

## L'oeuvre scientifique de Jan Łukasiewicz dans le domaine de la logique mathématique

par

A. Mośtowski (Warszawa)

Jan Łukasiewicz, né en 1878 à Lwów, fit ses études dans sa ville natale sous la direction du Professeur K. Twardowski dont l'activité scientifique exerça une influence profonde sur toute une génération de philosophes polonais. Habilité en 1906 à l'Université de Lwów, il y fit, de 1906 à 1915, des cours de logique et de philosophie. En 1915 il devint titulaire de la chaire de philosophie à la Faculté de Philosophie de l'Université de Varsovie. Après que cette Faculté fut divisée en deux facultés indépendantes, il devint Professeur à la Faculté des Sciences. Son activité à ce poste dura jusqu'en 1939. Il assuma aussi diverses fonctions officielles et universitaires: en 1919 il fut nommé ministre des cultes et de l'instruction publique; il fut élu à deux reprises recteur de l'Université de Varsovie, en 1922/23 et 1931/32. De 1920 à 1928 il faisait partie du comité de rédaction des „Fundamenta Mathematicae“.

Pendant les années 1939-44, au cours desquelles l'enseignement dans les écoles secondaires et supérieures en Pologne était défendu par les autorités nazistes, Łukasiewicz n'interrompit pas, dans ces conditions si difficiles, son activité scientifique. En 1943 il fit un cours à l'université clandestine dirigée par les organisations du mouvement de la Résistance. Vers la fin de l'occupation il quitta la Pologne et se rendit, après la cessation des hostilités, en Irlande, où il fut jusqu'à sa mort Professeur à l'Académie Royale d'Irlande à Dublin. Il est décédé à Dublin le 13 février 1956.

Łukasiewicz n'était pas un mathématicien et — comme il l'a écrit lui-même (cf. [39]<sup>1)</sup>, p. 1) — il se considérait non pas comme un mathématicien, mais comme un logicien. Ses travaux — surtout les premiers en date — s'inspiraient dans une large mesure des problèmes philosophiques. Pourtant, par son activité scientifique aussi bien que pédagogique il a exercé une grande influence sur les mathématiciens,

<sup>1)</sup> Les nombres entre crochets se rapportent à la bibliographie.

surtout ceux qui se groupaient autour de l'école de Varsovie et de la revue „Fundamenta Mathematicae“.

Un exposé complet de l'oeuvre scientifique de Łukasiewicz paraîtra bientôt dans la revue „Studia Logica“; on y trouvera un compte-rendu de l'activité de Łukasiewicz dans le domaine de la logique et de la philosophie, et surtout dans celui de l'histoire de la logique, où les découvertes de Łukasiewicz ont été particulièrement importantes. Dans la présente note je n'exposerai que les résultats fondamentaux des recherches de Łukasiewicz en logique mathématique.

L'oeuvre principale de Łukasiewicz dans ce domaine a été la création des logiques dites multivalentes. Comme il résulte d'une note fort intéressante [40], Łukasiewicz était arrivé vers 1917 à la conclusion qu'il était en principe possible d'opérer avec une logique autre que la logique bivalente ordinaire et il donna la première ébauche d'une logique trivalente. Łukasiewicz rattachait la troisième valeur logique, différente du vrai et du faux, à la notion de la possibilité et il établit ainsi un lien entre son idée et l'analyse de la modalité dont l'origine remonte à l'antiquité. Les premières publications [42], [43] sur la logique trivalente datent de 1920; un exposé complet de la théorie n'apparut qu'en 1930 (cf. [61], [62]).

