Elementare Bemerkungen über kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebren

(Beweis einer Vermutung von Dirac)

von

K. MAURIN (Warszawa)

Im folgenden verstehen wir unter einer *kommutativen* $\mathcal{C}^*$-Algebra eine gleichmäßig abgeschlossene komplexe Algebra $\mathcal{R}$ mit Involution von miteinander vertauschbaren beschränkten linearen (normalen) Operatoren eines separablen Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Genauer:

1° Wenn $A, B \in \mathcal{R}$, dann $\mu_1 A + \mu_2 B, A^*, AB \in \mathcal{R}$, wobei wir mit A^* den zu A adjungierten Operator und mit μ_1, μ_2 komplexe Zahlen bezeichnen;

2° $AB = BA$ für alle $A, B \in \mathcal{R}$ *(Vertauschbarkeit)*;

3° Die Identität $I \in \mathcal{R}$.

4° Die Algebra $\mathcal{R}$ ist *gleichmäßig abgeschlossen*, d. h. aus $A_n \in \mathcal{R}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ folgt $A \in \mathcal{R}$.

Eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra heißt *maximal*, wenn sie keine echte Unteralgebra einer kommutativen $\mathcal{C}^*$-Algebra ist.

Im Abschnitt 1 beweisen wir zwei Sätze:

SATZ 1. *Zu jeder maximalen kommutativen $\mathcal{C}^*$-Algebra $\mathcal{R}$ gibt es einen zyklischen Vektor $v \in \mathfrak{H}$, d. h. $[\mathcal{R}v] = \mathfrak{H}$, wobei $\mathcal{R}v = \{Av : A \in \mathcal{R}\}$ und $[\mathcal{R}v]$ die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathcal{R}v$ bedeutet.*

SATZ 2. *Wenn die kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra einen zyklischen Vektor $e \in \mathfrak{H}$ besitzt (d. h. wenn $[\mathcal{R}e] = \mathfrak{H}$), dann gibt es auf der bikompakten Menge Λ [3] der maximalen Ideale von $\mathcal{R}$ ein nichtnegatives Maß μ und eine den Ring $\mathcal{R}$ diagonalisierende unitäre Abbildung F des Raumes $\mathfrak{H}$ auf den Raum $L^2(\mu)$.*

Genauer: für $\hat{u}_i \in \mathfrak{H}$ gilt

$$F\hat{u}_i = \big(u_i(\lambda)\big) \in L^2(\mu), \qquad i = 1, 2;$$

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \int\limits_{\Lambda} (F\hat{u}_1)(\lambda)\overline{(F\hat{u}_2)(\lambda)}\, d\mu(\lambda);$$

$$(FA\hat{u})(\lambda) = \hat{a}(\lambda)u(\lambda) = a(\lambda)(F\hat{u})(\lambda), \qquad \text{wobei} \quad a \in \mathcal{C}(\Lambda).$$

Man hat also: $FAF^{-1}\big(u(\lambda)\big) = \big(a(\lambda)u(\lambda)\big)$.

Wenn für eine kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra $\mathcal{R}$ die Behauptung des Satzes 2 gilt, dann sagen wir, die Algebra $\mathcal{R}$ besitze ein *einfaches Spektrum*.

Aus den beiden Sätzen erhält man folgende Verschärfung eines Satzes von Neumark und Fomin [5]: *Das Spektrum einer maximalen kommutativen $\mathcal{C}^*$-Algebra ist einfach.*

Im Abschnitt 2 geben wir eine Definition des für die Quantenmechanik grundlegenden Begriffes (der Begriff stammt von Dirac) eines vollständigen Systems von miteinander vertauschbaren Observablen (hermitescher Operatoren). Uns darauf stützend, konnten wir einen für die Quantenmechanik wichtigen Satz (eine Vermutung von Dirac) beweisen.

SATZ 3. *Jedes System von miteinander vertauschbaren Observablen kann durch Hinzufügen von hermiteschen Operatoren zu einem vollständigen System von Observablen erweitert werden.*

Es soll betont werden, daß die Beweise elementar sind; es wurden keine Hilfsmittel aus der Spektraltheorie herangezogen.

