Sur l'algèbre des objets géométriques de première classe à une composante

par S. Gołąb (Kraków) et H. Pidek-Łopuszańska (Wrocław)

§ 1. Introduction. Le problème de l'algèbre des objets géométriques n'a été jusqu'ici complètement résolu que pour les objets de classe zéro (voir les travaux de H. Pidek [5], [6], [7]). Ce problème consiste à trouver toutes les opérations qui, „effectuées" sur des objets, donnent comme résultat des objets. Pour les objets de première classe (c'est-à-dire les objets dont la règle de transformation des composantes contient des dérivées du premier ordre des fonctions transformant les composantes) l'algèbre n'a jusque'ici pas été traitée systématiquement, bien que pour les objets les plus importants de ce type (les affineurs et les densités) on connaisse beaucoup d'opérations algébriques. L'algèbre des scalaires est triviale, car toute fonction de scalaires représente un scalaire. Mais déjà pour les densités (qui sont, après les scalaires et les biscalaires, les objets les plus simples de première classe à une composante) il existe des fonctions qui ne représentent pas un objet géométrique. Le problème de l'algèbre des densités est donc le suivant: étant donnée une densité $\mathfrak{g}_1$ de poids p_1 et une seconde densité $\mathfrak{g}_2$ de poids p_2, trouver toutes les fonctions de deux variables $f(x, y)$ telles que l'expression

$$f(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) \tag{1}$$

représente un objet géométrique (qui ne doit pas nécessairement être une densité).

Dans les présent travail nous traitons le problème de l'algèbre pour les objets géométriques du type Δ à une composante ω, c'est-à-dire les objets dont la règle de transformation de la composante, quand on passe du système des coordonnées U au système $\overline{U}$, est de la forme

$$\overline{\omega} = F(\omega, \Delta), \tag{2}$$

où Δ est le jacobien de la transformation, qui mène de U à $\overline{U}$. Si la dimension de l'espace est $n = 1$, alors tout objet géométrique de première classe proprement différentiel (c'est-à-dire tel que la fonction transformant la composante ne dépende pas de la coordonnée même dans les systèmes U et $\overline{U}$) est de la forme (2). Pour $n \geqslant 3$ on sait que tout objet proprement différentiel de première classe est nécessairement du type Δ (voir S. Gołąb [3]). Seulement pour $n = 2$ il existe outre les objets du type Δ, d'autres objets, appelés objets de Piencow (voir S. Gołąb [4]).

Le problème de l'algèbre des objets dans le cas $n = 2$ sera traité ailleurs.

Les objets du type Δ peuvent être divisés en quatre catégories (voir S. Gołąb [2]), à savoir:

I. Les scalaires (qui sont à strictement parler des objets de classe zéro, car leur fonction F, qui est constante, ne dépend pas de Δ).

II. Les biscalaires, c'est-à-dire les objets qui sont des scalaires pour $\Delta > 0$ et changent leur composante pour $\Delta < 0$. La fonction F est définie dans ce cas seulement pour deux valeurs différentes ω' et ω'', de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} &F(\omega^i, \Delta) = \omega^i \quad \text{pour} \quad \Delta > 0 \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \\ &F(\omega', \Delta) = \omega'' \quad \text{pour} \quad \Delta < 0, \\ &F(\omega'', \Delta) = \omega' \quad \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Remarquons que pour les scalaires et les biscalaires la règle (2) peut être écrite sous la forme

$$\overline{\omega} = \omega \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \qquad \overline{\omega} = \nu(\omega) \quad \text{pour} \quad \Delta < 0 \tag{4}$$

où la fonction $\nu(x)$ vérifie l'équation

$$\nu[\nu(x)] = x. \tag{5}$$

Pour les scalaires on a $\nu(x) \equiv x$ et pour les biscalaires $\nu(x) \not\equiv x$.

La fonction $\nu(x)$ ne doit pas être définie partout, mais le domaine où elle est définie doit être identique à l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre.

III. Les fonctions inversibles des densités de Weyl(¹), c'est-à-dire les objets pour lesquels la fonction F est de la forme

$$F(\omega, \Delta) = g\{|\Delta| g^{-1}(\omega)\}, \tag{6}$$

où $g(u)$ est une fonction inversible et continue, définie soit pour toutes les valeurs $u > 0$, soit pour $u < 0$, soit pour $u \neq 0$; g^{-1} désigne la fonction inverse de g. Si la fonction g possède les propriétés énoncées ci-dessus, on dira qu'elle est de classe (ou du type) β.

Le domaine où g^{-1} est définie est un intervalle A (fini ou infini).

(¹) Une densité de Weyl est un objet dont la règle de transformation est de la forme $\overline{\omega} = \omega|\Delta|$.

IV. Les fonctions inversibles des densités ordinaires(²), c'est-à-dire les objets pour lesquels la fonction F est de la forme

$$F(\omega, \Delta) = h\{\Delta h^{-1}(\omega)\},$$

où $h(u)$ est une fonction définie pour toutes les valeurs $u \neq 0$, inversible partout et continue dans chacun des intervalles $u > 0$ et $u < 0$. Si la fonction h possède les propriétés énoncées ci-dessus, on dira qu'elle est de classe (ou du type) α.

Le domaine où h^{-1} est définie se compose de deux intervalles disjoints (finis ou infinis) A, B, tels qu'on a

$$\omega \in A,\ \Delta > 0 \to F(\omega, \Delta) \in A, \qquad \omega \in B,\ \Delta > 0 \to F(\omega, \Delta) \in B,$$

$$\omega \in A,\ \Delta < 0 \to F(\omega, \Delta) \in B, \qquad \omega \in B,\ \Delta < 0 \to F(\omega, \Delta) \in A.$$

Dans toutes les considérations ultérieures les objets cités ci-dessus seront appelés simplement objets du type S, B, W, G.

§ 2. Le problème de l'algèbre des objets du type Δ est — comme nous avons dit — le suivant: étant donnés deux objets ω_1 et ω_2 d'un des quatre types S, B, W, G, trouver toutes les fonctions de deux variables $f(x, y)$ telles que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet d'un des quatre types. Il est facile de démontrer que $f(\omega_1, \omega_2)$ doit être toujours un objet proprement différentiel de classe un ou zéro. Nous n'étudierons pas le cas où la fonction $f(x, y)$ ne dépend pas de deux variables, mais se réduit à une fonction d'une variable. D'ailleurs, les suppositions concernant la régularité de la fonction f seront aussi faibles que possible.

Remarquons que la classification des objets du type Δ est faite dans l'hypothèse que la fonction F, à l'aide de laquelle est donnée la régle de transformation (2) de ces objets, est de classe C_1. Quelques travaux de J. Aczél montrent pourtant qu'on peut obtenir le même ensemble de solutions avec des hypothèses plus faibles.

Pour donner aux résultats une forme aussi claire et brève que possible, nous introduirons des symboles pour désigner certaines fonctions qui sont ou bien symétriques, ou bien possèdent des propriétés un peu plus compliquées.

I. Les fonctions du type α seront désignées par $h(u)$, $h_1(u)$, $h_2(u)$, les fonctions du type β par $g(u)$, $g_1(u)$, $g_2(u)$.

II. Les fonctions qui satisfont à l'équation fonctionnelle $f[f(x)] \equiv x$ seront désignées par ν, μ.

(²) Une densité ordinaire est un objet dont la règle de transformation est de la forme $\overline{\omega} = \omega\Delta$.