L'éminent logicien américain E. L. Post<sup>2)</sup>, récemment décédé, est arrivé presque simultanément avec Łukasiewicz à l'idée d'une logique multivalente. Il est très intéressant de comparer les méthodes dont se servent les deux auteurs pour aborder le problème des logiques multivalentes. Le point de vue auquel se place Łukasiewicz est philosophique. Il considérait les logiques multivalentes comme une nouvelle façon de penser, jusqu'alors inconnue, qui devrait, à son avis, remplacer la logique ordinaire dans certains domaines. Il s'intéressa donc surtout aux applications de cette nouvelle façon de penser et crut les trouver d'abord dans l'analyse des notions modales telles que la nécessité, la possibilité, etc. (cf. [41]), puis dans le calcul des probabilités; ayant en vue ces applications, Łukasiewicz créa la logique à une infinité de valeurs (cf. [62], p. 72). (Les travaux précédents de Łukasiewicz sur le calcul des probabilités [31], [33], [34] ne se rattachent pas à la logique multivalente; ils sont pourtant intéressants du fait que l'on peut les considérer comme les précurseurs de l'approche moderne, basée sur la notion de mesure, au calcul des probabilités). Dans ses leçons et ses séminaires Łukasiewicz posait souvent la question d'asseoir l'arithmétique sur la logique multivalente et il est revenu à ce sujet dans un de ses der-

<sup>2)</sup> E. L. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer. J. Math. 43 (1921), p. 163-185.

niers travaux [89]. Post, au contraire, considérait la logique multivalente comme un schème combinatoire. En mécanisant les processus de la pensée, conformes à une logique ordinaire bivalente, on arrive, dit-il, à certaines règles permettant de transformer les expressions données et, au lieu de ces règles, on peut en considérer d'autres; il ne s'occupe pas de plus près du contenu intuitif de celles-ci. Post reste donc fidèle à la tendance algorithmique et algébrique, depuis longtemps dominante dans l'école mathématique américaine, alors que Łukasiewicz envisage en premier lieu le problème philosophique.

La notion des logiques multivalentes, formulée pour la première fois par Łukasiewicz il y a quelques 40 ans, a acquis depuis une grande renommée et des partisans nombreux; en même temps, elle a suscité aussi de vives critiques—ce qui témoigne encore de sa valeur. Les philosophes et les mathématiciens ont maintes fois tenté de l'appliquer pour surmonter diverses difficultés auxquelles ils se sont heurtés soit dans les problèmes fondamentaux du calcul des probabilités<sup>3)</sup>, soit dans ceux de la physique quantique<sup>4)</sup>, soit enfin dans ceux de la théorie des ensembles<sup>5)</sup>. L'appareil formel de la logique multivalente a même trouvé certaines applications dans des problèmes techniques relatifs à l'élaboration des projets de réseaux électriques<sup>6)</sup>.

Sans diminuer en rien la portée de l'idée de Łukasiewicz il convient de dire qu'aucune de ces applications ne s'est avérée essentielle pour le développement des théories mentionnées.

Dans l'étude des fondements des théories mathématiques et physiques on se heurte souvent à différentes difficultés dues au fait que l'on est obligé de renoncer à certaines habituelles façons de penser, inefficaces dans la théorie nouvelle. On s'efforce alors de rechercher les points faibles des méthodes traditionnelles et d'éliminer ainsi les causes des difficultés. Grâce à la découverte de Łukasiewicz il est devenu possible de découvrir ces dangereuses façons de penser dans la logique elle-même. C'est dans une telle position du problème que l'on trouve une justification des tentatives mentionnées ci-dessus.

Jusqu'à présent il a toujours été possible de surmonter les crises

<sup>3)</sup> Cf. p. ex. H. Reichenbach, *The theory of probability*, Berkeley-Los Angeles 1949, p. 387 et suiv.

<sup>4)</sup> Cf. G. Birkhoff et J. v. Neumann, *The logic of quantum mechanics*, Ann. of Math. 37 (1936), p. 823-843; P. Février, *La structure des théories physiques*, Paris 1951.

<sup>5)</sup> Cf. A. Бочвар, *К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления*, Мат. сборник 12 (1943), p. 353-369.