1. Beweis der Sätze 1 und 2. Hier bringen wir eine *elementare* Konstruktion des zyklischen Vektores $v \in \mathfrak{H}$ einer maximalen kommutativen $\mathcal{C}^*$-Algebra.

Beweis des Satzes 1. Es sei (e_i) eine orthogonale Basis des Raumes $\mathfrak{H}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|e_i\|^2$$

annehmen.

Die Konstruktion des zyklischen Vektors v erfolgt in fünf Schritten:

1° Falls e_1 zyklisch ist, d. h. $[\mathcal{R}e_1] \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$, ist die Konstruktion beendet. Nehmen wir also an, daß $\mathfrak{H}_1^\perp \neq 0$ ($\mathfrak{H}_1^\perp = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ bedeutet das orthogonale Komplement von $\mathfrak{H}_1$). Es sei P_1 die (orthogonale) Projektion auf den Unterraum $\mathfrak{H}_1$, $P_1' = I - P_1$ ist also die Projektion auf $\mathfrak{H}_1^\perp$.

Wir beweisen jetzt das folgende

LEMMA. *Wenn $\mathcal{R}$ maximal ist, gilt $P_1, P_1' \in \mathcal{R}$.*

Beweis. Wegen Maximalität des Ringes $\mathcal{R}$ genügt es zu zeigen, daß P_1' mit jedem A aus $\mathcal{R}$ vertauschbar ist: $P_1'A = AP_1'$ für ein beliebiges $A \in \mathcal{R}$.

Es sei u ein beliebiges Element aus $\mathfrak{H}$, $u = u_1 + u_2$, wobei $u_1 \in \mathfrak{H}_1$, $u_2 \in \mathfrak{H}_1^\perp$. Da aber $\mathfrak{H}_1 = [\mathcal{R}e_1]$, gibt es eine Folge $(B_n) \in \mathcal{R}$, so daß $B_n e_1 \to u_1$. Für ein beliebiges A aus $\mathcal{R}$ haben wir aber $AB_n e_1 \in [\mathcal{R}e_1]$, also

$$\lim_{n\to\infty} AB_n e_1 = Au_1 \in [\mathcal{R}e_1] = \mathfrak{H}_1,$$

und daher $P_1' A u_1 = 0$. Wir haben also

$$(1) \qquad P_1' A u = P_1' A(u_1+u_2) = P_1' A u_2 = A u_2,$$

da $A u_2 \in \mathfrak{H}_1^\perp$; letztes ist aus der folgenden einfachen Rechnung ersichtlich: $(Au_2, Be_1) = (u_2, A^* Be_1) = 0$ (wegen $A^* B \in \mathcal{R}$, $A^* Be_1 \in \mathfrak{H}_1$), $\{Be_1 : B \in \mathcal{R}\}$ ist aber dicht in $\mathfrak{H}_1$, also $Au_2 \in \mathfrak{H}_1^\perp$. Da $AP_1' u = Au_2$, haben wir wegen (1) $P_1' A u = A P_1' u$ identisch für $u \in \mathfrak{H}$, also $P_1' A = A P_1'$. Daher P_1', $I - P_1' = P_1 \in \mathcal{R}$, w. z. b. w.

2° Es sei e_{β_2} das erste Element der Basis (e_i), das nicht $\mathfrak{H}_1 = [\mathcal{R} e_1]$ angehört. Man hat $P_1' e_{\beta_2} = e_{\beta_2} - P_1 e_{\beta_2}$. Wir setzen $v_1 \overset{\mathrm{df}}{=} e_1$, $v_2 = e_1 + P_1' e_{\beta_2}$. Offenbar ist $[\mathfrak{H}_1, v_2] = [\mathfrak{H}_1, P_1' e_{\beta_2}] \supset [e_1, \ldots, e_{\beta_2}]$. Da $P_1' v_2 = (P_1')^2 e_{\beta_2} = P_1' e_{\beta_2}$; $P_1' v_2 = P_1 e_1 = e_1$; $P_1', P_1' \in \mathcal{R}$, haben wir

$$(2) \qquad \mathfrak{H}_2 \overset{\mathrm{df}}{=} [\mathcal{R} v_2] \supset [\mathfrak{H}_1, v_2] \supset \mathfrak{H}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_2 \supset [e_1, \ldots, e_{\beta_2}].$$

Wäre $[\mathcal{R} v_2] = \mathfrak{H}$, so wären wir am Ziel.

