Über die Fouriersche Lösung von gemischten Problemen in beliebigen Gebieten für eine gewisse Klasse von inhomogenen Differentialgleichungssystemen mit partiellen Ableitungen

(Ein Vergleich mit den Ergebnissen von O. A. Ladyženskaja)

von

Lidia Maurin (Warszawa)

Die in dieser Arbeit angewandte Methode lehnt sich auf die Spektraldarstellung der Funktion einer sebstadjungierten Erweiterung eines Operators und auf die, durch Višik [11] aufgezeigte, eindeutige Korrespondenz zwischen homogenen Randbedingungen und selbstadjungierten Erweiterungen eines Operators. Diese Methode hat K. Maurin [6] auf gemischte Probleme (mit homogener Randbedingung) für homogene Systeme des Typus

$$\frac{\partial^{\varkappa} u_i(x,t)}{\partial t^{\varkappa}} = (A_x u)_i(x,t) \qquad (\varkappa = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, r),$$

die auf einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit gelten, angewandt.

Diese Arbeit ist eine Weiterführung der eben erwähnten Arbeit. In ihr wollen wir uns mit gemischten Problemen für inhomogene Systeme befassen (bekanntlich führt der physikalisch wichtige Fall eines gemischten Problems mit inhomogener Randbedingung zu inhomogenen Systemen).

Wir lösen hier in einem beliebigen (auch unbegrenzten) Gebiet $\Omega_n \subset E_n$ das gemischte Problem für Systeme vom Typus

$$\frac{\partial^{\varkappa} u_i(x,t)}{\partial t^{\varkappa}} = -(A_x u)_i(x,t) + f_i(x,t) \qquad (x = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, r)^{1)},$$

wobei A_x ein elliptisches System ist, das formal selbstadjungiert und halbbeschränkt von unten ist (das heißt, es besitzt eine halbbeschränkte selbstadjungierte Erweiterung); hierbei geben wir hinreichende Bedin-

[1]) Identisch kann man eine Lösung auf einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit erhalten.

gungen für die Existenz einer Lösung an. Die Lösung selbst erhalten wir in der Form von verallgemeinerten Fourierschen Integralen. Damit gibt die in dieser Arbeit angewandte Methode eine theoretische Begründung für die Fouriersche Methode an. Physiker haben die Fouriersche Methode auf ähnliche Probleme angewandt, wobei sie aber nicht die Konvergenz der erhaltenen Reihen untersuchten. Die erste Begründung der Fourierschen Methode erbrachte O. A. Ladyženskaja. Die Methode von Ladyženskaja kann jedoch nur auf Operatoren mit einem punktartigen Spektrum angewandt werden, das heißt, in begrenzten Gebieten. (Für die durch uns dargelegte Methode spricht außerdem noch ihre Einfachheit). Da sich die Methode von Ladyženskaja auf den Begriff eines Sobolewschen Raumes gründet, sind die hinreichenden Bedingungen, die von ihr für die Existenz einer Lösung des gemischten Problems (für ein begrenztes Gebiet) angegeben wurden, für eine Gleichung zweiter Ordnung vollständig verschieden von den durch uns, für denselben Fall, angegebenen Bedingungen. Es gelang uns jedoch zu zeigen, daß für gewisse Raumdimensionen, zum Beispiel für die physikalisch wichtigen Dimensionen $n = 2, 3$, die von uns erhaltenen Bedingungen nicht weniger allgemein sind als diejenigen von Ladyženskaja.

Die in dieser Arbeit dargelegte Methode gilt auch für den Fall eines Systems vom Typus

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = \sqrt{-1}\,(A_x u)_i(x,t) + f_i(x,t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

mit einem beliebigen elliptischen Operator A_x, der eine selbstadjungierte Erweiterung besitzt. Im Abschnitt 6 zeigen wir, daß eines der wichtigsten physikalischen Systeme, nämlich das Diracsche Gleichungssystem für den Fall stationärer Felder, eben zu diesem Typus gehört.

1. A sei ein formal selbstadjungiertes, elliptisches System von r Differentialoperatoren der Ordnung σ, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die unabhängigen Veränderlichen sind, das heißt:

$$1^\circ \quad (Au)_i(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \sigma} \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{\alpha}(x)\, D^{\alpha} u_j(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r);$$

dabei ist

$$u(x) = [u_1(x), u_2(x), \ldots, u_r(x)],$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

die $a^{\alpha}_{ij}(x)$ sind reguläre komplexwertige Funktionen auf einem gewissen offenen Gebiet $\Omega_n \subset E_n$: $a^{\alpha}_{ij} \in C^{\sigma+|\alpha|}(\Omega_n)$ [2]) für $|\alpha| < \sigma$, sowie $a^{\alpha}_{ij} \in C^{\max(|\alpha|+2,2\sigma)}$ für $|\alpha| = \delta$.

2° Die Matrix

$$A_{ij}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=\sigma} a^{\alpha}_{ij}(x)\xi, \qquad \text{wobei} \qquad \xi = (\xi_{\alpha_1}\cdot\xi_{\alpha_2}\dots\xi_{\alpha_n}),$$

ist nicht singulär für $x \in \Omega_n$ und derartige reelle ξ, daß $\sum \xi^2_{\alpha_i} \neq 0$ (Elliptizität).

3° $$\sum_{|\alpha|\leqslant\sigma}\sum_{j=1}^{r} a^{\alpha}_{ij}(x)D^{\alpha}u_j(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\Big(\sum_{j=1}^{r}\overline{a^{\alpha}_{ij}(x)}\,u_j(x)\Big)$$

(formale Selbstadjungiertheit).

A_0 sei die Verengung des Operators A, dessen Definitionsbereich — $D(A_0)$ — die Menge der Vektorfunktionen ist, die σ-fach stetig differenzierbar sind und einen kompakten Träger in Ω_n besitzen [3]) (das heißt die außerhalb entsprechender Kugeln, die in Ω_n enthalten sind, verschwinden) ferner sei A_1 eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung von A_0: $A_0 \subset A_1 = A_1^*$. (Wir wollen kurz sagen, daß A_1 *eine selbstadjungierte Erweiterung von A ist.*)

Falls A_0 halbbeschränkt von oben ist (beziehungsweise von unten), das heißt, falls eine derartige reelle Zahl $\mathcal{M}_0$ existiert, daß $(A_0u, u) < \mathcal{M}_0(u, u)$ für jedes $u \in D(A_0)$ (beziehungsweise $(A_0u, u) > \mathcal{M}_0(u, u)$), wobei

$$(u, v) = \int_{\Omega_n}\sum_{i=1}^{r} u_i v_i\,dx,$$

so gibt es einen Operator $A_1 = A_1^* \supset A_0$. Im entgegengesetzten Fall muß man die Möglichkeit, den Operator A_0 zu einem selbstadjungierten zu erweitern, untersuchen (vergleiche Abschnitt 5). In den Abschnitten 1-3 wollen wir voraussetzen, daß A_0 halbbeschränkt von unten ist.

Das Problem, das wir in dieser Arbeit lösen wollen (Abschnitte 1-3), besteht darin, diejenige Lösung

$$u(x,t) = [u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_r(x,t)]$$

des Systems

$$\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = -(Au)_i(x,t) + f_i(x,t), \qquad i = 1, 2, \dots, r, \tag{1}$$

[2]) $C^m(\Omega)$ bezeichnet die Klasse der Funktionen, die in Ω m-te stetige Ableitungen besitzen.

[3]) Die Klasse aller dieser Funktionen bezeichnen wir durch $C^{\sigma}_0(\Omega_n)$.

zu finden, welche die Anfangsbedingungen

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t}(u,0) = \psi_i(x), \tag{P}$$

sowie eine homogene Randbedingung erfüllt, die man, wie K. Maurin [6] bemerkte, in der Form (dies wegen der Korrespondenz zwischen den homogenen Randbedingungen und den selbstadjungierten Erweiterungen des Operators)

$$u(-,t) \in D(A_1)\,[4]) \tag{B}$$

schreiben kann. (Die Funktion u betrachten wir hier als Repräsentanten einer einparametrischen Vektorenfamilie aus $L^{2,r}$.)

Die Lösung der Gleichung (1), welche die Bedingungen (P) und (B) erfüllt, und für welche $u_i(-,t) \in C^{\sigma}(\Omega_n)$ sowie $u_i(x,-) \in C^2([0,T])$, bezeichnen wir als *klassische Lösung*.

Das obige Problem besitzt ein Gegenstück für Operatoren (die sogenannte *operatortheoretische Variante* dieses Problems), das im Auffinden einer einparametrischen Vektorenfamilie $u(-,t) \in L^{2,r}(\Omega_n)$ besteht, welche die Gleichung

$$\frac{d^2u(-,t)}{dt^2} = -A_1u(-,t) + f(-,t) \tag{1'}$$

und die Anfangsbedingungen

$$u(-,0) = \varphi, \qquad \frac{du}{dt}(-,0) = \psi, \tag{P'}$$

erfüllt, wobei hier $d^2u(-,t)/dt^2$ die zweite starke [5]) Ableitung bezeichnet; $\varphi, \psi \in L^{2,r}(\Omega_n)$, während $f(-,t)$ eine einparametrische Vektorenfamilie aus $L^{2,r}(\Omega_n)$ ist. Die Randbedingung ist schon in Gleichung (1') enthalten. Die Lösung der operatortheoretischen Variante wollen wir *verallgemeinerte Lösung* nennen, da, wie aus den Endüberlegungen des Abschnitts 3 folgt, jede klassische Lösung, im Falle eines kompakten Gebiets Ω_n, eine Lösung der operatortheoretischen Variante ist.

[4]) $D(A_1)$ bezeichnet den Definitionsbereich von A_1.

[5]) $g(-,t)$ ist eine *starke Ableitung* der Funktion $u(-,t)$, wenn für $\Delta t \to 0$

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\big(u(-,t+\Delta t) - u(-,t)\big) - g(-,t)\right\| \to 0.$$

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen legt es nahe zu vermuten, daß

$$v(-,t)=\int_0^t A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

wobei das Integral als Bochnersches Integral gedeutet wird [4], eine Lösung der Gleichung (1′) ist, die die Bedingungen

$$v(-,0)=0,\qquad \frac{dv}{dt}(-,0)=0$$

erfüllt.

