Über das absolute Maß linearer Punktmengen.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Einleitung [1]). Das *absolute Maß* ist eine Funktion, die gewissen beschränkten linearen Punktmengen, den sog. *absolut meßbaren Mengen*, eine nicht negative reelle Zahl, und insbesondere der Einheitsstrecke die Zahl 1 zuordnet; zwei kongruente Punktmengen erhalten dabei das gleiche Maß und das Maß der Summe zweier (aber nicht abzählbar vieler) elementfremder Mengen ist gleich der Summe der Maße der Summanden.

Die Konstruktion des absoluten Maßes hat einen effektiven Charakter und einen deutlichen geometrischen Sinn. Sie beruht auf dem Begriff der (endlichen) Zerlegungsgleichheit von Punktmengen [2]): eine Menge X heißt nämlich *absolut meßbar*, wenn die obere Schranke der Längen aller Strecken, die mit einer Teilmenge von X zerlegungsgleich sind, und die untere Schranke der Längen aller Strecken, die eine mit X zerlegungsgleiche Teilmenge enthalten, identisch sind; der gemeinsame Wert dieser oberen und unteren Schranke wird eben als das absolute Maß der Menge X bezeichnet.

In § 1 dieser Mitteilung werden die wichtigsten Eigenschaften des Begriffs der Zerlegungsgleichheit zusammengefaßt. § 2 enthält grundlegende Definitionen und Sätze aus der Theorie des absoluten Maßes. Man ersieht aus diesen Sätzen, daß die Eigenschaften des absoluten Maßes und der absolut meßbaren Mengen in mancher Hinsicht von denen der anderen bekannten Maßbegriffe ziemlich stark abweichen. Ist z.B. eine Menge absolut meßbar, so ist nicht nur jede mit ihr kongruente, sondern auch jede zerlegungsgleiche Menge absolut meßbar, und wenn eine absolut meßbare Menge in endlich (oder auch in abzählbar) viele paarweise fremde und mit einander kongruente bzw. zerlegunsgleiche Teile zerlegt wird, so ist jede dieser Teilmengen absolut meßbar (was bekanntlich für die im Peano-Jordanschen oder im Lebesgueschen Sinne meßbaren Mengen im allgemeinen nicht zutrifft [3])). Dagegen muß nicht die Summe oder der Durchschnitt zweier (und umsomehr abzählbar vieler) absolut meßbarer Mengen, die gemeinsame Elemente haben, selbst absolut meßbar sein.

In § 3 wird der enge Zusammenhang ans Licht gebracht, der zwischen dem absoluten Maß und den allgemeinen, für alle beschränkten linearen Punktmengen bestimmten Maßfunktionen besteht [4]). Es zeigt sich, daß eine Punktmenge X dann und nur dann absolut meßbar ist, wenn alle derartigen Maßfunktionen der Menge X denselben Wert zuordnen; eben dieser gemeinsame Wert ist mit dem absoluten Maß identisch.

In § 4 sind Sätze enthalten, die die Beziehungen zwischen dem absoluten, dem Peano-Jordanschen und dem Lebesgueschen Maß betreffen [3]). Stellt man die Definitionen dieser drei Begriffe zusammen, so ersieht man sogleich, daß sowohl die Konstruktion des absoluten Maßes, als auch die des Lebesgueschen Maßes in einer Verfeinerung des Peano-Jordanschen Verfahrens besteht. Diese Verfeinerung ist aber in beiden Fällen völlig verschieden: die Konstruktion des absoluten Maßes berucht auf dem Übergang von Strecken, d. i. von elementaren Punktmengen, zu beliebigen Mengen, während die Konstruktion des Lebesgueschen Maßes auf dem (zweifellos viel wichtigeren) Übergang vom Endlichen zum Abzählbaren beruht [5]). Das System der im Peano-Jordanschen Sinne meßbaren Mengen ist sowohl in dem System der absolut meßbaren als auch in dem System der im Lebesgueschen Sinne als echter Teil enthalten; dagegen ist von den zwei letzteren Systemen keines ein Teil des anderen. Es ist bemerkenswert, daß die im Lebesgueschen Sinne unmeßbaren Mengen, die bisher konstruiert wurden, sich meistenteils als absolut meßbar erweisen: im Beweise ihrer Unmeßbarkeit im Lebesgueschen Sinne ist schon oft der Beweis ihrer absoluten Meßbarkeit implizit enthalten [6]). Es gibt aber auch solche (beschränkte) Mengen, die in beiden Sinnen unmeßbar sind.

In den Schlußbemerkungen wird kurz die Frage besprochen, ob die Theorie des absoluten Maßes auf n-dimensionale euklidische Räume mit $n \geqslant 2$ übertragen werden kann; für $n=2$ wird diese Frage bejahend und für $n>2$ verneinend beantwortet.

Genaue Beweise werden hier nicht gegeben, ihre Rekonstruktion wird aber durch verschiedene Hinweise ermöglicht.

§ 1. Zerlegungsgleichheit linearer Punktmengen. Es werden hier lediglich Punktmengen einer (euklidischen) Geraden behandelt. Mit $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir das System aller beschränkten Punktmengen. Zu $\boldsymbol{B}$ gehören also insbesondere die (offenen, halboffenen und abgeschlossenen) Strecken. Die leere Menge 0 und die Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, werden zu den Strecken gezählt; die Strecken, die mehr als einen Punkt enthalten, werden eigentliche Strecken genannt. Wir wählen eine bestimmte eigentliche Strecke E und nennen sie Einheitsstrecke. Mit $|X|$ bezeichnen wir die Länge der Strecke X. Es ist $|E|=1$; der Begriff der Länge sowie auch alle weiter unten erörterten Begriffe des Maßes werden auf die gewählte Einheitsstrecke bezogen.

Die Formel $X \cong Y$ bedeutet, wie gewöhnlich, daß die Mengen X und Y kongruent sind (d. h. durch eine Translation oder eine symmetrische Transformation ineinander übergehen).

Definition 1.1. Die Mengen X und Y heißen zerlegungsgleich (oder genauer: endlich-zerlegungsgleich), in Zeichen: $X \equiv Y$, wenn sie in endlich viele elementfremde Teile zerlegt werden können:

$$X = X_1 + \ldots + X_n, \qquad Y = Y_1 + \ldots + Y_n,$$

derart daß

$$X_1 \cong Y_1, \quad \ldots, \quad X_n \cong Y_n.$$

Aus dieser Definition ergeben sich leicht folgende Sätze [7]):

Satz 1.2. Es gilt $X \equiv X$ für jede Punktmenge X; ist, allgemeiner, $X \cong Y$, so ist auch $X \equiv Y$; ist $X \equiv Y$, so ist $Y \equiv X$; ist $X \equiv Y \equiv Z$, so ist $X \equiv Z$.

Satz 1.3. Sind $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ zwei endliche Folgen von paarweise fremden Mengen und ist $X_1 \equiv Y_1, \ldots, X_n \equiv Y_n$, so ist auch $X_1 + \ldots + X_n \equiv Y_1 + \ldots + Y_n$.