3° Falls aber $[\mathcal{R} v_2] = \mathfrak{H}_2 \neq \mathfrak{H}_1$, wiederholen wir die in den Punkten 1° und 2° beschriebene Konstruktion.

Es sei P_2, bzw. P_2', die Orthogonalprojektion auf $\mathfrak{H}_2$, bzw. $\mathfrak{H}_2^\perp$. Genau wie in 2° zeigen wir: $P_2, P_2' \in \mathcal{R}$. Es sei e_{β_3} das erste Element von (e_i), das nicht in $\mathfrak{H}_2 = [\mathcal{R} v_2]$ liegt. Wieder ist $v_3 \overset{\mathrm{df}}{=} v_2 + P_2' e_{\beta_3}$. Da $P_2 v_3 = v_2$, $P_2' v_3 = P_2' e_{\beta_3}$, haben wir, wegen $P_2, P_2' \in \mathcal{R}$, $\mathfrak{H}_3 \overset{\mathrm{df}}{=} [\mathcal{R} v_3] \supset [\mathfrak{H}_2, P_2 e_{\beta_3}] \supset \supset [e_1, \ldots, e_{\beta_3}]$.

4° Auf diese Weise erhält man die *wachsende* Folge der Unterräume

$$\mathfrak{H}_1 = [\mathcal{R} v_1] \subset \ldots \subset \mathfrak{H}_n = [\mathcal{R} v_n] \subset \ldots$$

und die entsprechenden Projektionsfolgen

$$P_1 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots, \qquad P_1' \supset \ldots \supset P_n' \supset \ldots,$$

wobei $P_n, P_n' \in \mathcal{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Außerdem gilt $\mathfrak{H}_n \supset [e_1, \ldots, e_{\beta_n}] \supset [e_1, \ldots, e_n]$ für $n = 1, 2, \ldots$ Wegen $1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots < \beta_n < \ldots$ und der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|e_i\|^2$$

konvergiert die Folge (v_n), wo $v_1 = e_1$, $v_n = v_{n-1} + P_n' e_{\beta_n}$ für $n = 2, 3, \ldots$ (da ja $\|P_n' e_{\beta_n}\|^2 \leqslant \|e_{\beta_n}\|^2$).

5° Wir setzen

$$v \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{n \to \infty} v_n.$$

Wir behaupten: $[\mathcal{R} v] = \mathfrak{H}$.

Zu diesem Zweck genügt es zu zeigen, dass $[\mathcal{R} v]$ dicht in $\mathfrak{H}$ ist. Es sei $h \in \mathfrak{H}$ und $\varepsilon > 0$; da (e_i) die Basis von $\mathfrak{H}$ ist, gibt es also ein derartiges $k = k(\varepsilon) > 0$, daß

$$\Big\| h - \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} a_i e_i \Big\| < \varepsilon.$$

Wir haben $P_k v = P_k(v_k + P_{k+1}' e_{\beta_{k+1}} + \ldots) = P_k v_k = v_k$. Da $P_k \in \mathcal{R}$, erhalten wir $v_k \in [\mathcal{R} v]$, also

$$[\mathcal{R} v] \supset [\mathcal{R} v_k] = \mathfrak{H}_k \supset [e_1, \ldots, e_{k(\varepsilon)}] \ni \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} a_i e_i,$$

w. z. b.w.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Beweis des Satzes 2[1]). Es sei T der Gelfand-Neumark'sche Isomorphismus der kommutativen $\mathcal{C}^*$-Algebra $\mathcal{R}$ auf die Algebra $\mathcal{C}(\Lambda)$ der stetigen Funktionen, die auf der bikompakten Menge Λ der maximalen Ideale von $\mathcal{R}$ bestimmt sind.