III. Les symboles $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \psi_1^*, \varrho_0, \varrho, \varrho^*, \sigma, \chi, \tau$ désigneront des fonctions qui satisfont aux équations fonctionnelles suivantes:

1. $\varphi_0(\lambda x, \lambda y) = \varphi_0(x, y), \quad \lambda \neq 0,$
2. $\psi_0(\lambda x, \lambda y) = \psi_0(x, y), \quad \lambda > 0,$
3. $\varphi_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda\varphi_1(x, y), \quad \lambda \neq 0,$
4. $\psi_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda\psi_1(x, y), \quad \lambda > 0,$
5. $\psi_1^*(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\psi_1^*(x, y), \quad \lambda \neq 0,$
6. $\varrho_0(x, \lambda y) = \lambda\varrho_0(x, y), \quad \lambda \neq 0,$
7. $\varrho(x, \lambda y) = \lambda\varrho(x, y), \quad \lambda > 0,$
8. $\varrho^*(x, \lambda y) = |\lambda|\varrho^*(x, y), \quad \lambda \neq 0,$
9. $\begin{cases}\sigma(x, \lambda y) = \sigma(x, y), & \lambda > 0,\\ \sigma(-x, y) = \sigma(x, y),\end{cases}$
10. $\begin{cases}\chi(\lambda x, \lambda y) = \chi(x, y), & \lambda > 0,\\ \chi(-x, y) = \chi(x, y),\end{cases}$
11. $\begin{cases}\tau(\lambda x, \lambda y) = \lambda\tau(x, y), & \lambda > 0,\\ \tau(-x, y) = -\tau(x, y).\end{cases}$

IV. En outre, les symboles $\varrho_\nu, \varrho_\nu^*, \varrho_\nu^{**}, \chi_\nu$ désigneront des fonctions qui dépendent d'une fonction du type ν et satisfont aux équations fonctionnelles suivantes:

$$\begin{cases}\varrho_\nu(x, \lambda y) = \lambda\varrho_\nu(x, y), & \lambda > 0,\\ \varrho_\nu[\nu(x), -\lambda y] = -\lambda\varrho_\nu(x, y), & \lambda < 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varrho_\nu^*(x, \lambda y) = \lambda\varrho_\nu^*(x, y), & \lambda > 0,\\ \varrho_\nu^*[\nu(x), \lambda y] = -\lambda\varrho_\nu^*(x, y), & \lambda < 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varrho_\nu^{**}(x, \lambda y) = \lambda\varrho_\nu^{**}(x, y), & \lambda > 0,\\ \varrho_\nu^{**}[\nu(x), -\lambda y] = \lambda\varrho_\nu^{**}(x, y), & \lambda < 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\chi_\nu(\lambda x, \lambda y) = \chi(x, y), & \lambda > 0,\\ \chi_\nu(\lambda x, -\lambda y) = \nu[\chi_\nu(x, y)], & \lambda < 0.\end{cases}$$

V. Le symbole k^{-1} désignera la fonction inverse de k, lorsque k est une fonction inversible d'une variable. Dans § 9 on trouvera un tableau qui montre simplement quel objet peut-être obtenu comme résultat d'une opération faite sur deux objets du type donné; nous y donnons aussi (à l'aide des symboles III et IV) les solutions, c'est-à-dire toutes les opérations qui donnent des objets. Introduisons enfin la convention suivante:

(U^*) désignant un système primitif de coordonnées (évidemment local, car toutes nos considérations ont un caractère local) tous les systèmes (U) que l'on obtient de (U^*) par une transformation dont le jacobien est $\Delta > 0$, seront appelés droits, et tous les systèmes obtenus de (U^*) par une transformation de jacobien $\Delta < 0$ seront dits gauches.

§ 3. Si les objets ω_1 et ω_2 sont tous les deux du type S, alors, comme nous l'avons remarqué, chaque fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ représente un objet du type S. Supposons maintenant que ω_1 et ω_2 soient deux biscalaires quelconques. Dans quelles conditions la fonction

$$f(\omega_1, \omega_2) \tag{7}$$

représente-t-elle un objet géométrique? Il est clair que (7) ne peut être qu'un objet du type S ou B, car pour $\Delta > 0$ on a $\bar{\omega}_1 = \omega_1$, $\bar{\omega}_2 = \omega_2$ et ensuite

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0,$$

ce qui n'est pas possible pour les objets du type W ou G. Désignons par $\omega_3 = f(\omega_1, \omega_2)$. Dans les systèmes droits on a $\omega_1 = \omega_1'$, $\omega_2 = \omega_2'$ et dans les systèmes gauches $\omega_1 = \omega_1''$, $\omega_2 = \omega_2''$.

Il en résulte que dans les systèmes droits on a $\omega_3' = f(\omega_1', \omega_2')$ et dans les systèmes gauches $\omega_3'' = f(\omega_1'', \omega_2'')$. Si

$$f(\omega_1', \omega_2') \neq f(\omega_1'', \omega_2''), \tag{8}$$

alors ω_3 est un biscalaire; si, au contraire, on a

$$f(\omega_1', \omega_2') = f(\omega_1'', \omega_2'') \tag{9}$$

alors ω_3 est un scalaire. On obtient un résultat analogue dans le cas où ω_1 est un scalaire et ω_2 un biscalaire ou *vice versa*. Le raisonnement donné ci-dessus étant facile à retourner, on a le résultat suivant:

Si les objets ω_1 et ω_2 sont du type S, alors (7) représente un objet du type S; si au moins l'un des objets est du type B, alors, dans les cas où la relation (9) est remplie, l'objet (7) est du type S, et dans le cas où la relation (8) est remplie, l'objet (7) est du type B.

§ 4. Supposons que les objets ω_1 et ω_2 soient tous les deux du type G. Voyons dans quelles conditions la fonction (7) représente un objet du type S, B, W ou G. Admettons que la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ représente un objet du type S ou B. Il existe alors une fonction $\nu(x)$, satisfaisant à la condition (5), telle que

$$\begin{aligned} f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) &= f(\omega_1, \omega_2) && \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) &= \nu[f(\omega_1, \omega_2)] && \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Les objets ω_1 et ω_2 étant par hypothèse du type G, on a

$$\bar{\omega}_1 = h_1\{\Delta h^{-1}(\omega_1)\}, \quad \bar{\omega}_2 = h_2\{\Delta h_2^{-1}(\omega_2)\}. \tag{11}$$

Les équations (10) peuvent alors être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} f\{h_1[\Delta h_1^{-1}(\omega_1), h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)]\} &= f(\omega_1, \omega_2) && \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ f\{h_1[\Delta h_1^{-1}(\omega_1)], h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)]\} &= \nu[f(\omega_1, \omega_2)] && \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Avec le changement de variables

$$\xi = h_1^{-1}(\omega_1), \quad \eta = h_2^{-1}(\omega_2) \tag{13}$$

et la notation

$$\psi_0(\xi, \eta) \overset{\mathrm{df}}{=} f\{h_1(\xi), h_2(\eta)\}$$

les équations (12) prennent la forme

$$\begin{aligned} \psi_0(\Delta\xi, \Delta\eta) &= \psi_0(\xi, \eta) && \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ \psi_0(\Delta\xi, \Delta\eta) &= \nu[\psi_0(\xi, \eta)] && \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned} \tag{13'}$$

