Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en quelques (2-3) fascicules.

Printed in Poland

Wrocławska Drukarnia Naukowa – Wrocław, ul. Świerczewskiego 19.

Sur l'instabilité d'une solution périodique isolée d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dans la présente note nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour l'instabilité d'une solution périodique de l'équation différentielle

$$dx/dt = f(t, x) \tag{1}$$

où $f(t,x)$ est une fonction continue avec ses dérivées $f_x(t,x)$, $f_{xx}(t,x)$ et périodique par rapport à t (de période T, $T>0$). La condition en question constitue une certaine liaison entre la théorie d'un petit paramètre [1] (dans les équations différentielles) et la théorie de l'instabilité [2], p. 11, [3], p. 168 (de la solution périodique isolée).

La démonstration de la suffisance de la condition envisagée est plus simple que celle de la nécessité et n'exige pas l'existence de $f_{xx}(t,x)$ et $f_x(t,x)$ (qui peut être remplacée par l'unicité des solutions de l'équation (1)). C'est pourquoi nous allons partager l'énoncé du théorème en question en deux théorèmes: 1° condition suffisante pour l'instabilité d'une intégrale périodique de l'équation (1) (théorème A, § 1), 2° condition nécessaire pour l'instabilité d'une intégrale périodique de l'équation (1) (théorème B, § 2).

La démonstration du théorème A sera ramenée à la démonstration de quelques théorèmes auxiliaires presque évidents, sur la stabilité (cf. théorèmes 1 et 2, § 3). Le théorème B constitue une conséquence, facile à prouver, de certains lemmes (cf. lemmes 1 et 2, § 6) dont la démonstration est tout à fait simple.

Précisons maintenant les notions intervenant dans l'énoncé de théorèmes A et B.

§ 1. Nous dirons que la solution périodique $\varphi_0(t)$ est *stable* S_+ (S_-) lorsque $\varphi_0(t)$ est stable au sens de Liapounoff (cf. [3], p. 168 ou [2], p. 11) pour $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ c'est-à-dire lorsque pour chaque $\varepsilon>0$ il existe un nombre positif $\delta_\varepsilon>0$ tel que pour chaque intégrale $\varphi(t,x)$ de l'équation (1), passant par le point $(0,x)$ de l'ensemble $|x-x_0|\leqslant\delta_\varepsilon$, on ait $|\varphi(t,x)-\varphi_0(t)|\leqslant\varepsilon$ pour $t\geqslant 0$ $(t\leqslant 0)$. Dans le cas contraire la solution $\varphi_0(t)$ est dite instable S_+ (S_-) au sens de Liapounoff.

La condition suffisante pour l'instabilité

HYPOTHÈSE H. *La fonction $f(t,x)$ est continue partout et périodique par rapport à t, de période T $(T>0)$. L'équation* (1) *satisfait à certaines conditions d'unicité des solutions.*

$\varphi_0(t)$ est une solution (de l'équation (1)*) périodique isolée de même période T que la fonction $f(t,x)$.*

THÉORÈME A. *Dans l'hypothèse* H *que la solution $\varphi_0(t)$ (périodique isolée) de l'équation* (1) *soit instable, il suffit qu'il existe une fonction continue $F(t,x,\lambda)$ telle que*

(1.1) $$F(t,x,0)\equiv f(t,x),$$

(1.2) *$F(t,x,\lambda)$ est périodique par rapport à t, de période T* (cf. hypothèse H).