<sup>6)</sup> Cf. В. И. Шестаков, *Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейноконтактными схемами*, Известия Академии наук СССР 10 (1946), p. 529-544.

suscitées par l'étude des fondements des théories mathématiques sans avoir recours à une révision des concepts fondamentaux aussi radicale que l'eût été une modification de la logique elle-même. Nous avons appris à asseoir aujourd'hui le calcul des probabilités sur des notions empruntées à la théorie des ensembles ou à l'algèbre de Boole, et l'axiomatique de Zermelo ou de Zermelo-Fraenkel constitue un fondement, provisoire il est vrai, mais suffisant sous de nombreux rapports, pour la théorie des ensembles. Dans certaines théories, comme p. ex. dans les problèmes de la physique quantique, on ne saurait affirmer actuellement que la crise a été surmontée, mais d'autre part on ne pourrait pas non plus soutenir que les tentatives faites pour asseoir ces théories sur la logique multivalente aient abouti à des résultats définitifs.

Il semble bien que la difficulté essentielle que présente l'application des logiques multivalentes consiste en ce que celles-ci sont, à l'heure actuelle, des systèmes formels qu'il est facile de construire et d'étudier (par les méthodes de la logique ordinaire), mais dont personne ne se sert effectivement pour penser. L'appareil algébrique et algorithmique formel des logiques multivalentes est maintenant parfaitement connu et — soit dit en passant — grâce aux recherches des 12 dernières années il est subordonné à des schèmes algébriques plus généraux<sup>7)</sup>. Les difficultés d'interprétation de ces systèmes ne sont pourtant pas moindres qu'elles ne l'étaient en 1920. En particulier l'interprétation, proposée par Łukasiewicz, de son système de logique trivalente, où la troisième valeur logique est considérée comme une propriété des propositions possibles ou des propositions se rapportant à l'avenir, s'est révélée inacceptable (cf. la discussion à la conférence [79]). Dans le travail [88] Łukasiewicz a proposé une interprétation de la logique modale basant sur un système à quatre valeurs dont la matrice s'obtient par une multiplication cartésienne de deux algèbres de Boole à deux éléments. La question de savoir si cette proposition se révélera adéquate aux concepts modaux n'a pas encore été discutée. Ce que Łukasiewicz a écrit lui-même dans son article [88] est pourtant bien significatif: "other systems of modal logic are possible... I firmly believe that we shall never be able to decide which of them is true..."

La seule logique, différente de la logique classique, dont se serve effectivement un groupe, d'ailleurs peu nombreux, de mathématiciens est, semble-t-il, la logique intuitionniste. Elle s'est développée en grande partie indépendamment de l'idée générale de Łukasiewicz. L'étude de

cette logique est particulièrement intéressante précisément parce qu'elle est utilisée dans les raisonnements. Łukasiewicz l'a reconnu lui-même, en consacrant à cette logique un de ses derniers travaux [85]. Il convient d'ajouter ici que l'application de l'appareil formel, élaboré par Łukasiewicz et par ses élèves directs et indirects, à l'étude des logiques générales multivalentes a permis d'éclaircir de nombreuses questions qui se rattachent à la logique intuitionniste<sup>8)</sup>.

À l'heure actuelle il n'est pas possible d'émettre une opinion définitive si les logiques multivalentes ne resteront qu'une construction théorique philosophique ou si elles trouveront des applications en dehors de la logique la plus abstraite. En tout cas il est certain que l'idée de Łukasiewicz était d'une grande importance du fait qu'elle a jeté un jour tout à fait nouveau sur le problème de l'apriorité de la logique et a permis de poser de nouveaux problèmes qu'il n'aurait pas été possible de concevoir auparavant. Aujourd'hui, comme il y a presque 40 ans, l'idée de Łukasiewicz surprend par son audace et sa généralité.

Comme il a été dit plus haut, Łukasiewicz non seulement développait les systèmes logiques créés par lui, mais, en plus, il les étudiait, en s'appuyant d'ailleurs sur les lois de la logique ordinaire. En modifiant quelque peu la terminologie de Hilbert Łukasiewicz appelait ces recherches métallogiques. Un travail fondamental dans cet ordre d'idées est le mémoire publié en commun par Łukasiewicz et Tarski [62]. Comme les auteurs le disent dans l'introduction, leurs recherches avaient été initiées par Łukasiewicz, alors que les résultats sont dûs aux deux auteurs et à leurs élèves qui ont collaboré avec eux aux séminaires dirigés par Łukasiewicz. C'est au cours des recherches exposées dans ce travail qu'ont été introduits et étudiés les concepts fondamentaux de la méthodologie du calcul des propositions (tels que p. ex. celui de matrice logique) dont les logiciens se servent constamment encore aujourd'hui dans leurs recherches.