Im Einklang mit der Definition einer Funktion eines selbstadjungierten Operators,

$$F(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\,dE(\lambda),\qquad \|F(A)g\|^2=\int|F(\lambda)|^2d\|E(\lambda)g\|^2$$

(vergleiche [9]), ist

$$A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]=\int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty}\lambda^{-1/2}\sin\lambda^{1/2}(t-\tau)\,dE(\lambda).$$

Der Beschränktheit des Operators $A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]$ wegen (die Funktion $\lambda^{-1/2}\sin[(t-\tau)\lambda^{1/2}]$ ist für $\lambda\geqslant\mathfrak{M}_0$ und $t,\tau\in[0,T]$ beschränkt), ist der Ausdruck (2) nur dann sinnvoll, wenn $f(-,\tau)\in B([0,T])$, wobei $B([0,T])$ die Klasse der Funktionen bezeichnet, deren Werte aus $L^{2,r}(\Omega_n)$ sind, und die im Bochnerschen Sinne integrierbar über das Intervall $[0,T]$ sind.

Die Untersuchung, wann der Ausdruck (2) eine zweite starke Ableitung besitzt, führt zu hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer verallgemeinerten Lösung.

2. Der Ausgangspunkt aller weiteren Überlegungen ist das

LEMMA 1. *Das Integral im Sinne von Bochner*

$$\int_0^t F(-,t,\tau)\,d\tau$$

der Funktion $F(-,t,\tau)$ mit Werten aus $L^{2,r}(\Omega_n)$ besitzt eine starke Ableitung nach dem Parameter t, die gleich

$$F(-,t,t)+\int_0^t\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\,d\tau$$

ist, falls $F(-,t,\tau)$ in τ stark stetig [6]) *für $\tau\in[0,T]$ ist,*

[6]) das heißt $\|F(-,t,\tau+\Delta\tau)-F(-,t,\tau)\|\to 0$ für $\Delta\tau\to 0$.

$$\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\in B([0,T])$$

für jedes feste t, und falls

$$\left\|\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right\|\leqslant g(\tau).$$

für jedes τ ist, wobei $g(\tau)$ integrierbar im Sinne von Lebesgue ist.

Beweis. Auf Grund der Eigenschaften eines Bochnerschen Integrals erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\Delta t}\left(\int_0^{t+\Delta t}F(-,t+\Delta t,\tau)\,d\tau-\int_0^t F(-,t,\tau)\right)-\right.\\&\qquad\qquad\left.-F(-,t,t)-\int_0^t\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\,d\tau d\tau\right\|\\&\leqslant\left\|\int_0^t\left(\frac{F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,\tau)}{\Delta t}-\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right)d\tau\right\|+\\&\qquad+\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\big(F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,t)\big)d\tau\right\|\\&\leqslant\int_0^t\left\|\frac{F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,\tau)}{\Delta t}-\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right\|d\tau+\\&\qquad+\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\|F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,t)\|\,d\tau.\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,\tau)}{\Delta t}-\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right\|\\&\qquad\leqslant\sup\left(\left\|\frac{dF}{dt}(-,t+\Theta\Delta t,\tau)-\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right\|\right)\end{aligned}$$

für jedes τ ist (vergleiche [1]), ist also

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,\tau)}{\Delta t}-\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right\|\\&\qquad\leqslant\sup\left(\left\|\frac{dF}{dt}(-,t+\Theta\Delta t,\tau)\right\|+\left\|\frac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right\|\right)\leqslant 2g(\tau).\end{aligned}$$

Wir können also unter dem ersten Integralszeichen zur Grenze übergehen (in Übereinstimmung mit dem Lebesgueschen Satz).

Aus der starken Stetigkeit von $F(-,t,\tau)$ bezüglich τ bei festem t, folgt die gewöhnliche Stetigkeit bezüglich τ, bei festem t und Δt, der Funktion $\|F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,t)\|$ [7]). Da $\|F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,t)\|$ im abgeschloßenen Intervall $[t,t+\Delta t]$ stetig ist, erreicht sie ihre obere Schranke innerhalb dieses Intervalls, zum Beispiel für $\tau=\tau_0$. Deshalb ist

$$\int_t^{t+\Delta t}\|F(-,t+\Delta t,\tau)-F(-,t,t)\|d\tau\leqslant\|F(-,t+\Delta t,\tau_0)-F(-,t,t)\|\int_t^{t+\Delta t}d\tau$$
$$=\Delta t\cdot\|F(-,t+\Delta t,\tau_0)-F(-,t,t)\|.$$

Aber $\|F(-,t+\Delta t,\tau_0)-F(-,t,t)\|\to 0$ für $\Delta t\to 0$ $(t=\tau_0-\Theta\Delta t)$, wegen der starken Stetigkeit von $F(-,t,\tau)$ bezüglich t und τ, w. z. b. w.

Aus Lemma 1 ergibt sich

FOLGERUNG 1. *Das Integral*

$$\int_0^t F(-,t,\tau)\,d\tau$$

(im Sinne von Bochner) besitzt eine zweite starke Ableitung nach t, die gleich

$$2\frac{dF}{dt}(-,t,t)+\int_0^t\frac{d^2F}{dt^2}(-,t,\tau)\,d\tau$$

ist, falls:

1° $F(-,t,\tau)$ *und* $dF(-,t,\tau)/dt$ *stark stetig bezüglich* τ *sind,*

2° $\dfrac{d^2F}{dt^2}(-,t,\tau)\epsilon B([0,T])$ *für jedes* t,

3° $\left\|\dfrac{dF}{dt}(-,t,\tau)\right\|\leqslant g(\tau)$ *und* $\left\|\dfrac{d^2F}{dt^2}(-,t,\tau)\right\|\leqslant g_1(\tau)$, *wobei* $g(\tau)$ *und* $g_1(\tau)$ *nach Lebesgue integrierbare Funktionen sind.*

Bemerkung. Lemma 1 und Folgerung 1 sind auch dann gültig, wenn die Funktionen $F(-,t,\tau)$ und $dF(-,t,\tau)/dt$ für fast alle τ, in τ stark stetigen Funktionen gleich sind (wir können nämlich Funktionen, die unter dem Bochnerschen Integral stehen, durch andere Funktionen ersetzen, die ihnen fast überall gleich sind).

[7]) Aus der starken Stetigkeit von $F(-,\tau)$ folgt die gewöhnliche Stetigkeit von $\|F(-,\tau)\|$ im Intervall $[0,T]$, es ist nämlich $|\|F(-,\tau+\Delta\tau)\|-\|F(-,\tau)\||\leqslant\|F(-,\tau+\Delta\tau)-F(-,\tau)\|$.

Unter Benutzung von Lemma 1 wollen wir die Existenz der zweiten starken Ableitung des Vektors

$$A_1^{p-1}v(t)=A_1^{p-1}\int_0^t A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau$$
$$=\int_0^t A_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau$$

(da das Bochnersche Integral mit dem selbstadjungierten Operator kommutiert), untersuchen, welcher in den weiteren Überlegungen vorkommt. Zu diesem Zweck beweisen wir die folgenden Lemmata:

LEMMA 2. *Die Funktion*

$$A_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau) \tag{3}$$

genügt den Bedingungen 2° *und* 3°, *falls*

$$f(-,\tau)\epsilon D(A_1^{p-1/2}),\qquad A_1^{p-1/2}f(-,\tau)\epsilon B([0,T])$$

und $A_1^{p-1}f(-,\tau)$ *in* τ *stark stetig ist.*

Beweis. Aus den Eigenschaften des Bochnerschen Integrals folgt, daß die Funktion (3) zu $B([0,T])$ gehört, ist doch wegen der Beschränktheit des Operators $A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]$

$$A_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)=A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]A_1^{p-1}f(-,\tau)\epsilon B([0,T]),$$

falls nur $A_1^{p-1}f(-,\tau)\epsilon B([0,T])$. Die Angehörigkeit von $A_1^{p-1}f(-,\tau)$ zu $B([0,T])$ folgt aus der in τ starken Stetigkeit von $A_1^{p-1}f(-,\tau)$. Da

$$\frac{d}{dt}\big(A_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\big)=\frac{d}{dt}\big(\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]A_1^{p-3/2}f(-,\tau)\big)$$
$$=\cos[(t-\tau)A_1^{1/2}]A_1^{p-1}f(-,\tau),$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\big(A_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\big)=-\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]A_1^{p-1/2}f(-,\tau),$$

also wegen der Beschränktheit der Operatoren $\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]$, $\cos[(t-\tau)A_1^{1/2}]$ ist

$$\frac{d^2}{dt^2}\big(A_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\big)\epsilon B([0,T]),$$

$$\left\|\frac{d^2}{dt^2}\big(A_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\big)\right\|\leqslant M\|A_1^{p-1/2}f(-,\tau)\|$$

sowie

$$\left\| \frac{d}{dt} \left(A_1^{p-3/2} \sin[(t-\tau) A_1^{1/2}] f(-,\tau) \right) \right\| \leqslant M_1 \| A_1^{p-1} f(-,\tau) \|,$$

wobei M und M_1 reelle und positive Konstanten bezeichnen.

LEMMA 3. *Die Funktion* (3) *genügt* 1°, *falls* $f(-,t) \in D(A_1^{p-1})$ *und* $A_1^{p-1} f(-,\tau)$ *stark stetig für fast alle* τ *ist.*

Beweis. In der Tat:

$$\|\cos[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] A_1^{p-1} f(-,\tau+\Delta\tau) - \cos[(t-\tau) A_1^{1/2}] A_1^{p-1} f(-,\tau)\|$$
$$\leqslant \|(\cos[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] - \cos[(t-\tau) A_1^{1/2}]) A_1^{p-1} f(-,\tau)\| +$$
$$+ \|\cos[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] A_1^{p-1} (f(-,\tau+\Delta\tau) - f(-,\tau))\|$$
$$\leqslant \|(\cos[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] - \cos[(t-\tau) A_1^{1/2}]) A_1^{p-1} f(-,\tau)\| +$$
$$+ \|A_1^{p-1} (f(-,\tau+\Delta\tau) - f(-,\tau))\|.$$

Aber

$$\|(\cos[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] - \cos[(t-\tau) A_1^{1/2}]) A_1^{p-1} f(-,\tau)\|^2$$
$$= 4 \int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \lambda^{2p-2} \sin^2 \lambda^{1/2} \left(t - \tau - \frac{\Delta\tau}{2} \right) \sin^2 \frac{\lambda^{1/2} \Delta\tau}{2} \, d\|E(\lambda) f(-,\tau)\|^2$$
$$\leqslant \int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \lambda^{2p-2} \sin^2 \frac{\lambda^{1/2} \Delta\tau}{2} \, d\|E(\lambda) f(-,\tau)\|^2.$$

