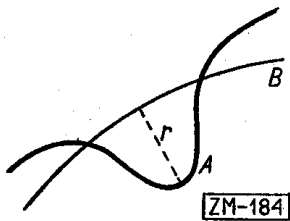


J. P E R K A L (Wrocław)

## O DŁUGOŚCI KRZYWYCH EMPIRYCZNYCH

W pracy niniejszej opiszę trudności związane z pomiarem długości krzywych empirycznych, zdefiniuję nowe pojęcie przybliżonej długości rzędu  $\varepsilon$  i opiszę longimetr do pomiaru tej długości.

1. Rozważać będziemy łuki linii krzywej na płaszczyźnie (będziemy je nazywali krótko *łukami*) jako obrazy homeomorficzne odcinka. Przez *długość* łuku rozumiemy granicę długości łamanych wpisanych w ten łuk, przy skracaniu boków łamanej do zera. Granica taka (skończona lub nieskończona) zawsze istnieje. Łuki o skończonej długości nazywamy *prostowalnymi*. Przez odległość między łukami *A* i *B* rozumiemy taką najmniejszą liczbę  $r$ , że dowolny punkt któregośkolwiek łuku *A* lub *B* jest odległy od jakiegoś (najbliższego) punktu drugiego z tych łuków nie więcej niż o  $r$  (patrz rys. 1). Odległość między dwoma łukami jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy te łuki pokrywają się.



Rys. 1

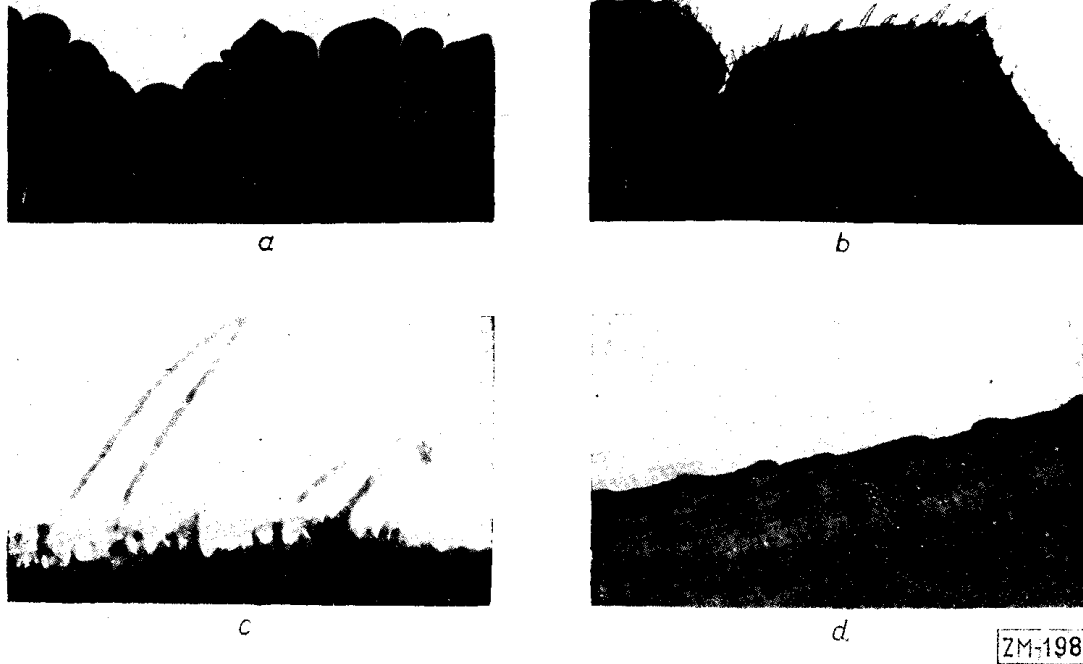
Jeśli znamy konwencję, według której łuk został skonstruowany (np. jeśli znamy równanie łuku), możemy się pokusić o stwierdzenie, czy łuk jest prostowalny czy nie. W przypadku prostowalności możemy pytać o długość łuku. Jeśli jednak nie znamy konwencji, według której powstał łuk, nie możemy się nawet pokusić o stwierdzenie, czy łuk jest prostowalny.

Tak właśnie wygląda sprawa łuków empirycznych. Obwód liścia, długość wybrzeża morskiego, czy ostrze brzytwy są przykładami łuków, o których nie wiemy, czy są prostowalne czy nie. H. Steinhaus zwraca uwagę (patrz [6]), że ostrze brzytwy oglądane gołym okiem ma kształt odcinka prostego, oglądane przez szkło powiększające ma już inny kształt spowodowany małymi szczyrbami; to samo ostrze oglądane przez mikroskop ma całkiem inny kształt, zależny od struktury stali.

Rysunek 2 przedstawia brzeg liścia *Peucedanum sp.* oglądany gołym okiem (a), dziesięciokrotnie powiększony (b), 100 krotnie powiększony (c) i 1000 krotnie powiększony (d) (klisze fotograficzne do tego rysunku sporządził łaskawie na moją prośbę Z. Hejnowicz z katedry anatomii

i cytologii roślin Uniwersytetu Wrocławskiego). Nie wiadomo, jak wyglądają „naprawdę” brzegi liścia czy brzytwki i nie wiadomo, czy są to łuki prostowalne.

Czy rzeczywiście owe małe odchylenia, dostrzegalne tylko przez mikroskop mogą spowodować istotną różnicę długości łuku? Właśnie

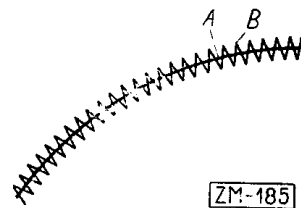


Rys. 2

tak. Długość łuku nie jest funkcjonalem ciągłym. Dowolnie blisko danego łuku  $A$  można narysować inny łuk  $B$  (np. ząbkowany, patrz rys. 3) o długości o wiele większej od łuku  $A$ . Tak więc blisko prostoliniowego ostrza brzytwki oglądanego gołym okiem leży o wiele dłuższa, skomplikowana krzywa przedstawiająca to samo ostrze pod mikroskopem. A jeśli to ostrze będziemy oglądać przez coraz to silniejsze mikroskopy, będziemy widzieli coraz to bardziej skomplikowaną krzywą, o coraz to większej długości. O prawdziwym, ostatecznym kształcie ostrza brzytwki nie można nawet mówić.

Tym bardziej nie ma sensu mówić o prawdziwej długości ostrza.

Inaczej zachowuje się pole obszaru płaskiego ograniczonego krzywą. Pole takiego obszaru jest funkcjonalem ciągłym. Jeśli dwie krzywe leżą blisko, to i pola ograniczone tymi krzywymi mało się różnią.



Rys. 3

Istnieje naiwny sposób mierzenia długości łuków empirycznych. Należy ułożyć nitkę wzdłuż mierzonego łuku, a potem zmierzyć długość wyprostowanej nitki. Nie można jednak w praktyce nigdy wypełnić pierwszego z tych poleceń. Jakkolwiek ułożymy nitkę wzdłuż łuku, to patrząc przez dostatecznie silny mikroskop stwierdzimy, że nitka odbiega od łuku. Zawodzą też wszelkie inne metody pomiaru długości łuku, oparte na wodzeniu wzdłuż łuku radełkiem, igłą czy nóżką odmierzacza (metoda kroczków). Muszą one zawodzić, gdyż, jak wspomniałem wyżej, nie umiemy stwierdzić, czy mierzony łuk empiryczny jest prostowalny czy nie.

Przyrodnicy wiedzą, że trudno jest zmierzyć długość łuku empirycznego, wiedzą, że wyniki bywają często sprzeczne, że są one obciążone nie tylko błędami losowymi i systematycznymi, zależnymi od metody i osoby mierzącego; wyniki te są obciążone poważnym błędem generalizacji. Zauważyli to przede wszystkim geografowie; i tak, wiedeński geograf A. Penck w 1894 roku podał długość brzegu morskiego między dwoma punktami na półwyspie Istrii (patrz [1]), zmierzoną na mapach różnie zgeneralizowanych. Oto wyniki:

| Nr mapy | Skala        | Długość w km |
|---------|--------------|--------------|
| 1       | 1:15 000 000 | 105          |
| 2       | 1: 3 700 000 | 132          |
| 3       | 1: 1 500 000 | 157,6        |
| 4       | 1: 750 000   | 199,5        |
| 5       | 1: 75 000    | 223,8        |

Zwróćmy uwagę, że właściwie nie skala bezpośrednio wpływa na rozbieżność wyników, lecz stopień generalizacji. Skala pozwala nam tu tylko wnosić o stopniu generalizacji, a przecież nie używa się innego wskaźnika stopnia generalizacji. Gdyby mapę 4 powiększyć dziesięciokrotnie sposobem fotograficznym, otrzymalibyśmy mapę w tej samej skali co mapa 5; ale generalizacja tak otrzymanej mapy byłaby taka sama jak generalizacja mapy 4, a zatem należy się spodziewać, że na takiej mapie długość mierzonego odcinka brzegu wyniosłaby 199,5 km, a nie 223,8 km. Byłoby tak dlatego, że fotograficzne powiększenie mapy 4 nie wniosłoby nowych szczegółów uwidocznionych na dokładniejszej mapie 5.

Wobec tak znacznych trudności i rozbieżności powstaje pytanie, czy w ogóle ma sens mówić o długości klasycznej empirycznego łuku? Wydaje się, że należy opracować jakieś nowe pojęcie długości, tak żeby nową długość można było traktować jako przybliżenie klasycznej, i przyjąć konwencjonalnie to nowe pojęcie zamiast klasycznego. Taka nowa długość powinna przysługiwać wszelkim łukom empirycznym i powinna być łatwa do mierzenia.

W tym kierunku szły badania H. Steinhausa (patrz [5] i inne prace tam cytowane). Każdą prostą płaszczyzny można określić za pomocą dwóch liczb:  $r$  — odległości od początku układu współrzędnych i  $\varphi$  — kąta z osią  $x$ . Te dwie liczby  $r$  i  $\varphi$  nazywamy *współzrzednymi croftonowskimi prostej* (patrz [5]). Punkt na płaszczyźnie o współzrzednych  $r$  i  $\varphi$ , czyli na tzw. *płaszczyźnie Croftona*, odpowiada prostej na pierwotnie rozważanej płaszczyźnie o dawnych współzrzednych. Twierdzenie Croftona wiąże długość krzywej leżącej na pierwszej płaszczyźnie z polem pewnego zbioru leżącego na płaszczyźnie Croftona. Weźmy mianowicie pod uwagę łuk leżący na pierwszej płaszczyźnie i zbiór wszystkich prostych przecinających ten łuk. Każdej takiej prostej odpowiada punkt płaszczyzny Croftona, więc zbiorowi prostych odpowiada zbiór punktów na płaszczyźnie Croftona. Otóż miara płaska tego zbioru punktów jest równa długości łuku. Zachodzi tu jednak jeszcze pewna komplikacja: punkty odpowiadające prostym przecinającym dwukrotnie mierzony łuk trzeba liczyć dwukrotnie, i ogólnie: punkty odpowiadające prostym przecinającym nasz łuk  $n$ -krotnie trzeba liczyć  $n$ -krotnie. Należy więc tak wyrazić twierdzenie Croftona: Na płaszczyźnie Croftona leży ciąg zbiorów  $K_i$  o polach  $k_i$ . Zbiór  $K_i$  jest to zbiór punktów płaszczyzny Croftona, w którym odpowiadające proste pierwszej płaszczyzny przecinają mierzony łuk co najmniej  $i$ -krotnie. Wówczas długością łuku jest suma szeregu nieskończonego

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} k_i.$$

2. Na tej zasadzie oparty jest znany longimetr Steinhausa. Jest to arkusik przejrzystego papieru równolegle poliniowany. Arkusik ten nakłada się na mierzony łuk i liczy się ilość punktów przecięcia łuku z prostymi longimetru. W myśl twierdzenia Croftona liczba tych punktów przecięcia jest w przybliżeniu proporcjonalna do długości łuku. Wielokrotne powtórzenie pomiaru zwiększa dokładność w tym sensie, że zmniejsza błąd losowy.

Ale ten longimetr, jak każdy przyrząd do mierzenia klasycznej długości, nie nadaje się do mierzenia długości łuków empirycznych, gdyż nie wiadomo, czy łuk taki jest prostowalny, czyli czy zbieżny jest odpowiedni szereg (1).