La première de ces relations exprime que la fonction ψ_0 est positivement homogène d'ordre zéro. La deuxième est une relation entre la fonction ψ_0 et la fonction ν. La fonction ψ_0 étant choisie à volonté (on sait qu'une fonction positivement homogène de deux variables est completement définie par ses valeurs sur le cercle dont le centre coïncide avec l'origine du système des coordonnées), la deuxième des relations (13′) peut mener à une contradiction, car l'équation (5) peut ne pas être satisfaite. Donc, lorsqu'on prend arbitrairement une fonction ν satisfaisant à (5) et la fonction ψ_0 est donnée dans un des deux demi-plans determinés par la droite passant par l'origine du système des coordonnées, la deuxième des relations (13′) détermine la fonction ψ_0 dans l'autre demi-plan. En effet, en posant $\Delta = -1$ dans la deuxième des relations (13′), on a

$$\psi_0(-\xi, -\eta) = \nu[\psi_0(\xi, \eta)].$$

Ainsi les relations (13′) sont complètement satisfaites. Si, en particulier, on a $\nu(x) = x$, alors la fonction ψ_0 se réduit à une fonction du type φ_0. Inversement, il est facile de vérifier que la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = \varphi_0\{h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)\}$$

représente un scalaire. Par contre, la fonction

$$f(\omega_1, \omega_2) = \psi_0\{h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)\}$$

représente un biscalaire, ψ_0 désigne ici une fonction homogène qui ne se réduit pas à φ_0 et qui est définie arbitrairement dans un demi-plan et prend dans l'autre demi-plan des valeurs conformes à la deuxième des relations (13′), la fonction $\nu(x) \neq x$ vérifiant la condition (5).

Admettons maintenant que f soit un objet du type G, c'est-à-dire

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = h[\Delta h^{-1}\{f(\omega_1, \omega_2)\}].$$

De là on a, en profitant de l'inversibilité des fonctions h, h_1, h_2 et des relations (11) et (13)

$$h^{-1}\{f[h_1(\Delta h_1^{-1}(\omega_1)), h_2(\Delta h_2^{-1}(\omega_2))]\} = \Delta h^{-1}\{f(\omega_1, \omega_2)\},$$

$$h^{-1}\{f[h_1(\Delta\xi), h_2(\Delta\eta)]\} = \Delta h^{-1}\{f[h_1(\xi), h_2(\eta)]\}.$$

Posons

$$\varphi_1(\xi, \eta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} h^{-1}\{f[h_1(\xi), h_2(\eta)]\}. \tag{14}$$

La dernière relation peut alors être écrite sous la forme

$$\varphi_1(\Delta\xi, \Delta\eta) = \Delta\varphi_1(\xi, \eta),$$

d'où il s'ensuit que la fonction φ_1 est homogène du premier ordre. La définition (14) donne alors (en revenant aux variables ω_1 et ω_2)

$$f(\omega_1, \omega_2) = h\{\varphi_1[h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)]\}. \tag{15}$$

Inversement, il est facile de vérifier qu'avec une fonction arbitraire h du type α et une fonction arbitraire φ_1 la fonction f définie par la formule (15) représente un objet du type G.

Admettons enfin que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type W, c'est-à-dire

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = g\{|\Delta| g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}. \tag{16}$$

Posons

$$\psi_1^*(\xi, \eta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} g^{-1}\{f[h_1(\xi), h_2(\eta)]\}. \tag{17}$$

La relation (16) peut alors être écrite sous la forme

$$\psi_1^*(\Delta\xi, \Delta\eta) = |\Delta|\psi_1^*(\xi, \eta).$$

De la relation (17) on tire $f[h_1(\xi), h_2(\eta)] = g[\psi_1^*(\xi, \eta)]$, d'où

$$f(\omega_1, \omega_2) = g\{\psi_1^*[h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)]\}. \tag{18}$$

Inversement, il est facile de vérifier qu'avec une fonction quelconque g du type β et une fonction quelconque ψ_1^*, la fonction f définie par la formule (18) représente un objet du type W.

Nous avons donc démontré que, dans le cas où ω_1 et ω_2 sont des objets du type G, on peut obtenir des objets de tous les quatre types en choisissant convenablement la fonction f.

§ 5. Supposons que les objets ω_1 et ω_2 soient tous les deux du type W. Voyons dans quelles conditions la fonction (7) représente un objet du type S, B, W ou G. Les objets ω_1 et ω_2 étant du type W, comme nous l'avons supposé, on a

$$\bar{\omega}_1 = g_1\{|\Delta| g_1^{-1}(\omega_1)\}, \quad \bar{\omega}_2 = g_2\{|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)\}, \tag{19}$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions du type β.

Admettons que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un (bi)scalaire. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} f\{g_1[|\Delta| g_1^{-1}(\omega_1)], g_2[|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ f\{g_1[|\Delta| g_1^{-1}(\omega_1)], g_2[|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= \nu[f(\omega_1, \omega_2)] \quad \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Posons

$$\xi = g_1^{-1}(\omega_1), \quad \eta = g_2^{-1}(\omega_2) \tag{21}$$

soit

$$\varphi_0(\xi, \eta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f[g_1(\xi), g_2(\eta)].$$

Alors on peut écrire les relations (20) sous la forme plus simple

$$\begin{aligned} \varphi_0(\Delta\xi, \Delta\eta) &= \varphi_0(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ \varphi_0(-\Delta\xi, -\Delta\eta) &= \nu[\varphi_0(\xi, \eta)] \quad \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned}$$

En particulier, si l'on pose dans la deuxième de ces rélations $\Delta = -1$ on a $\varphi_0(\xi, \eta) = \nu[\varphi_0(\xi, \eta)]$ ce qui exprime que la fonction $\nu(x)$ est identiquement égale à x, dans son domaine de définition, et l'objet $f(\omega_1, \omega_2)$ ne peut être un biscalaire, mais seulement un scalaire.

Inversement, il est facile de vérifier qu'avec des fonctions arbitraires g_1, g_2 du type β, la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = \varphi_0[g_1^{-1}(\omega_1), g_2^{-1}(\omega_2)]$$

représente un scalaire.

Admettons maintenant que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type G, c'est-à-dire

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\},$$

où h est une fonction du type α. Avec les relations (19) on a

$$f\{g_1[|\Delta| g_1^{-1}(\omega_1)], g_2[|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)]\} = h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}.$$

Nous verrons que cette relation conduit à une contradiction. En effet, posons dans celle-ci $\Delta = -1$; nous avons

$$f(\omega_1, \omega_2) = h\{-h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\},$$

d'où $h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)] = -h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]$ et enfin $h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)] = 0$. Il s'ensuit de cette dernière relation que la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ est constante, contrairement à l'hypothèse. Ainsi la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ ne peut être un objet du type G.

Admettons enfin que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type W, c'est-à-dire

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = g\{|\Delta| g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\},$$

où g est une fonction du type β. Avec les relations (19) on a

$$(22) \qquad f\{g_1[|\Delta| g_1^{-1}(\omega_1)], g_2[|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)]\} = g\{|\Delta| g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}.$$

Profitant des substitutions (21) posons

$$\psi_1(\xi, \eta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} g^{-1}\{f[g_1(\xi), g_2(\eta)]\}.$$

Alors, l'équation (22) peut être écrite sous la forme

$$\psi_1(|\Delta|\xi, |\Delta|\eta) = |\Delta|\psi_1(\xi, \eta).$$

Il s'ensuit que la fonction ψ doit être positivement homogène du premier ordre.