Das letzte Integral strebt für $\Delta\tau \to 0$ gegen Null, falls

$$\int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \lambda^{2p-2} d\|E(\lambda) f(-,\tau)\|^2 = \|A_1^{p-1} f(-,\tau)\|^2 < \infty,$$

beziehungsweise, falls $f(-,\tau) \in D(A_1^{p-1})$ (gemäß dem Satz von Helly),

$$\frac{d}{dt} \left(A_1^{p-3/2} \sin[(t-\tau) A_1^{1/2}] f(-,\tau) \right)$$

ist also in τ stark stetig, wenn $f(-,\tau) \in D(A_1^{p-1})$, und $A_1^{p-1} f(-,\tau)$ in τ stark stetig, für fast alle τ, ist. Unter denselben Voraussetzungen ist der Vektor (3) ebenfalls stark stetig, es ist nämlich analog zum obigen:

$$S_{\Delta\tau} = \|\sin[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] A_1^{p-3/2} f(-,\tau+\Delta\tau) -$$
$$- \sin[(t-\tau) A_1^{1/2}] A_1^{p-3/2} f(-,\tau)\|$$
$$\leqslant \|(\sin[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] - \sin[(t-\tau) A_1^{1/2}]) A_1^{p-3/2} f(-,\tau)\| +$$
$$+ \|A_1^{1/2} \sin[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] A_1^{p-1} (f(-,\tau+\Delta\tau) - f(-,\tau))\|$$

$$\leqslant \|(\sin[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] - \sin[(t-\tau) A_1^{1/2}]) A_1^{p-3/2} f(-,\tau)\| +$$
$$+ M \|A_1^{p-1} (f(-,\tau+\Delta\tau) - f(-,\tau))\|,$$

$$\|(\sin[(t-\tau-\Delta\tau) A_1^{1/2}] - \sin[(t-\tau) A_1^{1/2}]) A_1^{p-3/2} f(-,\tau)\|^2$$
$$= 2 \int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \lambda^{2p-3} (\sin \lambda^{1/2} (t-\tau-\Delta\tau) - \sin \lambda^{1/2} (t-\tau))^2 d\|E(\lambda) f(-,\tau)\|^2$$
$$= (\Delta\tau)^2 \int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \lambda^{2p-2} \cos^2 \lambda^{1/2} (t-\tau-\Theta\Delta\tau) \, d\|E(\lambda) f(-,\tau)\|^2$$
$$\leqslant M' (\Delta\tau)^2 \|A_1^{p-1} f(-,\tau)\|^2,$$

$S_{\Delta\tau}$ strebt also gegen Null für $\Delta\tau \to 0$. Folglich ist die Funktion (3) stark stetig in τ für fast alle τ, wenn $f(-,\tau) \in D(A_1^{p-1})$ und wenn $A_1^{p-1} f(-,\tau)$ stark stetig in τ für fast alle τ ist, w. z. b. w.

Für $p = 1$ erhalten wir auf Grund der Lemmata 1, 2 und 3 die

FOLGERUNG 2. *Das Integral* (2) *besitzt eine zweite starke Ableitung, die sich nach der in Lemma* 1 *angegebenen Formel berechnen läßt, wenn* $A_1^{1/2} f(-,\tau) \in B([0,T])$ *und* $f(-,\tau)$ *stark stetig für fast alle* τ *ist.*

Wir können jetzt beweisen

SATZ 1. *Wenn* A *ein formal selbstadjungiertes, von unten halbbeschränktes, elliptisches System von* r *Differentialoperatoren der Ordnung* σ *ist, und* A_1 *dessen beliebige von unten halbbeschränkte, selbstadjungierte Erweiterung, wobei*

$$\varphi \in D(A_1), \qquad \psi \in D(A_1^{1/2}), \qquad f(-,\tau) \in D(A_1^{1/2})$$

für jedes $\tau \in [0,T]$, *während* $f(-,\tau)$ *für fast alle* τ *gleich einer in* τ *stark stetigen Funktion ist, und* $A_1^{1/2} f(-,\tau)$ *eine Funktion mit Werten aus* $L^{2,r}(\Omega_n)$ *ist, die über das Intervall* $[0,T]$ *integrierbar im Sinne von Bochner ist, so hat das gemischte Problem für das System* 1 *unter den Bedingungen* (P) *und* (B) *die verallgemeinerte Lösung*

$$u(x,t) = \underset{L^{2,r}(\Omega_n)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(\lambda)} \cos(\lambda^{1/2} t) (F\varphi)_k(\lambda) e_k(\lambda,x) \, d\mu(\lambda) + \tag{4}$$
$$+ \underset{L^{2,r}(\Omega_n)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(\lambda)} \lambda^{-1/2} \sin(\lambda^{1/2} t) (F\psi)_k(\lambda) e_k(\lambda,x) \, d\mu(\lambda) +$$
$$+ \int_0^t \Big\{ \underset{L^{2,r}(\Omega_n)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_{\mathfrak{M}_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(\lambda)} \lambda^{-1/2} \sin[(t-\tau) \lambda^{1/2}] (Ff)_k(\lambda,\tau) e_k(\lambda,x) \, d\mu(\lambda) \Big\} d\tau,$$

wobei
$$(F\varphi)_k = \underset{L^2(\mu)}{\mathrm{L.\,i.\,m.}} \int_{\Omega_n} \overline{e_k(\lambda,x)} \varphi(x) \, dx;$$

hierbei bezeichnen $e_k(\lambda, x)$ die Eigenfunktionen des Operators A, die dem Eigenwert λ entsprechen; μ ist ein positives auf dem Spektrum von A_1 konzentriertes Maß. Die Funktion $N(\lambda)$ ist μ-meßbar and kann die Werte $1, 2, \ldots, \infty$ annehmen.

Beweis. Laut Folgerung 2 existiert $d^2v(-,t)/dt^2$, wobei

$$\frac{dv(-,t)}{dt} = \int_0^t \cos[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{d^2v(-,t)}{dt^2} = f(-,t) - \int_0^t A_1^{1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau.$$

Da

$$A_1 v(-,t) = A_1\int_0^t A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t A_1^{1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau,$$

ist folglich $d^2v(-,t)/dt^2 = -A_1v(-,t)+f(-,t)$.

Leicht sieht man ein, daß $v(-,0) = 0$ und $dv(-,0)/dt = 0$. Der Linearität der Gleichung (1′) wegen, wird die Lösung dieser Gleichung, die die Bedingungen (P′) erfüllt, durch die Summe der Lösung der homogenen Gleichung mit den Bedingungen (P′) (vergleiche [6]) und des Integrals (2) dargestellt, also

$$(4') \qquad u = \cos(tA_1^{1/2})\varphi + A_1^{-1/2}\sin(tA_1^{1/2})\psi + \int_0^t A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau.$$

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse, die in der Arbeit von Gårding [2] enthalten sind, eine Funktion eines selbstadjungierten Operators mittels verallgemeinerten Fourierschen Integralen dargestellt wird, erhalten wir daraus den Ausdruck (4), w. z. b. w.

Die Eindeutigkeit der hier verallgemeinerten Lösung folgt aus der Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung des homogenen Systems (vgl. [6]). Hier weisen wir also nur die Korrektheit des betrachteten operationellen Problems nach, das heißt wir beweisen

SATZ 2. *$u_1(-,t)$ sei die Lösung der Gleichung*

$$\frac{d^2u(-,t)}{dt^2} = -A_1u(-,t)+f_1(-,t),$$

die die Anfangsbedingungen $u(-,0) = \varphi_1$, $du(-,0)/dt = \psi_1$ erfüllt, und $u_2(-,t)$ sei die Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2u(-,t)}{dt^2} = -A_1u(-,t)+f_2(-,t),$$

die die Anfangsbedingungen $u(-,0) = \varphi_2$, $du(-,0)/dt = \psi_2$ erfüllt. Dann existiert eine Konstante M derart, daß

$$\|u_1(-,t)-u_2(-,t)\| \leqslant M\big(\|\varphi_1-\varphi_2\|+\|\psi_1-\psi_2\|+\sup_{t\in[0,T]}\|f_1(-,t)-f_2(-,t)\|\big).$$

Beweis. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des operationellen Problems ist

$$u_1(-,t)$$
$$= \cos(tA_1^{1/2})\varphi_1 + A_1^{-1/2}\sin(tA_1^{1/2})\psi_1 + \int_0^t A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f_1(-,\tau)\,d\tau,$$

und analog

$$u_2(-,t)$$
$$= \cos(tA_1^{1/2})\varphi_2 + A_1^{-1/2}\sin(tA_1^{1/2})\psi_2 + \int_0^t A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f_2(-,\tau)\,d\tau,$$

folglich

$$\|u_1(-,t)-u_2(-,t)\| \leqslant \|\cos(tA_1^{1/2})(\varphi_1-\varphi_2)\| + \|A_1^{-1/2}\sin(tA_1^{1/2})(\psi_1-\psi_2)\| +$$
$$+\Big\|\int_0^t A_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]\big(f_1(-,\tau)-f_2(-,\tau)\big)\,d\tau\Big\|$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda\geqslant\mathfrak{M}_0}|\cos\lambda^{1/2}t|\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\| + \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda\geqslant\mathfrak{M}_0}|\lambda^{-1/2}\sin\lambda^{1/2}t|\cdot\|\psi_1-\psi_2\| +$$
$$+ t\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda\geqslant\mathfrak{M}_0}|\lambda^{-1/2}\sin\lambda^{1/2}(t-\tau)|\sup_{t\in[0,T]}\|f_1(-,t)-f_2(-,t)\|.$$

Wenn wir durch M die größte der Zahlen

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda\geqslant\mathfrak{M}_0}|\cos\lambda^{1/2}t|, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda\geqslant\mathfrak{M}_0}|\lambda^{-1/2}\sin\lambda^{1/2}t|, \quad t\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda\geqslant\mathfrak{M}_0}|\lambda^{-1/2}\sin\lambda^{1/2}(t-\tau)|$$

bezeichnen, so erhalten wir

$$\|u_1(-,t)-u_2(-,t)\| \leqslant M\big(\|\varphi_1-\varphi_2\|+\|\psi_1-\psi_2\|+\sup_{t\in[0,T]}\|f_1(-,t)-f_2(-,t)\|\big),$$

w. z. b. w.

