UN CRITÈRE DE NORMALITÉ POUR LES ESPACES PRODUITS

PAR

J. DIEUDONNÉ (PARIS)

1. Dans son travail fondamental sur les espaces paracompacts [3], A. H. Stone mentionne en note, sans démonstration, le résultat suivant: *Si E est un espace métrisable, F un espace normal semi-compact ⁽¹⁾, alors l'espace produit $E \times F$ est normal* ([3], p. 980). Je me propose dans cette note de montrer que la conclusion de A. H. Stone est encore valable lorsqu'au lieu de supposer E métrisable, on suppose seulement que E est paracompact et que tout point de E admet un système fondamental dénombrable de voisinages („premier axiome de dénombrabilité"). Il n'est guère possible d'améliorer ce résultat, comme le montre l'exemple bien connu du produit de l'espace E_0 des ordinaux $\leq \Omega$ par son sous-espace $E = E_0 - \{\Omega\}$; on sait que $E_0 \times E$ n'est pas normal ([2], p. 68, exercice 13); E_0 est compact mais ne satisfait pas au 1^{er} axiome de dénombrabilité, tandis que E est normal, semi-compact, localement compact, localement métrisable (donc satisfait au 1^{er} axiome de dénombrabilité), mais non paracompact.

2. Soient A et B deux ensembles fermés sans point commun dans $E \times F$; pour tout $x \in E$, nous désignerons comme d'ordinaire par $A(x)$ et $B(x)$ les coupes de A et B suivant x ; ce sont des ensembles fermés sans point commun dans F , et en vertu de l'hypothèse, il existe donc dans F deux ensembles ouverts V_x, W_x tels que $\overline{V_x} \cap \overline{W_x} = \emptyset, A(x) \subset V_x, B(x) \subset W_x$. Nous allons voir qu'il existe un voisinage U_x de x dans E tel que, pour tout $z \in U_x$, on ait encore $A(z) \subset V_x$ et $B(z) \subset W_x$. Supposons le contraire, et soit (S_n) un système fondamental de voisinages de x dans E : il existerait alors une suite (z_n) de points de E telle que $z_n \in S_n$, et, pour chaque n , un point $t_n \in A(z_n)$ tel que $t_n \notin V_x$. Par hypothèse, la suite (t_n) possède une valeur d'adhérence y dans F , et comme V_x est ouvert, $y \notin V_x$. Comme la suite (z_n) a pour limite x , il est clair que (x, y) est une

⁽¹⁾ Rappelons qu'un espace topologique séparé est dit *semi-compact* si toute suite de points admet une valeur d'adhérence.

valeur d'adhérence de la suite (z_n, t_n) dans $E \times F$; comme A est fermé et $(z_n, t_n) \in A$ pour tout n , on en conclurait $(x, y) \in A$, ce qui est absurde.

3. Considérons maintenant un recouvrement ouvert localement fini $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$ de E , plus fin que le recouvrement $(U_x)_{x \in E}$; et soit $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (T_λ) . Pour tout $\lambda \in L$, soit $x(\lambda)$ un point de E tel que $T_\lambda \subset U_{x(\lambda)}$, et désignons par g_λ une application continue de F dans $[0, 1]$ telle que $g_\lambda(y) = 1$ dans $V_{x(\lambda)}$ et $g_\lambda(y) = 0$ dans $W_{x(\lambda)}$. Considérons alors, pour tout $(x, y) \in E \times F$, la somme $h(x, y) = \sum_{\lambda \in L} f_\lambda(x) g_\lambda(y)$; comme tout $x \in E$ n'appartient qu'à un nombre fini d'ensembles T_λ , cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes $\neq 0$, et comme il y a un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de T_λ , h est continue dans $E \times F$. En outre, si $(x, y) \in A$, pour tout $\lambda \in L$ tel que $f_\lambda(x) \neq 0$, on a $y \in V_{x(\lambda)}$, donc $g_\lambda(y) = 1$, et par suite $h(x, y) = \sum_{\lambda \in L} f_\lambda(x) = 1$; on prouve de même que $h(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in B$, et cela achève notre démonstration.