Inversement, avec une fonction arbitraire du type ψ_1 et une fonction arbitraire g du type β, la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = g\{\psi_1[g_1^{-1}(\omega_1), g_2^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type W.

Nous avons donc démontré que, dans le cas où ω_1 et ω_2 sont tous les deux des objets du type W, on peut obtenir des objets du type S ou W, tandis qu'il n'est pas possible d'obtenir des objets du type B ou G.

§ 6. Supposons maintenant que ω_1 soit un (bi)scalaire et ω_2 un objet du type G. Nous avons donc

$$(23) \qquad \bar{\omega}_2 = h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)].$$

Admettons d'abord que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un (bi)scalaire, c'est-à-dire

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0.$$

Puisque pour $\Delta > 0$ on a $\bar{\omega}_1 = \omega_1$ il vient

$$(24) \qquad f\{\omega_1, h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)]\} = f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0.$$

Désignons par A et B les intervalles composants du domaine de définition de ω_2. L'identité (24) donne

$$(25) \qquad f(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} C_1(\omega_1) & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon A, \\ C_2(\omega_1) & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon B. \end{cases}$$

Puisque ω_1 et ω_3 sont des (bi)scalaires, on a

$$\bar{\omega}_1 = \nu(\omega_1), \quad \bar{\omega}_3 = \mu(\omega_3) \quad \text{pour} \quad \Delta < 0$$

et ensuite

$$(26) \qquad f\{\nu(\omega_1), h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)]\} = \mu[f(\omega_1, \omega_2)] \quad \text{pour} \quad \Delta < 0.$$

Soit $\omega_2 \epsilon A$. Puisque $\Delta < 0$, on a $h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)] \epsilon B$. Le premier membre de la relation (26) est alors égal à $C_2[\nu(\omega_1)]$, tandis que le second est égal à $\mu[C_1(\omega_1)]$. On a ainsi

$$C_2[\nu(\omega_1)] = \mu[C_1(\omega_1)].$$

En supposant $\omega_2 \epsilon B$ on obtient un résultat analogue

$$C_1[\nu(\omega_1)] = \mu[C_2(\omega_1)]$$

et enfin

$$C_1(\omega_1) = \mu\{C_2[\nu(\omega_1)]\}, \quad C_2(\omega_1) = \mu\{C_1[\nu(\omega_1)]\}.$$

Ces relations ne sont pas indépendantes (elles sont équivalentes); chacune d'elles exprime le fait que les fonctions ν, μ, C_1 déterminent dejà la fonction C_2. Le domaine de définition de ω_1 se compose d'un ou de deux points (selon que ω_1 est scalaire ou biscalaire). Dans le cas où ω_1 est un scalaire on a $\nu(\omega_1) = \omega_1$ et $C_2 = \mu(C_2)$. Si $f(\omega_1, \omega_2)$ était aussi un scalaire, on aurait $C_1 = C_2$ et ainsi $f(\omega_1, \omega_2)$ ne dépendrait pas de la variable ω_2, contrairement à l'hypothèse. Donc, dans le cas où ω_1 est un scalaire, la fonction f ne peut être qu'un biscalaire défini par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} C_1 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon A, \\ C_2 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon B, \end{cases} \qquad C_1 \neq C_2.$$

Dans le cas où ω_1 est un biscalaire, on a $\nu(\omega_1) = \omega_1^* \neq \omega_1$. En posant dans ce cas

$$f(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} C_1 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon A, \\ C_2 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon B, \end{cases} \qquad f(\omega_1^*, \omega_2) = \begin{cases} C_2 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon A, \\ C_1 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon B \end{cases}$$

on obtient pour $C_1 \neq C_2$ un scalaire non trivial, car la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ dépend des deux variables ω_1 et ω_2. D'autre part, nous montrerons que la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ ne peut être un biscalaire, si ω_1 est un biscalaire. En effet, dans ce cas on aurait

$$f(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} C_1 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon A, \\ C_2 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon B, \end{cases} \qquad f(\omega_1^*, \omega_2) = \begin{cases} C_3 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon A, \\ C_4 & \text{pour} \quad \omega_2 \epsilon B. \end{cases}$$

Puisque pour $\Delta < 0$ ω_1 se transforme en ω_1^* et ω_2 passe de l'un des intervalles A, B à l'autre, on doit avoir $C_1 \neq C_4$ et $C_2 \neq C_3$. D'autre part, la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ (comme biscalaire) ne prend que deux valeurs différentes, on n'a donc que deux cas possibles:

$$C_1 = C_2 \quad \text{et} \quad C_3 = C_4 \quad \text{ou} \quad C_1 = C_3 \quad \text{et} \quad C_2 = C_4.$$

Pourtant, dans le premier cas la fonction f ne dépend pas de ω_2, dans le deuxième elle ne dépend pas de ω_1; on a donc une contradiction avec les hypothèses.

Admettons maintenant que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type G, c'est-à-dire $f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}$. Avec la formule (23) on a

$$(27) \quad \begin{aligned} f\{\omega_1, h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)]\} &= h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\} \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ f\{\nu(\omega_1), h_2[\Delta h_2^{-1}(\omega_2)]\} &= h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\} \quad \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned}$$

En posant

$$(28) \quad \xi = \omega_1, \quad \eta = h_2^{-1}(\omega_2), \quad \varrho_\nu(\xi, \eta) \overset{\text{df}}{=} h^{-1}\{f[\xi, h_2(\eta)]\}$$

on peut écrire les formules (27) sous la forme plus simple

$$\varrho_\nu(\omega_1, \Delta\omega_2) = \Delta\varrho_\nu(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0,$$

$$\varrho_\nu[\nu(\omega_1), \Delta\omega_2] = \Delta\varrho_\nu(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour} \quad \Delta < 0.$$

Si ω_1 est un scalaire, la fonction ϱ_ν se réduit à la fonction ϱ_0 et satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\varrho_0(\xi, \lambda\eta) = \lambda\varrho_0(\xi, \eta).$$

Si ω_1 est un biscalaire $[\nu(\omega_1) \neq \omega_1]$, alors les équations fonctionnelles auxquelles satisfait la fonction $\varrho_\nu(\xi, \eta)$ expriment le fait que la surface $\zeta = \varrho_\nu(\xi, \eta)$ se compose de demi-droites issues de l'axe ξ et perpendiculaires à lui et que les demi-droites correspondant aux valeurs $(\xi, \eta > 0)$ et $(\nu(\xi), \eta < 0)$ sont opposées. Inversement, avec une fonction arbitraire $\varrho_\nu(\xi, \eta)$ et une fonction arbitraire h du type α la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = h\{\varrho_\nu[\omega_1, h_2^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type G.

Admettons enfin que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type W, c'est-à-dire

$$f(\omega_1, \omega_2) = g\{|\Delta| g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}.$$

En profitant des substitutions (28) et en posant

$$\varrho_\nu^*(\xi, \eta) \overset{\text{df}}{=} g^{-1}\{f[\xi, h_2(\eta)]\}$$

on a

$$\varrho_\nu^*(\xi, \Delta\eta) = \Delta\varrho_\nu^*(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0;$$

$$\varrho_\nu^*[\nu(\xi), \Delta\eta] = -\Delta\varrho_\nu^*(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta < 0.$$

Dans le cas où ω_1 est un scalaire la fonction ϱ_ν^* se réduit à ϱ^*. Inversement, avec une fonction arbitraire ϱ^* (dans le cas où ω_1 est un scalaire) ou ϱ_ν^* (dans le cas où ω_1 est un biscalaire) la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = g\{\varrho_\nu^*[\omega_1, h^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type W.