Przedstawiona metoda pozwoliła H. Steinhausowi na wprowadzenie nowego pojęcia długości, a raczej ciągu pojęć długości rzędu  $n$ . *Długością rzędu  $n$*  nazywa H. Steinhaus sumę  $n$  pierwszych wyrazów szeregu (1). Pomiar tej długości rzędu  $n$  odbywa się za pomocą longimetru Steinhausa tak jak pomiar klasycznej długości, z tą jedynie różnicą, że na każdej prostej longimetru liczy się nie więcej niż  $n$  punktów przecięcia tej prostej z mierzonym łukiem. Jeśli więc prosta przecina łuk mniej niż  $n$ -krotnie

lub  $n$ -krotnie, liczy się wszystkie punkty przecięcia tej prostej z łukiem. Jeśli jednak któraś prosta przecina łuk więcej niż  $n$ -krotnie, przyjmuje się, że prosta ta tylko  $n$ -krotnie przecięła mierzony łuk. Zgodnie z przyjętym programem długość  $n$ -tego rzędu jest przybliżoną długością klasyczną w tym sensie, że zmierza do długości klasycznej, gdy  $n$  powiększa się do nieskończoności. Długość rzędu  $n$  przysługuje wszystkim łukom empirycznym i jest łatwa do mierzenia. Wydawałoby się więc, że zagadnienie jest rozwiązane i że można konwencjonalnie wprowadzić długość rzędu  $n$  zamiast klasycznej.

Pojęcie długości rzędu  $n$  rozwiązuje wiele kwestii związanych z pomiarem łuków empirycznych. Ta przybliżona długość nadaje się szczególnie do porównywania długości linii krzywych na mapie geograficznej albo na kilku mapach różnie zgeneralizowanych. Można przypuszczać, że stosując długość określonego rzędu, np. piątego, Penck nie otrzymałby takich różnic w pomiarze długości brzegu morskiego na Istrii. Są jednak zagadnienia przyrodnicze, w których nie wystarcza opisana powyżej długość rzędu  $n$ . Oto argumenty:

1° Mankamentem metody jest zbyt słaby związek długości rzędu  $n$  z długością klasyczną. Przyrodnik chce mierzyć prawdziwą długość, tzn. klasyczną długość empirycznego łuku i chce wierzyć w istnienie takiej długości. Łatwiejsze do strawienia dla przyrodnika wydaje się generalizowanie łuku, niż wprowadzenie nowej abstrakcyjnej miary, jaką jest długość rzędu  $n$ . Wiadomo co prawda, że długość rzędu 1 daje długość klasyczną łuków prostoliniowych, a długość rzędu 2 daje długość klasyczną łuków wypukłych. Nie wiadomo jednak, dla jakiej klasy łuków długość rzędu  $n$  jest długością klasyczną, jeśli  $n > 2$ . Wiadomo dalej, że przy powiększaniu  $n$  długość rzędu  $n$  zwiększa się i dąży do długości klasycznej, ale nie wiadomo, jaki jest związek między  $n$  a dokładnością długości rzędu  $n$ , tzn. różnicą między długością klasyczną a długością rzędu  $n$ . Gdy przyrodnik otrzymał z pomiaru długość przybliżoną, chciałby sobie choćby wyobrazić łuk zbliżony do mierzonego (generalizację), którego klasyczna długość równałaby się długości rzędu  $n$  mierzonego łuku.

2° Każda metoda przybliżonego pomiaru długości musi zawierać konwencję. W metodzie H. Steinhausa konwencjonalna jest liczba  $n$ , tj. rząd długości. Jest to liczba niemianowana i ma to swoje dodatnie i ujemne strony. Dodatnią stroną jest elegancja takiej konwencji. Niemianowana liczba naturalna nie zależy od przyjętej jednostki długości (centymetr czy cal). Natomiast wadą takiej konwencji jest wspomniany poprzednio brak zależności między konwencjonalnym  $n$  a dokładnością pomiaru i klasą łuków, których długości, klasyczna i rzędu  $n$ , są równe. Wydaje się, że w niektórych przypadkach dogodniejsza byłaby konwencja

dotycząca odcinka, którego długość byłaby związana z dokładnością pomiaru przybliżonego i określałaby klasę łuków, dla których długość przybliżona równałaby się klasycznej.

3° Długość rzędu  $n$ , podobnie jak i długość klasyczna, jest funkcją nieciągłą, co w niektórych przypadkach może doprowadzić do opisanych poprzednio paradoksów długości. Przy pomiarze długości rzędu np. 10 dostatecznie zagmatwanego łuku empirycznego, może się zdarzyć, że punkt przecięcia łuku z prostą longimetru okaże się pod mikroskopem nie jednym punktem, lecz zbiorem liczącym więcej punktów przecięcia. Długość rzędu 10 jest więc jeszcze zależna od tego, czy łuk oglądamy gołym okiem czy przez mikroskop, czyli od generalizacji łuku. Mogłoby się okazać, że każdy punkt przecięcia łuku empirycznego z prostą longimetru jest właściwie takim zbiorem punktów (a w praktyce nigdy nie możemy stwierdzić, że jest inaczej). Zachodziłaby wówczas obawa, że długość rzędu  $n$  jest po prostu  $n$ -krotnością długości rzędu 1.

3. Opiszę teraz nowe pojęcie przybliżonej długości rzędu  $\varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Konwencjonalnym parametrem nowej długości będzie więc długość odcinka. Długość rzędu  $\varepsilon$  będzie już funkcją ciągłą łuku i będzie w sposób ciągły zależeć od liczby  $\varepsilon$ . Długość rzędu  $\varepsilon$  nie ma wad, jakie wyżej zarzucałem długości rzędu  $n$ . Dokładniejszy opis tego pojęcia można znaleźć w mojej pracy [3].

W pracy [2] określiłem zbiór  $A_\varepsilon(X)$ , tj.  $\varepsilon$ -aureolę łuku  $X$ , jako zbiór wszystkich punktów płaszczyzny odległych od łuku  $X$  nie więcej niż o  $\varepsilon$ :

$$(2) \quad A_\varepsilon(X) = E_x[(x, X) \leq \varepsilon],$$

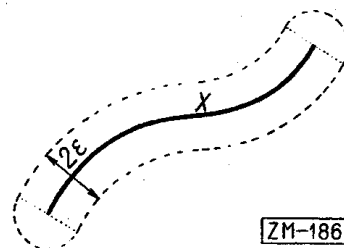
gdzie  $E$  jest symbolem Lebesgue'a, a  $(x, X)$  oznacza odległość punktu  $x$  od łuku  $X$ , czyli odległość punktu  $x$  od najbliższego punktu łuku  $X$ .

Przez  $\alpha_\varepsilon(X)$  oznaczmy pole zbioru  $A_\varepsilon(X)$ . Rysunek 4 przedstawia  $\varepsilon$ -aureolę łuku  $X$ . Składa się ona, jak widać, z pasa o szerokości  $2\varepsilon$  otaczającego łuk  $X$  oraz z dwóch półkoli o promieniu  $\varepsilon$ .

Długość rzędu  $\varepsilon$  łuku  $X$  oznaczam symbolem  $L_\varepsilon(X)$  i określám następującym wzorem:

$$(3) \quad L_\varepsilon(X) = \frac{\alpha_\varepsilon(X) - \pi\varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

Dla łuku przedstawionego na rysunku 4 długość rzędu  $\varepsilon$  jest więc polem pasa otaczającego łuk  $X$  (pole  $\varepsilon$ -aureoli pomniejszone o pole dwóch pół-



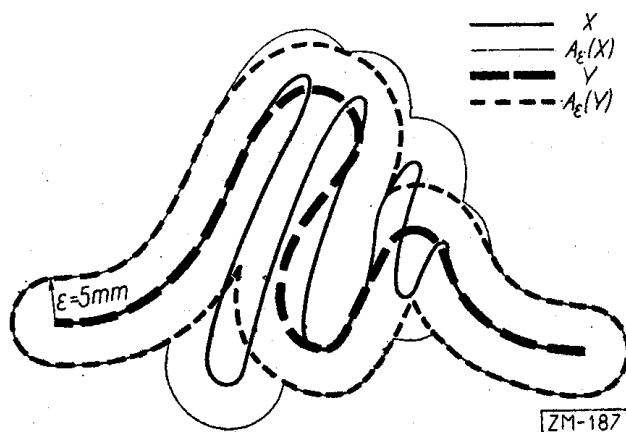
Rys. 4

koli) podzielonym przez szerokość tego pasa. Gdyby łuk  $X$  był odcinkiem prostej, pas ten byłby prostokątem o szerokości  $2\varepsilon$  i o długości równej długości łuku  $X$  (odcinka). Pole pasa nie ulegnie zmianie, jeśli łuk  $X$  będziemy zginać, byle nie za bardzo, tj. tak, żeby promień krzywizny łuku  $X$  był wszędzie nie mniejszy niż  $\varepsilon$ . Dla takich łuków definicja (3) jest intuicyjna i długość rzędu  $\varepsilon$  jest równa zwykłej długości.

Okazuje się (patrz [3]), że długość rzędu  $\varepsilon$  jest funkcjonalem ciągłym łuku, tj. jeśli łuk  $X$  leży blisko łuku  $Y$ , to długości rzędu  $\varepsilon$  tych łuków mało się różnią. Długość ta jest funkcją ciągłą i malejącą ze względu na zmienną  $\varepsilon$ , tzn. że jeśli  $\varepsilon$  maleje — długość rzędu  $\varepsilon$  wzrasta (nie maleje) i na odwrót. Przy tym, jeśli  $\varepsilon$  zmieni się nieznacznie, długość rzędu  $\varepsilon$  albo nie ulegnie zmianie, albo zmieni się również nieznacznie.

W pracy [4] opisałem zbiory  $\varepsilon$ -wypukłe. Łuk jest  $\varepsilon$ -wypukły, jeśli po obu stronach tego łuku można przetoczyć koło o średnicy  $\varepsilon$ . Innymi słowy: łuk jest  $\varepsilon$ -wypukły, jeśli ma w każdym punkcie promień krzywizny nie mniejszy niż  $\frac{1}{2}\varepsilon$ . Dla krzywych  $2\varepsilon$ -wypukłych o końcach odległych co najmniej o  $2\varepsilon$  długość rzędu  $\varepsilon$  jest równa długości klasycznej. Dla innych krzywych długość rzędu  $\varepsilon$  może być mniejsza od klasycznej (lub równa).

Rysunek 5 przedstawia odcinek o długości  $\varepsilon = 5$  mm i łuk  $X$ , który nie jest  $2\varepsilon$ -wypukły (linia ciągła). Cienką linią ciągłą narysowano  $\varepsilon$ -aureolę



Rys. 5

łuku  $X$ . Jak wynika z wzoru (3), każdy łuk, którego  $\varepsilon$ -aureola równa jest  $A_\varepsilon(X)$ , ma tę samą długość rzędu  $\varepsilon$  co łuk  $X$ . W szczególności, gdyby się udało narysować łuk  $Y$   $2\varepsilon$ -wypukły i o  $\varepsilon$ -aureoli równej  $A_\varepsilon(X)$ , klasyczna długość łuku  $Y$  byłaby równa jego długości rzędu  $\varepsilon$  i równa długości rzędu  $\varepsilon$  łuku  $X$ . Umielibyśmy zatem pokazać łuk  $Y$  aproksymujący dany łuk  $X$  (leżący w  $A_\varepsilon(X)$ ), którego klasyczna długość byłaby długością rzędu  $\varepsilon$  łuku  $X$ . Niestety, taki łuk  $Y$  na ogół nie istnieje. Możemy tylko

wpisać  $2\varepsilon$ -wypukłe łuki  $Y$  w ten sposób, żeby było  $A_\varepsilon(Y) \subset A_\varepsilon(X)$ . Jeden taki łuk  $Y$  ze swą  $\varepsilon$ -aureolą jest na rysunku 5 narysowany linią przerywaną. Wiadomo wówczas, że  $L_\varepsilon(X) \geq L_\varepsilon(Y) = L(Y)$ , gdzie ten ostatni symbol oznacza długość klasyczną. Umiemy więc narysować łuk  $Y$  aproksymujący mierzony łuk  $X$ , o długości klasycznej mniejszej od  $L_\varepsilon(X)$  o różnicę  $\varepsilon$ . Różnicę tę łatwo oszacować; jest nią mianowicie podzielona przez  $2\varepsilon$  ta część pola zbioru  $A_\varepsilon(X)$ , która nie jest pokryta  $\varepsilon$ -aureolą łuku  $Y$ , czyli  $(\alpha_\varepsilon(X) - \alpha_\varepsilon(Y))/2\varepsilon$ .