(1.3) *Il existe deux nombres positifs L $(L>0)$ et ϱ $(\varrho>0)$ tel que pour chaque λ, $0<\lambda\leqslant L$, l'équation*

(1.4) $$dx/dt=F(t,x,\lambda)$$

possède exactement deux solutions périodiques de période T $\{\psi_1(t,\lambda)$ et $\psi_2(t,\lambda)\}$ telles que

$$|\psi_i(0,\lambda)-\varphi_0(0)|\leqslant\varrho\quad(i=1,2),\qquad \lim_{\lambda\to 0}\psi_i(t,\lambda)=\varphi_0(t)\quad pour\quad t\,\epsilon\,(-\infty,+\infty)$$

et

(1.5) $$\psi_1(t,\lambda)\quad soit\ stable\ S_+,$$

(1.6) $$\psi_2(t,\lambda)\quad soit\ stable\ S_-,$$

(1.7) *l'équation* (1.4) *satisfait à condition de l'unicité des intégrales.*

§ 2. THÉORÈME B. *Dans l'hypothèse* H, *lorsque (de plus) $f(t,x)$ admet des dérivées $f_x(t,x)$ et $f_{xx}(t,x)$ continues et telles que*

(2.1) $$\int_0^T f_{xx}(t,\varphi_0(t))\exp\Big[\int_0^t f_x(s,\varphi_0(s))\,ds\Big]\,dt<0,$$

la condition suffisante intervenant dans le théorème A *est aussi nécessaire pour l'instabilité de la solution $\varphi_0(t)$ de l'équation* (1) *(périodique isolée).*

Remarque 1. Dans les hypothèses du théorème B on peut démontrer l'existence d'une fonction $F(t,x,\lambda)$ satisfaisant aux conditions (1.1), (1.2), (1.3), ..., (1.7) et telle qu'il existe des dérivées $F_x(t,x,\lambda)$, $F_{xx}(t,x,\lambda)$ et $F_\lambda(t,x,\lambda)$ continues.

§ 3. Dans la suite (cf. § 4) nous prouverons que la démonstration du théorème A peut être ramenée à celle de certains lemmes dont les énoncés exigent l'introduction des notations suivantes.

Notations. Désignons par $\varphi(t,x)$ la solution de l'équation (1) passant par le point $(0,x)$, c'est-à-dire

(3.1) $$\varphi(0,x)=x,\qquad \varphi_t(t,x)=f\big(t,\varphi(t,x)\big)$$

et posons par définition

(3.2) $$\sigma(x)=\varphi(T,x)-x=\varphi(T,x)-\varphi(0,x).$$

Remarque 2. Soit x_0 une constante arbitraire. Dans l'hypothèse que $f(t,x)$ est périodique par rapport à t de période T $(T>0)$ la périodicité de $\varphi(t,x_0)$ (avec la même période T) est équivalente à la condition

$$\sigma(x_0)=0.$$

On peut aussi reconnaître le caractère stable ou instable de la solution périodique $\varphi(t,x_0)$ en étudiant la fonction $\sigma(x)$ dans un voisinage de x_0. On démontre facilement les théorèmes suivants (sur la stabilité) dont l'énoncé concerne la fonction $\sigma(x)$.

Théorèmes auxiliaires

CONDITION K_+. *Il existe une constante ε, $\varepsilon>0$, telle que*

(K_+) $$\sigma(x)(x-x_0)<0\quad pour\quad 0<|x-x_0|\leqslant\varepsilon.$$

CONDITION K_-. *Il existe une constante ε, $\varepsilon>0$, telle que*

(K_-) $$\sigma(x)(x-x_0)>0\quad pour\quad 0<|x-x_0|\leqslant\varepsilon.$$

THÉORÈME 1. *Dans l'hypothèse* H, *la stabilité S_+ (S_-) est équivalente à la condition K_+ (K_-) (concernant la fonction $\sigma(x)$).*

Il est presque évident que en vertu de l'unicité des solutions de l'équation (1), la fonction $f(t,x)$ étant supposée périodique et continue (cf. hypothèse H), la stabilité S_+ (S_-) résulte de la condition K_+ (K_-) (cf. fig. 1).

Aussi la démonstration du théorème réciproque: *Dans l'hypothèse* H, *la stabilité S_+ (S_-) implique la condition K_+ (K_-), n'est pas compliquée.* Passons donc à l'instabilité.