Satz 1.4. Ist $X \equiv Y$, so kann man jeder Menge $X_1 \subset X$ eine mit X_1 zerlegungsgleiche Menge $X_1^* = Y_1 \subset Y$ in der Weise eindeutig zuordnen, daß auch umgekehrt jeder Menge $Y_1 \subset Y$ genau eine Menge $X_1 \subset X$ entspricht, für die $X_1^* = Y_1$ ist, und so daß die Bedingungen: $X_1 \subset X_2$ und $X_1^* \subset X_2^*$ für beliebige Teilmengen X_1 und X_2 der Menge X äquivalent sind (demnach ist $X^* = Y$ und ferner $(X_1 + X_2)^* = X_1^* + X_2^*$, $(X_1 \cdot X_2)^* = X_1^* \cdot X_2^*$ sowie $(X_1 - X_2)^* = X_1^* - X_2^*$ für beliebige Teilmengen X_1 und X_2 von X).

Satz 1.5. Ist $X \equiv Y$, so sind die Mengen X und Y gleichmächtig; insbesondere ist dann und nur dann $X \equiv 0$, wenn $X = 0$.

Satz 1.6. Ist X eine beschränkte Menge, bzw. eine Menge vom Lebesgueschen Maß 0, bzw. eine Menge von I. Kategorie, und ist dabei $X \equiv Y$, so ist auch Y von derselben Natur.

Tieferliegend ist

Satz 1.7. (Mittelwertsatz). Ist $X \subset Y \subset Z$, $X_1 \subset Z_1$, $X \equiv X_1$ und $Z \equiv Z_1$, so gibt es eine Menge Y_1, derart daß $X_1 \subset Y_1 \subset Z_1$ und $Y \equiv Y_1$. [8])

Korollar 1.8. Für beliebige Mengen X und Y sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) *es gibt eine Menge X_1, für die $X \subset X_1 \equiv Y$;*

(ii) *es gibt eine Menge Y_1, für die $X \equiv Y_1 \subset Y$.*

[Nach 1.2, 1.7].

Korollar 1.9. Ist $X \subset Y \subset Z$ und $X \equiv Z$, so ist $X \equiv Y \equiv Z$.

[Nach 1.2, 1.7].

Korollar 1.10 (Äquivalenzsatz). Ist $X \supset X_1$, $Y \supset Y_1$, $X \equiv Y_1$ und $Y \equiv X_1$, so ist $X \equiv Y$. [Nach 1.2, 1.8, 1.9].

Satz 1.11 (Divisionssatz). Es seien $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}$ und $Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}, \ldots, Y_{n+p}$ zwei endliche Folgen von paarweise fremden Mengen, derart daß $X_1 \equiv \ldots \equiv X_n$, $Y_1 \equiv \ldots \equiv Y_n$ und

$$X_{n+1} \equiv \ldots \equiv X_{n+p} \equiv Y_{n+1} \equiv \ldots \equiv Y_{n+p}.$$

Wenn es dann eine Menge Z gibt, für die

$$X_1 + \ldots + X_n + \ldots + X_{n+p} \equiv Z \subset Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots + Y_{n+p},$$

so gibt es auch eine Menge Z_1, für die $X_1 + X_{n+1} \equiv Z_1 \subset Y_1 + Y_{n+1}$ [9]).

Korollar 1.12. Ist unter den Voraussetzungen von 1.11 $X_1 + \ldots + X_n + \ldots + X_{n+p} \equiv Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots + Y_{n+p}$, so ist auch $X_1 + X_{n+1} \equiv Y_1 + Y_{n+1}$. [Nach 1.2, 1.10, 1.11].

Korollar 1.13. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ zwei endliche Folgen von paarweise fremden Mengen, derart daß $X_1 \equiv \ldots \equiv X_n$ und $Y_1 \equiv \ldots \equiv Y_n$. Wenn es dann eine Menge Z gibt, für die $X_1 + \ldots + X_n \equiv Z \subset Y_1 + \ldots + Y_n$, so gibt es auch eine Menge Z_1, für die $X_1 \equiv Z_1 \subset Y_1$. [Nach 1.5, 1.11].

Korollar 1.14. Ist unter den Voraussetzungen von 1.13 $X_1 + \ldots + X_n \equiv Y_1 + \ldots + Y_n$, so ist auch $X_1 \equiv Y_1$. [Nach 1.5, 1.12].

Satz 1.15 (Subtraktionssatz). Ist $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot Z = Y \cdot U = 0$, $X_1 \equiv X_2 \equiv Y$ *und* $X_1 + X_2 + Z \equiv Y + U$, *so ist* $X_1 + Z \equiv U$.

Korollar 1.16. Sind $X_1, \ldots, X_{n+2}$ *und* $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ *zwei endliche Folgen von paarweise fremden Mengen, derart daß*

$$X_1 \equiv \ldots \equiv X_{n+1} \equiv Y_1 \equiv \ldots Y_n \quad \text{und} \quad X_1 + \ldots + X_{n+2} \equiv Y_1 + \ldots + Y_{n+1},$$

so ist $X_1 + X_{n+2} \equiv Y_{n+1}$. [Nach 1.15].

Korollar 1.17. Ist $X \neq 0$, *so gibt es keine zwei fremde Mengen* X_1 *und* X_2, *derart daß* $X = X_1 + X_2 \equiv X_1 \equiv X_2$.
[Nach 1.2, 1.5, 1.15].

Korollar 1.18. Es sei X *eine beschränkte Menge und* Z *eine Menge, in der eine eigentliche Strecke enthalten ist. Ist dann* $X \cdot Z = Y \cdot U = 0$, $X \equiv Y$ *und* $X + Z \equiv Y + U$, *so ist* $Z \equiv U$.
[Nach 1.2, 1.4, 1.15].

Korollar 1.19. Sind X *und* Y *Strecken und gibt es eine Menge* Y_1, *für die* $X \equiv Y_1 \subset Y$, *so ist* $|X| \leqslant |Y|$. [10])
[Nach 1.2, 1.5, 1.18].

Satz 1.20. Jede Menge $X \in \boldsymbol{B}$ *mit einer Mächtigkeit* $< 2^{\aleph_0}$ *genügt folgenden Bedingungen:*

(i) *ist* X *in einer Strecke* Y *enthalten, so umfaßt jede Strecke* Z, *die länger als* Y *ist, abzählbar viele paarweise fremde und zu* X *kongruente Mengen* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$;

(ii) *ist* Y *eine beliebige eigentliche Strecke, so ist*

$$Y \equiv Y + X \equiv Y - X.$$

Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß offene, halboffene und abgeschlossene Strecken von derselben Länge zerlegungsgleich sind. Hieraus ergibt sich leicht

Korollar 1.21. Sind $X_1, \ldots, X_n$ *paarweise fremde Strecken und ist* Y *eine eigentliche Strecke, für die* $|X_1| + \ldots + |X_n| = |Y|$, *so ist* $X_1 + \ldots + X_n \equiv Y$; *sind* X *und* X_1 *Strecken,* $X \supset X_1$ *und ist* Y *eine eigentliche Strecke, für die* $|X| - |X_1| = |Y|$, *so ist* $X - X_1 \equiv Y$. [11])

Satz 1.22. Zu jeder eigentlichen Strecke X *gibt es eine unendliche Folge von paarweise fremden Mengen* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, *derart daß* $X = X_1 + \ldots + X_n + \ldots$ *und* $X_1 \equiv \ldots \equiv X_n \equiv \ldots$ [7])