Nous avons donc démontré que, dans le cas où ω_1 est un (bi)scalaire et ω_2 un objet du type G, on peut obtenir des objets de tous les quatre types par un choix convenable de la fonction f.

§ 7. Supposons maintenant que ω_1 soit un (bi)scalaire et ω_2 un objet du type W. Demandons dans quelles conditions la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ représente un objet du type S, B, W ou G. Ce cas est plus simple, que le précédent, car le domaine de définition de ω_2 se compose maintenant d'un seul intervalle A. On a dans ce cas

$$\bar{\omega}_2 = g_2[|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)].$$

Admettons d'abord que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un (bi)scalaire. On a donc

$$f\{\omega_1, g_2[\Delta g_2^{-1}(\omega_2)]\} = f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0.$$

Quand on fait varier Δ dans l'intervalle $(0, \infty)$ les valeurs $g_2[\Delta g_2^{-1}(\omega_2)]$ épuisent (ω_2 étant fixé) tout l'intervalle A, donc, il s'ensuit de la formule ci-dessus que la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ ne dépend pas de la variable ω_2, ce qui est en contradiction avec les hypothèses. La fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ ne peut pas donc représenter ni un scalaire, ni un biscalaire.

Admettons maintenant que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type G, c'est-à-dire

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}.$$

De là on a, en particulier,

$$(29) \quad \begin{aligned} f\{\omega_1, g_2[\Delta g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\} \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ f\{\nu(\omega_1), g_2[-\Delta g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\} \quad \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que ω_1 soit un scalaire. Alors $\nu(\omega_1) = \omega_1$. En posant

$$(30) \quad \xi = \omega_1, \quad \eta = g_2^{-1}(\omega_2), \quad \varphi(\xi, \eta) \overset{\text{df}}{=} h^{-1}\{f[\xi, g_2(\eta)]\}$$

on a

$$\varphi(\xi, \Delta\eta) = \Delta\varphi(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \quad \varphi(\xi, -\Delta\eta) = \Delta\varphi(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta < 0.$$

En posant dans la dernière de ces rélations $\Delta = -1$, on a

$$\varphi(\xi, \eta) = -\varphi(\xi, \eta)$$

et ensuite $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ce qui signifie que la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ est constante, en contradiction avec les hypoth ses.

Supposons maintenant que ω_1 soit un biscalaire. Désignons par

$$\varrho_\nu^{**}(\xi, \eta) \stackrel{\text{df}}{=} h^{-1}\{f[\xi, g_2(\eta)]\}.$$

Avec les substitutions (30) les formules (29) peuvent alors être écrites sous la forme plus simple

$$\varrho_\nu^{**}(\xi, \Delta\eta) = \Delta\varrho_\nu^{**}(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0,$$
$$\varrho_\nu^{**}[\nu(\xi), -\Delta\eta] = \Delta\varrho_\nu^{**}(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta < 0.$$

Inversement, avec une fonction arbitraire ϱ_ν^{**} la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = h\{\varrho_\nu^{**}[\omega_1, g_2^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type G.

Admettons enfin que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type W, c'est-à-dire

$$f(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = g\{|\Delta| g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}.$$

On a alors

$$(31) \qquad \begin{aligned} f\{\omega_1, g_2[\Delta g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= g\{\Delta g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\} \quad && \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ f\{\nu(\omega_1), g_2[-\Delta g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= g\{-\Delta g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\} \quad && \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que ω_1 soit un scalaire, c'est-à-dire $\nu(\omega_1) = \omega_1$. Posons

$$(32) \qquad \xi = \omega_1, \quad \eta = g_2^{-1}(\omega_2), \quad \varrho(\xi, \eta) \stackrel{\text{df}}{=} g^{-1}\{f[\xi, g_2(\eta)]\}.$$

Les équations (31) peuvent alors être écrites sous la forme

$$\varrho(\xi, \Delta\eta) = \Delta\varrho(\xi, \eta) \text{ pour } \Delta > 0, \qquad \varrho(\xi, -\Delta\eta) = -\Delta\varrho(\xi, \eta) \text{ pour } \Delta < 0.$$

Ces deux relations sont équivalentes, la deuxième peut donc être rejetée. Inversement, avec une fonction arbitraire ϱ, la fonction $f(\omega_1, \omega_2)$ définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = g\{\varrho[\omega_1, g_2^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type W.

Supposons maintenant que ω_1 soit un biscalaire. En profitant alors des substitutions (32) et de la définition

$$\varrho_\nu \stackrel{\text{df}}{=} g^{-1}\{f[\xi, g_2(\eta)]\}$$

on obtient les équations

$$\varrho_\nu(\xi, \Delta\eta) = \Delta\varrho_\nu(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0,$$
$$\varrho_\nu[\nu(\xi), -\Delta\eta] = -\Delta\varrho_\nu(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta < 0.$$

Inversement, avec une fonction arbitraire ϱ_ν la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = g\{\varrho_\nu[\omega_1, g_2^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type W.

Nous avons donc démontré qu'avec un scalaire et un objet du type W on ne peut obtenir qu'un objet du type W, tandis qu'avec un biscalaire et un objet du type W on peut obtenir des objets des types G et W.

§ 8. Il reste à examiner le cas où ω_1 est un objet du type G et ω_2 un objet du type W. Dans ce cas on a

$$\bar{\omega}_1 = h_1\{\Delta h_1^{-1}(\omega_1)\}, \qquad \bar{\omega}_2 = g_2\{|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)\}.$$

Admettons que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un (bi)scalaire. Nous avons donc

$$(33) \qquad \begin{aligned} f\{h_1[\Delta h_1^{-1}(\omega_1), g_2[|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= f(\omega_1, \omega_2) \quad && \text{pour} \quad \Delta > 0, \\ f\{h_1[\Delta h_1^{-1}(\omega_1), g_2[|\Delta| g_2^{-1}(\omega_2)]\} &= \mu[f(\omega_1, \omega_2)] \quad && \text{pour} \quad \Delta < 0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que f soit un scalaire, c'est-à-dire $\mu(x) = x$. En posant

$$(34) \qquad \xi = h_1^{-1}(\omega_1), \quad \eta = g_2^{-1}(\omega_2), \quad \sigma(\xi, \eta) \stackrel{\text{df}}{=} f[h_1(\xi), g_2(\eta)]$$

on peut écrire les formules (33) sous la forme

$$\sigma(\Delta\xi, \Delta\eta) = \sigma(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \quad \sigma(\Delta\xi, -\Delta\eta) = \sigma(\xi, \eta).$$

Ces relations sont équivalentes aux suivantes:

$$\sigma(\Delta\xi, \Delta\eta) = \sigma(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \Delta > 0, \quad \sigma(-\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta).$$

Inversement, avec une fonction arbitraire σ, la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = \sigma[h_1^{-1}(\omega_1), g_2^{-1}(\omega_2)]$$

représente un scalaire.