Les études métallogiques de Łukasiewicz ont été menées parallèlement aux travaux de l'école de Hilbert et elles n'en étaient certainement pas indépendantes. Pourtant les points de vue des deux écoles étaient différents. Łukasiewicz et ses élèves s'occupaient surtout du calcul des propositions. La grande simplicité de ce calcul a permis à Łukasiewicz de donner une forme extrêmement lucide aux résultats et aux méthodes de la métallogique. C'est pourquoi le degré de précision qu'ont atteint Łukasiewicz et son école dans l'exposé des systèmes du calcul

<sup>7)</sup> Cf. p. ex. J. C. C. McKinsey et A. Tarski, *The algebra of topology*, Ann. of Math. 45 (1944), p. 141-191; H. Rasiowa and R. Sikorski, *Algebraic treatment of the notion of satisfiability*, Fund. Math. 40 (1953), p. 62-95.

<sup>8)</sup> À titre d'exemple citons ici le travail: S. Jaśkowski, *Recherches sur le système de la logique intuitionniste*, Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, vol. VI (Philosophie des mathématiques), Paris 1936, p. 38-61.

des propositions est très élevé et il constitue encore maintenant un modèle pour d'autres recherches logiques.

Lukasiewicz lui-même comparait les études sur le calcul des propositions à un travail expérimental. Il répétait souvent que ce calcul, étant la partie la plus simple de la logique, se prête le mieux à l'élaboration de méthodes qui serviront ensuite à l'examen d'autres systèmes logiques, plus rapprochés des mathématiques et des sciences expérimentales et plus importants pour celles-ci. En évaluant le développement des recherches logiques au cours de la dernière quinzaine d'années il convient de constater que ces prévisions de Lukasiewicz se sont en effet avérées justes. De nombreux concepts, fondamentaux pour les recherches logiques modernes (p. ex. le concept sémantique d'accomplissement) ont leur origine dans la métalogue du calcul des propositions et ils constituent des généralisations plus ou moins directes de concepts élaborés au cours des recherches sur ce calcul<sup>9)</sup>.

Les méthodes de la logique mathématique, appliquées par Lukasiewicz, se sont révélées comme un instrument efficace aussi dans l'examen de la logique traditionnelle. La syllogistique, roide dans ses formes traditionnelles, a été ranimée grâce à l'application de ces méthodes et elle a été l'objet d'intéressantes études de Lukasiewicz lui-même [60], [77] et de ses élèves<sup>10)</sup>. Les méthodes de la logique mathématique ont aussi exercé une influence remarquable sur les études historiques de Lukasiewicz [66], [68], [84], [91]. Ces travaux, qui ont révolutionné nos vues sur la logique antique, ont montré qu'une analyse correcte des textes logiques de l'antiquité et du Moyen Age n'est pas possible sans une connaissance approfondie de la logique mathématique.

Lukasiewicz était un grand enthousiaste de la logique. Il la considérait comme une science non pas subordonnée aux mathématiques, mais placée sur le même niveau qu'elles et les surpassant de beaucoup au point de vue de la précision. Il croyait fermement que la logique aura à jouer un rôle important non seulement dans les fondements des mathématiques, mais aussi dans les sciences empiriques et même dans les humanités, dans lesquelles la logique mathématique devra — à son avis — introduire l'exactitude du raisonnement et la précision des définitions qui leur font défaut.

Grâce à son influence Lukasiewicz a pu introduire, au cours des années 1926-1939, la logique mathématique comme obligatoire dans

<sup>9)</sup> Cf. à ce sujet une remarque dans le travail de A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* (La notion de vérité dans les langages des sciences déductives), *Prace TNW, Wydział III, Nr 34, Warszawa 1933, p. 73.*

<sup>10)</sup> Cf. p. ex. J. Ślipecki, *On Aristotelian Syllogistic*, *Studia philosophica* 4 (1951), p. 275-300.

l'enseignement des mathématiques et de toutes les sciences naturelles aux universités de Pologne. Cette conception didactique pourrait donner lieu à une discussion contradictoire; il n'en reste pas moins vrai que le cours de logique mathématique, donné par Lukasiewicz pendant de nombreuses années à l'université de Varsovie, attirait une foule d'étudiants de toutes les facultés, y compris les humanités. Modèle de clarté et de précision, ces leçons accusaient les mêmes qualités de langage que les publications de Lukasiewicz.