2. Unschwer erkennt man, daß die Frage nach der Existenz einer klassischen Lösung zur Frage nach der Differenzierbarkeit der verallgemeinerten Lösung führt (genau ausgedrückt, zur Frage nach der Existenz eines differenzierbaren Repräsentanten). Diese Frage wollen wir lösen, indem wir uns die sinnreiche Methode, die von K. Maurin in [6] angewandt wurde, zum Muster nehmen. Diese Methode besteht darin, daß man den fundamentalen Satz über die schwachen Lösungen von elliptischen Systemen (vgl. [5]) benutzt. Nach diesem Satz kann man die verallgemeinerte Lösung, — die zum Definitionsbereich des Operators A_1^p gehört, also die für $f(-,t)\in D(A_1^{p-1})$ eine Lösung der Gleichung

$$A_1^{p-1}\frac{d^2u}{dt^2}-A_1^{p-1}f(-,t)=-A_1^pu$$

ist (die umsomehr also eine schwache Lösung ist), — lokal folgendermaßen darstellen:

$$u(x,t)=\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{R}(z,x)u(z,t)\,dz+\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{W}(z,x)(A_1^pu)(z,t)\,dz,$$

wobei $K(x_0,\varepsilon)$ eine Kugel bezeichnet, die in Ω_n enthalten ist, und den Mittelpunkt x_0 und den Radius ε hat; $\mathcal{R}(z,x)$ sowie $\mathcal{W}(z,x)$ sind Funktionsmatrizen mit r Zeilen und r Spalten, die für $(x,z)\in K(x_0,\varepsilon)\times\times K(x_0,\varepsilon)$ bestimmt sind und deren Elemente für $x\neq z$ regulär in $K(x_0,\varepsilon)\times K(x_0,\varepsilon)$ sind. Auf Grund desselben Satzes setzen wir $p=[n/2\sigma]+2$ und erhalten $u\in C^\sigma(\Omega_n)$. Da

$$\begin{aligned}A_1^pu(-,t)&=A_1^p\cos(tA_1^{1/2})\varphi+A_1^{p-1/2}\sin(tA_1^{1/2})\psi+\\&\quad+A_1^p\int\limits_0^tA_1^{-1/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau\\&=\cos(tA_1^{1/2})A_1^p\varphi+\sin(tA_1^{1/2})A_1^{p-1/2}\psi+\\&\quad+\int\limits_0^t\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]A_1^{p-1/2}f(-,\tau)\,d\tau\in L^{2,r}(\Omega_n)\end{aligned}$$

bei $\varphi\in D(A_1^p)$, $\psi\in D(A_1^{p-1/2})$, $f(-,\tau)\in D(A_1^{p-1/2})$ für jedes $\tau\in[0,T]$, sowie $A_1^{p-1/2}f(-,\tau)\in B([0,T])$; folglich gilt unter den obigen Bedingungen $u(-,t)\in C^\sigma(\Omega_n)$ (nach Korrektur auf einer Menge vom Maße Null).

Wir zeigen, daß *ein σ-fach stetig in Ω_n differenzierbarer Repräsentant einer verallgemeinerten Lösung gleichzeitig zweifach stetig differenzierbar nach t ist.* Zu diesem Zweck bemerken wir, daß man wegen $u(-,t)\in D(A_1^p)\subset D(A_1^{p-1})$ die verallgemeinerte Lösung $u(x,t)$ lokal auch folgendermaßen darstellen kann:

$$u(x,t)=\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{R}_1(z,x)u(z,t)\,dz+\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{W}_1(z,x)(A_1^{p-1}u)(z,t)\,dz.$$

Es folgt also auf Grund der Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung

$$\begin{aligned}&\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{R}_1(x,z)u(z,t)\,dz+\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{W}_1(x,z)(A_1^{p-1}u)(z,t)\,dz\\&=\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{R}(x,z)u(z,t)\,dz+\int\limits_{K(x_0,\varepsilon)}\mathcal{W}(x,z)(A_1^pu)(z,t)\,dz\end{aligned}\tag{5}$$

für alle t und fast alle x.

Beide Seiten der letzten Gleichung sind aber stetige Funktionen bezüglich x, die Gleichung (5) besteht also identisch für alle x und t. Da die Elemente der Matrizen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{W}_1$ zu $L^2(K(x_0,\varepsilon))$ gehören, ist die linke Seite der Identität zweifach stetig differenzierbar nach t (für jedes $t\in[0,T]$), falls nur $A_1^{p-1}u(-,t)$ eine zweite starke Ableitung besitzt. Dies ist selbstverständlich dann der Fall, wenn:

1° $A_1^{p-1}\cos(tA_1^{1/2})\varphi=\cos(tA_1^{1/2})A_1^{p-1}\varphi$, $A_1^{p-3/2}\sin(tA_1^{1/2})\psi=\sin(tA_1^{1/2})A_1^{p-3/2}\psi$ eine zweite stetige Ableitung besitzen, das heißt, falls

$$\frac{d^2}{dt^2}\big(\cos(tA_1^{1/2})A_1^{p-1}\varphi\big)=-\cos(tA_1^{1/2})A_1^p\varphi\in L^{2,r}(\Omega_n)$$

und

$$\frac{d^2}{dt}\big(\sin(tA_1^{1/2})A_1^{p-3/2}\psi\big)=-\sin(tA_1^{1/2})A_1^{p-1/2}\psi\in L^{2,r}(\Omega_n);$$

leicht bestätigt man, daß das dann der Fall ist, wenn $\varphi\in D(A_1^p)$ und $\psi\in D(A_1^{p-1/2})$;

2° das Integral

$$\int\limits_0^tA_1^{p-3/2}\sin[(t-\tau)A_1^{1/2}]f(-,\tau)\,d\tau$$

eine zweite starke Ableitung besitzt, was (auf Grund von Folgerung 2) dann eintritt, wenn $f(-,\tau)\in D(A_1^{p-1/2})$, $A_1^{p-1/2}f(-,\tau)\in B([0,T])$ und $A_1^{p-1}f(-,\tau)$ für fast alle τ gleich einer in τ stark stetigen Funktion ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist, wie wir wissen, die rechte Seite der Identität σ-fach stetig differenzierbar nach x.

Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Satz 3. *Die verallgemeinerte Lösung* (4) *ist eine klassische Lösung, wenn bei $p=[n/2\sigma]+2$,*

$$\varphi\in D(A_1^p),\qquad\psi\in D(A_1^{p-1/2}),\qquad f(-,\tau)\in D(A_1^{p-1/2})$$

für fast alle $\tau\in[0,T]$, $A_1^{p-1/2}f(-,\tau)\in B([0,T])$, und $A_1^{p-1}f(-,\tau)$ für fast alle τ gleich einer in τ stark stetigen Funktion ist.

Es erhebt sich die Frage, ob die auf diese Weise erhaltene klassische Lösung die einzige Lösung des betrachteten Problems ist. Unschwer bemerkt man, daß jede klassische Lösung, die eine zweite Ableitung nach t besitzt, welche im Gebiet Ω_n gleichmäßig stetig ist, der Repräsentant einer verallgemeinerten Lösung ist, also ist wegen der Eindeutigkeit einer verallgemeinerten Lösung, die klassische Lösung, die diese zusätzliche Voraussetzung erfüllt, eindeutig bestimmt. *Damit ist die klassische Lösung des gemischten Problems im kompakten Gebiet Ω_n eindeutig.*

3. Wie wir in der Einführung erwähnten, hat O. A. Ladyženskaja [4] das gemischte Problem für die hyperbolische Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -Au(x,t)+f(x,t)$$

$$\equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right)+a(x)u(x,t)+f(x,t)$$

(für einen positiv-definiten[8]) Operator A, sowie eine Randbedingung von Dirichletschen und Neumannschen Typus in einem *begrenzten* Gebiet) gelöst. Sie untersuchte mittels der Methode der Sobolewschen Räume die Konvergenz der verallgemeinerten Fourierschen Reihen und drückte die hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer klassischen Lösung in der Sprache der Sobolewschen Räume aus. Da sich unsere Bedingungen auf den Begriff einer selbstadjungierten Operatorenerweiterung und deren Iterationen gründen, muß man, um die Bedingungen beider Typen vergleichen zu können, den Zusammenhang zwischen der selbstadjungierten Erweiterung des Operators A_1 und dem Operator einer Sobolewschen verallgemeinerten Ableitung untersuchen. Auf die größten Schwierigkeiten stößt man, falls man die Bedingungen, die die Funtion f betreffen, miteinander vergleichen will, für diesen Fall muß man nämlich auch die Integrierbarkeit im Sinne von Bochner untersuchen.

Für die Anfangsfunktionen φ und ψ erhielt O. A. Ladyženskaja die folgenden Bedingungen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\varphi, A\varphi, \ldots, A^{[(\mathcal{K}-1)/2]}\varphi \in \mathring{D}(\Omega_n); \quad \varphi \in W_2^{\mathcal{K}}(\Omega_n);\\ &\psi, A\psi, \ldots, A^{[\mathcal{K}/2]-1}\psi \in \mathring{D}(\Omega_n); \quad \psi \in W_2^{\mathcal{K}-1}(\Omega_n); \end{aligned}$$

dabei ist $\mathcal{K} = [n/2]+3$, $W_2^{\mathcal{K}}(\Omega_n)$ bezeichnet den Raum der Funktionen, die in Ω_n verallgemeinerte Ableitungen, bis zur Ordnung k einschließlich, besitzen, die Metrik dieses Raumes ist folgendermaßen definiert:

$$\|g\|_{W_2^k} = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_{\Omega_n}|D^\alpha g|^2 d\Omega_n;$$

$\mathring{D}(\Omega_n)$ ist die Vervollständigung in der Metrik von $W_2^1(\Omega_0)$ der Menge derjenigen differenzierbaren Funktionen, die kompakte Träger in Ω_n haben, also ist $D(\Omega_n) = \mathring{D}(A_2^{1/2})$ (vgl. [7]). Von den Koeffizienten dieser Gleichung, nahm Ladyženskaja an, daß $a_{ij}\in C^{\mathcal{K}-1}(\Omega_n)$ und $a \in C^{\mathcal{K}-2}(\Omega_n)$.

[8]) A ist *positiv-definit*, wenn $(Au, u) > m(u, u)$ für $u \in D(A_0)$ ist, wobei m eine positive Konstante ist.

Um die Bedingungen (6) mit den Bedingungen, die in Satz 3 angegeben sind,

$$(7)\qquad \varphi\in D(A_1^p), \quad \psi \in D(A_1^{p-1/2}) \quad \text{für} \quad p = [n/4]+2,$$

zu vergleichen, zeigen wir, da für gewisse Dimensionen des Raumes E_n die Bedingungen (7) nicht weniger allgemein als die Bedingungen (6) sind (das heißt, die Funktionen, die die Bedingungen (6) erfüllen, genügen auch den Bedingungen (7)).

Vor allem bemerken wir, daß falls $g\in D(A)$, dann $g\in D(A^*)$, beziehungsweise, daß falls $g\in D(A_1^{1/2})$, dann $g \in D(A_1) = D(A_1^{1/2})\cap D(A^*)$; also folgt aus den Bedingungen

$$g, Ag, \ldots, A^l g \in \mathring{D}(A_1^{1/2}) = D(\Omega_n),$$

daß

$$Ag = A_1 g \in D(A_1), \quad A^2 g = A_1^2 g\in D(A_1), \quad \ldots, \quad A^j g = A_1^j g \in D(A_1^{1/2}),$$

oder $g\in D(A_1^{j+1/2})$.