Es sei bemerkt, daß alle oben angegebenen Sätze viel allgemeiner formuliert werden können. So gelten z. B. Sätze 1.2 – 1.5 und 1.7 – 1.14 für Mengen eines beliebigen metrischen Raumes; in einer abstrakteren Fassung werden sie auf Teilmengen einer beliebigen Menge M bezogen, wobei die Begriffe der Kongruenz und der Zerlegungsgleichheit zu einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ von eineindeutigen Abbildungen relativisiert werden [12]). Sätze 1.15 – 1.17 sind nicht in demselben Grade verallgemeinerungsfähig: sie gelten z. B. für Punktmengen einer euklidischen Ebene nicht mehr [13]); will man sie abstrakt fassen, so muß man voraussetzen, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$, auf die die Zerlegungsgleichheit bezogen wird, eine Abelsche Gruppe ist (es genügen übrigens etwas schwächere, aber kompliziertere Voraussetzungen). Die übrigen Sätze sind mit Rücksicht auf ihren Inhalt nicht zu einer ganz abstrakten Fassung geeignet; man kann aber fragen, ob sie nicht zumindest auf beliebige n-dimensionale euklidische Räume erstreckt werden können (wobei Strecken durch n-dimensionale Simplexe oder Würfel zu ersetzen sind). Es zeigt sich nun, daß Korollar 1.19 in der Ebene seine Gültigkeit bewahrt [14]); das analoge Problem betreffend 1.18 bleibt offen; in einem mehrdimensionalen Raum gelten 1.18 und 1.19 nicht. Sätze 1.20 – 1.22 (und 1.6) bleiben dagegen für beliebige euklidische Räume gültig.

§ 2. Grundeigenschaften des absoluten Maßes.

Definition 2.1. Es sei X *eine Punktmenge des Systems* $\boldsymbol{B}$ *und* Z *die Menge der Zahlen* z, *für die es eine Strecke* Y *und eine Menge* X_1 *gibt, so daß* $|Y| = z$ *und* $X \supset X_1 \equiv Y$. *Die obere Schranke der Menge* Z *wird dann inneres absolutes Maß der Punktmenge* X *genannt und mit* $a_i(X)$ *bezeichnet.*

Definition 2.2. Es sei X *eine Punktmenge des Systems* $\boldsymbol{B}$ *und* Z *die Menge der Zahlen* z, *für die es eine Strecke* Y *und eine Menge* Y_1 *gibt, so daß* $|Y| = z$ *und* $X \equiv Y_1 \subset Y$. *Die untere Schranke der Menge* Z *wird dann äußeres absolutes Maß der Punktmenge* X *genannt und mit* $a_e(X)$ *bezeichnet.*

Definition 2.3. Ist $X \in \boldsymbol{B}$ *und* $z = a_i(X) = a_e(X)$, *so nennen wir die Zahl* z *absolutes Maß der Punktmenge* X *und bezeichnen sie mit* $a(X)$; *die Menge* X *selbst heißt dann absolut meßbar, und das System aller absolut meßbaren Punktmengen wird mit* $\boldsymbol{A}$ *bezeichnet.*

Die Wahl der Termini „absolutes Maß" und „absolut meßbar" wird ihre Rechtfertigung in den Sätzen 3.18 und 3.19 finden.

Auf Grund der in § 1 enthaltenen Ergebnisse lassen sich aus diesen Definitionen folgende Sätze ableiten [15]):

Satz 2.4. Ist $X \epsilon \boldsymbol{B}$, so ist $0 \leqslant a_i(X) \leqslant a_e(X) < +\infty$.
[Nach 1.2, 1.8, 1.19, 2.1, 2.2].

Korollar 2.5. Ist $X \epsilon \boldsymbol{A}$, so ist $0 \leqslant a(X) < +\infty$.
[Nach 2.3, 2.4].

Satz 2.6. Ist X eine Strecke, so ist $a_i(X) = a_e(X) = a(X) = |X|$ *und demnach $X \epsilon \boldsymbol{A}$.* [Nach 1.2, 1.19, 2.1, 2.2, 2.3].

Satz 2.7. Ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{B}$ und $X \cdot Y = 0$, so ist

$$a_i(X) + a_i(Y) \leqslant a_i(X+Y) \leqslant a_i(X) + a_e(Y) \leqslant a_e(X+Y) \leqslant a_e(X) + a_e(Y).$$

[Nach 1.2, 1.3, 1.8, 1.18, 1.21, 2.1, 2.2].

Korollar 2.8. Ist $X \epsilon \boldsymbol{B}$, $Y \epsilon \boldsymbol{A}$ und $X \cdot Y = 0$, so ist $a_i(X+Y) = a_i(X) + a(Y)$ *und* $a_e(X+Y) = a_e(X) + a(Y)$.
[Nach 2.3, 2.7].

Korollar 2.9. Ist $X+Y \epsilon \boldsymbol{A}$ und $X \cdot Y = 0$, so ist $a(X+Y) = a_i(X) + a_e(Y) = a_e(X) + a_i(Y)$. [Nach 2.3, 2.7].

Korollar 2.10 (Additions- und Subtraktionssatz). Gehören irgend zwei der drei Mengen X, Y, $X+Y$ zu $\boldsymbol{A}$ und ist dabei $X \cdot Y = 0$, so gehört auch die dritte dieser Mengen zu $\boldsymbol{A}$ und es gilt: $a(X+Y) = a(X) + a(Y)$. [Nach 2.3, 2.7].

Korollar 2.11. Sind $X_1, \ldots, X_n$ paarweise fremde beschränkte Mengen, so ist $a_i(X_1) + \ldots + a_i(X_n) \leqslant a_i(X_1 + \ldots + X_n)$ *und* $a_e(X_1 + \ldots + X_n) \leqslant a_e(X_1) + \ldots + a_e(X_n)$; *ist dabei $X_1, \ldots, X_n \epsilon \boldsymbol{A}$, so ist auch $X_1 + \ldots + X_n \epsilon \boldsymbol{A}$ und* $a(X_1 + \ldots + X_n) = a(X_1) + \ldots + a(X_n)$.
[Nach 2.7, 2.10].

Korollar 2.12. Ist $Y \epsilon \boldsymbol{B}$ und $X \subset Y$, so ist $a_i(X) \leqslant a_i(Y)$ *und* $a_e(X) \leqslant a_e(Y)$; *ist dabei $X, Y \epsilon \boldsymbol{A}$, so ist* $a(X) \leqslant a(Y)$.
[Nach 2.4, 2.7, 2.10].

Satz 2.13. Ist $X \epsilon \boldsymbol{B}$ und $X \equiv Y$ oder insbesondere $X \cong Y$, so ist $a_i(X) = a_i(Y)$ *und* $a_e(X) = a_e(Y)$.
[Nach 1.2, 1.6, 1.8, 2.1, 2.2, 2.4].

Korollar 2.14 (Invarianzsatz). Ist $X \epsilon \boldsymbol{A}$ und $X \equiv Y$ oder insbesondere $X \cong Y$, so ist auch $Y \epsilon \boldsymbol{A}$ und $a(X) = a(Y)$.
[Nach 1.6, 2.3, 2.13].