L'activité de Lukasiewicz comme écrivain a aussi contribué dans une grande mesure à rendre populaire la logique dans l'école mathématique de Varsovie. A titre d'exemple on peut citer ici l'article [39] qui a donné lieu à une ardente polémique avec le professeur Zaremba, souvent accompagnée des mots un peu vifs, mais extrêmement utile, car elle a montré sur un exemple concret les avantages et la simplicité des énoncés que l'on peut atteindre en introduisant dans les mathématiques les concepts et les symboles de la logique.

On trouvera ci-dessous une bibliographie des travaux de Lukasiewicz. Elle contient non seulement une liste de ses travaux plus étendus, mais aussi les notes plus brèves et les résumés des conférences<sup>11)</sup>. Il faut pourtant signaler que les travaux publiés ne donnent qu'un tableau incomplet de l'oeuvre de Lukasiewicz. Une grande partie doit être recherchée dans les travaux de ses élèves; enfin une partie qui n'a pas été publiée du tout reste vivante dans les traditions de l'école logique que Lukasiewicz a créée.

### Bibliographie des travaux de Jan Lukasiewicz

#### Abréviations bibliographiques

PF — Przegląd Filozoficzny (Revue philosophique).

RF — Ruch Filozoficzny (Le mouvement philosophique).

Les titres des travaux publiés en polonais sont suivis des traductions françaises.

1. *Streszczenie (Résumé): Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie 1899, fasc. 3, 4, PF 5 (1902), p. 232-236.*

2. *O indukcji jako inwersji dedukcji (Sur l'induction comme inversion de la déduction)*, PF 6 1903, p. 9-24, 138-152.

3. *Recenzja (Compte rendu): T. Mianowski, O tzw. pojęciach wrodzonych u Locke'a i Leibniza (Sur les notions dites innées chez Locke et Leibniz)*, PF 7 (1904), p. 94-95.

4. *O stosunkach logicznych (Sur les rapports logiques)*, PF 7 (1904), p. 245.

5. *Teza Husserla o stosunku logiki do psychologii (La thèse de Husserl sur le rapport de la logique à la psychologie)*, PF 7 (1904), p. 476-477.

<sup>11)</sup> Cette bibliographie a été rédigée par Mme Gromska et par l'auteur de cette note.