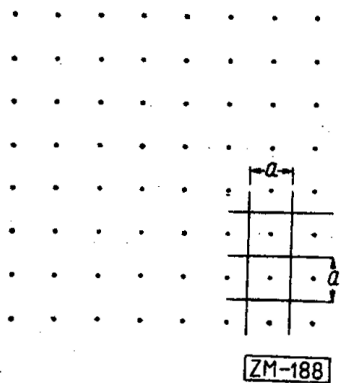
Długość rzędu  $\varepsilon$  zawiera konwencjonalny parametr  $\varepsilon$  oznaczający dokładność długości, tzn. wyznaczający różnicę między długością klasyczną (łuków prostowalnych) a długością rzędu  $\varepsilon$ . Pisałem wyżej, że łuki o niezbyt dużej krzywiznie (o promieniu krzywizny nie mniejszym niż  $\varepsilon$ ) mają długość rzędu  $\varepsilon$  równą klasycznej. Można to rozumieć tak, że długość rzędu  $\varepsilon$  mierzy łuki niezbyt krzywe dokładnie, a inne łuki w sposób przybliżony; przy czym błąd przybliżenia jest tym większy, im bardziej krzywe są łuki mierzone. Dla łuków nieprostowalnych błąd ten jest nieskończenie wielki, gdyż długość klasyczna takich łuków nie istnieje (jest nieskończenie wielka), a długość rzędu  $\varepsilon$  jest skończona. Stąd widać, że właściwy błąd, czyli różnica między długością klasyczną a długością rzędu  $\varepsilon$ , nie powinien być miernikiem dokładności pomiaru, gdyż błąd ten zależy nie tyle od  $\varepsilon$ , co od łuku. Dla łuków nieprostowalnych błąd ten jest nieskończony (niezależnie od  $\varepsilon$ ), a więc dla łuków empirycznych jest nieokreślony. Można się umówić, że miernikiem dokładności będzie stosunek  $\eta = \varepsilon/L_\varepsilon(X)$  (pomysł H. Steinhausa). Gdy  $\varepsilon$  będzie malało, długość rzędu  $\varepsilon$  (tj. mianownik) będzie wzrastała, a zatem stosunek ten będzie również malał. Można zażądać konwencjonalnie, aby do pomiaru długości łuku  $X$  używać długości takiego rzędu  $\varepsilon$ , żeby stosunek  $\eta$  był nie większy od 10% lub 5%. Można też liczbę  $\varepsilon$  obrać w inny sposób, bardziej przyrodniczy, analizując, jakie drobne zakrzywienia łuku można odrzucić (zgeneralizować) bez szkody dla rozważanego zagadnienia. Jeśli zdecydujemy się odrzucać zakrzywienia o promieniu mniejszym niż  $\varepsilon$ , to właśnie długość rzędu  $\varepsilon$  będzie właściwą długością do pomiaru takich empirycznych łuków. Do tego zagadnienia powrócimy jeszcze przy omawianiu generalizacji.

Długość rzędu  $\varepsilon$  ma więc własności, jakich należy żądać od empirycznej długości. Jest ona funkcjonalem ciągłym, czyli całkowicie usuwa paradoks długości polegający na tym, że blisko łuku krótkiego można znaleźć łuk bardzo długi. Dla łuków  $2\varepsilon$ -wypukłych długość rzędu  $\varepsilon$  jest równa długości klasycznej, a dla innych łuków jest od klasycznej mniejsza i powiększa się w sposób ciągły, gdy zmniejszamy  $\varepsilon$ . Jeśli łuk jest prostowalny, to przy zmniejszaniu  $\varepsilon$  do zera długość rzędu  $\varepsilon$  dąży do długości klasycznej. Długość rzędu  $\varepsilon$  można w pewnym sensie traktować

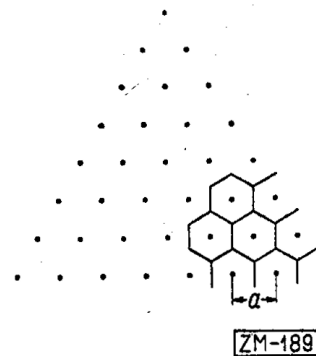


jako przybliżenie długości klasycznej i można konstruować dla mierzonego łuku inny łuk, którego długość klasyczna jest bliska (błąd można oszacować) długości rzędu  $\varepsilon$  mierzonego łuku. Parametr długości, a mianowicie  $\varepsilon$ , można dobrać do łuku lub do zagadnienia w sposób przyrodniczy. Ma to związek z generalizacją łuku. W następnych częściach pracy opiszę łatwy przyrząd do pomiaru długości rzędu  $\varepsilon$ .

4. Rysunek 4 przedstawia łuk  $X$  i jego  $\varepsilon$ -aureole. W myśl wzoru (3) na to, żeby wyznaczyć długość rzędu  $\varepsilon$  tego łuku, trzeba wyznaczyć  $\alpha_\varepsilon(X)$ , czyli pole  $\varepsilon$ -aureoli łuku  $X$ . Można to zrobić za pomocą tzw. planimetru punktowego (patrz [7]). Jest to płaski układ punktów regularnie rozmieszczonych, jak np. układ punktów kratowych (patrz rys. 6), tj. punktów o współrzędnych  $(am, an)$ , gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami całkowitymi, a  $a$  jest dowolnie obraną (dla całego układu) liczbą rzeczywistą, lub układ wierzchołków siatki trójkątowej o boku  $b$  (patrz rys. 7). Każdemu takiemu



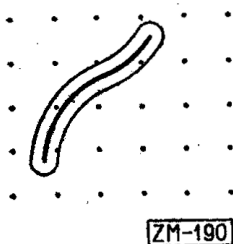
Rys. 6



Rys. 7

regularnemu układowi punktów odpowiada podział płaszczyzny na figury regularne, których środkami są punkty układu. Figury te narysowano na rysunkach 6 i 7. W przypadku punktów kratowych są to kwadraty o polu  $a^2$ , a w przypadku siatki trójkątowej są to sześcioboki o polu  $\frac{1}{2}\sqrt{3}b^2$ .

Planimetr punktowy jest to układ punktów regularnie rozmieszczonych na arkuszu przejrzystego papieru. Arkusz ten nakładamy na mierzony



Rys. 8

zbiór  $A$  (rys. 8) i liczymy ilość punktów trafiających w zbiór  $A$ . Pole zbioru  $A$  jest równe oczekiwanej ilości tych punktów pomnożonej przez pole odpowiedniej figury. Oczekiwana ilość punktów trafiających w zbiór  $A$  można wyestymować za pomocą średniej arytmetycznej z kilku losowych nałożeń planimetru na zbiór  $A$ . Z twierdzenia Jarníaka-Steinhausa (patrz [8]) wynika, że błąd względny pomiaru wykonywanego

planimetrem punktowym jest wprost proporcjonalny do długości łuku ograniczającego mierzony obszar, a odwrotnie proporcjonalny do pola tego obszaru (przy czym jednostką ma być liczba  $a$ ). Jeśli  $a$  zmniejszymy  $q$ -krotnie, długość łuku powiększy się  $q$ -krotnie, a pole obszaru  $q^2$ -krotnie. Wobec tego błąd względny pomiaru zmniejszy się  $q$ -krotnie. Im gęstszy zatem jest układ punktów kratowych (podobnie trójkątowych), tym wydajniejszy jest planimetr, tzn. tym dokładniejszy jest pomiar wykonany tym planimetrem.

Tak więc pomiar pola  $A$  wykonamy w następujący sposób. Planimetr punktowy (kwadratowy o boku  $a$  lub trójkątowy o boku  $b$ ) nakładamy  $k$ -krotnie na obszar  $A$  i liczymy ilość punktów trafiających w obszar  $A$ : przy pierwszym nałożeniu  $n_1$ , przy drugim  $n_2$ , ..., przy  $k$ -tym  $n_k$ . Oznaczmy

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k;$$

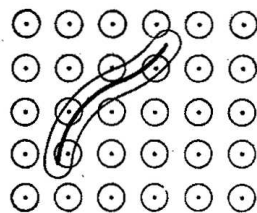
pole obszaru  $A$  wyniesie wówczas

$$\frac{n}{k} a^2, \text{ jeśli układ punktów jest kratowy,}$$

lub

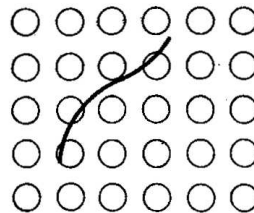
$$\frac{n\sqrt{3}}{2k} b^2, \text{ jeśli układ punktów jest trójkątowy.}$$

Z wzoru (2) wynika (rys. 9), że punkt  $P$  trafi w  $A_\varepsilon(X)$  wtedy i tylko wtedy, gdy koło o promieniu  $\varepsilon$  i o środku w punkcie  $P$  trafi łuk  $X$ . Pozwoli nam to zmierzyć pole  $A_\varepsilon(X)$  z rysunku, na którym narysowany jest tylko łuk  $X$  (rys. 10). Wystarczy mianowicie w planimetrze punktowym za-



ZM-191

Rys. 9



ZM-192

Rys. 10

stąpić punkty kółkami o promieniu  $\varepsilon$ . Rysunek A (na przejrzystej wklejce) przedstawia taki przyrząd oparty na planimetrze punktowym kratowym o boku kraty  $a = 10$  mm i dla  $\varepsilon = 5$  mm. Rysunek B przedstawia taki przyrząd oparty na siatce trójkątowej o boku  $b = 8$  mm i dla  $\varepsilon = 4$  mm. Takim arkusikiem nakrywamy łuk  $X$  i liczymy ilość kółek trafiających łuk. Ta ilość (oczekiwana) pomnożona przez  $a^2$  przy krato-

wym układzie kółek, a przez  $\frac{1}{2}\sqrt{3}b^2$  przy trójkątowym, będzie równa  $\alpha_\varepsilon(X)$ , tj. polu  $\varepsilon$ -aureoli łuku  $X$ . Dla lepszej estymacji oczekiwanej ilości kółek trafiających w łuk  $X$ , należy pomiar powtórzyć  $k$ -krotnie. Łączną ilość kółek trafiających w łuk  $X$  przy wszystkich  $k$  pomiarach oznaczymy jak wyżej przez  $n$  i posługując się wyżej napisanymi wzorami, otrzymamy z wzoru (3) następujący:

$$(4) \quad L_\varepsilon(X) = \begin{cases} \frac{na^2}{2k\varepsilon} - \frac{\pi}{2}\varepsilon & \text{dla układów kratowych,} \\ \frac{nb^2\sqrt{3}}{4k\varepsilon} - \frac{\pi}{2}\varepsilon & \text{dla układów trójkątowych.} \end{cases}$$

Dobierzemy teraz we wzorach (4) stałe  $a$ ,  $b$  i  $k$  do różnych  $\varepsilon$ , tak żeby przyrząd był wydajny (efektywny) i wygodny. Przyrząd nasz będziemy nazywali krótko  $\varepsilon$ -longimetrem (o układzie kratowym lub trójkątowym). Z tego, że planimetr o gęstszym układzie punktów jest wydajniejszy, wynika, że im gęstszy będzie układ kółek, tym  $\varepsilon$ -longimetr będzie wydajniejszy. Longimetr na rysunku 10 jest mniej wydajny niż na rysunkach A i B (na wklejkach), gdyż kółka longimetru nie stykają się na rysunku 10, a stykają się na rysunkach A i B. Można by rozmieścić kółka longimetru jeszcze gęściej niż na rysunkach A i B, ale wówczas kółka zachodziłyby jedno na drugie i posługiwanie się takim longimetrem byłoby niewygodne. Najlepszy więc będzie longimetr o stykających się kółkach, o  $a = 2\varepsilon$  w układzie kratowym i o  $b = 2\varepsilon$  w układzie trójkątowym.

W układzie kratowym współczynnik przy  $n$  we wzorze (4) przybierze postać  $a^2/2k\varepsilon = 2\varepsilon/k$ . Jeśli teraz dobierzemy  $k = 2\varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon$  wyrazimy w odpowiednich jednostkach długości (np. w milimetrach), otrzymamy jedność jako współczynnik przy  $n$  we wzorze (4). Przybierze on wówczas postać

$$(5) \quad L_\varepsilon(X) = n - \frac{1}{2}\pi\varepsilon.$$

Tak np. na rysunku A pokazany jest  $\varepsilon$ -longimetr dla  $\varepsilon = 5$  mm. Bok kraty wynosi  $a = 2\varepsilon = 10$  mm, a ilość powtórzeń pomiaru  $k = 2\varepsilon = 10$ . Odjemnik  $\frac{1}{2}\pi\varepsilon = 7,854 \approx 8$ . Przepis na pomiar długości rzędu  $\varepsilon = 5$  mm łuku  $X$  jest bardzo prosty:

Longimetr nakładamy losowo 10 razy na łuk  $X$  i liczymy łączną ilość  $n$  kółek trafiających w łuk  $X$ . Od tej ilości  $n$  odejmujemy 8 i otrzymujemy długość rzędu 5 mm łuku  $X$  w mm. W podobny sposób można dobrać liczby  $a$  i  $k$  dla dowolnych  $\varepsilon$ , będących wielokrotnościami połówki. Liczby takie oraz odjemniki  $\frac{1}{2}\pi\varepsilon$  dla różnych  $\varepsilon$  podano w tabelicy 1:

TABLICA 1

| Stale \ $\varepsilon$       | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5  | 6  | 8  | 10 | 15 | 20 | 30 | 50  |
|-----------------------------|---|-----|---|-----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $a$                         | 2 | 3   | 4 | 5   | 6 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 | 30 | 40 | 60 | 100 |
| $k$                         | 2 | 3   | 4 | 5   | 6 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 | 30 | 40 | 60 | 100 |
| $\frac{1}{2}\pi\varepsilon$ | 2 | 2   | 3 | 4   | 5 | 6 | 8  | 9  | 13 | 16 | 24 | 31 | 47 | 79  |

Każda kolumna tej tablicy, przy  $\varepsilon$  wyrażonych w dowolnych jednostkach długości, pozwala skonstruować odpowiedni  $\varepsilon$ -longimetr. Tak np. longimetr na rysunku A jest skonstruowany za pomocą kolumny, której pierwszą liczbą jest 5.