Du théorème 1 on obtient comme conséquence immédiate le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Dans l'hypothèse H, l'instabilité de la solution $\varphi_0(t)$ périodique isolée de l'équation* (1) *est équivalente à la condition suivante:*

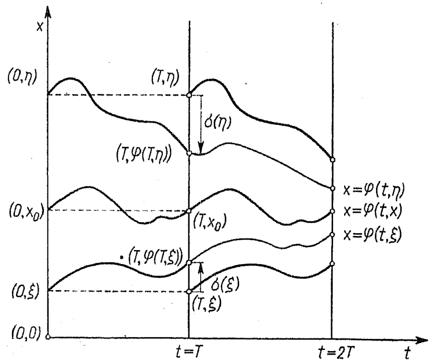

Fig. 1

CONDITION J. *Il existe une constante ε, $\varepsilon > 0$, telle que*

$$\sigma(x)\sigma(y) > 0 \quad \textit{pour} \quad 0 < |x-x_0| \leqslant \varepsilon, \quad 0 < |y-x_0| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire: $\sigma(x)$ admet pour $x = x_0$ un extremum local $\sigma(x_0) = 0$.

§ 4. Démonstration du théorème A. Soit $F(t, x, \lambda)$ une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème A. Désignons par $\varphi(t, x, \lambda)$ l'intégrale de l'équation (1.4) passant par le point $(0, x)$ et posons par définition

$$\sigma(x, \lambda) = \varphi(T, x, \lambda) - x.$$

En vertu du théorème 2 il suffit de prouver que pour $|x-x_0| \leqslant \varrho$ l'expression $\sigma(x, 0)$ ne change pas de signe. En vertu de (1.3) il existe exactement deux fonctions $x_1(\lambda) < x_2(\lambda)$, définies pour $\lambda \epsilon (0, L\rangle$ telles que $x_i(\lambda) \to x_0$ pour $\lambda \to 0$ $(i = 1, 2)$ et $\varphi(t, x_i(\lambda), \lambda)$ soit périodique (de période T) pour chaque $\lambda \epsilon (0, L\rangle$, c'est-à-dire

$$\sigma(x_i(\lambda), \lambda) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \lambda \leqslant L \quad (i = 1, 2).$$

Il est évident que pour $0 < \lambda \leqslant L$ un des cas (α, β) suivants a lieu: on a

(α) $\qquad \psi_1(t, \lambda) \equiv \varphi(t, x_1(\lambda), \lambda), \quad \psi_2(t, \lambda) \equiv \varphi(t, x_2(\lambda), \lambda)$

ou

(β) $\qquad \psi_1(t, \lambda) \equiv \varphi(t, x_2(\lambda), \lambda), \quad \psi_2(t, \lambda) \equiv \varphi(t, x_1(\lambda), \lambda).$

Envisageons le cas (α). (β peut être traité d'une façon tout à fait analogue.)

Il vient du théorème 1 que

$$\sigma(x, \lambda)(x - x_1(\lambda)) < 0$$
$$\text{pour} \quad 0 < |x - x_1(\lambda)| \quad \text{suffisamment petit}, \quad 0 < \lambda \leqslant L,$$
$$\sigma(x, \lambda)(x - x_2(\lambda)) > 0$$
$$\text{pour} \quad 0 < |x - x_2(\lambda)| \quad \text{suffisamment petit}, \quad 0 < \lambda \leqslant L,$$

d'où, en vertu de (1.5) et (1.6),

(4.1) $\qquad \sigma(x, \lambda) > 0 \quad \text{pour} \quad x_0 - \varrho \leqslant x < x_1(\lambda), \quad |\lambda| \leqslant L$
$\qquad\qquad \text{et pour} \quad x_2(\lambda) < x \leqslant x_0 + \varrho, \quad |\lambda| \leqslant L,$

(4.2) $\qquad \sigma(x, \lambda) < 0 \quad \text{pour} \quad x_1(\lambda) < x < x_2(\lambda), \quad |\lambda| \leqslant L.$