6. Z psychologii porównywania (*Sur la psychologie de la comparaison*), PF 8 (1905), p. 290-291.
7. O dwóch rodzajach wniosków indukcyjnych (*Sur deux genres de conclusions inductives*), PF 9 (1907), p. 83-84.
8. Analiza i konstrukcja pojęcia przyczyny (*Analyse et construction de la notion de cause*), PF 9 (1907), p. 105.
9. Tezy Höflera w sprawie przedstawień i sądów geometrycznych (*Les thèses de Höfler sur les représentations et les jugements géométriques*), PF 9 (1907), p. 451-452.
10. Co począć z pojęciem nieskończoności? (*Que faire avec la notion de l'infini?*) PF 10 (1908), p. 135-137.
11. Recenzja (*Compte rendu*): H. Struwe, *Die polnische Philosophie der letzten zehn Jahre (1894-1904)*, P. F. 10, p. 336-346.
12. O wnioskowaniu indukcyjnym (*Sur le raisonnement inductif*), PF 10 (1908), p. 474-475.
13. Logika a psychologia (*La logique et la psychologie*), PF 10 (1908), p. 489-491.
14. Pragmatyzm, nowa nazwa pewnych starych kierunków myślenia (*Le pragmatisme, un nouveau terme pour désigner des anciennes façons de penser*), PF 11 (1908), p. 341-342.
15. Sprawozdanie z dwóch prac Stumpfa (*Compte rendu de deux travaux de Stumpf*), PF 11 (1908), p. 342-343.
16. Zagajenie pogadanki na temat rozprawy M. Borowskiego: Krytyka pojęcia związku przyczynowego (*Introduction à une causerie sur le mémoire de M. Borowski: Critique de la notion de rapport de cause à effet*), PF 11 (1908), p. 343.
17. Zadania i znaczenie ogólnej teorii stosunków (*Le rôle et l'importance de la théorie générale des relations*), PF 11 (1908), p. 344-347.
18. O prawdopodobieństwie wniosków indukcyjnych (*Sur la probabilité des conclusions inductives*), PF 12 (1909), p. 209-210.
19. O poglądach filozoficznych Meinonga (*Sur les opinions philosophiques de Meinong*), PF 12 (1909), p. 559.
20. O zasadzie wyłączonego środka (*Sur le principe du tiers exclu*), PF 13 (1910), p. 372-373.
21. Über den Satz von Widerspruch bei Aristoteles, *Bull. Acad. Sci. Cracovie, Classe de Phil.* (1910), p. 15-38.
22. O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa, *Studium krytyczne (Sur le principe de contradiction chez Aristote, Etude critique)*, Kraków 1910.
23. Recenzja (*Compte rendu*): Wł. Tatariewicz, *Die Dispositionen der aristotelischen Prinzipien*, RF 1 (1911), p. 20-21.
24. O wartościach logicznych (*Sur les valeurs logiques*), RF 1 (1911), p. 52.
25. O rodzajach rozumowania. Wstęp do teorii stosunków (*Sur les genres de raisonnement. Introduction à la théorie des relations*), RF 1 (1911), p. 78.
26. Recenzja (*Compte rendu*): P. Natrop, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, RF 1 (1911), p. 101-102.
27. Recenzja (*Compte rendu*): H. Struwe, *Historia logiki jako teoria poznania w Polsce, wyd. drugie (L'histoire de la logique comme épistémologie en Pologne, seconde édition)*, RF 1 (1911), p. 115-117.
28. O potrzebie założenia instytutu metodologicznego (*Sur la nécessité de la fondation d'un institut méthodologique*), RF 2 (1912), p. 17-19.
29. Recenzja (*Compte rendu*): W. Biegański, *Czym jest logika? (Qu'est-ce que la logique?)* RF 2 (1912), p. 145.
30. O teoretyczności w nauce, *Księga pamiątkowa ku uczczeniu 250 rocznicy założenia Uniwersytetu Lwowskiego 1911 (Sur l'oeuvre créatrice dans les sciences, Volume com-*

mémoratif à l'occasion du 250-e anniversaire de la fondation de l'Université de Lwów 1911), Lwów 1912, p. 1-15.