Si f est un biscalaire, alors la définition

$$\chi_\nu(\xi,\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} f[h_1(\xi), g_2(\eta)]$$

donne

$$\chi_\nu(\Delta\xi, \Delta\eta) = \chi_\nu(\xi,\eta) \qquad \text{pour} \quad \Delta > 0,$$

$$\chi_\nu(\Delta\xi, -\Delta\eta) = \mu[\chi_\nu(\xi,\eta)] \qquad \text{pour} \quad \Delta < 0.$$

Inversement, avec une fonction arbitraire $\mu(x)$ satisfaisant à l'équation (5), la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = \chi_\nu\{h_1^{-1}(\omega_1), g_2^{-1}(\omega_2)\}$$

représente un biscalaire.

Admettons maintenant que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type G, c'est-à-dire

$$f(\bar\omega_1, \bar\omega_2) = h\{\Delta h^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}.$$

Avec les substitutions (34) et la définition

$$\tau(\xi,\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} h^{-1}\{f[h_1(\xi), g_2(\eta)]\}$$

on arrive alors à l'équation $\tau(\Delta\xi, |\Delta|\eta) = \Delta\tau(\xi,\eta)$.

Inversement, avec une fonction arbitraire τ, la fonction f définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = h\{\tau[h_1^{-1}(\omega_1), g_2^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type G.

Admettons enfin que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit un objet du type W. Nous avons dans ce cas

$$f(\bar\omega_1, \bar\omega_2) = g\{|\Delta| g^{-1}[f(\omega_1, \omega_2)]\}.$$

Les substitutions (34) et la définition

$$\chi(\xi,\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} g^{-1}\{f[h_1(\xi), g_2(\eta)]\}$$

mènent alors à l'équation

$$\chi(\Delta\xi, |\Delta|\eta) = |\Delta|\chi(\xi,\eta).$$

Inversement, avec une fonction arbitraire du type χ, la fonction définie par la formule

$$f(\omega_1, \omega_2) = g\{\chi[h_1^{-1}(\omega_1), g_2^{-1}(\omega_2)]\}$$

représente un objet du type W.

Nous avons donc démontré qu'avec des objets des types G et W on peut obtenir, par un choix convenable de la fonction f, des objets de tous les quatre types. Notre problème est ainsi complétement résolu.

§ 9. Dans le présent paragraphe nous résumons les résultats obtenus sous forme d'un tableau. Il indique quels objets peuvent être obtenus par la combinaison de deux objets des quatre types. Outre, on y trouve les solutions générales relatives aux données du tableau; le premier chiffre se rapporte au numéro de la colonne du tableau.

	ω_1	S		B		G		W	
ω_2		1	2	3	4	5	6	7	8
S	1	S	—						
	2	—	—						
B	3	S	B	S	B				
	4	—	—	—	—				
G	5	—	B	S	—	S	B		
	6	G	W	G	W	G	W		
W	7	—	—	—	—	S	B	S	—
	8	—	W	G	W	G	W	—	W

Solutions

(1,1) f fonction arbitraire de deux variables indépendantes.

(3,1) f arbitraire, telle que $f[\omega_1, \nu(\omega_2)] = f(\omega_1, \omega_2)$ où ν est la fonction qui définit le biscalaire ω_2.

(3,2) f arbitraire, telle que $f[\omega_1, \nu(\omega_2)] \neq f(\omega_1, \omega_2)$.

(3,3) f arbitraire, telle que $f[\nu(\omega_1), \mu(\omega_2)] = f(\omega_1, \omega_2)$ où ν est la fonction qui définit le biscalaire ω_1 et μ la fonction qui définit le biscalaire ω_2.

(3,4) f arbitraire, telle que $f[\nu(\omega_1), \mu(\omega_2)] \neq f(\omega_1, \omega_2)$.

(5,2) f arbitraire, telle que

$$f(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} C_1 & \text{pour} \quad \omega_2 \in A, \\ C_2 & \text{pour} \quad \omega_2 \in B, \end{cases}$$

où $C_1 \neq C_2$ et A, B désignent les intervalles composants du domaine de définition de ω_2.

(5,3) f arbitraire, telle que

$$f(\omega_1,\omega_2)=\begin{cases}C_1 & \text{pour}\quad \omega_2\in A,\\ C_2 & \text{pour}\quad \omega_2\in B,\end{cases}\qquad f[\nu(\omega_1,\omega_2)]=\begin{cases}C_2 & \text{pour}\quad \omega_2\in A,\\ C_1 & \text{pour}\quad \omega_2\in B\end{cases}$$

où $C_1 \neq C_2$.

(5,5) $f(\omega_1,\omega_2)=\varphi_0[h_1^{-1}(\omega_1),h_2^{-1}(\omega_2)]$, où φ_0 est une fonction arbitraire de type convenable (voir § 2), et les fonctions h_1 et h_2 donnent les règles de transformation pour les objets ω_1 et ω_2.

(5,6) $f(\omega_1,\omega_2)=\psi_0[h_1^{-1}(\omega_1),h_2^{-1}(\omega_2)]$, où ψ_0 est une fonction qui est définie arbitrairement dans un demi-plan et qui est donnée dans l'autre demi-plan par la formule $\psi_0(-\xi,-\eta)=\nu[\psi_0(\xi,\eta)]$.

(6,1) $f(\omega_1,\omega_2)=h\{\varrho_0[\omega_1,h_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où h est une fonction arbitraire du type α, ϱ_0 une fonction arbitraire du type ϱ_0 et h_2 donne la règle de transformation de ω_2.

(6,2) $f(\omega_1,\omega_2)=g\{\varrho^*[\omega_1,h_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où ϱ^* est une fonction arbitraire de type convenable et g une fonction arbitraire du type β.

(6,3) $f(\omega_1,\omega_2)=h\{\varrho_\nu[\omega_1,h_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où h est une fonction arbitraire du type α, ϱ_ν — arbitraire du type correspondant et ν définit le biscalaire ω_1.

(6,4) $f(\omega_1,\omega_2)=g\{\varrho_\nu^*[\omega_1,h_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où g est une fonction arbitraire du type β, ϱ_ν^* arbitraire du type correspondant.

(6,5) $f(\omega_1,\omega_2)=h\{\varphi_1[h_1^{-1}(\omega_1),h_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où h et φ_1 sont des fonctions arbitraires de types convenables.

(6,6) $f(\omega_1,\omega_2)=g\{\psi_1^*[h_1^{-1}(\omega_1),h_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où g et ψ_1^* sont des fonctions arbitraires de types convenables.

(7,5) $f(\omega_1,\omega_2)=\sigma[h_1^{-1}(\omega_1),g_2^{-1}(\omega_2)]$, où σ est une fonction arbitraire de type convenable, h_1 donne la règle de transformation de l'objet ω_1 et g_2 la règle de transformation de ω_2.

(7,6) $f(\omega_1,\omega_2)=\chi_\nu[h_1^{-1}(\omega_1),g_2^{-1}(\omega_2)]$, où ν et χ_ν sont des fonctions arbitraires de types convenables.

(7,7) $f(\omega_1,\omega_2)=\varphi_0[g_1^{-1}(\omega_1),g_2^{-1}(\omega_2)]$, où φ_0 est une fonction arbitraire du type correspondant.

(8,2) $f(\omega_1,\omega_2)=g\{\varrho[\omega_1,g_2^{-1}(\omega_2)]$, où g et ϱ sont des fonctions arbitraires de types convenables.

(8,3) $f(\omega_1,\omega_2)=h\{\varrho_\nu^{**}[\omega_1,g_2^{-1}(\omega_2)]$, où ν définie le biscalaire ω_1, g_2 donne la règle de transformation de ω_2, h est une fonction arbitraire du type α, et ϱ_ν^{**} arbitraire (avec ν donnée d'avance) de type convenable.