4. On peut remplacer le raisonnement du n° 3 par un autre où la notion de partition de l'unité n'intervient pas. On sait qu'il existe un recouvrement ouvert $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ de E , ayant même ensemble d'indices que (T_λ) et tel que $\bar{S}_\lambda \subset T_\lambda$ pour tout $\lambda \in L$. Pour tout point $u = (x, y) \in A$, définissons un voisinage C_u de u dans $E \times F$ de la façon suivante: pour tout λ tel que $x \in S_\lambda$, on pose $C_{u,\lambda} = S_\lambda \times V_{x(\lambda)}$; pour tout λ tel que $x \in T_\lambda - S_\lambda$, on pose $C_{u,\lambda} = T_\lambda \times V_{x(\lambda)}$; enfin, pour tout λ tel que $x \notin T_\lambda$, on pose $C_{u,\lambda} = (E - \bar{S}_\lambda) \times F$; C_u est l'intersection de tous les $C_{u,\lambda}$, et comme il y a un voisinage de x contenu dans tous les $E - \bar{S}_\lambda$ à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, C_u est bien un voisinage de u . Pour tout $v = (x', y') \in B$, on définit de même un voisinage D_v dans $E \times F$ en remplaçant $V_{x(\lambda)}$ par $W_{x(\lambda)}$ dans la construction précédente. Cela étant, on a $C_u \cap D_v = \emptyset$ quels que soient $u \in A$ et $v \in B$: en effet, il y a un $\lambda \in L$ tel que $x \in S_\lambda$; si $x' \in T_\lambda$, notre assertion résulte alors de ce que $V_{x(\lambda)}$ et $W_{x(\lambda)}$ sont sans point commun, et si $x' \notin T_\lambda$, elle résulte de ce que S_λ et $E - \bar{S}_\lambda$ sont sans point commun. Si C est la réunion des C_u , D la réunion des D_v , C est un voisinage de A , D un voisinage de B et on a $C \cap D = \emptyset$, ce qui montre que $E \times F$ est normal.

5. L'intérêt de la seconde méthode est qu'elle s'applique au résultat plus général suivant: soit G un espace séparé, f une application continue de G sur un espace paracompact E vérifiant le 1^{er} axiome de dénombrabilité. Supposons en outre que, pour tout point $x \in E$, il existe un voisinage R_x de x dans E , un espace normal semi-compact F_x et une application continue g_x de $f^{-1}(R_x)$ sur F_x tels que $z \rightarrow (f(z), g_x(z))$ soit un homéomorphisme

de $f^{-1}(R_x)$ sur le produit $R_x \times F_x$ (en d'autres termes, G est „localement” un produit). On peut alors en conclure que G est normal. En effet, l'hypothèse et le raisonnement du n° 2 montrent que, si A et B sont deux ensembles fermés sans point commun dans G , pour tout $x \in E$, il y a un voisinage ouvert U_x de x dans E , et deux ensembles ouverts M_x et N_x sans point commun dans $f^{-1}(U_x)$ tels que, pour tout $z \in U_x$, on ait $A \cap f^{-1}(z) \subset M_x$ et $B \cap f^{-1}(z) \subset N_x$. On conclut alors le raisonnement comme au n° 4 avec les modifications suivantes: $S_\lambda \times V_{x(\lambda)}$ est remplacé par $f^{-1}(S_\lambda) \cap M_{x(\lambda)}$, $T_\lambda \times V_{x(\lambda)}$ par $f^{-1}(T_\lambda) \cap M_{x(\lambda)}$ et $(E - \bar{S}_\lambda) \times F$ par $f^{-1}(E - \bar{S}_\lambda)$.