Eine Verschärfung von 2.13 und 2.14 ist

Satz 2.15. Ist $X \epsilon \boldsymbol{B}$ und gibt es zwei Mengen Z und U, derart daß $Z \epsilon \boldsymbol{B}$, $Z \equiv U$, $X+Z \equiv Y+U$ und $X \cdot Z = Y \cdot U = 0$, so ist $a_i(X) = a_i(Y)$ *und* $a_e(X) = a_e(Y)$; *ist dabei $X \epsilon \boldsymbol{A}$, so ist auch $Y \epsilon \boldsymbol{A}$ und* $a(X) = a(Y)$.
[Nach 1.2, 1.3, 1.6, 2.6, 2.8, 2.13; 2.3].

Zwei Mengen X und Y, die die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen, können als äquivalent durch Subtraktion bezeichnet werden.

Satz 2.16. Ist $X_1 \epsilon \boldsymbol{B}$, $X_1 \equiv \ldots \equiv X_n$ (oder insbesondere $X_1 \cong \ldots \cong X_n$) und sind die Mengen $X_1, \ldots, X_n$ paarweise fremd, so ist

$$a_i(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot a_i(X_1) = \ldots = n \cdot a_i(X_n)$$

und

$$a_e(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot a_e(X_1) = \ldots = n \cdot a_e(X_n).$$

[Nach 1.2, 1.3, 1.6, 1.13, 1.21, 2.1, 2.2, 2.4].

Korollar 2.17 (Multiplikations- und Divisionssatz). Gehört unter den Voraussetzungen von 2.16 die Menge $X_1 + \ldots + X_n$ oder eine der Mengen $X_1, \ldots, X_n$ zu $\boldsymbol{A}$; so gehören auch die übrigen Mengen zu $\boldsymbol{A}$ und es gilt:

$$a(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot a(X_1) = \ldots = n \cdot a(X_n).$$

[Nach 1.6, 2.3, 2.16].

Satz 2.18. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) $X \epsilon \boldsymbol{A}$;

(ii) *zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei Strecken Y_1 und Y_2 und eine Menge Z, derart daß* $|Y_1| - |Y_2| < \varepsilon$, $Y_1 \supset Z \supset Y_2$ *und* $X \equiv Z$;

(iii) *zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Strecke Y und eine Menge Z, so daß* $a_e(Z) < \varepsilon$ *und* $X \equiv Y + Z$;

(iv) *zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Strecke Y und eine Menge Z, so daß* $a_e(Z) < \varepsilon$ *und* $X + Z \equiv Y$.

[Nach 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.21, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4].

Satz 2.19. Damit $a_i(X) = 0$, ist notwendig und hinreichend, daß $X \epsilon \boldsymbol{B}$ und daß es zu keiner eigentlichen Strecke Y eine Menge X_1 gibt, für die $X \supset X_1 \equiv Y$. [Nach 1.5, 2.1].

Mit Hilfe von 1.6 schließt man hieraus, daß das System der Mengen X mit $a_i(X) = 0$ alle (beschränkten) Mengen von I. Kategorie sowie alle Mengen vom Lebesgueschen Maß 0 enthält.

Satz 2.20. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) $a_e(X) = 0$;

(ii) $a(X) = 0$;

(iii) *zu jeder eigentlichen Strecke Y gibt es eine Menge Y_1, für die* $X \equiv Y_1 \subset Y$;

(iv) *es gibt eine unendliche Folge von paarweise fremden Mengen $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, derart daß $X \equiv X_1 \equiv \ldots \equiv X_n \equiv \ldots$ und $X_1 + \ldots + X_n + \ldots \epsilon \boldsymbol{B}$.*

[Nach 1.2, 1.6, 2.2, 2.3, 2.4, 2.12, 2.13, 2.16].

Korollar 2.21. *Ist $X \subset Y$ und $a(Y)=0$, so ist auch $a(X)=0$.* [Nach 1.8, 2.20].

Korollar 2.22. *Ist die Menge $X \epsilon \boldsymbol{B}$ von einer Mächtigkeit $<2^{\aleph_0}$, so ist $a(X)=0$.* [Nach 1.2, 1.20, 2.20].

Satz 2.23. *Zu jeder Menge $X \epsilon \boldsymbol{B}$ gibt es eine unendliche Folge von (paarweise fremden) Mengen $X_1, \dots, X_n, \dots$, derart daß $X = X_1 + \dots + X_n + \dots$ und $a(X_1) = \dots = a(X_n) = \dots = 0$.* [Nach 1.22, 2.20, 2.21].

Es erhellt daraus, daß das absolute Maß nicht abzählbar-additiv ist.

§ 3. Beziehung des absoluten Maßes zu beliebigen Maßfunktionen.

Definition 3.1. *Eine Funktion f heißt Maßfunktion im Mengensystem $\boldsymbol{S}$, wenn $E \epsilon \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{B}$ und wenn f folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) *jeder Menge $X \epsilon \boldsymbol{S}$ ist eine reelle Zahl $f(X) \geqslant 0$ zugeordnet, und insbesondere der Menge E die Zahl $f(E)=1$;*

(ii) *sind $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_p$ zwei endliche Folgen von Mengen des Systems $\boldsymbol{S}$ und gibt es zwei endliche Folgen von paarweise fremden Mengen $X_1', \dots, X_n'$ und $Y_1', \dots, Y_p'$, derart daß $X_1 \equiv X_1', \dots, X_n \equiv X_n'$, $Y_1 \equiv Y_1'$, $Y_2 \equiv Y_2'$, $\dots$, $Y_p \equiv Y_p'$ und $X_1' + \dots + X_n' \subset Y_1' + \dots + Y_p'$, so ist $f(X_1) + \dots + f(X_n) \leqslant f(Y_1) + \dots + f(Y_p)$.*

In der Bedingung (i) dieser Definition kann man die Zeichen $\geqslant 0$ weglassen (aus (ii) folgt schon, daß $f(X) \geqslant 0$ ist); die Formeln $Y_1 \equiv Y_1', \dots, Y_p \equiv Y_p'$ in der Bedingung (ii) können durch $Y_1 \cong Y_1', \dots, Y_p \cong Y_p'$ ersetzt werden.

Der eben definierte Begriff weicht vom üblichen Begriff der Maßfunktion ab. Das hat seinen Grund darin, daß der Begriff der Maßfunktion hier sehr allgemeinen gefaßt und zwar auf ganz beliebige Systeme von beschränkten Punktmengen bezogen wird. Wir werden weiter unten sehen (Sätze 3.3–3.5), daß sich der betrachtete Begriff — unter spezielleren Voraussetzungen über das System $\boldsymbol{S}$ — dem üblichen bedeutend nähert.

Aus 3.1 ergibt sich sofort

Satz 3.2. *Es sei f eine beliebige Maßfunktion in einem Mengensystem $\boldsymbol{S}$; dann gilt*

(i) *ist $X, Y, X+Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und $X \cdot Y = 0$, so ist $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$;*

(ii) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und gibt es eine Menge Y_1, für die $X \equiv Y_1 \subset Y$, so ist $f(X) \leqslant f(Y)$;*

(iii) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und gibt es zwei Mengen Z und U, für die $Z \epsilon \boldsymbol{B}$, $X+Z \equiv Y+U$ und $X \cdot Z = Y \cdot U = 0$, $Z \equiv U$, so ist $f(X) = f(Y)$;*

(iv) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und $X \equiv Y$, so ist $f(X) = f(Y)$;*

(v) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und $X \cong Y$, so ist $f(X) = f(Y)$.* [Nach 1.2, 1.3, 1.21, 3.1].