Prenons un nombre $\tilde{x}$ quelconque tel que $0 < |\tilde{x} - x_0| \leqslant \varrho$ et posons

(4.3) $$\varepsilon = \tfrac{1}{2}|\tilde{x} - x_0| \leqslant \varrho.$$

Nous avons supposé que $x_i(\lambda) \to x_0$ pour $\lambda \to 0$, d'où il vient qu'il existe un nombre positif $\delta > 0$ tel que

(4.4) $$|x_i(\lambda) - x_0| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad |\lambda| < \delta;$$

$\sigma(x, \lambda)$ étant continue il vient de (4.1), (4.2) et (4.4) que

$$\sigma(x, \lambda) > 0 \quad \text{pour} \quad x_0 - \varrho \leqslant x \leqslant x_0 - \varepsilon \quad \text{et} \quad |\lambda| \leqslant \delta$$
$$\text{et pour} \quad x_0 + \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varrho \quad \text{et} \quad |\lambda| \leqslant \delta.$$

Pour $\lambda = 0$ et $x = \tilde{x}$ nous en obtenons $\sigma(\tilde{x}, 0) > 0$. $\tilde{x}$ étant quelconque $\tilde{x} \neq x_0$, $|x - x_0| \leqslant \varrho$ nous avons

$$\sigma(x, 0) > 0 \quad \text{pour chaque} \quad x \neq x_0, \quad 0 < |x - x_0| \leqslant \varrho.$$

Dans le cas β on obtient $\sigma(x, 0) < 0$ pour $0 < |x - x_0| \leqslant \varrho$. Ainsi $\sigma(x, 0)$ satisfait à la condition J.

§ 5. Démonstration du théorème B. Admettons que les hypothèses du théorème B soient satisfaites par l'équation (1) et construisons une fonction $F(t, x, \lambda)$ dont l'existence doit être démontrée. Posons par définition

$$F(t, x, \lambda) = f(t, x) + \lambda.$$

L'équation (1.4) a donc la forme

(5.1) $$dx/dt = f(t, x) + \lambda.$$

L'unicité des intégrales de (5.1) est garantie par la continuité de la dérivée

$$F_x(t, x, \lambda) \equiv f_x(t, x).$$

On a en outre

$$F(t, x, 0) \equiv f(t, x), \qquad F_\lambda(t, x, \lambda) \equiv 1 > 0,$$

d'où il vient

$$\int_0^T F_\lambda(s, \varphi_0(s), 0) \exp\Big[-\int_0^s f_x(u, \varphi_0(u))\,du\Big]\,ds = \int_0^T \exp\Big[-\int_0^s f_x(u, \varphi_0(u))\,du\Big]\,ds > 0.$$

Pour terminer la démonstration il suffit de prouver les lemmes suivants.

§ 6. LEMME 1. *Dans les hypothèses du théorème* B, *lorsque $\varphi_0(t)$ est une solution périodique isolée instable, la fonction $\sigma(x)$ admet pour $x = x_0$ un maximum local.*

LEMME 2. *Dans les hypothèses du lemme* 1, *lorsque $F(t, x, \lambda)$ est une fonction périodique de période T et continue avec les dérivées F_x, F_{xx}; $F(t, x, 0) \equiv f(t, x)$ et $F(t, x, \lambda)$ admet le long de la solution $\varphi_0(t)$ une dérivée $F_\lambda(t, x, \lambda)$ continue telle que*

(6.1) $$\int_0^T F_\lambda(s, \varphi_0(s), 0) \exp\Big[-\int_0^s F_x(u, \varphi_0(u), 0)\,du\Big]\,ds > 0,$$

alors il existe deux nombres $L > 0$ et $r > 0$ tels que l'équation

(6.2) $$dx/dt = F(t, x, \lambda)$$

admette exactement deux solutions $\psi_1(t, \lambda)$, $\psi_2(t, \lambda)$ $(\psi_1 < \psi_2)$ périodiques de période T, telles que

$$|\psi_i(0, \lambda) - \varphi_0(0)| \leqslant r \quad \textit{pour} \quad 0 < \lambda \leqslant L$$

et les fonctions $\psi_i(t, \lambda)$ satisfassent aux conditions:

1. *$\psi_1(t, \lambda)$ est stable S_-,*
2. *$\psi_2(t, \lambda)$ est stable S_+* (cf. § 1, (1.1), ..., (1.6)).