6. On peut se demander s'il est possible d'aller plus loin: il y a en effet plusieurs propriétés des produits topologiques qui s'étendent, non seulement aux espaces „fibroïdes” du type considéré au n° 5, mais plus généralement à un espace G muni d'une relation d'équivalence R , moyennant des hypothèses convenables sur R , sur l'espace G/R et sur les classes suivant R ; comme exemples simples on peut citer le cas où G/R est connexe ainsi que les classes suivant R , et celui où G/R est compact ainsi que les classes suivant R , R étant de plus supposée fermée; dans le premier cas, G est connexe, et dans le second il est compact ([1], p. 118, prop. 8 et p. 112, exercice 18). Un exemple analogue plus proche de notre sujet est l'extension du théorème connu sur le produit d'un espace paracompact et d'un espace compact: si G (séparé) est tel que G/R soit paracompact, si toute classe suivant R est compacte et si en outre R est fermée, alors G est paracompact. La démonstration est très semblable à celle du cas particulier d'un produit. Soit f l'application canonique de G sur $E = G/R$, et soit $\mathcal{K}$ un recouvrement ouvert quelconque de G ; pour tout $x \in E$, on recouvre l'ensemble compact $f^{-1}(x)$ par un nombre fini d'ensembles ouverts $U_{x,k}$ ($1 \leq k \leq n(x)$) dont chacun est contenu dans un ensemble de $\mathcal{K}$. Comme la relation R est fermée, il y a un voisinage ouvert V_x de $f^{-1}(x)$, saturé pour R et contenu dans la réunion des $U_{x,k}$; les $W_x = f(V_x)$ forment alors un recouvrement ouvert de E , et il y a donc un recouvrement ouvert $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ de E localement fini et plus fin que $(W_x)_{x \in E}$. Pour tout $\lambda \in L$, soit $x(\lambda)$ tel que $S_\lambda \subset W_{x(\lambda)}$; les ensembles $f^{-1}(S_\lambda) \cap U_{x(\lambda),k}$ où $\lambda \in L$ et pour chaque λ , $1 \leq k \leq n(x(\lambda))$, forment alors, comme on le vérifie aisément, un recouvrement ouvert localement fini de G , plus fin que le recouvrement donné $\mathcal{K}$.

On est donc amené à conjecturer (P 233) la proposition suivante: si G est un espace séparé, R une relation d'équivalence fermée dans G , telle que toute classe suivant R soit normale et semi-compacte, et que G/R soit paracompact et vérifie le 1^{er} axiome de dénombrabilité, alors G est normal. Je ne suis pas parvenu à prouver ni à infirmer cette conjecture: toute la difficulté provient de la partie de la démonstration correspondante au n° 2; il s'agirait de savoir si, A_x et B_x étant deux ensembles

fermés sans point commun dans une même classe $f^{-1}(x)$ suivant R , on peut les séparer dans G par deux ensembles ouverts.

TRAVAUX CITÉS

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chapitres I-II, Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 1142, Paris 1951.

[2] — *Topologie générale*, chapitre IX, ibidem, n° 1045, Paris 1948.

[3] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society 54 (1948), p. 977-982.

Reçu par la Rédaction le 3. 10. 1957

SUR DEUX PROBLÈMES D'ANALYSE NON RÉSOLUS

PAR

M. FRÉCHET (PARIS)

PREMIER PROBLÈME

Nous donnerons plus loin la signification de la propriété de deux ensembles A , B symbolisée par la notation

$$(1) \quad dA = dB.$$

Le premier problème que nous proposons tire son origine de l'ensemble des deux théorèmes suivants, l'un démontré par nous, l'autre prouvé par Banach et faisant tous deux intervenir une ou plusieurs relations du type (1).

1° Un grand nombre des espaces les plus importants considérés en Analyse classique (les espaces C , L_2 , ...) sont tels que

$$(2) \quad dC = dL_2 = \dots^{(1)}$$

2° Quand (1) est vérifié, ou bien A et B sont homéomorphes, ou bien ils peuvent être décomposés en deux ensembles disjoints $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$, de sorte que A_k et B_k soient homéomorphes ($k = 1, 2$).

Ceci étant, l'importance des espaces figurant dans la relation (2) incite à poser les questions suivantes (P 234), si l'on considère deux quelconques de ces espaces, par exemple C et L_2 ,

I. C et L_2 sont-ils homéomorphes? Et dans ce cas, préciser l'une des homéomorphies possibles.

II. Quand C et L_2 ne sont pas homéomorphes, préciser une décomposition de C et L_2 , faites d'après 2° et indiquer explicitement les homéomorphies correspondantes.

(¹) On trouvera une liste (non limitative) d'espaces importants B tels que $dB = dC$, soit dans notre communication au Congrès International des Mathématiciens de Toronto en 1924, soit à la fin de notre récent ouvrage [3]. En particulier, L_2 est l'espace de Hilbert, C est l'espace des fonctions réelles $f(x)$ continues sur $(0, 1)$, en y prenant pour norme de $f(x)$ le maximum de $|f(x)|$ sur $(0, 1)$.