(8,4) $f(\omega_1,\omega_2)=g\{\varrho_\nu[\omega_1,g_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où g est une fonction arbitraire du type β et ϱ_ν arbitraire (avec ν donnée d'avance) de type convenable.

(8,5) $f(\omega_1,\omega_2)=h\{\tau[h_1^{-1}(\omega_1),g_2^{-1}(\omega_2)]\}$ où h et τ sont des fonctions arbitraires de types convenables.

(8,6) $f(\omega_1,\omega_2)=g\{\chi[h_1^{-1}(\omega_1),g_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où g et χ sont des fonctions arbitraires de types convenables.

(8,8) $f(\omega_1,\omega_2)=g\{\psi_1[g_1^{-1}(\omega_1),g_2^{-1}(\omega_2)]\}$, où g et ψ_1 sont des fonctions arbitraires de types convenables.

§ 10. Les biscalaires les plus simples sont ceux (appel's par Schouten W-scalaires (voir J. A. Schouten [8], p. 31)) dont la composante dans les systèmes gauches est égale à celle de signe moins dans les systèmes droits, c'est-à-dire

$$\nu(\omega_1)=-\omega_1.$$

Avec notre terminologie nous les appellerons plutôt *G-scalaires*.

Aux objets du type G et W les plus simples appartiennent les objets dits densités: G-densités et W-densités. Ce sont des objets dont la règle de transformation est donnée par les fonctions h et g de la forme suivante:

$$h(u)=\operatorname{sgn}(u)|u|^\alpha,\qquad u\neq 0$$

où α est un nombre réel arbitraire différent de zéro,

$$g(u)=|u|^\beta,\qquad u>0$$

où β est un nombre réel arbitraire différent de zéro. Il est facile de montrer que les règles de transformation de ω_1 sont alors les suivantes:

$$\bar\omega_1=\operatorname{sgn}(\Delta)|\Delta|^\alpha\omega_1\qquad \text{pour les } G\text{-densités},$$
$$\bar\omega_1=|\Delta|^\beta\omega_1\qquad \text{pour les } W\text{-densités}.$$

Les exposants $(-\alpha)$ ou $(-\beta)$ sont appelés *poids des densités* correspondantes.

On démontre dans les éléments de calcul tensoriel que les densités peuvent être „multipliées", c'est-à-dire que le produit de deux densités est aussi une densité. Prenons, par exemple, la G-densité ω_1 de poids $(-\alpha)$ et la W-densité ω_2 de poids $(-\beta)$. Soit

$$\omega_3\overset{\mathrm{df}}{=}\omega_1\omega_2.$$

Nous allons montrer que ω_3 est une densité. On peut le faire de deux façons. La première consiste à trouver la règle de transformation de ω_3. Or, on a

$$\bar\omega_3=\bar\omega_1\bar\omega_2=\operatorname{sgn}(\Delta)|\Delta|^\alpha\omega_1|\Delta|^\beta\omega_2=\operatorname{sgn}(\Delta)|\Delta|^{\alpha+\beta}\omega_3. \tag{35}$$

Nous constatons donc que la règle de transformation de ω_3 est celle d'une G-densité de poids $(-\alpha-\beta)$. La deuxième façon consiste à trouver conformément à la solution (8,5) (puisque la multiplication d'un objet du type G par un objet du type W doit donner un objet du type G) les fonctions h et τ telles que $f(\omega_1, \omega_2)$ soit égal à $\omega_1\omega_2$ (avec l'hypothèse que $h_1(u) = \operatorname{sgn}(u)|u|^\alpha$ et $g_2(u) = |u|^\beta$). Or, on doit avoir

$$\omega_1\omega_2 = h\{\tau[\operatorname{sgn}(\omega_1)|\omega_1|^{1/\alpha}, |\omega_2|^{1/\beta}]\}$$

et la fonction $\tau(\xi, \eta)$ doit satisfaire aux conditions

$$(36) \qquad \tau(\lambda\xi, \lambda\eta) = \lambda\tau(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad \lambda > 0, \quad \tau(-\xi, \eta) = -\tau(\xi, \eta).$$

Or, il est facile de vérifier que les fonctions

$$\tau(\xi, \eta) = \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^{\alpha/(\alpha+\beta)}|\eta|^{\beta/(\alpha+\beta)}, \qquad h(u) = \operatorname{sgn}(u)|u|^{\alpha+\beta}$$

satisfont à l'identité (35) pour tous les ω_1 et ω_2 tels que $\omega_1 \neq 0$ et ω_2 ait un signe constant; d'autre part la fonction τ satisfait aux conditions (36) et h est du type α.

Notre raisonnement est en défaut dans les cas où $\alpha+\beta = 0$. Cependant, dans ce cas ω_3 se réduit à un G-scalaire; on doit alors profiter de la formule convenable de la position (7,6).

Les scalaires, les G-scalaires, les W-densités et les G-densités peuvent être multiplies et le produit est toujours un objet d'un de ces quatre types.

Omettant les calculs requis, nous résumons les résultats dans le tableau ci-dessous. Les scalaires y sont désignés par σ, les G-scalaires par $\tilde{\sigma}$, les G-densités par $\tilde{\mathfrak{g}}$ et les W-densités par $\mathfrak{g}$.

Remarque. Dans le tableau (p. 245) on n'a tenu compte que des scalaires et des densités non triviaux, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas identiquement nuls.

§ 11. Il est connu qu'en général on ne peut pas additionner deux densités quelconques. On peut pourtant additionner des densités du même type (G ou W) et de même poids. Ce fait est une conclusion particulière d'un théorème général que nous démontrerons plus loin.

L'opération $f(\omega_1, \omega_2)$ pourrait être appelée „isomorphe à l'addition" ou simplement „addition", lorsqu'il existe une fonction inversible F telle que

$$(37) \qquad f(\omega_1, \omega_2) = F\{F^{-1}(\omega_1)+F^{-1}(\omega_2)\}$$

pour tous les ω_1 et ω_2.

Voyons sous quelles conditions deux objets ω_1 et ω_2 du type G peuvent être „additionnés". Autrement dit, quelles doivent être les fonctions h_1 et h_2 déterminant la règle de transformation des objets ω_1 et ω_2 pour-

qu'on puisse trouver une fonction f de la forme (37) qui représente un objet du type G ou W (nous nous bornons pour le moment au sous-groupe $\Delta > 0$)? Les fonctions h_1 et h_2 satisfaisant aux conditions demandées, nous avons en vertu de (6,5)

$$f(\omega_1, \omega_2) = h\{\varphi_1[h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)]\}.$$

	σ		$\tilde{\sigma}$		$\mathfrak{g}$		$\tilde{\mathfrak{g}}$	
σ	σ	—						
	—	—						
$\tilde{\sigma}$	—	$\tilde{\sigma}$	σ	—				
	—	—	—	—				
$\mathfrak{g}$	—	—	—	—	σ	—		
	$\mathfrak{g}$	—	—	$\tilde{\mathfrak{g}}$	$\mathfrak{g}$	—		
$\tilde{\mathfrak{g}}$	—	—	—	—	—	$\tilde{\sigma}$	σ	—
	—	$\tilde{\mathfrak{g}}$	$\mathfrak{g}$	—	—	$\tilde{\mathfrak{g}}$	$\mathfrak{g}$	—