§ 7. Démonstration du lemme 1. Dans les hypothèses de notre lemme 1, l'instabilité de $\varphi_0(t)$ peut, en vertu du théorème 2, avoir lieu exclusivement dans le cas où la fonction $\sigma(x)$ admet pour $x_0 = \varphi_0(0)$ un extremum local. Le caractère de cet extremum dépend du signe de la dérivée $\sigma''(x_0)$. De la définition de la fonction $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = \varphi(T, x) - x$$

il vient que

$$\sigma'(x) = \varphi_x(T, x) - 1, \qquad \sigma''(x) = \varphi_{xx}(T, x).$$

En vertu du théorème de Bendixon (cf. [4], p. 155) on a

$$\varphi_x(T, x) = \exp \int_0^T f_x(s, \varphi(s, x))\,ds \;(^1).$$

Au point x_0 où $\sigma(x)$ admet un extremum, la dérivée $\gamma'(x_0) = 0$. On a donc

$$\exp \int_0^T f_x(s, \varphi(s, x_0))\,ds = 1,$$

c'est-à-dire

(7.1) $$\int_0^T f_x(s, \varphi_0(s))\,ds = 0.$$

D'autre part

$$\varphi_{xx}(T, x) = \Big[\int_0^T f_{xx}(s, \varphi(s, x)) \exp\Big(\int_0^s f_x(u, \varphi(u, x))\,du\Big)\,ds\Big] \exp\Big(\int_0^T f_x(\xi, \varphi(\xi, x))\,d\xi\Big)$$

d'où on obtient en vertu de (7.1)

(7.2) $$\sigma''(x_0) = \int_0^T f_{xx}((s, \varphi_0(s))\Big[\exp \int_0^s f_x(u, \varphi_0(u))\,du\Big]\,ds$$

et par suite de l'hypothèse (2.1) il vient $\sigma''(x_0) < 0$. Cela veut dire qu'il existe une constante ε, $\varepsilon > 0$, telle que

$$\sigma(x_0) = \max_{|x - x_0| < \varepsilon} \sigma(x).$$

Le lemme 1 se trouve ainsi démontré.

---

(1) Cette relation peut être obtenue de l'identité $\varphi_t(t, x) \equiv f(t, \varphi(t, x))$. En effet la dérivation par rapport à x conduit à l'identité

$$\varphi_{tx}(t, x) \equiv f_x(t, \varphi(t, x))\varphi_x(t, x).$$

La fonction $\varphi_x(t, x)$ satisfait donc pour chaque x fixe à l'équation différentielle

$$dy/dt = f_x(t, \varphi(t, x))\,y$$

d'où il vient que

$$\varphi_x(t, x) = \varphi_x(0, x) \exp \int_0^t f_x(s, \varphi(s, x))\,ds.$$

Mais $\varphi(0, x) \equiv x$, donc $\varphi_x(0, x) \equiv 1$ et par suite

$$\varphi_x(t, x) = \exp \int_0^t f_x(s, \varphi(s, x))\,ds.$$

§ 8. Démonstration du lemme 2 (cf. fig. 2 à la fin du travail et remarque 3). Dans les hypothèses du lemme 1 la fonction $\sigma(x,\lambda)$ définie comme $\varphi(T,x,\lambda)-\varphi(0,x,\lambda)=\varphi(T,x,\lambda)-x$ (où $\varphi(t,x,\lambda)$ est la solution de l'équation (6.2) passant par le point $(0,x)$) satisfait, en vertu de (7.1) et (6.1), à la condition