W układzie trójkątowym współczynnik przy  $n$  we wzorze (4) jest  $b^2\sqrt{3}/4k\varepsilon$ , czyli po podstawieniu  $b = 2\varepsilon$  będzie on równy  $\varepsilon\sqrt{3}/k$ . Będzie on równy jedności dla  $k = \varepsilon\sqrt{3}$ , co wobec tego, że  $k$  (ilość powtórzeń pomiaru) musi być liczbą naturalną, daje możliwość konstrukcji równie wygodnego longimetru tylko dla niektórych  $\varepsilon$ . Na przykład  $\varepsilon$ -longimetr o układzie trójkątowym pokazany na rysunku B ma kółka o promieniu  $\varepsilon = 4,05$  mm. Jest to liczba dobrana do relacji  $4,05\sqrt{3} \approx 7 = k$ . Odjemnik  $\frac{1}{2}\pi\varepsilon$  wynosi tu  $6,37 \approx 6$ . Przepis posługiwania się tym longimetrem jest więc taki: Długość rzędu  $\varepsilon = 4,05$  mm łuku  $X$  otrzymamy nakładając siedmiokrotnie (losowo) longimetr na łuk  $X$  i od łącznej ilości kółek trafiających łuk odejmując 6. W podobny sposób można dobrać inne układy liczb dla  $\varepsilon$ -longimetrów o układzie trójkątowym. Są one zawarte w tablicy 2:

TABLICA 2

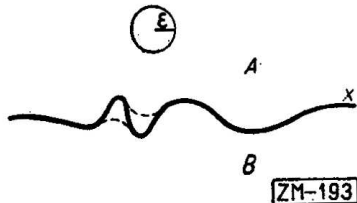
| Stale \ $\varepsilon$       | 1,15 | 1,73 | 2,31 | 2,89 | 4,05 | 5,78 | 8,67 | 11,5 | 14,4 | 28,9 | 57,8  |
|-----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $b$                         | 2,30 | 3,46 | 4,62 | 5,78 | 8,10 | 11,6 | 17,3 | 23,0 | 28,8 | 57,8 | 115,6 |
| $k$                         | 2    | 3    | 4    | 5    | 7    | 10   | 15   | 20   | 25   | 50   | 100   |
| $\frac{1}{2}\pi\varepsilon$ | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 9    | 14   | 18   | 23   | 45   | 91    |

W przepisie posługiwania się longimetrem (A lub B) zalecałem  $k$ -krotnie losowo nakładać longimetr na łuk. Zamiast losowo, można longimetr nakładać systematycznie, co w pewnych przypadkach jest wskazane. W tym celu w środku longimetru można narysować  $k$ -ramienną gwiazdę (na longimetrze A 10-ramienną, na longimetrze B 7-ramienną). Obok mierzonego łuku należy narysować odcinek i zaznaczyć jeden z jego końców. Następnie należy longimetr nakładać na mierzony łuk tak, żeby środek gwiazdy przypadł na zaznaczony punkt, a kolejne ramiona gwiazdy na odcinek narysowany obok łuku. Przy  $i$ -tym pomiarze

$i$ -te ramię gwiazdy powinno się nakładać na ten odcinek. W tym przypadku można nie zapisywać poszczególnych ilości  $n_i$  kółek longimetru trafiających w łuk przy  $i$ -tym nałożeniu longimetru. Wystarczy liczby  $n_i$  odkładać od razu na liczydło, a po dokonaniu wszystkich  $k$  pomiarów (po obejściu całej gwiazdy) należy odjąć wskazany odjemnik. Odczytuje się z liczydła od razu długość rzędu  $\varepsilon$  mierzonego łuku.

5. Opisany wyżej pomiar  $\varepsilon$ -longimetru daje, jak już wiemy, długość rzędu  $\varepsilon$  łuku  $X$ . Jeśli łuk  $X$  jest  $2\varepsilon$ -wypukły i ma końce odległe co najmniej o  $2\varepsilon$ , to długość rzędu  $\varepsilon$  jest równa długości klasycznej. Jeśli jednak łuk  $X$  nie jest  $2\varepsilon$ -wypukły, tj. w niektórych miejscach ma promień krzywizny mniejszy od  $\varepsilon$ , długość rzędu  $\varepsilon$  jest wielkością nową, którą konwencjonalnie przyjmuję za długość. Ponieważ o empirycznych łukach nie można stwierdzić, jak to wspomniałem poprzednio, czy są prostowalne czy też nie, więc tym bardziej nie można stwierdzić, czy są one  $2\varepsilon$ -wypukłe. Można więc uważać, że dla wszystkich łuków empirycznych długość rzędu  $\varepsilon$  jest nową konwencjonalną miarą.

Struktura łuków empirycznych może być bardzo kapryśna. W pracy [4] zwracałem już uwagę na potrzebę upraszczania empirycznych zbiorów i zaproponowałem do tego celu operację  $\varepsilon$ -uwypuklania. Zastosujemy tę operację do uproszczenia geometrycznej struktury łuku. Empiryczny łuk interesuje nas zazwyczaj jako granica dwóch obszarów, jak np. brzeg morza, liścia, brzytwki, tj. granica między obszarem morza i lądu, liścia i tła, brzytwki i tła. Gdyby interesował nas łuk, który nie



Rys. 11

jest taką granicą, moglibyśmy sztucznie wprowadzić np. koło przez końce łuku, a utworzyłyby się dwa obszary, na które nasz łuk dzieli koło (tarczę koła).

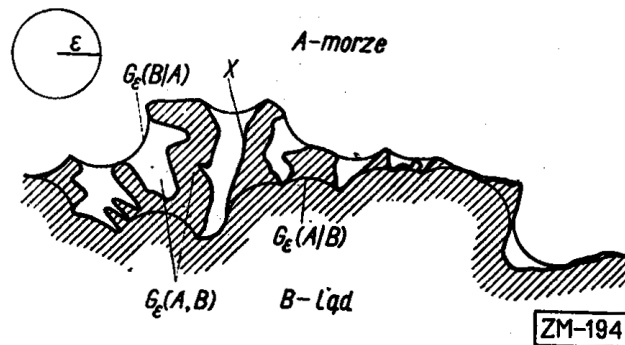
Niech więc  $A$  i  $B$  będą dwoma obszarami rozgraniczonymi łukiem  $X$  (rys. 11). Przez  $C_{2\varepsilon}(A)$  oznaczałem w pracy [4]  $2\varepsilon$ -uwypuklenie obszaru  $A$ , czyli najmniejszy zbiór  $2\varepsilon$ -wypukły zawierający obszar  $A$ . Można go nazwać  $\varepsilon$ -generalizacją obszaru  $A$ . Brzeg tego zbioru, a raczej tę jego część, która zawarta jest w domkniętym obszarze  $B$ , będę oznaczał przez  $G_\varepsilon(A/B)$  i będę nazywał  $\varepsilon$ -zgeneralizowanym brzegiem obszaru  $A$  w obszarze  $B$ :

$$(6) \quad G_\varepsilon(A/B) = B \text{Fr}(C_{2\varepsilon}(A)).$$

Łuk  $G_\varepsilon(A/B)$  jest narysowany na rysunku 11 linią przerywaną. Można go skonstruować w następujący sposób. Po łuku  $X$  toczymy od strony obszaru  $B$  koło o promieniu  $\varepsilon$ . Obwódka wszystkich położenia koła składa się z dwóch gałęzi;  $\varepsilon$ -zgeneralizowanym brzegiem obszaru  $A$  w obszarze  $B$

będzie ta gałąź obwiedni, która leży bliżej łuku  $X$ . W przypadku gdy obszar  $A$  jest  $2\varepsilon$ -wypukły,  $G_\varepsilon(A/B)$  pokrywa się z łukiem  $X$ .

Analogicznie przez  $G_\varepsilon(B/A)$  oznaczam  $\varepsilon$ -zgeneralizowany brzeg obszaru  $B$  w obszarze  $A$ . Otrzymamy go tocząc koło o promieniu  $\varepsilon$  po łuku  $X$  od strony obszaru  $A$ . Na rysunku 12 narysowano linią grubą łuk  $X$ , a liniami cienkimi łuki  $G_\varepsilon(A/B)$  i  $G_\varepsilon(B/A)$ . Oba obszary  $A$  i  $B$  równocześnie są  $2\varepsilon$ -wypukłe wtedy i tylko wtedy, gdy łuk  $X$  jest  $2\varepsilon$ -wypukły. Wówczas łuki  $G_\varepsilon(A/B)$  i  $G_\varepsilon(B/A)$  pokrywają się z łukiem  $X$ . Jeśli tylko jeden z obszarów  $A$  lub  $B$  jest  $2\varepsilon$ -wypukły, to jeden z łuków  $G_\varepsilon(A/B)$



Rys. 12

lub  $G_\varepsilon(B/A)$  pokrywa się z łukiem  $X$ , a drugi jest różny. Jeśli wreszcie żaden z obszarów  $A$  i  $B$  nie jest  $2\varepsilon$ -wypukły, to wszystkie trzy łuki są różne. W ostatnich dwóch przypadkach, tzn. jeśli tylko łuk  $X$  nie jest  $2\varepsilon$ -wypukły, między łukami  $G_\varepsilon(A/B)$  a  $G_\varepsilon(B/A)$  zawiera się pewien obszar dwuwymiarowy, a mianowicie obszar  $C_{2\varepsilon}(X)$ . Obszar ten nazywam  *$\varepsilon$ -zgeneralizowanym brzegiem* obszarów  $A$  i  $B$ :

$$G_\varepsilon(A, B) = C_{2\varepsilon}(X).$$

Oto przyrodnicza interpretacja tych określeń. Wyobraźmy sobie, że obszar  $A$  jest morzem, a  $B$  lądem i rozważmy granicę między morzem a lądem (rys. 12). Ograniczymy się do stanu w jednej chwili, czyli nie będziemy rozważali zmian wywołanych przyływami czy nadbieganiem fal. W określonej chwili wykonamy na przykład serię dostatecznie dokładnych zdjęć fotograficznych. Ale i wtedy, jak wiemy, brzeg będzie rozgraniczał poszczególne ziarna piasku od wody opływającej te ziarna, a przy większej dokładności będzie krzywą jeszcze bardziej skomplikowaną. Otóż  $\varepsilon$ -zgeneralizowanym brzegiem lądu w morzu będzie następujący łuk: Na morzu ułożymy płaskie koło o promieniu  $\varepsilon$ , pływające po wodzie. Tym kołem będziemy się starali płynąć jak najbliżej lądu, to znaczy tak, że w każdej chwili będziemy dotykali lądu co najmniej jednym punktem naszego koła, ale koło stale będzie całą powierzchnią na wodzie. Zatoki węższe niż  $2\varepsilon$ , tj. takie do których się nasze koło nie dostanie, zostaną

zaliczone do  $2\varepsilon$ -wypuklenia lądu, a linia, po której toczyć się będzie nasze koło będzie obwiednią owego koła we wszystkich położeniach, czyli będzie  $\varepsilon$ -zgeneralizowanym brzegiem lądu w morzu.

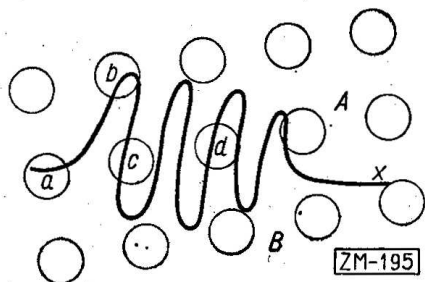
Podobnie jeśli kołu pozwolimy poruszać się jak najbliżej morza, ale tak, żeby całą swoją powierzchnią znajdowało się na lądzie, wówczas nie dotrze ono do półwyspów węższych niż  $2\varepsilon$  i zostaną one zaliczone do  $2\varepsilon$ -wypuklenia morza. Linia, po której przetoczy się w tym ruchu nasze koło, będzie  $\varepsilon$ -zgeneralizowanym brzegiem morza w lądzie. Zauważmy, że te dwa zgeneralizowane łuki nie pokrywają się. Łuk  $G_\varepsilon(B/A)$ , czyli  $\varepsilon$ -zgeneralizowany brzeg lądu w morzu, pozostawi po stronie lądu zbyt wąskie zatoki, a po stronie morza — czystą wodę. Natomiast łuk  $G_\varepsilon(A/B)$  pozostawi po stronie morza zbyt wąskie półwyspy, a po stronie lądu — suchą ziemię. Między tymi dwoma łukami będzie się zawierał  $\varepsilon$ -zgeneralizowany brzeg obszarów lądu i morza,  $G_\varepsilon(A, B)$  będzie nie linią (łukiem), lecz obszarem o pewnym polu dodatnim, obszarem składającym się z wąskich zatok morskich i wąskich półwyspów lądowych. Mogą tam wystąpić również jeziora z morską wodą i wyspy o ziemi lądowej. Lecz w obszarze tym nie znajdziemy ani jednego skrawka lądu, ani morza, na którym pomieściłoby się koło o promieniu  $\varepsilon$ .