Aus den Bedingungen (6) folgt damit, daß

$$\varphi\in D(A_1^{[(\mathcal{K}-1)/2]+1/2}), \quad \psi \in D(A_1^{[\mathcal{K}/2]-1/2}).$$

Für den Fall, daß $\mathcal{K}$ eine gerade[9]) Zahl ist, erhalten wir daraus die Bedingungen $\varphi\in D(A_1^{k/2-1/2})$, $\psi\in D(A_1^{k/2-1/2})$, oder (dies deswegen, weil $\mathcal{K} = [n/2]+3$): φ, $\psi\in D(A_1^{[n/2]/2+1})$, $\mathcal{K}$ ist aber dann eine gerade Zahl, wenn $[n/2] = 2l+1$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ Daraus folgt: $2l+1 \leqslant n/2 < 2l+2$ oder $4l+2\leqslant n < 4l+4$. Somit ist $\mathcal{K}$ für $n = 4l+2$ oder $n = 4l+3$, wobei $l = 0, 1, 2, \ldots$, eine gerade Zahl. Leicht bestätigt man für diese n $\frac{1}{2}[n/2] = [n/4]+\frac{1}{2}$. Aus den Bedingungen (6) folgt damit, daß φ und ψ den Bedingungen

$$(6')\qquad \begin{aligned} &\varphi\in D(A_1^{p-1/2}), \quad \varphi\in W_2^{2p}(\Omega_n),\\ &\psi\in D(A_1^{p-1/2}), \quad \psi\in W_2^{2p-1}(\Omega_n) \end{aligned}$$

genügen.

Die Bedingungen von (6′), *die die Funktion* ψ *betreffen, sind identisch mit der Bedingung* (7).

Um die Bedingungen (6′) und (7), die die Funktion φ betreffen, miteinander vergleichen zu können, müssen wir die bis jetzt noch nicht benutzte Bedingung $\varphi\in W_2^{2p}$ in Erwägung ziehen. Das Ergebnis dieses Vergleichs der obigen Bedingungen erhalten wir als Folgerung aus dem folgenden

[9]) Für den Fall, daß $\mathcal{K}$ ungerade ist, erhalten wir: $\varphi\in D(A_1^{[n/2]/2+3/2})$, $\psi\in D_1(A^{[n/2]/2+3/2})$, und daraus: $\varphi\in D(A^{p-1/2})$, $\psi\in D(A_1^{p-3/2})$, $\varphi\in W_2^{2p-1}(\Omega_n)$, $\psi\in W_2^{2p-2}(\Omega_n)$.

Lemma 4. *Gilt für ein beliebiges natürliches p $a_{ij} \in C^{2p-1}(\Omega_n)$, $a \in C^{2p-2}(\Omega_n)$, so folgt aus den Bedingungen $\varphi \in W_2^{2p}$, $A_1^{p-1}\varphi \in D(A_1^{1/2})$, daß $\varphi \in D(A_1^p)$ und*

$$A_1^p \varphi = \Big[\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\bar{a}_{ij}\partial_j)+\bar{a}\Big]^p \varphi,$$

wobei ∂_i die Sobolewsche Ableitung nach x_i (im Gebiet Ω_n) bezeichnet.

Den Beweis führen wir mittels der Induktion.

So weisen wir vor allem nach, daß das Lemma für $p = 1$ erfüllt ist. Da φ die ersten Sobolewschen Ableitungen besitzt, und da a_{ij} und a differenzierbar [10]) sind, haben wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_j}\right), \varphi\right) = -\left(a_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_j}, \partial_i \varphi\right) \tag{8}$$

für jede Funktion $F \in D(A_0)$. Wegen der Existenz der zweiten Sobolewschen Ableitungen der Funktion φ, besteht

$$\left(a_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_j}, \partial_i\varphi\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}, \bar{a}_{ij}\partial_i\varphi\right) = -\big(F, \partial_j(\bar{a}_{ij}\partial_i\varphi)\big). \tag{9}$$

Falls wir (8) von (9) beiderseits voneinander subtrahieren und nach i und j summieren, erhalten wir

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), \varphi\right) = \left(F, \sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(\bar{a}_{ij}\partial_i\varphi)\right).$$

Addiert man zu beiden Seiten $(aF, \varphi) = (F, \bar{a}\varphi)$, so ergibt sich

$$(AF, \varphi) = (F, h), \quad \text{wo} \quad h = \sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(\bar{a}_{ij}\partial_i\varphi)+\bar{a}\varphi, \tag{10}$$

oder $\varphi \in D(A^*)$, wobei

$$A^*\varphi = \sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(\bar{a}_{ij}\partial_i\varphi)+\bar{a}\varphi.$$

Da $\varphi \in D(A_1^{1/2})$, ist also $\varphi \in D(A_1)$ und $A^*\varphi = A_1\varphi$.

Wir zeigen nun: daraus, daß das Lemma für $p = k-1$ besteht, folgt, daß es auch für $p = k$ richtig ist.

[10]) Eigentlich benutzen wir hier keine metrischen Eigenschaften von $W_2^{2p}(\Omega_n)$.

Wie wir vor allem bemerken, folgt, wegen $\varphi \in W_2^{2k}$, aus der Voraussetzung

$$A_1^{k-1}\varphi = \Big[\sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(\bar{a}_{ij}\partial_i\varphi)+\bar{a}\varphi\Big]^{k-1} \qquad \big(\bar{a}_{ij} \in C^{2k-1}(\Omega_n),\ \bar{a} \in C^{2k-2}(\Omega_n)\big)$$

daß $A_1^{k-1}\varphi \in W_2^2(\Omega_n)$.

Falls wir also in der vorherigen Überlegung φ durch $A_1^{k-1}\varphi$ ersetzen, erhalten wir die These.

Das Lemma 4 ist für jedes natürliche p richtig, also insbesondere für $p = [n/4]+2$. Damit ist bewiesen, daß eine Funktion, die die Bedingungen (6) erfüllt, auch die Bedingung (7) erfüllt.

Um zum Vergleich der Bedingungen beider Typen für die Funktion f übergehen zu können, beachten wir vor allem, daß für einen positiv-definiten Operator A, die in Satz 3 angegebenen Bedingungen

$A_1^{p-1/2}f(-,\tau) \in B([0,T])$,

$A_1^{p-1}f(-,\tau)$ ist stark stetig bezüglich τ (für fast alle τ),

die Existenz einer verallgemeinerten Lösung garantieren, das heißt sie garantieren die Erfüllung der Bedingungen

$A_1^{1/2}f(-,\tau)$ $B([0,T])$, $f(-,\tau)$ ist stark stetig in τ (für fast alle τ $[0,T]$).

Aus der Stetigkeit von $A_1^{p-1}f(-,\tau)$ folgt nämlich die Stetigkeit (desto mehr also die Integrierbarkeit im Sinne von Bochner) von $A_1^{s/2}f(-,\tau)$ für jedes $s < 2(p-1)$, da doch

$$\begin{aligned}\|A_1^j g\|^2 &= (A_1^j g, A_1^j g) = (A_1^{1/2}A_1^{j-1/2}g, A_1^{1/2}A_1^{j-1/2}g)\\ &= (A_1 A_1^{j-1/2}g, A_1^{j-1/2}g) \geqslant \mathcal{M}_0(A_1^{j-1/2}g, A_1^{j-1/2}g) = \mathcal{M}_0\|A^{j-1/2}g\|^2\\ &\geqslant \ldots \geqslant \mathcal{M}_0^{2j}\|g\|^2, \quad \text{wobei} \quad \mathcal{M}_0 > 0.\end{aligned}$$

Falls wir $g = f(-,\tau+\Delta\tau)-f(-,\tau)$ setzen, erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}&\|A_1^{p-1}f(-,\tau+\Delta\tau)-A_1^{p-1}f(-,\tau)\|\\ &\geqslant M^{2p+3}\|A_1^{1/2}f(-,\tau+\Delta\tau)-f(-,\tau)\| \geqslant M^{2p-2}\|f(-,\tau+\Delta\tau)-f(-,\tau)\|.\end{aligned}$$

Die von O. A. Ladyženskaja angegebenen Bedingungen, die die Funktion f betreffen, haben die Form

$$f, Af, \ldots, A^{[\mathcal{K}/2]-1}f \in \mathring{D}_1(Q), \qquad f \in W_2^{\mathcal{K}-1}(Q), \tag{11}$$

wobei $\mathcal{K} = [n/2]+3$, $Q = \Omega_n \times [0,T]$, $\mathring{D}_1(Q)$ ist die Vervollständigung, in der Metrik von $W_2^1(Q)$, der Menge von Funktionen, die in Q stetige Ableitungen besitzen und die in der Nähe der Seitenfläche des Zylinders verschwinden, der das Gebiet Q begrenzt (diese Funktionsmenge wollen wir wie Ladyženskaja, durch $D_1(Q)$ bezeichnen).

Im Falle von geraden $\mathcal{K}$, das heißt, für $n = 4l+2$ oder $n = 4l+3$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ (hier wollen wir uns nur auf diesen Fall beschränken) können wir die Bedingungen (11) in der folgenden Form schreiben:

$$(11') \qquad f, Af, \ldots, A^{p-1}f \in \mathring{D}_1(Q); \qquad f \in W_2^{2p-1}(Q).$$

Zwecks Vergleich der Bedingungen (10) und (11) beweisen wir vor allem die folgenden Lemmata:

LEMMA 5. *Wenn F im Gebiet Q die ersten Sobolewschen Ableitungen besitzt, welche zu $L^2(Q)$ gehören, — wir wollen sie durch $\partial_{i,Q}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ bezeichnen, wobei $\partial_{i,Q}$ die Ableitung nach x_i bezeichnet, während $x_{n+1} = \tau$ — so besitzt $F(-, \tau)$ für fast alle τ Sobolewsche Ableitungen im Gebiet Ω_n, und $\partial_{i,\Omega_n}F(x, \tau) = \partial_{i,Q}F(x, \tau)$ für fast alle τ, bei $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt für jede Funktion $g \in C_0^1(Q)$:

$$\int_Q \left(F\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\partial_{i,Q}F\right)dQ = \int_0^T \int_{\Omega_n} \left(F\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\partial_{i,Q}F\right)dx\cdot d\tau = 0.$$

Es sei $g(x, \tau) = g_1(x)\cdot g_2(\tau)$, folglich ist

$$\int_0^T g_2 \int_{\Omega_n} \left(F\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1\partial_{i,Q}F\right)dx\cdot d\tau = 0$$

für jede Funktion $g_1 \in C_0^1(\Omega_n)$ sowie $g_2 \in C_0^1([0, T])$. Da die Menge $C_0^1([0, T])$ dicht in $L^2([0, T]$ ist, und

$$\int_{\Omega_n} \left(F\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1\partial_{i,Q}F\right)dx \in L^2([0, T]),$$

(da doch

$$\int_0^T \left\{\int_{\Omega_n} \left(F\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1\partial_{i,Q}F\right)dx\right\}^2 d\tau \leqslant T\int_0^T \int_{\Omega_n} \left(F\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1\partial_{i,Q}F\right)^2 dx\cdot d\tau$$

wegen $\partial_{i,Q}F \in L^2(Q)$), ist also

$$\int_{\Omega_n} \left(F\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1\partial_{i,Q}F\right)dx = 0,$$

für fast alle τ, bei einer beliebigen Funktion $g_1 \in C_0^1(\Omega_n)$ (für $i = 1, 2, \ldots, n$). Damit besitzt $F(-, \tau)$ im Gebiet Ω_n für fast alle τ Sobolewsche Ableitungen, wobei $\partial_{i,\Omega_n}F(x, \tau) = \partial_{i,Q}F(x, \tau)$ für fast alle τ ist; folglich also $F(-, \tau) \in W_2^1(\Omega_n)$, w. w. z. b.