$$\sigma(x,0)<0 \quad \text{pour} \quad 0<|x-x_0|<r$$

(où r est une constante ($r>0$) suffisamment petite). De la continuité de $\sigma(x,\lambda)$ il vient

$$\sigma(x_0+r,\lambda)<0 \quad \text{pour} \quad |\lambda|\leqslant L, \tag{8.1}$$

$$\sigma(x_0-r,\lambda)<0 \quad \text{pour} \quad |\lambda|\leqslant L \tag{8.2}$$

(où L est une constante positive convenable). Envisageons la condition (6.1). La dérivée $\sigma_\lambda(x_0,0)$ étant donnée par la relation

$$\sigma_\lambda(x_0,\lambda)=\varphi_\lambda(T,x_0,0)=\Big[\exp\int_0^T F_x\big(\xi,\varphi_0(\xi),0\big)d\xi\Big]\times$$
$$\times\Big\{\int_0^T F_\lambda\big(s,\varphi_0(s),0\big)\exp\Big[-\int_0^s F_x\big(u,\varphi_0(u),0\big)\Big]du\,ds\Big\}^{(2)}.$$

D'après (6.1) et (7.1) nous avons pour $x=x_0$ et $\lambda=0$

$$\sigma_\lambda(x_0,0)=\int_0^T F_\lambda\big(s,\varphi_0(s),0\big)\exp\Big[\int_0^s f_x\big(u,\varphi_0(u)\big)du\Big]ds>0 \tag{8.3}$$

d'où il vient, pour L suffisamment petit ($L>0$),

$$\sigma(x_0,\lambda)>\sigma(x_0,0)=0 \quad \text{pour} \quad 0<\lambda\leqslant L. \tag{8.4}$$

En vertu de (8.1), (8.2) et (8.4) et de la continuité de $\sigma(x,\lambda)$ pour chaque λ $(0<\lambda\leqslant L)$ il y a exactement deux racines $x_1(\lambda)<x_2(\lambda)$, $|x_i(\lambda)-x_0|\leqslant r$ de l'équation $\sigma(x,\lambda)=0$ et

$$\sigma(x,\lambda)<0 \quad \text{pour} \quad x_0-r\leqslant x<x_1(\lambda)$$
$$\text{et pour} \quad x_2(\lambda)<x\leqslant x_0+r, \quad 0<\lambda\leqslant L,$$
$$\sigma(x,\lambda)>0 \quad \text{pour} \quad x_1(\lambda)<x<x_2(\lambda), \quad 0<\lambda\leqslant L.$$

Du théorème 1 il résulte donc que les solutions $\varphi\big(t,x_1(\lambda),\lambda\big)$ et $\varphi\big(t,x_2(\lambda),\lambda\big)$ sont périodiques de période T et

$$\psi_1(t,\lambda)=\varphi\big(t,x_1(\lambda),\lambda\big) \quad \text{est stable } (S_-),$$
$$\psi_2(t,\lambda)=\varphi\big(t,x_2(\lambda),\lambda\big) \quad \text{est stable } (S_+).$$

Le théorème se trouve ainsi démontré.

(2) Cette relation peut être obtenue par des calculs analogues à ceux qui interviennent dans la note (1).

Remarque 3. Dans le théorème B l'hypothèse (2.1) peut être remplacée par l'hypothèse suivante:

$$\int_0^T f_{xx}\big(t,\varphi_0(t)\big)\Big[\exp\int_0^t f_x\big(s,\varphi_0(s)\big)ds\Big]dt>0 \tag{8.5}$$

(cf. (7.2)).