$$\mathcal{R} \ni A \overset{T}{\longleftrightarrow} a \in \mathcal{C}(\Lambda), \qquad \|A\| = \|a\| = \max_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)|, \qquad \text{wobei} \qquad A^* \overset{T}{\longleftrightarrow} \overline{(a(\lambda))}.$$

Dann ist $L(a) \overset{\mathrm{df}}{=} (Ae, e)$ ein positives stetiges Funktional auf $\mathcal{C}(\Lambda)$. In der Tat, wenn $a \geqslant 0$, dann ist $(Ae, e) = \|\sqrt{A} e\|^2 \geqslant 0$ (die Stetigkeit von $L(a)$ folgt aus der Isometrie der Abbildung T). Daher ergibt sich aus dem Satze von F. Riesz-Radon [3] die Existenz eines solchen positiven Maßes μ auf der Menge Λ, daß

$$(Ae, e) = L(a) = \int_{\Lambda} a(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt.

Es sei $\hat{u} = Ue$, $\hat{v} = Ve$, wo $U, V \in \mathcal{R}$, dann ist

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (Ue, Ve) = (V^* Ue, e) = L(\bar{v} u) = \int_{\Lambda} u(\lambda) \overline{v(\lambda)}\, d\mu.$$

Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung F' der Menge $\mathcal{R} e$ auf die Menge *aller* auf Λ stetigen Funktionen — diese Menge ist in $L^2(\mu)$ dicht — die das skalare Produkt erhält. Die Abbildung F' ist eineindeutig, denn ist $v = A_1 e = A_2 e$, dann haben wir $B(A_1 - A_2) e = (A_1 - A_2) Be = 0$ für jedes $B \in \mathcal{R}$, da aber $[\mathcal{R} e] = \mathfrak{H}$, und da der Operator $(A_1 - A_2)$ stetig ist, haben wir $A_1 = A_2$. Die Abschließung F von F' leistet das Verlangte: die Abbildung F bildet den Raum $\mathfrak{H}$ unitär auf $L^2(\mu)$ ab. Da

---

[1]) Die Beweisidee des Satzes 2 verdankt der Verfasser einer brieflichen Mitteilung von Prof, Lars Gårding, Vgl. auch [1].

$$(A\hat{u},)\hat{v} = (AUe, Ve) = \int_{\Lambda} a(\lambda)u(\lambda)\overline{v(\lambda)}\,d\mu(\lambda)$$

identisch für $A, U, V \in \mathcal{R}$, also auch identisch für $A \in \mathcal{R}$, $\hat{u}, \hat{v} \in \mathfrak{H}$ ist, erhalten wir $(FA\hat{u})(\lambda) = a(\lambda)u(\lambda) = a(\lambda)(F\hat{u})(\lambda)$, w. z. b. w.

2. Beweis einer Vermutung von Dirac. In der Quantenmechanik spielt der folgende *Satz von Dirac* [2] eine wichtige Rolle: „Jede Menge S von miteinander vertauschbaren hermiteschen Operatoren, kann zu einem vollständigen System S' von miteinander vertauschbaren hermitescher Operatoren erweitert werden".

Der von Dirac stammende Begriff des vollständigen Systems, wird von ihm folgendermaßen charakterisiert: „Let us define a *complete set of commuting observables* [2]), which all commute with one another and for which there is only one simultaneous eigenstate [3]) belonging to any set of eingenvalues".

Diese Definition ist augenscheinlich nur für Operatoren mit reinen Punktspektren gültig; außerdem kann die von Dirac angeführte Überlegung höchstens einen heuristischen Wert haben.