Satz 3.3. *Es sei $\boldsymbol{S}$ ein Mengensystem, das folgende Bedingungen erfüllt:*

(I) $E \epsilon \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{B}$;

(II) *ist $X, Y \epsilon \boldsymbol{S}$ und $X \cdot Y = 0$, so ist auch $X+Y \epsilon \boldsymbol{S}$;*

(III) *ist $X \epsilon \boldsymbol{S}$ und $X \cong Y$, so ist auch $Y \epsilon \boldsymbol{S}$.*

Damit unter diesen Voraussetzungen f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß f die Bedingungen (i) *aus 3.1 sowie* (i) *und* (ii) *aus 3.2 erfüllt.* [Nach 1.2, 1.3, 1.8, 3.1, 3.2].

Satz 3.4. *Es sei $\boldsymbol{S}$ ein Mengensystem, das folgende Bedingungen erfüllt:*

(I) $E \epsilon \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{B}$;

(II) *gehören irgend zwei der drei Mengen X, Y und $X+Y$ zu $\boldsymbol{S}$ und ist $X \cdot Y = 0$, so gehört auch die dritte Menge zu $\boldsymbol{S}$;*

(III) *ist $X \epsilon \boldsymbol{S}$ und $X \equiv Y$, so ist auch $Y \epsilon \boldsymbol{S}$.*

Damit unter diesen Voraussetzungen f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß f die Bedingungen (i) *aus 3.1 sowie* (i) *und* (iv) *aus 3.2 erfüllt.* [Nach 1.2, 3.1, 3.3].

Korollar 3.5. *Damit f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß f die Bedingungen* (i) *aus 3.1 sowie* (i) *und* (v) *aus 3.2 erfüllt.* [Nach 1.1, 1.6, 3.3].

Satz 3.6. *Es sei $E \epsilon \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{T}$, g eine Maßfunktion in $\boldsymbol{T}$ und $g(Y) = f(Y)$ für jedes $Y \epsilon \boldsymbol{S}$; dann ist f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$.* [Nach 3.1].

Satz 3.7. *Ist f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$ und $X \epsilon \boldsymbol{B}$, so gibt es eine Maßfunktion g im System $\boldsymbol{S} + \{X\}$, derart daß $g(Y) = f(Y)$ für jedes $Y \epsilon \boldsymbol{S}$.*

Wir wollen hier ausnahmsweise den Beweis dieses Satzes in großen Zügen skizzieren.

Mit T_1, bzw. T_2, bezeichnen wir die Menge der Zahlen t von folgender Beschaffenheit: es gibt Punktmengen $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_p$, $Z_1, \dots, Z_q$, $Y'_1, \dots, Y'_p$ und $Z'_1, \dots, Z'_q$, derart daß

(1) $Y_1, \dots, Y_p \in \boldsymbol{S}, \qquad Z_1, \dots, Z_q \in \boldsymbol{S}$,

(2) $t = \frac{1}{n}[f(Z_1) + \dots + f(Z_q) - f(Y_1) - \dots - f(Y_p)]$,

(3) $X \cong X_1 \cong \dots \cong X_n, \qquad Y_1 \cong Y'_1, \dots, Y_p \cong Y'_p, \qquad Z_1 \cong Z'_1, \dots, Z_q \cong Z'_q$,

(4) die Mengen $X_1, \dots, X_n$, $Y'_1, \dots, Y'_p$ sind paarweise fremd, ebenso auch die Mengen $Z'_1, \dots, Z'_q$

und schließlich

(5_1) $$X_1 + \dots + X_n + Y'_1 + \dots + Y'_p \supset Z'_1 + \dots + Z'_q,$$

bzw.

(5_2) $$X_1 + \dots + X_n + Y'_1 + \dots + Y'_p \subset Z'_1 + \dots + Z'_q.$$

Man schließt aus 3.1 (mit Hilfe von 1.2, 1.3 und 1.8), daß die Ungleichung $t_1 \leqslant t_2$ für beliebige Zahlen $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$ besteht; auch zeigt man leicht, daß die Mengen T_1 und T_2 nicht leer sind und daß insbesondere $0 \in T_1$. Es gibt demnach mindestens eine Zahl $x \geqslant 0$, so daß $t_1 \leqslant x \leqslant t_2$ für beliebige $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$ ist. Wir bestimmen nun die Funktion g durch die Formeln: $g(X) = x$ und $g(Y) = f(Y)$ für $Y \in \boldsymbol{S}$; auf Grund von 3.1 und 1.16 kann man dann nachweisen, daß g eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S} + \{X\}$ ist.

Satz 3.8. Es sei $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \dots, \boldsymbol{S}_\xi, \dots$ eine (endliche oder) transfinite Folge von Mengensystemen, derart daß $\boldsymbol{S}_\xi \subset \boldsymbol{S}_\eta$ für $\xi \leqslant \eta < \tau$ (wo τ eine vorgegebene Ordnungszahl > 0 ist). Ist dann f eine Maßfunktion in jedem der Systeme $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \dots, \boldsymbol{S}_\xi, \dots$, so ist sie auch eine Maßfunktion in System $\boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{S}_1 + \dots + \boldsymbol{S}_\xi + \dots$ $(\xi < \tau)$. [Nach 3.1].

Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes wird aus 3.6, 3.7 und 3.8 folgender wichtiger Satz gewonnen:

Satz 3.9 (Erweiterungssatz). Ist f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{B}$, so gibt es eine Maßfunktion g in $\boldsymbol{T}$, derart daß $g(Y) = f(Y)$ für jedes $Y \in \boldsymbol{S}$.

Satz 3.10. Ist $f(E) = 1$, so ist f eine Maßfunktion in System $\boldsymbol{S} = \{E\}$. [Nach 1.2, 1.5, 1.16, 3.1].

Satz 3.11 (Existenzsatz). Es gibt Maßfunktionen in jedem System $\boldsymbol{T}$, für das $E \in \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{B}$, und insbesondere im System $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}$. [4]) [Nach 3.9, 3.10].

Satz 3.12. Es sei $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{B}$, $f(Y) = 0$ für jedes $Y \in \boldsymbol{S}$ und $f(E) = 1$; damit f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S} + \{E\}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\boldsymbol{S}$ folgender Bedingung genügt:

(i) *es gibt keine Mengen $X_1, \dots, X_n$, $X'_1, \dots, X'_n$, für die $X_1, \dots, X_n \in \boldsymbol{S}$, $X_1 \cong X'_1, \dots, X_n \cong X'_n$ und $E \subset X'_1 + \dots + X'_n$ ist.* [Nach 1.1, 1.16, 3.1].

Satz 3.13. Es sei $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{B}$ und $E \in \boldsymbol{T}$. Damit es eine Maßfunktion f in $\boldsymbol{T}$ gibt, derart daß $f(Y) = 0$ für jedes $Y \in \boldsymbol{S}$, ist notwendig und hinreichend, daß $\boldsymbol{S}$ der Bedingung (i) *aus 3.12 genügt.* [Nach 3.1, 3.6, 3.9, 3.12].