31. *Nova teoria prawdopodobieństwa (Une nouvelle théorie des probabilités)*, RF 3 (1913), p. 22.
32. *Recenzja (Compte rendu): J. Kleiner, Zygmunt Krasiński. Dzieje myśli (Zygmunt Krasiński. Histoire de la pensée)*, RF 3 (1913), p. 109-111.
33. *Logiczne podstawy rachunku prawdopodobieństwa (Les fondements logiques du calcul des probabilités)*, *Sprawozdania PAU (Comptes rendus de l'Académie Polonaise des Sciences)*, 1913, p. 5-7.
34. *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Kraków 1913, p. 75.
35. *W sprawie odwracalności stosunku racji i następstwa (Sur l'interversión du rapport de cause à effet)*, PF 16 (1913), p. 298-314.
36. *Rozumowanie a rzeczywistość (Le raisonnement et la réalité)*, RF 4 (1914), p. 54.
37. *O nauce, Poradnik dla samouków (Sur la science, Guide des autodidactes)*, T. I, 1915, p. 15-39, Réimpression: Lwów 1934, 1936, p. 40.
38. *O nauce i filozofii (Sur la science et la philosophie)*, PF 18 (1915), p. 190-196.
39. *O pojęciu wielkości (Sur la notion de grandeur)*, PF 19 (1916), p. 1-70.
40. *Trzeci wykładu pożegnany wygłoszony w sali Uniwersytetu Warszawskiego dnia 7 marca 1918 (Leçon d'adieu prononcée dans la salle de l'Université de Varsovie le 7 mars 1918)*, Warszawa 1918.
41. *O pojęciu możliwości (Sur la notion de possibilité)*, RF 5 (1919-20), p. 169-170.
42. *O logice trójwartościowej (Sur la logique trivalente)*, RF 5 (1920), p. 170-171.
43. *Logika dwuwartościowa (La logique bivalente)*, PF 23 (1921), p. 189-205.
44. *Zagadnienia prawdy, Księga pamiątkowa XI Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich (Les problèmes de la vérité, Volume commémoratif du XI-e Congrès des médecins et des naturalistes polonais)*, 1922, p. 84-85, 87.
45. *Interpretacja liczbowa teorii zdań (Interprétation numérique de la théorie des propositions)*, RF 7 (1922-23).
46. *Recenzja (Compte rendu): Jan Śleszyński, O logice tradycyjnej (Sur la logique traditionnelle)*, RF 8 (1923), p. 107-108.
47. *Kant i filozofia nowożytna (Kant et la philosophie moderne)*, *Wiadomości Literackie (Nouvelles littéraires)* 1 (1924), p. 19.
48. *Dlaczego nie zadawala nas logika filozoficzna? (Pourquoi la logique philosophique ne nous suffit-elle pas?)* RF 9 (1925), p. 25.
49. *O pewnym sposobie pojmowania teorii dedukcji (Sur une façon de concevoir la théorie de la déduction)*, PF 28 (1925), p. 134-136.
50. *Démonstration de la compatibilité des axiomes de la théorie de la déduction*, *Ann. Soc. Pol. Math.* 3 (1925), p. 149.
51. *Sprawozdanie z działalności Uniwersytetu Warszawskiego za r. ak. 1922-23 (Compte rendu de l'activité de l'Université de Varsovie pour l'année acad. 1922-23)*, Warszawa 1925.
52. *Z najnowszej niemieckiej literatury logicznej (Les dernières publications logiques en Allemagne)*, RF 10 (1926-27), p. 197-198.
53. *O logice stoików (Sur la logique des stoiciens)*, PF 30 (1927), p. 278-279.
54. *O metodę w filozofii (La méthode en philosophie)*, PF 31 (1928), p. 3-5.
55. *O pracy Fr. Weidawera: Zur Syllogistik (Sur le travail de Fr. Weidauer: Zur Syllogistik)*, RF 11 (1928-29), p. 178.
56. *Rola definicji w systemach dedukcyjnych (Le rôle des définitions dans les systèmes déductifs)*, RF 11 (1928-29), p. 164.