Za pomocą  $\varepsilon$ -longimetru opisanego w ustępie 4 można mierzyć długość rzędu  $\varepsilon$  dwóch łuków:  $\varepsilon$ -zgeneralizowanego brzegu obszaru  $A$  w obszarze  $B$  i  $\varepsilon$ -zgeneralizowanego brzegu obszaru  $B$  w obszarze  $A$  bez rysowania tych brzegów. Oznacza to, że pomiar łuków  $G_\varepsilon(A/B)$  i  $G_\varepsilon(B/A)$  lub jednego z tych łuków możemy wykonać mając tylko rysunek łuku  $X$  rozgraniczającego obszary  $A$  i  $B$  (lub te obszary w naturze) i  $\varepsilon$ -longimetr. Potrzebne nam jednak jest do tego jeszcze oddzielne koło o promieniu  $\varepsilon$  (takie jak jedno z kół  $\varepsilon$ -longimetru), wycięte z tektury.

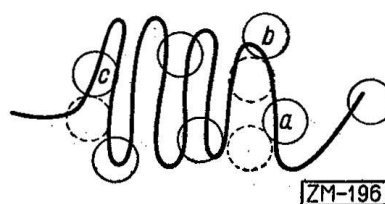
Przy pomiarze długości rzędu  $\varepsilon$  łuku  $X$  liczyliśmy koła  $\varepsilon$ -longimetru trafiające łuk  $X$ . Obecnie będziemy wśród tych kół rozróżniali koła osiągalne z obszaru  $A$ , osiągalne z obszaru  $B$  i nieosiągalne. Koło  $\varepsilon$ -longimetru nazwiemy *osiągalnym z obszaru  $A$* , jeśli w obszarze  $A$  można umieścić dodatkowe koło wycięte z tektury tak, żeby miało punkty wspólne z rozważanym kołem longimetru. Podobnie koło longimetru nazwiemy *osiągalnym z obszaru  $B$* , jeśli zdołamy dodatkowe koło umieścić całkowicie w obszarze  $B$  i to tak, żeby miało punkty wspólne z rozważanym kołem longimetru. Koło longimetru nieosiągalne ani z obszaru  $A$ , ani z  $B$  nazwiemy *nieosiągalnym*. Na rysunku 13 widzimy łuk  $X$  dzielący obszary  $A$  i  $B$  oraz  $\varepsilon$ -longimetr nałożony na łuk  $X$ . Koło  $a$  tego longimetru jest osiągalne zarówno z obszaru  $A$ , jak i z  $B$ . Koło  $b$  jest osiągalne tylko z  $A$ , koło  $c$  tylko z  $B$ , a koło  $d$  jest nieosiągalne. Niekiedy możemy od razu, bez dodatkowego koła stwierdzić, czy koło jest lub nie jest osiągalne z jakiegoś obszaru. W niektórych przypadkach musimy posłużyć się

dotychczasowym kołem (z tektury), co oczywiście czyni pomiar trudniejszym. Na rysunku 14 przedstawiono przykłady łatwych i trudnych określeń (w tych ostatnich przypadkach pokazane są linią kropkowaną dodatkowe koła).

Na to, żeby koło  $\varepsilon$ -longimetru trafiło łuk  $G_\varepsilon(A/B)$ , potrzeba i wystarczy, żeby to koło trafiło łuk  $X$  i było osiągalne z obszaru  $B$ . Rzeczywiście, jeśli koło longimetru trafia łuk  $G_\varepsilon(A/B)$ , to nie może ani całkowicie



Rys. 13



Rys. 14

leżeć w obszarze  $A$ , ani całkowicie leżeć w obszarze  $B$ ; stąd wynika, że musi ono trafiać łuk  $X$  rozgraniczający obszary  $A$  i  $B$ . Jeśli dalej koło to trafia łuk  $G_\varepsilon(A/B)$ , to zawiera punkty zbioru  $C_{2\varepsilon}(B)$ , ale punkty tego zbioru mają tę własność, że do każdego takiego punktu można dobrać koło o promieniu  $\varepsilon$  leżące całkowicie w obszarze  $B$ . A więc koło longimetru trafiające łuk  $G_\varepsilon(A/B)$  jest osiągalne z obszaru  $B$ . Na odwrót, jeśli koło longimetru trafia łuk  $X$  i jest osiągalne z obszaru  $B$ , to zawiera punkty zbioru  $C_{2\varepsilon}(B)$  i punkty obszaru  $A$ , więc trafia brzeg obszaru  $C_{2\varepsilon}(B)$ , czyli łuk  $G_\varepsilon(A/B)$ .

Analogicznie, na to, żeby koło  $\varepsilon$ -longimetru trafiło łuk  $G_\varepsilon(B/A)$ , potrzeba i wystarczy, żeby to koło trafiło łuk  $X$  i było osiągalne z obszaru  $A$ .

Wynika stąd następujący sposób pomiaru długości rzędu  $\varepsilon$  zgeneralizowanego brzegu obszaru  $A$  w obszarze  $B$ : Nakładamy  $\varepsilon$ -longimetr na łuk  $X$  i liczymy ilość kół longimetru trafiających łuk  $X$  i zarazem osiągalnych z obszaru  $B$ . Pomiar powtarzamy  $k$ -krotnie (liczba  $k$  z tabelicy 1 lub 2 powinna być zanotowana na longimetrze) i od łącznej ilości policzonych kół odejmujemy odpowiedni odjemnik  $\frac{1}{2}\pi\varepsilon$  (również zanotowany na longimetrze). W analogiczny sposób można pomierzyć długość rzędu  $\varepsilon$  łuku  $G_\varepsilon(B/A)$ . Należy zaznaczyć, że łuki  $G_\varepsilon(A/B)$  i  $G_\varepsilon(B/A)$  nie muszą być  $2\varepsilon$ -wypukłe i wobec tego ich długość rzędu  $\varepsilon$  nie musi być długością klasyczną.

Liczba kół  $\varepsilon$ -longimetru trafiających łuk  $X$ , ale nieosiągalnych ani z obszaru  $A$ , ani z  $B$ , świadczy w pewien sposób o wielkości  $\varepsilon$ -zgeneralizowanego brzegu obszarów  $A$  i  $B$ . Mianowicie koło takie jest nieosiągalne, jeśli leży całkowicie wewnątrz zbioru  $G_\varepsilon(A, B)$ , czyli jeśli środek tego



koła leży wewnątrz  $\varepsilon$ -rdzenia (patrz [2], (D2)) zbioru  $G_\varepsilon(A, B)$ . Oczekiwana liczba kół nieosiągalnych trafiających łuk  $X$  jest więc oczekiwaną liczbą punktów trafiających w  $\varepsilon$ -rdzeń zbioru  $G_\varepsilon(A, B)$ , czyli będzie proporcjonalna do pola  $\varepsilon$ -rdzenia zbioru  $G_\varepsilon(A, B)$ . Współczynnik proporcjonalności został przez odpowiedni dobór stałych sprowadzony do jedności. Jak widzimy, liczba nieosiągalnych kół trafiających w łuk  $X$  jest wskaźnikiem wielkości  $\varepsilon$ -zgeneralizowanego brzegu obszarów  $A$  i  $B$  (owego obszaru granicznego między lądem a morzem, złożonego z wąskich zatok i półwyspów). To, że liczba ta jest zerem, nie znaczy jednak, że  $\varepsilon$ -zgeneralizowany brzeg obszarów  $A$  i  $B$  ma pole równe zeru; znaczy to tylko, że brzeg ten jest wąski, a mianowicie, że  $\varepsilon$ -rdzeń tego brzegu ma pole równe zeru.

6. Ponumerujmy koła  $\varepsilon$ -longimetru liczbami  $1, 2, \dots, r$  i rozważajmy zdarzenie  $Z_i$  polegające na tym, że po nałożeniu longimetru na łuk  $X$   $i$ -te koło trafi łuk  $X$ . Przez  $x_i$  oznaczymy zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy zajdzie zdarzenie  $Z_i$ , a wartość 0, gdy zajdzie zdarzenie przeciwne, tj. gdy  $i$ -te koło nie trafi łuku  $X$ . Przez  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_r$  oznaczymy ilość kół longimetru, które przy jednym nałożeniu trafiły łuk  $X$  (w ustępie 4 zmienną losową  $x$  oznaczaliśmy przez  $n_j$ ).

Gdyby zdarzenia  $Z_i$  były niezależne i gdyby prawdopodobieństwo  $P$  zdarzenia  $Z_i$  było niezależne od  $i$ , zmienna losowa  $x$  miałaby rozkład binomialny o średniej  $rp$ , równej oczekiwanej ilości kół  $\varepsilon$ -longimetru trafiających łuk  $X$ , i o wariancji Bernoulliego  $rpq$  (gdzie  $q = 1 - p$ ). Ale zdarzenia  $Z_i$  nie są niezależne, są one dodatnio skorelowane. Chodzi o to, że jeśli jedno koło longimetru trafiło łuk  $X$ , to prawdopodobieństwo, że sąsiednie koło również trafi ten łuk, jest większe niż prawdopodobieństwo, że dowolne koło longimetru trafi łuk  $X$ . Korelacja między zdarzeniami  $Z_i$  zależy od kształtu łuku  $X$ ; dla jednych łuków jest większa, dla innych mniejsza. Ta dodatnia korelacja powiększa wariancję zmiennej losowej  $x$ , czyni ją nadnormalną.

Z drugiej strony, prawdopodobieństwa zdarzeń  $Z_i$  są zależne od  $i$ . Mianowicie przy nakładaniu longimetru na łuk  $X$  wykorzystuje się zazwyczaj środek longimetru i dlatego koła leżące w środku przyrządu mają większe prawdopodobieństwo trafienia w łuk  $X$  niż koła leżące na brzegu przyrządu. Wpływa to na zmniejszenie się wariancji zmiennej losowej  $x$  (podnormalność), a wielkość tej zmiany zależy od mierzącego, tj. od tego, czy nakłada on longimetr na łuk  $X$  środkiem czy również brzegami.

Te dwa wpływy w pewnej mierze się redukują i można z pewnym przybliżeniem twierdzić, że zmienna losowa  $x$  ma wariancję normalną  $rpq$ . Wariancja zmiennej losowej  $n$ , która jest sumą  $k$  zmiennych losowych

niezależnych  $x$  (łączną ilością kół trafiających przy  $k$  niezależnych nałożeniach longimetru), jest więc w przybliżeniu równa  $k r p q$ , a przy dużym longimetrze, tj. gdy  $r$  jest wielkie w porównaniu z oczekiwaną wartością zmiennej  $x$ ,  $q$  jest bliskie jedności, czyli wariancja zmiennej losowej  $n$  jest równa  $k r p / n$ . Stąd wniosek, że należy się spodziewać, że wariancja długości rzędu  $\varepsilon$  łuku  $X$  jest liczbą rzędu mierzonej długości, a średnie kwadratowe odchylenie jest rzędu pierwiastka z tej długości. A więc im większa jest długość (rzędu  $\varepsilon$ ) łuku, tym większą dokładność (procentowo) daje pomiar longimetrem. Jeśli np. długość rzędu  $\varepsilon$  jakiegoś łuku jest równa 20, to należy oczekiwać średniego błędu kwadratowego tej długości rzędu 4-5, czyli  $20\%$ - $25\%$ . Jeśli długość jest równa około 100, to średni błąd kwadratowy jest rzędu 10, czyli około  $10\%$ . Gdyby, jak to wspominałem w końcu ustępu 3, do pomiaru łuku tak dobrać  $\varepsilon$ , żeby stosunek  $\eta = \varepsilon / L_\varepsilon(X)$  był nie większy od  $10\%$ , to wobec tego, że przyjmujemy  $\varepsilon \geq 1$ , byłoby  $L_\varepsilon(X) \geq 10$ , czyli średni kwadratowy błąd stanowiłby nie więcej niż  $30\%$  długości rzędu  $\varepsilon$ .

W praktyce pomiary longimetrem okazały się daleko dokładniejsze, niżby to wynikało z powyższych rozważań. Widocznie wpływ różnej roli środkowych i skrajnych kół longimetru, zmniejszający wariancję, jest daleko silniejszy niż wpływ zależności między zdarzeniami  $Z_i$ . Stąd wynika, że w praktyce wariancja była wybitnie podnormalna.