Als Beispiel von Mengensystemen, die der Bedingung (i) aus 3.12 genügen, kann das System der Mengen vom Lebesgueschen Maße 0 oder der Mengen von I. Kategorie dienen [16]).

Wir gehen nun zu Sätzen über, die den engen Zusammenhang zwischen dem absoluten Maß und den allgemeinen Maßfunktionen klarstellen.

Satz 3.14. Ist f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$ und $X \in \boldsymbol{S}$, so ist $a_i(X) \leqslant f(X) \leqslant a_e(X)$. [Nach 1.2, 1.3, 1.8, 1.21, 2.1, 2.2, 3.1].

Korollar 3.15. Ist f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S}$ und $X \in \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{S}$, so ist $f(X) = a(X)$. [Nach 2.3, 3.14].

Satz 3.16. Ist $E \in \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{A}$, $X \in \boldsymbol{B}$, $f(Y) = a(Y)$ für jedes $Y \in \boldsymbol{S}$ und $a_i(X) \leqslant f(X) \leqslant a_e(X)$, so ist f eine Maßfunktion in $\boldsymbol{S} + \{X\}$. [Nach 1.6, 2.8, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.16, 3.1].

Korollar 3.17. Die Funktion a ist eine Maßfunktion im System $\boldsymbol{A}$ (und, allgemeiner, in jedem System $\boldsymbol{S}$, für das $E \in \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{A}$). [Nach 2.5, 2.6, 3.16].

Folgende zwei Sätze 3.18 und 3.19 können als Hauptergebnisse dieses Paragraphen angesehen werden:

Satz 3.18. Es sei $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}$ und $X \in \boldsymbol{B}$ (oder, allgemeiner, $\boldsymbol{S}$ sei ein System, so daß $E \in \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{B}$ und $X \in \boldsymbol{B}$); T sei die Menge der Zahlen t, für die es eine Maßfunktion f in $\boldsymbol{S}$ gibt, so daß $f(X) = t$. Es ist dann $T = \underset{t}{E}[a_i(X) \leqslant t \leqslant a_e(X)]$; $a_i(X)$ ist also die kleinste und $a_e(X)$ die größte aller Zahlen der Menge T. [Nach 2.6, 3.9, 3.14, 3.16].

Korollar 3.19 (Eindeutigkeitssatz). Es sei $S=B$ und $X \epsilon B$ (oder, allgemeiner, S sei ein System, so daß $E \epsilon S \subset B$ und $X \epsilon S$). Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:

(i) $X \epsilon A$;

(ii) $f(X)=g(X)$ *für zwei beliebige Maßfunktionen f und g in S;*

(iii) $f(X)=a(X)$, *bzw.* $=a_i(X)$, *bzw.* $=a_e(X)$ *für jede Maßfunktion f in S.* [Nach 2.3, 3.18].

Man könnte offenbar den Satz 3.18 und das Korollar 3.19 (etwa für $S=B$) als Definition der Begriffe $a_i(X)$, $a_e(X)$, $a(X)$ und A annehmen und somit die Theorie des absoluten Maßes als ein Bruchstück der allgemeinen Theorie der Maßfunktionen aufbauen. Dadurch würde aber dem Begriff des absoluten Maßes sein anschaulicher geometrischer Charakter entzogen und die im Grunde ziemlich elementare Theorie dieses Begriffs würde in eine Abhängigkeit von der transfiniten (sich auf den Wohlordnungssatz gründenden) Konstruktion der allgemeinen Maßfunktionen gebracht.

Es sei bemerkt, daß man die in § 2 skizzierte Konstruktion folgendermaßen verallgemeinern kann. Man nimmt als Ausgangspunkt ein beliebiges Mengensystem $S_0 \subset B$ und eine Maßfunktion g_0 in S_0 und man operiert vom Anfang an, d. h. beim Formulieren von 2.1–2.3, nicht mit Strecken und ihrer Länge, sondern mit Mengen $Y \epsilon G_0$ und ihrem Maß $g_0(Y)$. Man gelangt somit zu einer Reihe von Begriffen: dem inneren Maß $g_i(X)$, dem äußeren Maß $g_e(X)$, dem System der meßbaren Mengen $G=\underset{X}{E}[g_i(X)=g_e(X)]$ und dem erweiterten Maß $g(X)=g_i(X)=g_e(X)$ für $X \epsilon G$ (die Funktion g kann als natürliche Erweiterung der Funktion g_0 bezeichnet werden; alle diese Begriffe haben offenbar einen relativen Charakter und werden auf G_0 und g_0 bezogen). Definitionen 2.1 und 2.2 erfahren dabei eine gewisse Komplikation (die allerdings ziemlich gering ist, wenn G_0 den Voraussetzungen von 3.4 genügt): ersetzt man im Beweis des Satzes 3.7 S durch G_0 und f durch g_0, so kann man $g_i(X)$ als obere Schranke der Menge T_1 und $g_e(X)$ als untere Schranke der Menge T_2 definieren. Es ist $a_i(X) \leqslant g_i(X) \leqslant g_e(X) \leqslant a_e(X)$, wonach $A \subset G$ und $g(X)=a(X)$ für jedes $X \epsilon A$ (ist insbesondere $G_0 \subset A$, so erhält man $G=A$; das Operieren mit Mengen $Y \epsilon G_0$ und ihrem Maß $g_0(Y)$ anstatt mit Strecken und ihrer Länge gibt also in diesem Fall nichts neues und verkompliziert nur die Überlegungen). Alle Sätze aus § 2 (mit gewissen Modifikationen in 2.18–2.20) sowie Sätze 3.16 und 3.17 lassen sich auf die neuen Begriffe übertragen; Sätze 3.14, 3.15, 3.18 und 3.19 bleiben dagegen nur dann gültig, wenn man sie auf Systeme beschränkt, die G_0 umfassen, und auf Maßfunktionen, die innerhalb G_0 mit g_0 übereinstimmen.

§ 4. Beziehung des absoluten Maßes zum Peano-Jordanschen und Lebesgueschen Maß. Mit $p_i(X)$ bzw. $p_e(X)$ wollen wir das innere bzw. das äußere Peano-Jordansche Maß bezeichnen; $p(X)$ bezeichnet das Peano-Jordansche Maß schlechthin und P das System aller im Peano-Jordanschen Sinne meßbaren Mengen. In analoger Weise beziehen sich die Symbole $l_i(X)$, $l_e(X)$, $l(X)$ und L auf das Lebesguesche Maß beschränkter Mengen. [3])

Stellt man die bekannten Definitionen des Peano-Jordanschen und Lebesgueschen Maßes mit der Definition des absoluten Maßes zusammen, so erhält man sogleich

Satz 4.1. Ist $X \epsilon B$, so ist $0 \leqslant p_i(X) \leqslant \min[l_i(X), a_i(X)]$ *und* $\max[l_e(X), a_e(X)] \leqslant p_e(X) < +\infty$.

Korollar 4.2. Ist $X \epsilon P$, so ist $X \epsilon L \cdot A$ und $p(X)=l(X)=a(X)$. [Nach 2.3, 4.1].