LEMMA 6. *Wenn $F \in \mathring{D}_1(Q)$, so $F(-, \tau) \in D(A_1^{1/2})$, wobei eine Funktionsfolge $F_m \in \mathring{D}_1(Q)$ derart existiert, daß $A_1^{1/2}F_m(-, \tau)$ für fast alle τ gegen $A_1^{1/2}F(-, \tau)$ konvergiert (und zwar im Sinne von $L^2(\Omega_n)$).*

Beweis. Aus der Definition von $\mathring{D}_1(Q)$ folgt, daß eine Funktionsfolge $F_m(x, \tau) \in D_1(Q)$ existiert, die in der Metrik von $W_2^1(Q)$ gegen $F(x, \tau)$ konvergiert, das heißt eine solche, daß

$$(12) \qquad \int_Q \left\{\sum_{l=0}^n |\partial_{l,Q}[F(x, \tau) - F_m(x, \tau)]|^2 + |\partial_{n+1,Q}[F(x, \tau) - F_m(x, \tau)]|^2\right\}dQ$$

für $m \to \infty$ gegen Null strebt.

Aus der Konvergenz des Integrals (12) gegen Null folgt

$$\int_0^T \int_{\Omega_n} \sum_{l=0}^n |\partial_{l,Q}[F(x, \tau) - F_m(x, \tau)]|^2 dx\cdot d\tau \to 0 \quad \text{für} \quad m \to \infty;$$

folglich konvergiert

$$\left\{\int_{\Omega_n} \sum_{l=0}^n |\partial_{l,Q}[F(x, \tau) - F_m(x, \tau)]|^2 dx\right\}^{1/2}$$

im Mittel (im Sinne von $L^2([0, T])$) gegen Null. Es existiert also eine Unterfolge

$$\left\{\int_{\Omega_n} \sum_{l=0}^n |\partial_{l,Q}[F(x, \tau) - F_{m_k}(x, \tau)]|^2 dx\right\}^{1/2},$$

die für fast alle $\tau \in [0, T]$ gegen Null konvergiert.

Da, für fast alle τ, $\partial_{l,Q}F = \partial_{l,\Omega_n}F$ ist, strebt

$$\int_{\Omega_n} \sum_{l=0}^n |\partial_{l,\Omega_n}[F(x, \tau) - F_{m_k}(x, \tau)]|^2 dx$$

für fast alle τ gegen Null. Daraus folgt (dies deshalb, weil $F_{m_k} \in C_0^1(\Omega_n)$ für jedes τ), daß für fast alle τ $F(-, \tau) \in D(A_1^{1/2})$ (siehe [7]), wobei

$$\|A_1^{1/2}F(-, \tau) - A_1^{1/2}F_{m_k}(-, \tau)\| = |F(-, \tau) - F_{m_k}(-, \tau)|_A$$

$$\leqslant \mathcal{M}\left(\int_{\Omega_n} \sum_{l=1}^n |\partial_{l,\Omega_n}[F(x, \tau) - F_{m_k}(x, \tau)]|^2 dx + \int_{\Omega_n} |F(x, \tau) - F_{m_k}(x, \tau)|^2 dx\right).$$

Der Ausdruck $\|A_1^{1/2}F(-, \tau) - A^{1/2}F_{m_k}(-, \tau)\|$ strebt also mit $m \to \infty$ gegen Null für fast alle τ, w. z. b. w.

Für den Fall eines positiv-definiten Operators A fällt $D(A_1^{1/2})$ mit dem Hilbertschen Raum H_A zusammen, wobei H_A die Vervollständigung des Definitionsbereiches von A_0 ist, und zwar in einer Metrik die folgendermaßen bestimmt ist: $|g|_A \overset{\text{def}}{=} (A_0 g, g) = \|A_1^{1/2} g\|$. Man kann zeigen (vgl. [7]), daß H_A mit einer Funktionsmenge aus $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_n)$ zusammenfällt, dabei verschwinden diese Funktionen auf dem Rande des Gebiets Ω_n (d. h. sie lassen sich im Sinne von $W_2^1(\Omega_n)$ durch Funktionen $g_m \in \overset{\circ}{C}{}_2^0(\Omega_n)$ approximieren). Wenn

$$g \in D(A_0), \qquad |g|_A^2 = (A_0 g, g) = \int_{\Omega_n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} + a_0 g^2 \right) dx,$$

so gilt für ein beliebiges $g \in H_A$

$$|g|_A = \int_{\Omega_n} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \partial_i g \cdot \partial_j g + a_0 g^2)\, dx \leqslant \mathcal{M} \Big(\int_{\Omega_n} \sum_{j=1}^{n} |\partial_j g|^2 dx + \int_{\Omega_n} |g|^2 dx \Big),$$

wobei $\mathcal{M}$ die Summe der oberen Schranke der Eigenwerte der Matrix (a_{ij}) und der oberen Schranke von a_0 bezeichnet.

Aus dem Lemma 6 folgt, daß

$$f(-,\tau) \in D(A_1) = D(A^*) \cap D(A_1^{1/2})$$

für fast alle τ, oder $Af = A_1 f$, und analog $A^{p-1} f = A_1^{p-1} f$ (für fast alle τ), also folglich $f(-,\tau) \in D(A_1^{p-1/2})$ für fast alle τ. Die Integrierbarkeit im Sinne von Bochner folgt aus den weiter bewiesenen Lemmata:

Lemma 7. *Falls* $g \in D_1(Q)$, *so* $A_1^{1/2} g(-,\tau) \in B([0,T])$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß $g(-,\tau) \in D(A_1^{1/2})$ für alle τ. Nun zeigen wir vor allem, daß die Funktion $A_1^{1/2} g(-,\tau)$, welche Werte aus $L^2(\Omega_n)$ annimmt, durch Treppenfunktionen der Veränderlichen τ, die Werte aus $L^2(\Omega_n)$ annehmen, gleichmäßig approximiert (im Sinne der Metrik von $L^2(\Omega_n)$) werden kann.

Aus der Zugehörigkeit von g zu $D_1(Q)$ folgt die gleichmäßige Stetigkeit der Ableitungen $\partial g(x,\tau)/\partial x_l$, $l = 1, 2, \ldots, n$, im Gebiet Q; folglich existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein k_0 derart, daß für beliebige x, τ und τ' (und auch l), die Ungleichung $|\tau - \tau'| < T/k_0$, die Beziehungen

$$\left| \frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x_l} - \frac{\partial g(x,\tau')}{\partial x_l} \right| < \frac{\varepsilon}{\mathcal{M}(n+1)} \quad \text{und} \quad |g(x,\tau) - g(x,\tau')| < \frac{\varepsilon}{\mathcal{M}(n+1)}$$

nach sich zieht. Wir teilen jetzt das Intervall $[0, T]$ in eine beliebige Anzahl $k > k_0$ von gleichen Teilen auf, und bezeichnen die Teilpunkte durch

$$\tau_i = i\frac{T}{k}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Leicht ersieht man, daß für $\tau_i < \tau < \tau_{i+1}$, bei beliebigen $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$: $|\tau - \tau_i| < \tau_{i+1} - \tau_i = T/k < T/k_0$, es existiert also für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein derartiges k_0, daß für $k > k_0$ und $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$

$$\left| \frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,\tau_i)}{\partial x_l} \right| < \varepsilon$$

für ein beliebiges x und $\tau_i < \tau < \tau_{i+1}$ gilt.

Wir bestimmen jetzt die Treppenfunktion

$$g_k(x,\tau) = \begin{cases} g(x,\tau_i) & \text{für} \quad \tau_i \leqslant \tau < \tau_{i+1} \text{ und } i = 0, 1, \ldots, k-2, \\ g(x,\tau_{k-1}) & \text{für} \quad \tau_{k-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_k. \end{cases}$$

Wie man leicht einsieht, ist

$$\frac{\partial g_k(x,\tau)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\partial g(x,\tau_i)}{\partial x_l} & \text{für} \quad \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \quad \text{und } i = 0, 1, \ldots, k-2, \\ \dfrac{\partial g(x,\tau_{k-1})}{\partial x_l} & \text{für} \quad \tau_{k-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_k. \end{cases}$$

Somit ist für ein beliebiges $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, wobei $i = 0, 1, \ldots, k-1$, und $k > k_0$

$$\left| \frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x_l} - \frac{\partial g_k(x,\tau)}{\partial x_l} \right| = \left| \frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x_l} - \frac{\partial g(x,\tau_i)}{\partial x_l} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathcal{M}(n+1)}$$

Aus der Definition von $g_k(x,\tau)$ folgt aber, daß $g_k(-,\tau) \in D(A_1^{1/2})$, folglich existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein derartiges k_0, daß für $k > k_0$

$$\|A_1^{1/2} g(-,\tau) - A_1^{1/2} g_k(-,\tau)\|^2 = |g(-,\tau) - g_k(-,\tau)|_A^2$$

$$\leqslant \mathcal{M} \left(\int_{\Omega_n} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x_l} - \frac{\partial g_k(x,\tau)}{\partial x_l} \right|^2 dx + \int_{\Omega_n} |g(x,\tau) - g_k(x,\tau)|^2 dx \right)$$

$$= \mathcal{M} \left(\int_{\Omega_n} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x_l} - \frac{\partial g(x,\tau_i)}{\partial x_l} \right|^2 dx + \int_{\Omega_n} |g(x,\tau) - g(x,\tau_i)|^2 dx \right) < \varepsilon$$

für jedes $\tau \in [0, T]$ gilt. Die Funktion

$$A_1^{1/2} g_k(-,\tau) = \begin{cases} A_1^{1/2} g(-,\tau_i) & \text{für} \quad \tau_i \leqslant \tau < \tau_{i+1} \text{ und } i = 0, 1, \ldots, k-2, \\ A_1^{1/2} g(-,\tau_{k-1}) & \text{für} \quad \tau_{k-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_k \end{cases}$$

ist deshalb eine Treppenfunktion der Veränderlichen τ, die Werte aus $L^2(\Omega_n)$ annimmt (oder die meßbar im Sinne von Bochner ist). Damit ist $A^{1/2}g(-,\tau)$ als Grenze einer Folge von nach Bochner meßbaren Funktionen selbst eine nach Bochner meßbare Funktion.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\partial g(x,\tau)/\partial x_l$ im Gebiet Q, ist

$$0 < \|A_1^{1/2}g(-,\tau)\|^2$$
$$= |g(-,\tau)|_A^2 \leqslant \mathcal{M}\int_{\Omega_n}\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x_l}\right|^2 dx + \mathcal{M}\int_{\Omega_n}|g(x,\tau)|^2 dx = M,$$

M — konstant, also ist das Lebesguesche Integral

$$\int_0^T \|A_1^{1/2}g(-,\tau)\|\,d\tau < \infty,$$

und damit $A_1^{1/2}g(-,\tau)\in B([0,T])$, w. z. b. w.