Alors

$$h\{\varphi_1[h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)]\} = F\{F^{-1}(\omega_1)+F^{-1}(\omega_2)\}$$

ou

$$(38) \qquad F^{-1}(h\{\varphi_1[h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)]\}) = F^{-1}(\omega_1)+F^{-1}(\omega_2).$$

En posant

$$\Phi(\xi, \eta) \overset{\mathrm{df}}{=} F^{-1}\{h[\varphi_1(\xi, \eta)]\}$$

on peut écrire la formule (38) sous la forme

$$\Phi(\xi, \eta) = F^{-1}[h_1(\xi)]+F^{-1}[h_2(\eta)].$$

Puisque la fonction $F^{-1}[h(u)]$ est inversible, la fonction $\Phi(\xi, \eta)$ est du type φ_1, c'est-à-dire elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Phi(\lambda\xi, \lambda\eta) = \lambda\Phi(\xi, \eta), \qquad \lambda > 0.$$

Il s'ensuit que la fonction

$$F^{-1}[h_1(\xi)]+F^{-1}[h_2(\eta)]$$

est positivement homogène du premier ordre. En posant

$$H_1(\xi) \overset{\text{df}}{=} F^{-1}[h_1(\xi)], \qquad H_2(\eta) \overset{\text{df}}{=} F^{-1}[h_2(\eta)] \tag{39}$$

on a

$$H_1(\lambda\xi)+H_2(\lambda\eta) = \lambda H_1(\xi)+\lambda H_2(\eta) \qquad \text{pour} \qquad \lambda > 0$$

ou $H_1(\lambda\xi)-\lambda H_1(\xi) = \lambda H_2(\eta)-H_2(\lambda\eta)$. Le premier membre ne dépendant pas de η et le deuxième étant indépendant de ξ, tous les deux doivent être égaux à une même constante D

$$H_1(\lambda\xi) = \lambda H_1(\xi)+D, \qquad H_2(\lambda\eta) = \lambda H_2(\eta)-D.$$

En mettant dans ces formules au lieu de ξ et η des valeurs constantes différentes de zéro on constate que les fonctions H_1 et H_2 sont linéaires

$$H_1(\xi) = K_1\xi+D, \qquad H_2(\eta) = K_2\eta-D.$$

De là on a

$$h_1(\xi) = F[K_1\xi+D], \qquad h_2(\eta) = F[K_2\eta-D].$$

Maintenant on peut facilement constater que les fonctions h_1 et h_2 définies par les formules ci-dessus représentent des objets du même genre, c'est-à-dire des objets ayant la même règle de transformation. En effet, on a

$$h_2\{\Delta h_2^{-1}(\omega)\} \equiv h_1\{\Delta h_1^{-1}(\omega)\}$$

identiquement par rapport à ω et Δ. Donc, on ne peut „additionner" que des objets du type $G(W)$ du même genre, c'est-à-dire des objets ayant une règle de transformation identique. Il résulte de là qu'on ne peut additionner que des densités de même poids, car les densités de poids différents ont aussi des règles de transformation différentes. Dans l'algèbre des objets du type Δ il existe d'autres problèmes intéressants, mais dans le présent travail nous ne les considérons pas.

En terminant, nous examinerons encore le problème consistant à déterminer les objets du type G qui peuvent être „multipliés", donnant comme résultat un objet du type G. L'opération f pourrait être appelée „multiplication" lorsqu'elle satisfait à l'identité

$$f(\omega_1, \omega_2) = F\{F^{-1}(\omega_1)F^{-1}(\omega_2)\}.$$

On peut prévoir que la classe des couples (ω_1, ω_2) d'objets qui peuvent être „multipliés" sera plus vaste que celle des objets qui peuvent être „additionnés".

Afin de trouver plus rapidement les objets considérés supposons que les fonctions intervenant dans le raisonnement, c'est-à-dire h_1, h_2, F, h, φ_1 soient différentiables. Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas trop gênante, car les fonctions monotones ont presque partout une différentielle, et les fonctions h_1, h_2, F, h sont monotones. En introduisant les notations précédentes nous avons

$$\Phi(\xi, \eta) = H_1(\xi)H_2(\eta)$$

la fonction Φ étant positivement homogène du premier ordre. L'équation d'Euler

$$\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \Phi(\xi, \eta)$$

donne $\xi H_1'(\xi)H_2(\eta)+\eta H_2'(\eta)H_1(\xi) = H_1(\xi)H_2(\eta)$ d'où

$$\xi\frac{H_1'(\xi)}{H_1(\xi)}+\eta\frac{H_2'(\eta)}{H_2(\eta)} = 1.$$

Il s'ensuit de là que chacun des éléments du premier membre doit être constant, c'est-à-dire

$$\xi\frac{H_1'(\xi)}{H_1(\xi)} = C_1, \qquad \eta\frac{H_2'(\eta)}{H_2(\eta)} = C_2 \tag{40}$$

où $C_1+C_2 = 1$. L'intégration des équations (40) donne

$$H_1(\xi) = D_1\xi^{C_1}, \qquad H_2(\eta) = D_2\eta^{1-C_1}.$$

De là et des formules (39) on tire

$$h_1(\xi) = F[D_1\xi^{C_1}], \qquad h_2(\eta) = F[D_2\xi^{1-C_1}]. \tag{41}$$

Inversement, il est facile de vérifier qu'avec des constantes C_1, D_1, D_2 arbitraires telles que $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$, $C_1 \neq 0$, $C_1 \neq 1$ on peut trouver pour la fonction F une fonction h du type α et une fonction φ_1 telles que l'on ait l'identité

$$h\{\varphi_1[h_1^{-1}(\omega_1), h_2^{-1}(\omega_2)]\} = F[F^{-1}(\omega_1)F^{-1}(\omega_2)].$$

Dans le cas où $C_1 \neq C_2$ (les constantes D_1 et D_2 ne jouent pas un rôle essentiel) les règles de transformation des ω_1 et ω_2 sont différentes, ce qu'il est facile de vérifier, et cependant ces objets peuvent être „multipliés". En particulier, on peut s'assurer que pour deux densités quelconques (de poids différents) les fonctions h_1 et h_2 sont de la forme (41).

References

[1] J. Aczél, *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I. Elementarer Beweis der Nicht-Existenz von rein differentiellen geometrischen Objekten mit einer Komponenten von höherer Klasse als der dritten im eindimensionalen Raum. II. Elementare Bestimmung aller solchen Objekten der ersten, zweiten und dritten Klasse*, Acta Math. Ac. Sci. Hung. 7(1956), p. 339-354.

[2] S. Gołąb, *Über die Klassifikation der geometrischen Objekte*, Math. Zeitschr. 44 (1938), p. 104-114.

[3] — *Sur la théorie des objets géométriques (réduction des objets géométriques spéciaux de première classe aux objets du type Δ)*, Ann. Soc. Pol. Math. 20 (1947), p. 10-27.

[4] — *Sur les objets géométriques à une composante*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 79-89.

[5] H. Pidek, *Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (2) (1951), p. 111-128.

[6] — *Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1*, Ann. Pol. Math. 1 (1) (1954), p. 114-125.

[7] — *Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_m*, Ann. Pol. Math. 1 (1) (1954), p. 126-134.

[8] J. A. Schouten, *Tensor analysis for physicists*, Oxford 1951.

Reçu par la Rédaction le 6. 4. 1956

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10, ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.