Wir wollen jetzt eine gleichwertige Definition des vollständigen Systems der hermiteschen (ja sogar normalen) Operatoren angeben, die für *beliebige* Spektren gültig ist. Dabei ist für uns der fundamentale Spektralsatz von v. Neumann [4] wegweisend. Dieser Satz besagt bekanntlich, daß jede kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra $\mathcal{R}$ eine (bis auf Äquivalenz) eindeutige Zerlegung des Raumes $\mathfrak{H}$ in ein direktes Integral („generalised sum" in der v. Neumannschen Terminologie) der Hilbertschen Räume $\mathfrak{H}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$,

$$\mathfrak{H} \simeq \int_{\Lambda} \mathfrak{H}_\lambda\, d\mu(\lambda),$$

induziert (wegen der Definitionen vergleiche [3], [4] und [5]). Dabei kann die Dimensionsfunktion $n(\lambda) = \dim \mathfrak{H}_\lambda$ die Werte $1, 2, \ldots, \infty$ annehmen und sie ist in Bezug auf das Maß μ integrierbar. In Falle des von einem einzigen Operator A erzeugten kommutativen $\mathcal{C}^*$-Ringes darf man für Λ das Spektrum von A nehmen. (Aus diesem Grunde wird Λ das *Spektrum der Algebra* $\mathcal{R}$ genannt). Die Räume $\mathfrak{H}_\lambda$ spielen die Rolle der Eigenräume von A.

Es ist jetzt einleuchtend, wie die Vollständigkeit („completeness") eines $\mathcal{C}^*$-Ringes zu definieren ist.

Die kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra heisst *vollständig* — oder auch sie *besitzt ein einfaches Spektrum* — wenn die Dimensionsfunktion $n(\lambda)$ des

---

[2]) Eine *Observable* ist ein hermitescher Operator.

[3]) D. h. Eigenvektor.

v. Neumannschen Spektralsatzes identisch gleich eins ist: $n(\lambda) \equiv 1$. Mit anderen Worten:

DEFINITION 1. Die kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra $\mathcal{R}$ heißt *vollständig (besitzt ein einfaches Spektrum)*, wenn sie einen Unitär-isomorphismus des Raumes $\mathfrak{H}$ auf einen $L^2(\mu)$ im Sinne des Satzes 2 induziert.

Jetzt können wir diese Definition auf eine Operatorenmenge S wie folgt erweitern:

DEFINITION 2. Die Menge S der miteinander vertauschbaren (normalen) Operatoren heißt *vollständig* („complete") wenn die *minimale*, die Menge S umfassende kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra $m(S)$ im Sinne der Definition 1 vollständig ist.

Es sei S eine beliebige Menge miteinander vertauschbarer hermitescher Operatoren, und es sei $M(S)$ die *maximale* die Menge S enthaltende kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra. Wie wir aus Abschnitt 1 wissen, besitzt $M(S)$ ein einfaches Spektrum. Es sei S' die Menge *aller* hermiteschen Operatoren aus $M(S)$, d. h. $S' = \{B+B^* : B \in M(S)\}$. Offenbar gilt dann:

1° die Elemente von S' sind hermite'sch und miteinander vertauschbar;

2° $S' \supset S$;

3° die minimale auf S' aufgespannte kommutative $\mathcal{C}^*$-Algebra $m(S') = m(S') = M(S)$.

Die Punkte 1°-3° besagen aber, daß man die Menge S der miteinander vertauschbaren hermiteschen Operatoren in ein vollständiges System S' der miteinander vertauschbaren *hermiteschen* Operatoren einbetten kann. Die Dirac'sche Vermutung ist also bewiesen.

Zitierte Werke

[1] P. Cartier, *Développements de fonctions arbitraires suivant les fonctions propres d'un opérateur différentiel*, Séminaire Bourbaki (Décembre 1954).

[2] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford 1947 (insbesondere S. 57).

[3] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, New York 1953.

[4] J. v. Neumann, *On rings of operators. Reduction theory*, Ann. of Math. 50 (1949), S. 401-485.

[5] М. А. Наймарк и С. Б. Фомин, *Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств и некоторые их применения*, Успехи мат. наук 10 (1955), S. 111-142.

Reçu par la Rédaction le 20. 3. 1956