Um die Beziehungen zwischen dem Lebesgueschen und absoluten Maß näher zu untersuchen, bringen wir zunächst folgenden bekannten Satz in Erinnerung:

Satz 4.3. Es gibt eine Maßfunktion f im System B, derart daß $f(Y)=l(Y)$ für jedes $Y \epsilon L$. [4])

Korollar 4.4. Die Funktion l ist eine Maßfunktion im System L (und die Funktion p im System P). [Nach 3.6, 4.3, 4.2].

Nach einem bekannten Satz aus der Theorie des Lebesgueschen Maßes gibt es zu jeder Menge $X \epsilon B$ zwei Mengen $Y, Z \epsilon L$, für die $Y \subset X \subset Z$, $l_i(X)=l(Y)$ und $l_e(X)=l(Z)$ ist. Hieraus ergibt sich

Satz 4.5. Ist f eine Maßfunktion im System $S \supset L$, derart daß $f(Y)=l(Y)$ für jedes $Y \epsilon L$, so ist $l_i(X) \leqslant f(X) \leqslant l_e(X)$ für jede Menge $X \epsilon S$. [Nach 1.2, 3.2 (ii)].

Satz 4.6. Ist $X \epsilon B$, so ist $\max[l_i(X), a_i(X)] \leqslant \min[l_e(X), a_e(X)]$. [Nach 3.14, 4.3, 4.5].

Korollar 4.7. Ist $X \epsilon L$, so ist $a_i(X) \leqslant l(X) \leqslant a_e(X)$; ist $X \epsilon A$, so ist $l_i(X) \leqslant a(X) \leqslant l_e(X)$; ist $X \epsilon A \cdot L$, so ist $l(X)=a(X)$. [Nach 2.3, 4.6].

Es sei hier noch eine Folgerung aus 4.3 und 4.5 angeführt, die ausschließlich das Lebesguesche Maß betrifft:

Satz 4.8. Genügen die Mengen X und Y den Voraussetzungen von 2.13 oder 2.15, so ist $\max[l_i(X), l_i(Y)] \leqslant \min[l_e(X), l_e(Y)]$; *ist dabei* $X, Y \in \mathbf{L}$, *so ist* $l(X) = l(Y)$. [Nach 1.6, 3.2 (iii), (iv), 4.3, 4.5].

Wir gehen zu Ergebnissen negativer Natur über.

Satz 4.9. Das System $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$ ist nicht mit $\mathbf{P}$ identisch; zu $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{P}$ gehört z.B. jede abzählbare Menge, die in einer Strecke dicht liegt. [Nach 2.22].

Satz 4.10. Das System $\mathbf{L}$ ist kein Teil von $\mathbf{A}$; zu $\mathbf{L} - \mathbf{A}$ gehört z. B. jede beschränkte Menge von I. Kategorie mit positivem Lebesgueschem Maß. [Nach 1.6, 2.3, 2.19, 4.7].

Satz 4.11. Das System $\mathbf{A}$ ist kein Teil von $\mathbf{L}$; zu $\mathbf{A} - \mathbf{L}$ gehört z.B. jede Menge, die durch Zerlegung einer eigentlichen Strecke in abzählbar viele paarweise fremde und zerlegungsgleiche Teilmengen gewonnen wird. [Nach 1.6, 1.22, 2.20, 4.7].

Korollar 4.12. Es gibt beschränkte Mengen, die weder zu $\mathbf{L}$ noch zu $\mathbf{A}$ gehören; ist z.B. $X \in \mathbf{L} - \mathbf{A}$, $Y \in \mathbf{A} - \mathbf{L}$ und $X \cdot Y = 0$, so ist $X + Y \in \mathbf{B} - \mathbf{L} - \mathbf{A}$. [Nach 2.10, 4.10, 4.11].

Korollar 4.13. Es gibt Mengen $X, Y \in \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$, derart daß $X + Y$, $X \cdot Y$, $X - Y$, $Y - X \in \mathbf{L} - \mathbf{A}$. [Nach 2.6, 2.10, 2.14, 4.10].

Die Systeme $\mathbf{A}$ und $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$ sind also, im Gegensatz zu $\mathbf{P}$ und $\mathbf{L}$, keine Mengenkörper.

Zum Schluß sei bemerkt, daß man mit Rücksicht auf 4.4 die Bemerkungen am Ende von §3 auf das System $\mathbf{L}$ und die Funktion l beziehen kann; mit anderen Worten: man kann in den Betrachtungen von §2 Strecken und ihre Länge durch Mengen des Systems $\mathbf{L}$ und das Lebesguesche Maß ersetzen. Man gelangt somit zu einer neuen Reihe von Begriffen, sagen wir $m_i(X)$, $m_e(X)$, $\mathbf{M}$ und $m(X)$ (die Funktion m kann natürliche Erweiterung des Lebesgueschen Maßes genannt werden). Satz 4.6 läßt sich dann folgendermaßen ergänzen:

Ist $X \in B$, *so ist* $\max[l_i(X), a_i(X)] \leqslant m_i(X) \leqslant m_e(X) \leqslant \min[l_e(X), a_e(X)]$.

Man ersieht daraus u.a., daß das System $\mathbf{M}$ die Systeme $\mathbf{L}$ und $\mathbf{A}$ umfaßt; $\mathbf{M}$ enthält übrigens auch solche Mengen, die weder zu $\mathbf{L}$ noch zu $\mathbf{A}$ gehören (z.B. Mengen, die wir in 4.12 konstruiert haben).

Schlußbemerkungen. Die Theorie des absoluten Maßes kann mit gewissen Abänderungen auf die euklidische Ebene übertragen werden. Als Einheitsmenge E wird dann, wie üblich, ein beliebiges Quadrat (oder Polygon) gewählt. Obzwar Sätze 1.15–1.17 für ebene Punktmengen im allgemeinen nicht gelten (vgl. Bemerkungen am Ende von § 1), stellt es sich doch heraus, daß zumindest die Einheitsmenge E nicht „paradoxal zerlegbar" ist, d. h. kein Gegenbeispiel für 1.17 bildet: es gibt keine zwei fremde Mengen E_1 und E_2, derart daß $E = E_1 + E_2 \equiv E_1 \equiv E_2$ [14]); und diese Tatsache ist für die Theorie des absoluten Maßes von entscheidender Bedeutung. Das Fehlen von 1.15 verursacht jedoch gewisse Komplikationen in der ganzen Konstruktion sowie in der Formulierung einzelner Definitionen und Sätze. Insbesondere muß man oft — z.B. bei der Formulierung 2.1 — statt mit der Zerlegungsgleichheit, mit der Äquivalenz durch Substraktion operieren (vgl. Bemerkung zu Satz 2.15).

Der Versuch, die Theorie des absoluten Maßes auf einen drei- oder mehrdimensionalen euklidischen Raum zu übertragen, scheitert dagegen an einem unüberwindbaren Hindernis, nämlich an den bekannten „Paradoxien der Zerlegungsgleichheit": in solch einem Raum ist ja jeder Würfel (und, allgemeiner, jede beschränkte Punktmenge mit inneren Punkten) „paradoxal zerlegbar" [2]).

Anmerkungen.

