von W. Sierpiński, S. 108.

dem dritten Überdeckungssatz ersieht man noch, daß es genügen würde, den Satz $\mathcal{S}$ nur im Fall $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}=2^{\mathfrak{m}}$ zu beweisen, um daraus auf die Richtigkeit des Satzes in seiner allgemeinen Form zu schließen.

Das zweite unentschiedene Problem ist die Frage, ob die Voraussetzungen (i) in den aufgestellten Überdeckungssätzen überhaupt wesentlich sind und nicht weggelassen werden können. Ich halte es für sehr wahrscheinlich, daß die Lösung dieses Problems sich als positiv herausstellen wird: es dürfte sich namentlich zeigen, daß eine Menge N dann und nur dann der Behauptung des ersten, bzw. des zweiten oder des dritten Überdeckungssatzes genügt (in Bezug auf jedes die Voraussetzungen (ii) und (iii) erfüllende Mengensystem $\boldsymbol{S}$), wenn die Mächtigkeit dieser Menge von der gegebenen Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ aus schwach erreichbar ist.