57. *O definicjach w teorii dēdukcji (Sur les définitions dans la théorie de la déduction)*, RF 11 (1928-29), p. 177-178.
58. *Wrażenia z VI Międzynarodowego Zjazdu Filozoficznego (Impressions du VI-e Congrès International de Philosophie)*, RF 11 (1928-29), p. 1-5.
59. *O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej (Sur l'importance et les besoins de la logique mathématique)*, Nauka Polska (La Science Polonaise) 10 (1929), p. 604-620.
60. *Elementy logiki matematycznej (Eléments de logique mathématique)*, Cours lithographié, 1929.
61. *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, 23 (1930), p. 51-77.
62. (en commun avec A. Tarski), *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Ibid. (1930), p. 1-21.
63. *Uwagi o aksjomacie Nicoda i „dēdukcji uogólniającej“ (Remarques sur l'axiome de Nicod et la „dēduction généralisante“)*, Volume commémoratif de la Société Polonaise de Philosophie (1931).
64. *Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, 24 (1931), p. 153-183.
65. *Z dziejów logiki starożytnej (Une page d'histoire de la logique antique)*, RF 13 (1932-36), p. 46.
66. *Z historii logiki zdań (Sur l'histoire de la logique des propositions)*, PF 37 (1934), p. 417-437.
67. *Znaczenie analizy logicznej dla poznania (Importance de l'analyse logique pour la connaissance)*, PF 37 (1934), p. 369-377.
68. *Zur Geschichte der Aussagenlogik*, Erkenntnis 5 (1935-36), p. 111-131.
69. *Zur vollen Aussagenlogik*, Ibid., p. 176.
70. *Logistyka a filozofia (La logistique et la philosophie)*, PF 39 (1936), p. 115-131.
71. *Bedeutung der logischen Analyse für die Erkenntnis*, Actes du VIII Congrès International de Philosophie, Prague 1936, p. 75-84.
72. *Co dała filozofii współczesna logika matematyczna? (Que doit la philosophie à la logique mathématique moderne?)* PF 39 (1936), p. 325-326.
73. *Logistyka a teologia (La logistique et la théologie)*, Przegląd teologiczny (Revue théologique) 39 (1936), p. 115-117.
74. *W obronie logistyki (En défense de la logistique)*. *Myśl katolicka wobec logiki współczesnej (La pensée catholique et la logique moderne)*, Studia Gnieźnieńska 15 (1937), p. 22.
75. *En défense de la logistique. La pensée catholique et la logique moderne*, Compte rendu de la session spéciale tenue le 26. IX. 1936 pendant le III-e Congrès Polonais de philosophie, Wydawnictwa Wydziału Teologicznego UJ (Publications de la Faculté de Théologie de l'Université de Cracovie), série 1, no 2 (1937), p. 7-13.
76. *Kartezjusz (Descartes)*, Kwartalnik Filozoficzny 15 (1938), p. 123-128.
77. *O sylogistyce Arystotelesa (Sur la syllogistique d'Aristote)*, Sprawozdanie PAU (Comptes rendus de l'Académie Polonaise des Sciences) 44 (1939), p. 220-227.
78. *Der Äquivalenzkalkül*, Collectanea logica 1 (1939), p. 145-169.
79. *Die Logik und das Grundlagenproblem*, Les entretiens sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre 1938, Zürich 1941, p. 82-100.
80. *The shortest axiom of the implicational calculus of propositions*, Proc. Royal Irish Academy, Sect. A, 52 (1948), p. 25-33.
81. *O zasadzie najmniejszej liczby (Sur le principe du minimum)*, Sprawozdanie z V Zjazdu Matematyków Polskich w Krakowie w dniach 29-31 maja 1947, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego (Compte rendu du V-e Congrès

- des mathématiciens polonais, 29-31 mai 1947, Supplément aux Annales de la Soc. Pol. Math.), t. 21 (1950), p. 28-29.
82. *W sprawie aksjomatyki implikacyjnego rachunku zdań (Sur l'axiomatique du calcul implicatif des propositions)*, Sprawozdanie z VI Zjazdu Matematyków Polskich, Warszawa 20-23 IX 1948, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego (Compte rendu du VI Congrès des mathématiciens polonais, 20-23 septembre 1948, Supplément aux Annales de la Soc. Pol. Math.), t. 22 (1950), p. 87-92.
83. *On variable junctors of propositional calculus*, Proc. Royal Irish Academy, Sect. A, 54 (1951), p. 25-35.
84. *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford 1951.
85. *On the intuitionistic theory of deduction*, Indagationes Mathematicae, Series A, 14 (1952), p. 202-212.
86. *Comment on E. J. Cohen's remark*, Ibid., Series A, 15 (1953), p. 113.
87. *Sur la formalisation des théories mathématiques*, Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, 36: Les méthodes formelles en axiomatique, Paris 1953, p. 11-19.
88. *A system of modal logic*, The Journal of Computing Systems, vol. 1, No 3 (1953), p. 111-149.
89. *A system of modal logic*, Actes du XI-e Congrès International de Philosophie 14 (1953), p. 72-78.
90. *Arithmetic and modal logic*, The Journal of Computing Systems, vol. 1, No 4 (1954), p. 213-219.
91. *On a controversial problem of Aristotle's modal syllogistic*, Stud. 7 (1954), p. 114-128.
92. *Letter from Jan Lukasiewicz*, Proc. of the Royal Irish Academy, Section A, 57 (1955), p. 63.

Reçu par la Rédaction le 30. 8. 1956