Lemme 1'. *Dans cette hypothèse la fonction $\sigma(x)$ admet pour $x=x_0$ un minimum local.*

Lemme 2'. *La modification du lemme 2 obtenue en remplaçant la relation* (6.1) *par l'inégalité*

$$\int_0^T F_\lambda\big(s,\varphi_0(s),0\big)\exp\Big[-\int_0^s F_x\big(u,\varphi_0(u),0\big)du\Big]ds<0$$

(cf. (8.3)) *et les hypothèses du lemme* 1 *par celles du lemme* 1' *permet de*

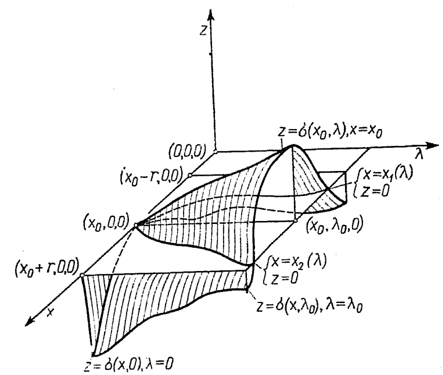

Fig. 2

démontrer l'existence d'exactement deux solutions périodiques d'une équation différentielle de la forme suivante:

$$dx/dt=f(t,x)-\lambda$$

(cf. (7.1), (7.2) lemme 1', (8.3) et fig. 2) *et par suite elle permet de démontrer une condition nécessaire d'instabilité tout à fait analogue au théorème* B (où l'hypothèse (2.1) est remplacée par (8.5)).

Travaux cités

[1] И. Г. Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний,* Москва-Ленинград 1949.

[2] — *Теория устойчивости движения,* Москва-Ленинград 1952.

[3] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений,* Москва-Ленинград 1949.

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen,* Leipzig 1930.

Reçu par la Rédaction le 4. 5. 1956

Sur les méthodes continues de limitation du type de Borel

par L. WŁODARSKI (Łódź)

Introduction (1). Nous pouvons considérer la limite de la suite $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ comme une fonctionnelle $\xi = L(x)$ définie pour les suites convergentes $x = \{\xi_n\}$.

Introduisons les notations suivantes:

$$x = \{\xi_n\} = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}, \quad \lambda x = \{\lambda\xi_n\}, \quad y = \{\eta_n\},$$
$$x+y = \{\xi_n+\eta_n\}, \quad xy = \{\xi_n\eta_n\}, \quad x/y = \{\xi_n/\eta_n\},$$

$\bar{x}_n$ — suite qu'on obtient de la suite x par un changement arbitraire du $n^{\text{-ième}}$ terme; $\bar{x}_n = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \bar{\xi}_n, \xi_{n+1}, \ldots\}$,

x^*_{-1} — suite qu'on obtient de la suite x en y ajoutant un premier terme; $x^*_{-1} = \{\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$,

x^*_1 — suite qu'on obtient de la suite x en en retranchant le premier terme; $x^*_1 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$.

La fonctionnelle en question a les propriétés suivantes:

1° $L(x+y) = L(x)+L(y)$,	c'est-à-dire elle est additive,
2° $L(\lambda x) = \lambda L(x)$,	c'est-à-dire elle est homogène,
3° $L(\bar{x}_n) = L(x)$,	c'est-à-dire elle ne dépend pas du changement d'un des termes,
4° $L(x^*_{-1}) = L(x)$,	c'est-à-dire elle est translative à droite,
5° $L(x^*_1) = L(x)$,	c'est-à-dire elle est translative à gauche,
6° $L(xy) = L(x)L(y)$,	c'est-à-dire elle est multiplicative,
7° $L(x/y) = L(x)/L(y)$,	pour $L(y) \neq 0$.

Les propriétés 1°-7° s'entendent de la manière suivante: Si le membre droit d'une des égalités existe, alors le membre gauche de l'égalité correspondante existe aussi et il est égal au membre droit.

(1) Les résultats de ce travail ont été exposés par l'auteur à la séance du 30. IV. 1955 de la Société Mathématique Polonaise, Section de Lublin.