Wraz z laborantkami Instytutu Matematycznego PAN, J. Dobrowolską, A. Huskowską i M. Kusiakową, pomierzyliśmy longimetrami kilkanaście krzywych (pomiar powtarzaliśmy kilka razy, w jednym przypadku 200 razy). Celem tego pomiaru było zbadanie w praktyce błędu systematycznego i losowego pomiaru różnych krzywych różnymi longimetrami oraz zbadanie czasu potrzebnego do wykonywania pomiarów.

W celu zbadania błędu systematycznego, trzy osoby, A, B i C, nałożyły losowo po 60 razy (każda osoba)  $\varepsilon$ -longimetr ( $\varepsilon = 3$  mm) na łuk 2 (rys. 15) i policzyły ilości kół longimetru trafiających łuk. W tabelicy 3 podano szeregi rozdzielnice owych ilości kół trafiających łuk 2, średnie, wariancje i średnie odchylenia kwadratowe tych ilości.

Jak widać, nie ma systematycznej różnicy między średnimi wyników otrzymywanych przez osoby A i B. Natomiast jest istotna różnica między A i C (kryterium Studenta daje wiarygodność hipotezy mówiącej o nieistnieniu różnicy — równą 0,0001). Różnica między wynikami otrzymanymi przez B i C jest również istotna. Wariancja wyników otrzymanych przez B jest istotnie większa (przy poziomie wiarygodności  $1\%$ ) od wariancji A, wariancje zaś otrzymane przez A i C nie różnią się istotnie.

Wynika stąd, że można się obawiać błędów systematycznych obciążających wyniki pomiaru longimetrem. W naszym przypadku skrajna

różnica wyniosła 0,80, tj. 5<sup>o</sup>/<sub>o</sub>-6<sup>o</sup>/<sub>o</sub>. Należy się też liczyć z systematycznymi różnicami błędów, różnice te mogą wynosić około 20<sup>o</sup>/<sub>o</sub> błędów.

Następnie zająłem się błędem losowym. Już z tego co pisałem poprzednio wynika, że błąd losowy zależy w dużej mierze od mierzącego i u osoby A był o 20<sup>o</sup>/<sub>o</sub> mniejszy niż u osoby B. Wariancję wyniku jednego nałożenia longimetru oznaczmy przez  $s^2$ . Długość rzędu 3 mm wyznaczamy

TABLICA 3

| Liczba kół trafiających łuk 2          | Liczba nałożeń wykonanych przez osoby |       |       |
|--|---------------------------------------|-------|-------|
|  | A                                     | B     | C     |
| 12                                     | —                                     | 1     | 2     |
| 13                                     | 2                                     | 5     | 8     |
| 14                                     | 9                                     | 13    | 24    |
| 15                                     | 29                                    | 12    | 15    |
| 16                                     | 15                                    | 23    | 10    |
| 17                                     | 4                                     | 4     | 1     |
| 18                                     | —                                     | 1     | —     |
| 19                                     | 1                                     | 1     | —     |
| Średnia liczba kół                     | 15,23                                 | 15,20 | 14,43 |
| Wariancja                              | 1,02                                  | 1,73  | 1,15  |
| Średnie odchylenie kwadratowe średniej | 0,13                                  | 0,17  | 0,14  |

z sumy sześciu wyników, czyli wariancja długości rzędu 3 mm będzie wariancją sumy sześciu zmiennych losowych niezależnych o wariancji  $s^2$ , czyli  $6s^2$  (stały odjemnik nie zmienia wariancji). W tablicy 4 podano średnie długości rzędu 3 mm łuku 2 otrzymane przez osoby A, B i C, średnie odchylenia kwadratowe tych długości obliczanych z sześciu nałożeń i te same odchylenia wyrażone w procentach długości łuku.

TABLICA 4

|   | A    | B    | C    |
|---|------|------|------|
| Średnia długość rzędu 3 mm łuku 2                             | 86,7 | 86,5 | 81,9 |
| Średnie odchylenie kwadratowe długości otrzymanej z 6 nałożeń | 2,47 | 3,22 | 2,62 |
| To samo odchylenie w %  | 2,9  | 3,7  | 3,2  |

Na początku niniejszego ustępu obliczyliśmy, że w przypadku normalnej wariancji to średnie odchylenie kwadratowe powinno być rzędu  $\sqrt{90} \approx 9,5$ , a więc empiryczna wariancja pomiarów rzeczywiście jest podnormalna.

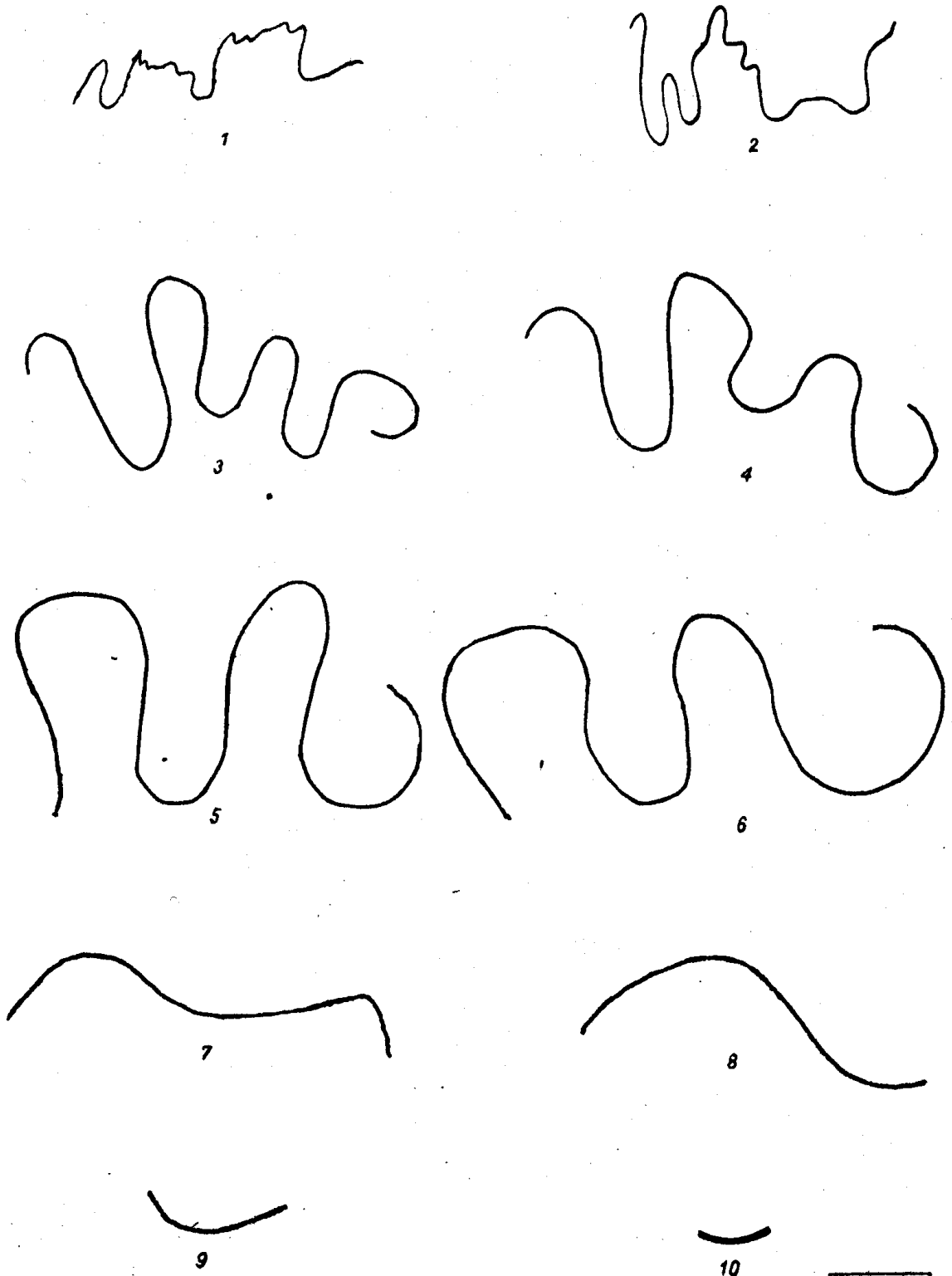
Błąd losowy pomiaru (średnie odchylenie kwadratowe) można estymować na podstawie jednego pomiaru złożonego z 6 nałożeń longimetru o  $\varepsilon = 3$  mm. Oczywiście błąd ten będzie wyestymowany z mniejszą dokładnością, lecz dla celów porównawczych to wystarczy.

Rysunek 15 przedstawia 10 łuków. Na każdym z nich dokonano dwukrotnie pomiaru długości rzędu 3 mm, 5 mm i 8 mm odpowiednimi longimetrami o układzie kratowym. Wyniki podano w tablicy 5. Można w niej prześledzić, jak zmniejszają się długości coraz to większych rzędów ( $\varepsilon = 3, 5, 8$  mm) łuków różnej krzywizny; od największej (łuki 1 i 2) do najmniejszej (łuk 8). Łuki 9 i 10 były szczególnie krótkie. W ostatnim wierszu podana jest długość  $L(X)$  tych krzywych, pomierzona metodą kroczków. Metoda ta polega na liczeniu małych kroczków robionych wzdłuż łuku ostrzami odmierzacza (rozpiętość ostrzy ustalona jest śrubą). Długość krocзка określa się przez odmierzenie 100 kroczków wzdłuż prostej. Jak widać, łuki o dostatecznie małej krzywiznie mają długość rzędu  $\varepsilon$  bardzo zbliżoną do długości otrzymanej metodą kroczków. Litera A i B oznaczają osoby wykonujące pomiary. Podaję wyniki obu osób po to, żeby można było zobaczyć różnice między dwoma pomiarami (każdy składający się z sześciu nałożeń) wykonanymi przez różne osoby.

TABLICA 5

| Łuk      |   | Długość |     |     |     |     |     |    |    |    |    |
|----------|---|---------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
|          |   | 1       | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7  | 8  | 9  | 10 |
| $L_3(X)$ | A | 69      | 87  | 145 | 135 | 165 | 158 | 64 | 58 | 26 | 10 |
|          | B | 67      | 86  | 145 | 138 | 175 | 166 | 65 | 63 | 20 | 10 |
| $L_5(X)$ | A | 61      | 79  | 132 | 132 | 168 | 163 | 65 | 56 | 20 | 11 |
|          | B | 54      | 75  | 121 | 128 | 174 | 171 | 61 | 60 | 20 | 13 |
| $L_8(X)$ | A | 56      | 63  | 111 | 107 | 156 | 159 | 66 | 57 | 21 | 11 |
|          | B | 51      | 69  | 106 | 111 | 158 | 162 | 66 | 58 | 20 | 9  |
| $L(X)$   |   | 76      | 105 | 151 | 138 | 176 | 171 | 65 | 58 | 22 | 10 |

Jak widać z tej tablicy, pierwsze trzy łuki mają długość rzędu 3 mm, mniejszą od długości pomierzonej kroczkami. Długość rzędu 5 mm tych łuków jest mniejsza od długości rzędu 3 mm, a jeszcze mniejsza jest długość rzędu 8 mm. Następny łuk 4 ma długość rzędu 3 mm równą długości pomierzonej kroczkami. Natomiast jego długość rzędu 5 mm jest nieco mniejsza, a długość rzędu 8 mm — wyraźnie mniejsza. Następne dwa łuki, 5 i 6, mają długości rzędu 3 mm i 5 mm równe długości mierzonej kroczkami, a długość rzędu 8 mm mniejszą. Wreszcie ostatnie cztery łuki, 7, 8, 9 i 10, mają długości rzędu 3 mm, 5 mm i 8 mm równe długości mierzonej kroczkami.



Rys. 15

ZM-197

Łuki 9 i 10 są specjalnie krótkie. Stosunek  $\eta = \varepsilon/L(X)$  dochodzi dla tych łuków do 75% (przy  $\varepsilon = 8$  mm). Pozostałe łuki mają długości przekraczające 60 mm i dla nich stosunek  $\eta$  jest daleko mniejszy, chociaż niekiedy przekracza 10%, co przyjęliśmy poprzednio za górną granicę. Mimo to błędy losowe obciążające wyniki pomiarów nie są duże. Tablica 6 zawiera stosunki  $\eta_\varepsilon$  i wskaźniki wariacji,  $W_\varepsilon$ , tj. procentowe błędy obciążające długości rzędu  $\varepsilon$ . W kolumnie oznaczonej symbolem  $k_\varepsilon$  podano ilości nałożeń longimetru potrzebne do jednego pomiaru długości rzędu  $\varepsilon$ . Oczywiście gdyby cały pomiar powtórzyć  $n$ -krotnie (tj. nałożyć  $\varepsilon$ -longimetr  $nk$ -krotnie), błąd średniej długości rzędu  $\varepsilon$  otrzymany z tych  $n$  pomiarów zmalałby  $\sqrt{n}$  razy.