Unter Benutzung von Lemma 6 und 7 können wir beweisen:

Lemma 8. *Falls* $F\in D_1(Q)$, *so* $A_1^{1/2}F(-,\tau)\in B([0,T])$.

Aus Lemma 6 folgt, daß $F(-,\tau)\in D(A_1^{1/2})$, sowie daß

$$\|A_1^{1/2}F(-,\tau)-A_1^{1/2}F_{m_k}(-,\tau)\|$$

für fast alle τ gegen Null strebt mit $m\to\infty$, wobei $F_{m_k}\in D_1(Q)$. Da, auf Grund von Lemma 7, $A_1^{1/2}F_{m_k}(-,\tau)\in B([0,T])$, ist also $A_1^{1/2}F(-,\tau)$ (stark) meßbar im Sinne von Bochner (vergleiche den Anhang). Da $D_1(Q)\subset W_2^1(Q)$, ist $\|F\|_{W_2^1(Q)} < \infty$. Wir haben

$$0 \leqslant \int_0^T \|A_1^{1/2}F(-,\tau)\|^2 d\tau$$
$$\leqslant \mathcal{M}\Big(\int_0^T\int_{\Omega_n}\sum_{l=1}^{n}|\partial_{l,Q}F|^2 dx\,d\tau + \int_0^T\int_{\Omega_n}|F|^2 dx\cdot d\tau\Big) = \mathcal{M}\|F\|_{W_2^1(Q)} < \infty,$$

weswegen $\|A_1^{1/2}F(-,\tau)\|$ integrierbar im Sinne von Lebesgue ist. Damit gilt $A_1^{1/2}F(-,\tau)\in B([0,T])$.

Die Stetigkeit τ der Funktion $A_1^{p-1}f(-,\tau)$ folgt aus dem von K. Maurin bewiesenen

Lemma 9. *Wenn* $F\in W_2^1(Q)$, *dann ist* $F(-,t)$ *stark stetig bezüglich* t $(t\in[0,T])$.

Beweis. Da $F\in W_2^1(Q)$, ist F für fast alle x eine absolut stetige Funktion der Veränderlichen t, beziehungsweise

$$F(x,t) = \int_0^t G(x,\tau)\,d\tau, \qquad G(x,\tau) = \partial_\tau F(x,\tau)$$

da nämlich $\partial_\tau F(x,\tau)$ existiert; es ist beziehungsweise

$$\int_{\Omega_n}\int_0^T\Big(\int_0^t G(x,t)\frac{\partial\chi}{\partial t}(x,t)\,dt\,dx = -\int_{\Omega_n}\int_0^T \partial_t F(x,t)\chi(x,t)\,dt\,dx,$$

für $\chi\in C_0^1(Q)$; daraus erhalten wir auf Grund des Satzes über die partielle Integration eines Lebesgueschen Integrals (siehe [10])

$$\int_{\Omega_n}\int_0^T G(x,t)\chi(x,t)\,dt\,dx = \int_{\Omega_n}\int_0^T \partial_t F(x,t)\chi(x,t)\,dt\,dx,$$

also $G(x,t) = \partial_t F(x,t)$ für fast alle x und t. Folglich ist

$$\|F(-,t+\Delta t)-F(-,t)\|^2 = \int_{\Omega_n}\Big\{\Big|\int_t^{t+\Delta t}\partial_\tau F(x,\tau)\,d\tau\Big|^2\Big\}dx$$
$$\leqslant (\Delta t)^2\int_{\Omega_n}\int_0^T|\partial_\tau F(x,\tau)|^2 d\tau\,dx = (\Delta t)^2 M \qquad (M \text{ — konstant}).$$

Dies zeigt, daß der Ausdruck $\|F(-,t+\Delta t)-F(-,t)\|$ für $\Delta t\to 0$ gegen Null (für jedes t) strebt.

Da $A_1^{p-1}f = A^{p-1}f\in D_1(Q)\subset W_2^1(Q)$, ist auf Grund von Lemma 9 $A_1^{p-1}f(-,\tau)$ für fast alle $\tau\in[0,T]$ gleich einer in τ stark stetigen Funktion.

Wenn wir die erhaltenen Ergebnisse zusammenfassen, sehen wir, daß *für die Raumdimensionen* $n=4l+2$ *und* $n=4l+3$, *wobei* $l=0,1,2,\ldots$, *(also auch für die physikalisch wichtigsten Raumdimensionen* $n=2$ *und* $n=3$*), die von uns angegebenen Bedingungen nicht weniger allgemein als die Bedingungen von O. A. Ladyženskaja sind.*

4. Der Fall parabolischer Gleichungssysteme

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -Au(x,t)+f(x,t)$$

bereitet bedeutend weniger Schwierigkeiten, als der bis jetzt betrachtete Fall. Für diesen Fall erhalten wir die verallgemeinerte Lösung in der Form

$$u = e^{[-tA_1]}\varphi + \int_0^t e^{[-(t-\tau)A_1]}f(-,\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion und aus der Halbbeschränktheit (von unten) des Operators A_1 folgt die Beschränktheit der Operatoren $e^{[-tA_1]}$, $e^{[-(t-\tau)A_1]}$ und auch des Operators $A_1^p e^{[-(t-\tau)A_1]}$ für ein beliebiges p. Nach Lemma 1 besitzt also der Ausdruck (13) für beliebige $\varphi \epsilon L^2(\Omega)$ und $f(-,\tau)\epsilon L^2(\Omega_n)$ eine starke Ableitung, die für jedes $\tau\epsilon[0,T]$ stark stetig ist, wobei

$$\frac{du(-,t)}{dt} = -A_1 e^{[-tA_1]}\varphi - A_1\int_0^t e^{[-(t-\tau)A_1]} f(-,\tau)\,d\tau + f(-,\tau)$$

(dies, weil das Bochnersche Integral mit dem selbstadjungierten Operator kommutiert).

Unschwer weist man nach, daß *die erhaltene verallgemeinerte Lösung beliebig oft differenzierbar ist* (unter denselben Vorassussetzungen hinsichtlich φ und f) das heißt, daß sie einen beliebig oftmals differenzierbaren Repräsentanten besitzt. (Der Beweis ist analog zum Fall eines Systems mit einer zweiten Ableitung nach t, nur bedeutend einfacher). Falls wir wiederum die Ergebnisse der Arbeit von L. Gårding [2] benutzen, erhalten wir den:

Satz 4. *Wenn A ein formal selbstadjungiertes und von unten halbbeschränktes, elliptisches System von r Differentialoperatoren der Ordnung σ ist, und A_1 dessen beliebige, von unten halbbeschränkte, selbstadjungierte Erweiterung, während $\varphi\epsilon L^2(\Omega_n)$ und $f(-,\tau)\epsilon L^2(\Omega_n)$ stark stetig für jedes $\tau\epsilon[0,T]$ its, dann besitzt das System $du/dt = -Au+f$ beliebig oft differenzierbare Lösungen, die die Randbedingung $u(-,t)\epsilon D(A_1)$ erfüllen, die für $t\downarrow 0$ im Mittel gegen $\varphi(x)$ konvergieren, und die sich in folgender Form darstellen lassen:*

$$u = \underset{L^{2,r}(\Omega_n)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{\mathcal{M}_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(\lambda)} e^{-\lambda t}(\mathcal{F}\varphi)_k(\lambda)\,e_k(\lambda,x)\,d\mu(\lambda) +$$

$$+\int_0^t\Big\{\underset{L^{2,r}(\Omega_n)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{\mathcal{M}_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(\lambda)} e^{-\lambda(t-\tau)}(\mathcal{F}f)_k(\lambda,\tau)\,e_k(\lambda,x)\,d\mu(\lambda)\Big\}d\tau,$$

wobei

$$(\mathcal{F}\varphi)_k(\lambda) = \underset{L^2(\mu)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{\Omega_n}\overline{e_k(\lambda,x)}\varphi(x)\,dx;$$

dabei sind $e_k(\lambda,x)$ die Eigenfunktionen des Operators A, die dem Eigenwert λ entsprechen; μ ist ein positives auf dem Spektrum konzentriertes Maß.

Die Funktion $N(\lambda)$ ist μ-meßbar und kann die Werte $1,2,\ldots,\infty$ annehmen.

Die Konvergenz im Mittel von $u(x,t)$ (für $t\to 0$) gegen $\varphi(x)$ folgt sofort aus den Eigenschaften des Operators e^{-tA_1} sowie aus den Eigenschaften des Bochnerschen Integrals. Es ist nämlich

$$\|u(-,t)-\varphi\| \leqslant \|e^{[-tA_1]}\varphi-\varphi\| + \Big\|\int_0^t e^{[-(t-\tau)A_1]}f(-,\tau)\,d\tau\Big\|$$

$$\leqslant \|e^{[-tA_1]}\varphi-\varphi\| + \mathrm{const}\int_0^t\|f(-,\tau)\|\,d\tau.$$

Da aber $\|e^{[-tA_1]}\varphi-\varphi\|$ für $t\to 0$ gegen Null strebt und $f(-,\tau)$ stark stetig ist, strebt $\|u(-,t)-\varphi\|$ für $t\to 0$ gegen Null.