[1]) Die in der vorliegenden Mitteilung enthaltenen Ergebnisse stammen in ihrem wesentlichen Teil aus dem Jahre 1931; ich habe sie in einer Mitteilung dargestellt, die am 13. II. 1932 der Warschauer Wissenschaftlichen Gesellschaft vorgelegt wurde (aus dieser Mitteilung ist im Druck nur eine ganz kurze Zusammenfassung in polnischer Sprache erschienen; vgl. C. R. Soc. Sc. Varsov. **52**, 1932, Cl. III, S. 12). Ein etwas später, nämlich in 1934, gefundener Satz aus der Theorie der Zerlegungsgleichheit (und zwar Satz 1.15) hat es ermöglicht, den ursprünglichen Gedankengang zu vereinfachen. Über die Theorie des absoluten Maßes in ihrer jetzigen Form habe ich in zwei Vorträgen berichtet: in der Wiener Mathematischen Gesellschaft am 16. III. 1935 und in der Polnischen Mathematischen Gesellschaft in Warschau am 17. XII. 1937 (vgl. Ann. Soc. Pol. Math. **16**, 1938).

[2]) Vgl. z. B. S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), S. 244 ff. oder A. Tarski, Przegląd matematyczno-fizyczny **2** (1924), S. 47 ff.

[3]) Zur Theorie des Peano-Jordanschen und des Lebesgueschen Maßes vgl. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, S. 399 ff.

[4]) Die Existenz solcher Maßfunktionen wurde bekanntlich von Banach entdeckt (vgl. S. Banach, Fund. Math. **4**, 1923, S. 7 ff. und sein Buch *Théorie des opérations linéaires*, Monogr. Mat. **1** (1932), S. 32 f). Der hier in § 3 skizzierte Beweis dieses Ergebnisses weicht in mancher Hinsicht von dem Banachschen ab.

5) Die gleichzeitige Verfeinerung des Peano-Jordanschen Verfahrens in den beiden angedeuteten Richtungen ist mit Rücksicht auf die bekannten „Paradoxien der abzählbaren Zerlegungsgleichheit" unmöglich (vgl. die in Anm. 2 zitierte Arbeit von Banach und dem Verfasser).

6) Vgl. etwa Hausdorff, op. cit., S. 418 f. (insbesondere S. 419, Z. 20–24 von oben) und W. Sierpiński, dieser Band, S. 96–99.

7) Zu den Sätzen 1.2–1.6, 1.9 und 1.10 vgl. Banach-Tarski, op. cit.; Satz 1.14 wurde von D. König, Fund. Math. **8** (1926), S. 114 ff. bewiesen; Satz 1.22 stammt von Hausdorff, op. cit., S. 401 f. Die übrigen Sätze von § 1 (größtenteils in einer viel allgemeineren Formulierung) wurden von Lindenbaum und dem Verfasser gewonnen; vgl. hiezu A. Lindenbaum et A. Tarski, C. R. Soc. Sc. Vars. **19** (1926), Cl. III, S. 316 ff. und 328 f., sowie A. Tarski, Atti Congr. Mat. Bologna 1928, **2**, S. 243 ff.. Genaue Beweise dieser Sätze sind noch nicht veröffentlicht und sollen in besonderen Arbeiten erscheinen.

8) Ein kurzer Beweis des Satzes 1.7 (oder genauer: eines analogen Satzes für die Relation der Gleichmächtigkeit) findet sich im Buch von W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości* (*Grundriß der Mengenlehre*, polnisch), 1. Teil, 3. Aufl., Warszawa 1928, S. 90.

9) Sätze 1.11–1.13 wurden als Verschärfungen des von D. König stammenden Satzes 1.14 gewonnen; ihr Beweis ist in großen Zügen dem Königschen analog (vgl. Anm. 7).

10) Korollar 1.19 kann aus dem in Anm. 4 erwähnten Satz von Banach abgeleitet werden (vgl. Banach-Tarski, op. cit., S. 257 f.); der Beweis von 1.19 auf Grund von 1.15 ist jedoch viel einfacher und stützt sich nicht auf das Auswahlsaxiom.

11) Vgl. die Beweise analoger Sätze für ebene Punktmengen in Banach-Tarski, op. cit., S. 258 ff., sowie in meinem oben zitierten Aufsatz aus Przegl. mat.-fiz. **2**, S. 53 ff. Es ist zu bemerken, daß Korollar 1.21 einleuchtend und seine Anwendung in weiteren Überlegungen entbehrlich wäre, wenn wir uns entschließen wollten, lediglich halboffene Strecken (d. h. Strecken mit einem Endpunkt) hier zu betrachten.

12) Vgl. hiezu meinen in Anm. 7 zitierten Aufsatz aus Atti Congr. Mat. Bologna 1928 sowie J. v. Neumann, Fund. Math. **13** (1929), S. 81 f.

13) Vgl. S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, Comptes Rendus **158** (1914), S. 618 und S. Ruziewicz, Fund. Math. **2** (1921), S. 4 ff.

14) Zum Beweis vgl. Banach-Tarski, S. 257 f. (im Gegensatz zu dem Fall der geraden Linie ist kein direkter Beweis dafür bekannt; vgl. Anm. 11).

15) Die Kenntnis der Theorie der Zerlegungsgleichheit vorausgesetzt, bietet die Begründung der Ergebnisse aus § 2 keine große Schwierigkeiten; die Schlußweisen sind denen aus der Theorie des Peano-Jordanschen und Lebesgueschen Maßes analog (vgl. Anm. 3).

16) Satz 3.13 in Bezug auf das System S der Mengen von I. Kategorie wurde von E. Szpilrajn gewonnen.

On the equivalence of some classes of sets [1]).

By

Edward Szpilrajn (Warszawa).

We say that two mathematical objects A and B (sets, classes of sets, sequences of sets, functions, etc.) defined respectively in two spaces X and Y are *equivalent in the sense of the General Theory of Sets*, or briefly *equivalent*, if there exists a one-one transformation of the space X into the space Y which transforms A into B [2]).

This paper contains some simple theorems on the equivalence, concerning the category, the property of Baire and measures.

Terminology and notation. X being any metrical space and E a subset of X, we shall denote by

$\widetilde{X}$ the smallest complete space including X;

$\mathrm{D}(E)$ the set of all the points $x \in X$ at which E is of the second category in X [3]);

$\mathrm{Int}(E)$ the interior of E;

$\mathrm{Fr}(E)$ the boundary of E;

$\mathbf{B}(X)$ the class of all the Borel subsets of X;

$\mathbf{K}(X)$ the class of all the sets of the first category in X;

$\mathbf{R}(X)$ the class of all the sets possessing the Baire property in X i. e. the sets of the form $G - K_1 + K_2$, where G is open in X and $K_1, K_2 \in \mathbf{K}(X)$.

Next, we shall denote by

ϑ the closed interval $\langle 0, 1 \rangle$;

$\mathbf{N}(\vartheta)$ the class of all the sets of measure zero contained in ϑ;

$\mathbf{M}(\vartheta)$ the class of all the sets measurable (L) contained in ϑ.

A metrical space X will be said *Borel space* if $X \in \mathbf{B}(\widetilde{X})$. A one-one transformation will be called a *generalized homeomorphism* if both the transformation itself and its inversion are measurable (B) [4]).

---

1) Presented to the Polish Mathematical Society, Warsaw section, on February 25, 1938.

2) For the equivalence of sequences of sets see Szpilrajn [2].

3) Cf. Kuratowski [1], p. 45.

4) See Kuratowski [2] and [1], p. 221.