TABLICA 6

| Łuk<br>$k_\varepsilon$ |          | 1    | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7    | 8    | 9    | 10   |
|------------------------|----------|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|
| 6                      | $\eta_3$ | 4,4  | 3,5 | 2,1 | 2,2 | 1,8 | 1,9 | 4,7  | 5,0  | 13,0 | 30,0 |
|                        | $W_3$    | 3,5  | 2,8 | 1,7 | 1,7 | 3,3 | 1,7 | 3,7  | 3,9  | 6,3  | 12,2 |
| 10                     | $\eta_5$ | 8,2  | 6,3 | 3,8 | 3,8 | 3,0 | 3,1 | 7,7  | 8,9  | 25,0 | 45,0 |
|                        | $W_5$    | 3,6  | 3,6 | 3,6 | 2,1 | 3,1 | 1,8 | 2,2  | 5,8  | 9,5  | 15,5 |
| 16                     | $\eta_8$ | 14,3 | 13  | 7,1 | 7,5 | 5,1 | 5,0 | 12,1 | 14,0 | 38,1 | 72,8 |
|                        | $W_8$    | 7,9  | 5,7 | 3,0 | 4,2 | 3,6 | 2,1 | 5,5  | 6,0  | 13,2 | 18,2 |

Jak widać, w przypadkach kiedy stosunek  $\eta_\varepsilon$  nie przekracza 10%, błąd pomiaru nie przekracza 6%, przy czym tylko w dwóch przypadkach przekracza 4%. Widać dalej, że gdy  $\varepsilon$  się powiększa, na ogół i błąd wzrasta, a równocześnie wzrasta  $\eta$ .

W tablicy 7 podano długości  $x$   $\varepsilon$ -zgeneralizowanych brzegów obszarów, na które dzielą płaszczyzną łuki na rysunku 15. Umówimy się oznaczać obszar leżący ponad łukiem  $X$  przez  $P$ , a obszar leżący pod tym łukiem przez  $Q$ . Długość łuku  $G_\varepsilon(Q/P)$  oznaczmy przez  $\bar{L}_\varepsilon$ , a długość łuku  $G_\varepsilon(P/Q)$  przez  $\underline{L}_\varepsilon$ . Każda z tych długości została pomierzona przez dwie osoby, A i B. Każdy pomiar składał się z  $k$  nałożeń longimetru. Pomiaru te są obciążone większymi błędami zarówno losowymi, jak i systema-

TABLICA 7

| Łuk<br>Długość    |   | 1  | 2  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-------------------|---|----|----|----|----|----|----|
| $\bar{L}_3$       | A | 50 | 73 | 59 | 56 | 24 | 9  |
|                   | B | 37 | 62 | 59 | 56 | 22 | 11 |
| $\underline{L}_3$ | A | 54 | 81 | 62 | 57 | 23 | 11 |
|                   | B | 34 | 73 | 60 | 57 | 22 | 11 |
| $\bar{L}_5$       | A | 39 | 63 | 67 | 58 | 24 | 13 |
|                   | B | 42 | 54 | 57 | 54 | 22 | 12 |
| $\underline{L}_5$ | A | 52 | 65 | 65 | 57 | 22 | 12 |
|                   | B | 58 | 56 | 59 | 52 | 18 | 14 |
| $\bar{L}_8$       | A | 42 | 49 | 66 | 61 | 19 | 10 |
|                   | B | 41 | 46 | 58 | 56 | 23 | 10 |
| $\underline{L}_8$ | A | 46 | 67 | 65 | 61 | 20 | 10 |
|                   | B | 42 | 52 | 57 | 56 | 19 | 9  |

tycznymi. Osoba A otrzymywała systematycznie wyniki większe niż osoba B o około 4. Po wyrugowaniu tego błędu systematycznego znajduje się, że błąd losowy stanowi około 5<sup>0</sup>/<sub>0</sub> mierzonej długości.

W tablicy 8 podaję — dla porównania — długości łuków 1, 2 i 6 mierzone liniowym longimetrem H. Steinhausa. W tablicy tej podano średnie uzyskane z 50 nałożeń longimetru każda. Takie średnie obciążone są błędami losowymi mniej więcej tego rzędu co wyniki jednokrotnych pomiarów  $\varepsilon$ -longimetrem. Np. błąd średniej (z 50 nałożeń longimetru Steinhausa) długości rzędu 1 łuku 1 stanowi 4,5<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, a dla rzędu 8 stanowi 3,3<sup>0</sup>/<sub>0</sub> długości mierzonego łuku.

TABLICA 8

| Łuk | Długość rzędu |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     | 1             | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
| 1   | 44            | 62  | 74  | 78  | 79  | 80  | 80  | 81  |
| 2   | 47            | 71  | 90  | 100 | 108 | 110 | 111 | 111 |
| 6   | 77            | 126 | 153 | 163 | 168 | 168 | 168 | 168 |

Na zakończenie podam czas potrzebny do wykonania pomiaru różnych długości. A więc na pomiar długości rzędu  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 3, 5$  lub  $8$  mm) któregokolwiek łuku z rysunku 15 potrzeba dwóch do czterech minut. Pomiar taki (składający się z 6, 10 lub 16 nałożeń longimetru) daje błąd około 4<sup>0</sup>/<sub>0</sub>. Dla otrzymania metodą H. Steinhausa długości rzędu  $n$  takiego łuku z tą samą dokładnością trzeba wykonać 50 nałożeń longimetru, co wymaga około 15 minut, czyli 4 razy więcej niż pomiar  $\varepsilon$ -longimetrem. Pomiar metodą kroczków (dwukrotny pomiar i dwukrotne oznaczenie długości krocza) wymaga ponad 10 minut. Dokładność tej metody bardzo zależy od kształtu łuku. Dla łuków o małej krzywiznie (np. dla łuku 6) metoda kroczków daje bardzo dokładne wyniki (błąd stanowi około 0,3<sup>0</sup>/<sub>0</sub> długości), ale dla łuków o dużej krzywiznie dokładność znacznie maleje (np. dla łuku 1 błąd stanowi około 4<sup>0</sup>/<sub>0</sub>).

## Prace cytowane

- [1] A. Penck, *Morphologie der Erdoberfläche*, Stuttgart 1894.  
 [2] J. Perkal, *O epsilon aureolach*, Roczniki PTM, seria I, Prace Matematyczne (w druku).  
 [3] — *On the  $\varepsilon$ -length*, Bull. Acad. Pol. Sc. Cl. III, Vol. IV (1956), str. 399-403.  
 [4] — *Sur les ensembles epsilon convexes*, Colloquium Mathematicum 4 (1956), str. 1-10.  
 [5] H. Steinhaus, *Length, shape and area*, Colloquium Mathematicum (1954), str. 1-13.

[6] — *O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze, zwłaszcza w geografii*, Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego 4 (1949), Dodatek 5.

[7] — *O mierzeniu pól płaskich*, Przegląd Matematyczno-Fizyczny 2 (1924), str. 1-6.

[8] — *Sur un théorème de H. V. Jarník*, Colloquium Mathematicum 1 (1947), str. 1-5.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 25. 5. 1956

Ю. ПЭРКАЛЬ (Вроцлав)

## О ДЛИНЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

### РЕЗЮМЕ

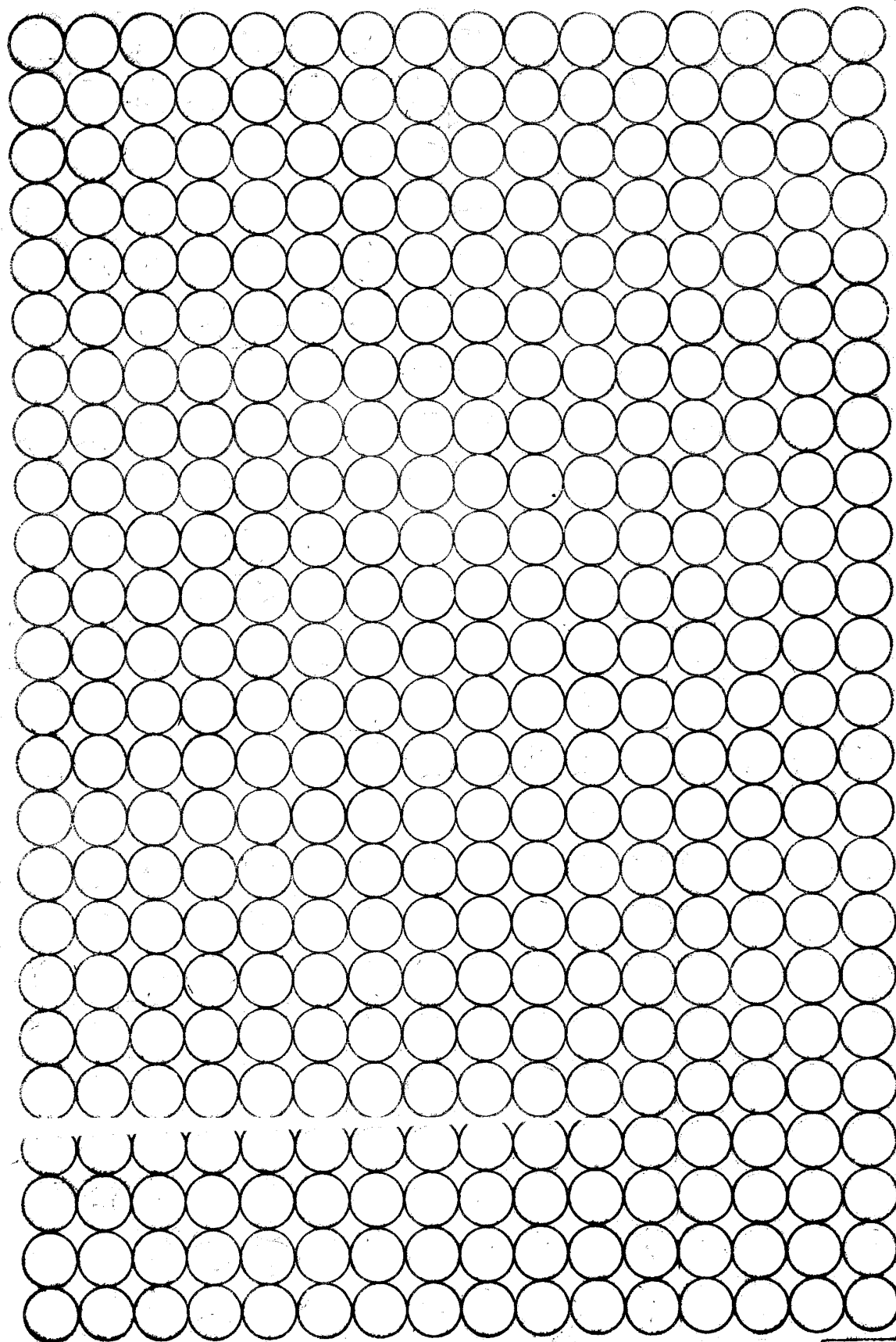
Длина дуги плоской кривой (или коротко, дуги) является разрывным функционалом. Поэтому в произвольной окрестности дуги малой длины можно найти другую дугу, длина которой произвольно большая. Это вызывает неприятные практические следствия при измерении длины эмпирических дуг. Если известно условие по которому создано дугу (напр. её уравнение), можно спросить, есть ли эта дуга спрямляемой и какая её длина? Но если дуга возникла эмпирически (напр. край листа или лезвия), нельзя вычислить её длины, ни даже проверить, спрямляемая ли она. Осматривая край листа через всё сильнейшие оптические системы получаем последовательность дуг (черт. 2), каждая с которых находится поблизости предыдущей, но существенно равна по длине. Нет смысла говорить о пределе этой последовательности и о длине этого предела.

Г. Штайнхауз, который обратил на это внимание, предложил некоторые приближенные длины порядка  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) при измерении и сравнении длины эмпирических дуг. Понятия эти основаны на теории Крофтона. Простой прибор, карточка прозрачной бумаги параллельно разграфлена, разрешает оценивать длины произвольного порядка эмпирической дуги. Недостатком этого метода является неопределенность соотношения между длиной порядка  $n$  а классической длиной. Практически неизвестно, что обозначает  $n$  и какие неточности оно причиняет. Наконец, оказывается, что длина порядка  $n$ , так же как и классическая длина, является разрывным функционалом.

В статье [3] автором определена длина порядка  $\varepsilon$  эмпирической дуги, основана на идеи Минковского. Длина порядка  $\varepsilon$  дуги  $X$  определяется по формуле (3), причём  $\alpha_\varepsilon(X)$  обозначает плоскую меру множества  $A_\varepsilon(X)$  определенного формулой (2). Оказывается, что длина порядка  $\varepsilon$  непрерывная и убывающая функция переменной  $\varepsilon$  и, притом, длина эта является непрерывным функционалом дуги  $X$ . Если дуга  $X$  спрямляема, тогда длина порядка  $\varepsilon$  стремится к классической длине при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для дуг  $2\varepsilon$ -выпуклых (ср. [4]), длина порядка  $\varepsilon$  равна классической длине.