Damit die Lösung (14) die Anfangsbedingung im klassischen Sinne erfüllt, genügt es anzunehmen, daß $\varphi\epsilon D(A_1^p)$, wobei $p = [n/2\sigma]+2$.

Der Bedürfnisse der theoretischen Physik wegen sind Systeme und Gleichungen von einem etwas anderen Typus, als die oben betrachteten, ebenfalls wichtig, nämlich Systeme des Typus $\partial u/\partial t = iA+f$, wobei A ein formal selbstadjungierter, elliptischer (nicht unbedingt halbbeschränkter) Operator ist.

Wenn der Operator A eine selbstadjungierte Erweiterung A_1 besitzt und falls bei $p = [n/2\sigma]+2$

$$\varphi\epsilon D(A_1^p),\qquad f(-,\tau)\epsilon D(A_1^p)\qquad\text{für}\qquad \tau\epsilon[0,T],$$

wobei

$$A_1^p f(-,\tau),\qquad A_1^{p-1}f(-,\tau),\qquad A_1 f(-,\tau)\qquad\text{und}\qquad f(-,\tau)$$

stark stetig für $\tau\epsilon[0,T]$ sind, so besitzt für das obige System das gemischte Randproblem eine klassische Lösung, die sich in der Form

$$u = \underset{L^{2r}(\Omega_n)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{N(\lambda)} e^{i\lambda t}(\mathcal{F}\varphi)_k(\lambda)\,e_k(\lambda,x)\,d\mu(\lambda)$$

$$+\int_0^t\Big\{\underset{L^{2,r}(\Omega_n)}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{N(\lambda)} e^{i\lambda(t-\tau)}(\mathcal{F}f)_k(\lambda,\tau)\,e_k(\lambda,x)\,d\mu(\lambda)\Big\}d\tau$$

darstellen läßt. Ein System von diesem Typus ist, für den Fall stationärer Felder (in diesem Fall ist $f\equiv 0$), das Diracsche System.

5. Für den Fall stationärer Felder kann man die Diracsche Gleichung in der Form

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = -Hu$$

schreiben, wobei

$$u(x,t) = [u_1(x,t),\,u_2(x,t),\,u_3(x,t),\,u_4(x,t)],$$

$$Hu = i\sum_{k=1}^{3} a^k\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}+\frac{i\mathcal{E}}{c}\Phi_k(x)u\right)-\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_0(x)u+m_0c\beta u,$$

$x=(x_1,x_2,x_3)$, $i=\sqrt{-1}$, a^k und β aber Diracsche Matrizen sind, während Φ_k und Φ_0 reellwertige Funktionen sind, von denen wir außerdem noch voraussetzen, daß $\Phi_k\in L^2(\Omega_3)$ und $|\Phi_0(x)|<M$ (M — konstant).

Wir zeigen, daß der Operator H elliptisch ist, und daß dessen Verjüngung H_0 ein symmetrischer Operator ist, der sich zu einem selbstadjungierten erweitern läßt.

H ist ein elliptischer Operator:

$$\det\left(\sum_{k=1}^{3} a^k\xi_k\right)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \xi_3 & \xi_1-i\xi_2\\ 0 & 0 & \xi_1+i\xi_2 & -\xi_3\\ \xi_3 & \xi_1-i\xi_2 & 0 & 0\\ \xi_1+i\xi_2 & -\xi_3 & 0 & 0\end{vmatrix}=\xi_3^2\begin{vmatrix}\xi_3 & \xi_1-i\xi_2\\ \xi_1+i\xi_2 & -\xi_3\end{vmatrix}+$$

$$+(\xi_1-i\xi_2)(\xi_1+i\xi_2)\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_1-i\xi_2\\ \xi_1+i\xi_2 & -\xi_3\end{vmatrix}=-(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\neq 0.$$

H_0 ist ein symmetrischer Operator, wegen der Hermitivität von a^k und β ist nämlich

$$(H_0u,v)=\sum_{k=1}^{3}\left(ia^k\frac{\partial}{\partial x_k}u,v\right)-\frac{\mathcal{E}}{c}\sum_{k=1}^{3}(a^k\varphi_k u,v)-\frac{\mathcal{E}}{c}(\Phi_0u,v)+m_0c(\beta u,v)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\left(i\frac{\partial}{\partial x_k}u,a^kv\right)-\frac{\mathcal{E}}{c}\sum_{k=1}^{3}(u,a^k\varphi_kv)+m_0c(u,\beta v).$$

Da aber der Operator

$$i\frac{\partial}{\partial x_k}$$

auf der Menge der Funktionen, die einen kompakten Träger im Gebiet Ω_3 besitzen, symmetrisch ist, haben wir, weil die Matrizen a^k und β nicht von x abhängen,

$$(H_0u,v)=\sum_{k=1}^{3}\left(u,ia^k\frac{\partial}{\partial x_k}v\right)-\frac{\mathcal{E}}{c}\sum_{k=1}^{3}(u,a^k\varphi_kv)-\frac{\mathcal{E}}{c}(u,\varphi_0v)+m_0c(u,\beta v)$$

$$=(u,H_0v).$$

Der Operator H_0 besitzt eine selbstadjungierte Erweiterung H_1.

Aus dem Symmetriebeweis des Operators H_0 ersieht man, daß der Operator

$$B_0=i\sum_{k=1}^{3}a^k\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{i\mathcal{E}}{c}\Phi_k\right)$$

gleichfalls symmetrisch ist.

Der Operator B_0 läßt sich zu einem selbstadjungierten erweitern, man kann nämlich zeigen, daß er gleiche Defektindizes hat.

In der Tat, zur Wertemenge der Operatoren B_0+iI und B_0-iI, wobei I der Einheitsoperator ist, gehören entsprechend alle Vektoren $u=B_0f+if$ und $v=B_0g-ig$, wobei $f,g\in D(B_0)$, das heißt die Vektoren

$$u=i\sum_{k=1}^{3}a^k\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}+i\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_kf\right)+if,\qquad v=i\sum_{k=1}^{3}a^k\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}+i\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_kg\right)-ig.$$

Es sei $f=\beta g$; wenn $g\in D(B_0)$, dann gehört auch $f\in D(B_0)$ (β ist die reelle und symmetrische Diracsche Matrix), also

$$u=i\sum_{k=1}^{3}a^k\beta\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}+i\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_kg\right)+i\beta g.$$

Deswegen, weil $\beta a_k=-a_k\beta$, gilt

$$\beta v=i\sum_{k=1}^{3}\beta a^k\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}+\frac{i\mathcal{E}}{c}\Phi_kg\right)-i\beta g=-i\sum_{k=1}^{3}a^k\beta\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}+\frac{i\mathcal{E}}{c}\Phi_kg\right)-i\beta g.$$

Damit ist $\beta v=-u$; dies bedeutet, daß u und v derselben Menge angehören. Es ist $\overline{B_0+iI}=\bar{B}_0+iI$, aus der Identität der Mengen B_0f+ $+if$ und B_0g-ig folgt die Identität ihrer Abschließungen, die Mengen B_0f+if und B_0g-ig haben also dieselbe Dimension, und folglich besitzt $\bar{B}_0$ eine selbstadjungierte Erweiterung (auf Grund eines Satzes von v. Neumann) die gleichzeitig die Erweiterung von B_0 ist.

In der Folge zeigen wir, daß der Operator

$$H_0=B_0+\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_0+m_0c\beta$$

die selbstadjungierte Erweiterung

$$H_1=B_1+\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_0+m_0c\beta$$

besitzt.

Der Operator

$$\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_0 + m_0 c\beta$$

ist selbstadjungiert, da Φ_0, eine reellwertige Funktion ist und β eine Matrix, die reell und symmetrisch ist. Dieser Operator ist beschränkt, falls $|\Phi_0(x)| \leqslant M$, es ist also

$$H_1^* = B_1^* + \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_0 + m_0 c\beta\right)^* = B_1 + \frac{\mathcal{E}}{c}\Phi_0 + m_0 c\beta = H_1,$$

der Operator H_1 ist somit selbstadjungiert.

$D_1(H_1) \supset D(H_0)$ da $D(H_1) = D(B_1)$ und $D(B_1) \supset D(B_0) = D(H_0)$. H_0 besitzt damit eine selbstadjungierte Erweiterung, w. z. b. w.

Bemerkung. Wenn der Bereich Ω_3 der ganze 3-dimensionale Raum E^3 ist, kann man die Voraussetzungen betreffs der Potentiale Φ_i, beträchtlich abschwächen. Es genügt namentlich die Existenz solcher positiven Konstanten R und M vorauszusetzen, daß

$$\int\limits_{\|x\| \leqslant R} |\Phi_i(x)|^2 dx < M$$

und $|\Phi_i(x)| < M$ für $|x| > R$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. (Die Potentiale der *physikalischen* Felder genügen eben den oben genannten Bedingungen.) Bei diesen Voraussetzungen gelang es der Verfasserin — mittels einer unwesentlichen Modifikation der von Kato [12] zum Schrödingeroperator verwendeten Methode — folgende Behauptung zu beweisen:

Wenn der Definitionsbereich $D(H_0)$ der Einschränkung H des Diracschen Operators folgendermassen definiert ist:

$$D(H_0) = \{u : u(x) = P(x)\exp(-x^2/2)\},$$

wobei $P(x) = (P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x))$, wo P_i Polynome von x_1, x_2, x_3 sind, dann ist die Abschliessung $\tilde{H}_0$ von H_0 selbstadjungiert: $\tilde{H}_0 = (\tilde{H}_0)^*$; d. h. H_0 ist wesentlich selbelstadjungiert.

Literaturnachweis

[1] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, livre IV, Paris 1949.

[2] L. Gårding, *Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators*, University of Maryland, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Lecture series 11 (1954).

[3] E. Hille, *Functional analysis and semigroups*, New York 1948.

[4] O. A. Ладыженская, *Смешанная задача гиперболического уравнения*, Москва 1953.

[5] K. Maurin, *Der Fundamentalsatz über schwache Lösungen der allgemeinen linearen Systeme der elliptischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III. 2 (1954), S. 457-461.

[6] — *Über gemischte Rand- und Anfangswertprobleme im Großen für gewisse Systeme von Differentialgleichungen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*, Studia Math. 15 (1956), S. 314-327.

[7] С. Т. Михлин, *Проблема минимума квадратического функционала*, Москва 1952.

[8] B. v. Sz. Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Berlin 1942.

[9] J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin 1932.

[10] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford 1932.

[11] М. И. Вишик. *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*, Труды Моск. Матем. Общества 1 (1952), S. 187-246.

[12] T. Kato, *Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type*, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), S. 195-211.

Reçu par la Rédaction le 1. 10. 1956