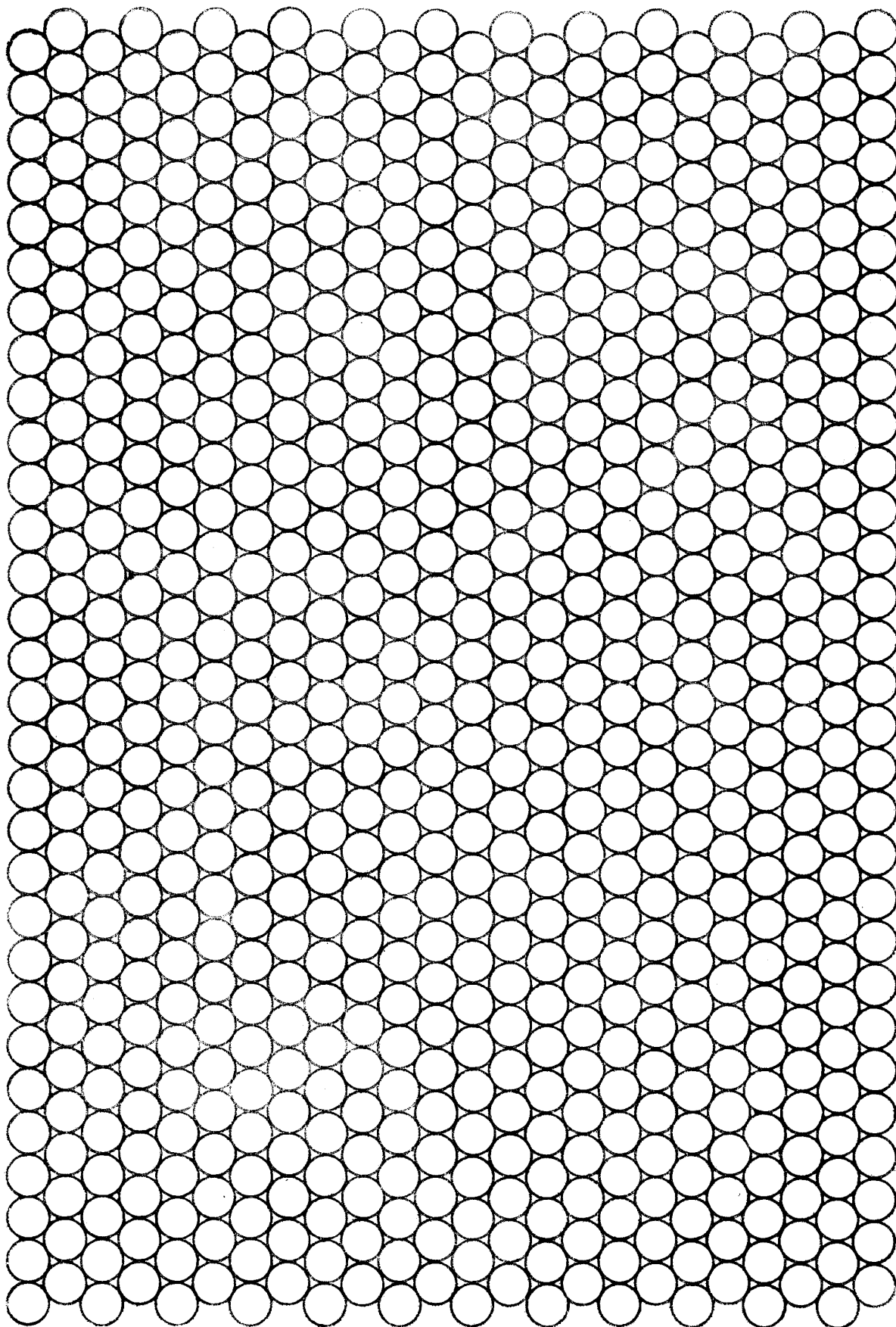
Чтобы определить длину порядка  $\varepsilon$  дуги  $X$  следует оценить  $\alpha_\varepsilon(X)$ . Можно к этому применить точечный планиметр (черт. 6, 7 и 8). Из формулы (2) следует, что точка этого планиметра попадает в множество  $A_\varepsilon(X)$  тогда и только тогда,





ZM-199

Rys. A.  $\epsilon$ -longimetr;  $\epsilon = 5\text{mm}$ . Nałożyc 10 razy. Odjemnik 8. (Zob. str. 287)



ZM-200

Rys. B.  $s$ -longimetr;  $s = 4\text{mm}$ . Nałożyc 7 rasy. Odjemnik 6. (Zeb. str. 267)

когда круг с центром в этой точке и радиуса  $\varepsilon$  пересечет дугу  $X$  (черт. 9). На этом принципе построено  $\varepsilon$ -лонгиметр (ср. вкладыши на прозрачной бумаге). Такой лонгиметр накладывается  $k$ -кратно на измеряемую дугу  $X$  и считается общее число  $n$  кругов лонгиметра пересекающих дугу  $X$  (при  $k$  наложениях). Формулы (4) дают длину порядка  $\varepsilon$  дуги  $X$  ( $a$  и  $b$  — расстояния между центрами кругов лонгиметра,  $a$  — в квадратной решетке,  $b$  — в треугольной решетке). Можно так подобрать параметры  $a$ ,  $b$  и  $k$ , чтобы лонгиметр был достаточно эффективным и чтобы коэффициент при  $n$  в формуле (4) равнялся 1. В квадратной решетке достигается этого принимая  $k = a = 2\varepsilon$  (для  $2\varepsilon$  натуральных). Получается тогда формулу (5). На лонгиметре записано число  $k$  накладываний лонгиметра на дугу и вычитаемое  $\pi\varepsilon/2$ , которое вычитывается с общего числа  $n$  кругов лонгиметра попавших в измеряемую дугу, чтобы получить длину порядка  $\varepsilon$  этой дуги.

На чертеже 11 прерывная линия представляет  $\varepsilon$ -генерализированную границу области  $A$  в области  $B$ . Определение этого понятия дано формулой (6), в которой  $\text{Fr}(X) = \overline{X(1-\overline{X})}$  обозначает ограничение множества  $X$ , а  $O_{2\varepsilon}(A)$  —  $2\varepsilon$ -выпуклую оболочку множества  $A$ . Автор предлагает это понятие как уточнение понятия генерализации употребляемого например в географии. При помощи  $\varepsilon$ -лонгиметра можно без добавочных чертежей измерить длину порядка  $\varepsilon$  такого  $\varepsilon$ -генерализированной границы одной области в другой, если начерчено только дугу разделяющую эти области.

Оказывается, что случайная величина  $n$ , а именно общее число кругов лонгиметра, попадающих в дугу  $X$  при  $k$  накладываниях лонгиметра на дугу, имеет распределение сравнимое с распределением биномиальном. На увеличение дисперсии влияет корреляция между случаями состоящими в попадании смежных кругов лонгиметра в измеряемую дугу. На уменьшение дисперсии влияет зависимость вероятности того, что круг лонгиметра попадает в дугу, от расположения круга в лонгиметре. Оказывается, что эмпирическая дисперсия переменной поднормальна. Ошибка длины порядка  $\varepsilon$ , оцениваемой  $\varepsilon$ -лонгиметром, зависит от измеряющего лица и от формы дуги.

В таблице 6 представлено процентные ошибки  $W_\varepsilon$  ( $\varepsilon = 3, 5$  и  $8$  мм) длины порядка  $\varepsilon$  десяти дуг (1, 2, ..., 10) из чертежа 15. Измерение длины порядка  $\varepsilon$  (состоящее в  $k$  накладываниях  $\varepsilon$ -лонгиметра) очень лёгкое и для одной дуги (напр. с чертежа 15) требовало не сполна четырёх минут.

J. PERKAL (Wrocław)

### ON THE LENGTH OF EMPIRICAL CURVES

#### SUMMARY

The length of an arc of a plane curve (shortly: an arc) is a discontinuous functional. Therefore, arbitrarily close to an arc of small length it is possible to find another arc of arbitrarily great length. This causes unpleasant practical consequences in measuring the lengths of empirical arcs. If we know the convention according to which the arc has arisen (e. g. an equation), we may ask whether the arc is rectifiable and what is its length. But if the arc has arisen in another way, empirically (e. g.

the edge of a leaf or of a razor blade), we are not able to calculate its length or even to find out whether it is rectifiable. Observing a leaf edge by ever stronger optical systems, we obtain a sequence of arcs (see Fig. 2), each of which lies close to the preceding one but differs essentially from it in length. It is absurd to speak of a limit of that sequence and of the length of that limit.

H. Steinhaus, who has pointed out this situation, suggests certain approximate lengths of order  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) for measuring and comparing the lengths of empirical arcs. These notions are based on Crofton's theory. A simple device, a sheet of transparent paper ruled with parallel lines, makes it possible to estimate the lengths of empirical arcs of any order. A drawback of this method is the weak connection of length of order  $n$  with classical length. We do not know the practical significance of  $n$  and we do not know what inaccuracies are due to it. Finally, we find that length of order  $n$  is a discontinuous functional, just as classical length.

In paper [3] I have defined the length of order  $\varepsilon$  of an empirical arc on the basis of Minkowski's idea. The length of order  $\varepsilon$  of the arc  $X$  is defined by formula (3), in which  $\alpha_\varepsilon(X)$  denotes the area of the set  $A_\varepsilon(X)$  defined by formula (2). We find that the length of order  $\varepsilon$  is a continuous and decreasing function of the variable  $\varepsilon$  and a continuous functional of the arc  $X$ . If the arc  $X$  is rectifiable, the length of order  $\varepsilon$  tends to the classical length as  $\varepsilon$  decreases to zero. For  $2\varepsilon$ -convex arcs (see [4]) the length of order  $\varepsilon$  is equal to the classical length.

In order to determine the length of order  $\varepsilon$  of the arc  $X$  it is necessary to estimate  $\alpha_\varepsilon(X)$ . This can be done by means of a point planimeter (see Figs. 6, 7 and 8). From formula (2) it follows that a point of such a planimeter will hit the set  $A_\varepsilon(X)$  if and only if the circle with centre at that point and radius  $\varepsilon$  hits the arc  $X$  (see Fig. 9). This is the principle on which the  $\varepsilon$ -longimeter is built (see the added sheets on transparent paper). A longimeter of this kind is placed  $k$  times upon the arc  $X$  which is being measured and the total number  $n$  of circles of the longimeter which hit the arc  $X$  is counted (in  $k$  placings). Formulas (4) give the length of order  $\varepsilon$  of the arc  $X$  ( $a$  and  $b$  being the distances between the centres of the circles of the longimeter;  $a$  — in a square lattice,  $b$  — in a triangle lattice). It is possible to choose the parameters  $a$ ,  $b$  and  $k$  so as to make the longimeter as efficient as possible and the coefficient of  $n$  in formula (4) equal to 1. Such is the case in the square lattice if we take  $k = a = 2\varepsilon$  (for natural  $2\varepsilon$ ). Then we obtain formula (5). On the longimeters are marked: the number  $k$  of placings of the longimeter upon the arc and the subtrahend  $\frac{1}{2}\pi\varepsilon$  which we must subtract from the total number  $n$  of circles of the longimeter which hit the arc which is being measured, in order to obtain the length of order  $\varepsilon$  of that arc.

A broken line shows in figure 11 the  $\varepsilon$ -generalized boundary of the domain  $A$  in the domain  $B$ . The definition of this notion is given in formula (6), in which  $\text{Fr}(X) = \overline{X(1-X)}$  denotes the boundary of the set  $X$  and  $C_{2\varepsilon}(A)$  denotes the  $2\varepsilon$ -convex envelope of the set  $A$  (see [4]). I should like to propose this notion as a more exact version of the notion of generalization used in geography, for example. With the aid of an  $\varepsilon$ -longimeter it is possible to measure, without any additional drawings, the length of order  $\varepsilon$  of such an  $\varepsilon$ -generalized boundary of one domain inside another with only the arc dividing those domains being drawn.

We find that the random variable  $n$ , namely the total number of circles of the longimeter which hit the arc  $X$  in  $k$  placings of the longimeter upon the arc, has a distribution which is comparable with the binomial distribution. The increase of the variance is due to the correlation between the events which consist in hitting the arc which is being measured by the neighbouring circles of the longimeter. The decrease of the variance is due to the relation of the probability that a circle of the

longimeter hits the measured arc and the position of the circle in the longimeter. As a result it is found empirically that the variance of the variable  $n$  is subnormal. The error of the length of order  $\varepsilon$  estimated by means of an  $\varepsilon$ -longimeter depends upon the person who does the measuring and upon the shape of the arc. Table 6 contains the percentage errors  $W_\varepsilon$  ( $\varepsilon = 3, 5$  and  $8$  mm) of lengths of order  $\varepsilon$  of ten arcs ( $1, 2, \dots, 10$ ) shown in Figure 15. The measurement of the length of order  $\varepsilon$  (consisting in  $k$  placings of the  $\varepsilon$ -longimeter) is very easy and takes up a little under four minutes for one arc (*e. g.*, the one in Fig. 15).

---