ACTA ARITHMETICA
117.1 (2005)

La fonction de Brakemeier dans le problème d'Erdős–Ginzburg–Ziv

par

François Hennecart (Saint-Etienne)

1. Énoncé des résultats. Pour un entier $n \geq 1$ fixé et une suite finie d'entiers A, on appelle *n-somme* de A tout entier qui peut s'écrire sous la forme $\sum_{a\in B} a$, où B est une sous-suite de A de longueur n. Erdős, Ginzburg et Ziv ont établi que le cardinal maximal d'un ensemble d'entiers ne possédant pas de n-sommes nulles modulo n vaut $2n-2$ (cf. [EGZ]).

Pour tous entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$, on note $f(n,k)$ le plus petit entier g tel que toute suite d'entiers de longueur g rencontrant exactement k classes modulo n possède au moins une n-somme nulle modulo n.

Cette fonction a été introduite par Brakemeier (cf. [Br]). Plus tard, Bialostocki et Lotspeich en ont redécouvert l'existence, obtenant de nombreux résultats intéressants (cf. [BL]). Il est facile de voir que $f(n,1) = n$ et que $f(n,2) = 2n-1$ pour tout $n \geq 2$. Le théorème de Erdős–Ginzburg–Ziv affirme que l'on a $f(n,k) \leq 2n-1$ pour tout $k \leq n$. Bialostocki et Dierker [BD] ont montré plus précisément que $f(n,k) \leq 2n-2$ si $3 \leq k \leq n$. Il est aussi connu (cf. [BL]) que $f(n,3) = 2n-2$ et $f(n,4) = 2n-3$ pour $n \geq 4$.

On note $\lfloor u \rfloor$ (resp. $\lceil u \rceil$) pour désigner le plus grand (resp. petit) entier inférieur (resp. supérieur) ou égal au réel u.

Lorsque k est grand, on observe facilement que $f(n,n) = n$ ou $n+1$ selon la parité de n. Par ailleurs, Brakemeier [Br] a montré que

$$f(n,k) = n+2, \qquad n/2+1 < k \leq n-1. \tag{1}$$

Plus récemment, il a été démontré (cf. [G6]) que

$$f(n, \lfloor n/2 \rfloor + 1) = n+3, \qquad n \geq 12.$$

Par une recherche systématique, nous avons pu compléter le tableau suivant qui rassemble les valeurs de $f(n,k)$ pour $1 \leq k \leq n \leq 21$:

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 05D05; Secondary 11B50.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1																				
2	2	3																			
3	3	5	3																		
4	4	7	6	5																	
5	5	9	8	7	5																
6	6	11	10	9	8	7															
7	7	13	12	11	9	9	7														
8	8	15	14	13	11	10	10	9													
9	9	17	16	15	13	11	11	11	9												
10	10	19	18	17	15	13	12	12	12	11											
11	11	21	20	19	17	15	13	13	13	13	11										
12	12	23	22	21	19	17	15	14	14	14	14	13									
13	13	25	24	23	21	19	16	15	15	15	15	15	13								
14	14	27	26	25	23	21	18	17	16	16	16	16	16	15							
15	15	29	28	27	25	23	20	18	17	17	17	17	17	17	15						
16	16	31	30	29	27	25	22	19	19	18	18	18	18	18	18	17					
17	17	33	32	31	29	27	24	21	20	19	19	19	19	19	19	19	17				
18	18	35	34	33	31	29	26	23	21	21	20	20	20	20	20	20	20	19			
19	19	37	36	35	33	31	28	25	22	22	21	21	21	21	21	21	21	21	19		
20	20	39	38	37	35	33	30	27	24	23	23	22	22	22	22	22	22	22	22	21	
21	21	41	40	39	37	35	32	29	25	24	24	23	23	23	23	23	23	23	23	23	21

Comme souvent dans ce type de problème où l'on s'intéresse à des propriétés extrémales de suites d'entiers soumises à des conditions données, l'algorithme naïf qui consiste à étudier une par une (à transformation affine modulo n près) chacune des suites admissibles est le seul dont on dispose. Le coût en temps de calcul croît exponentiellement avec la taille du paramètre n. Les 20 premières lignes du tableau ont été obtenues en quelques heures, la dernière nécessitant plus d'un jour.

On peut s'inspirer de la construction théorème 2 de [GG] pour montrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit n et $d \geq 1$ des entiers tels que $n \geq d^2 + d + 2$, et k un entier satisfaisant*

$$2d + 1 \leq k \leq \frac{n + d^2 - 2}{d}.$$

Alors $f(n,k) \geq n + d + 1$.

Les valeurs obtenues dans le tableau ci-dessus semblent indiquer que cette minoration est en fait une égalité pour tout entier k vérifiant

$$\frac{n+(d+1)^2-2}{d+1} < k \le \frac{n+d^2-2}{d}. \tag{2}$$

C'est effectivement le cas lorsque $d = 1$ et $n \ge 4$ (cf. (1)). Citons également un résultat dû à Lev (cf. [Le]) entraînant que pour n impair assez grand et $2n/5 < k \le n/2+1$, on a $f(n,k) = n+3$, donnant un résultat partiel pour $d = 2$. Cependant la minoration du théorème 1 ne fournit pas en général la valeur exacte de $f(n,k)$: par exemple, la suite

$$0,\dots,0,1,1,5,6,10,11,15,16,20,21,25,26,30,31,35,36,$$

qui possède 43 termes et rencontre 16 classes distinctes modulo 40 est telle qu'aucune de ses 40-sommes n'est congrue à 0 modulo 5. Par conséquent $f(40,16) \ge 44$, alors que $47/3 < 16 \le 21$. Cet exemple est un cas particulier de suites plus générales, point de départ de l'étude de $f(n,k)$ pour n composé et $2\sqrt{n-1} \le k \le n-1$ qui fait l'objet d'un autre article [He].

Lorsqu'on se restreint aux nombres premiers p, il est possible d'établir, grâce au théorème de Dias da Silva–Hamidoune sur l'addition multiple restreinte d'un ensemble de classes modulo p, l'optimalité de la minoration du théorème 1 :

THÉORÈME 2. *Soit p un nombre premier et $d \ge 1$ un entier tels que $p > d^2+d+2$. Pour tout entier k tel que*

$$\frac{p+(d+1)^2-2}{d+1} < k \le \frac{p+d^2-2}{d}, \tag{3}$$

on a $f(p,k) = p+d+1$.

Le théorème 2 conduit à

COROLLAIRE 3. *Soit $p \ge 5$ un nombre premier et k un entier tels que $p-1 \ge k \ge \sqrt{4p-7}$. Alors*

$$f(p,k) = p+1+\left\lfloor \frac{k-\sqrt{k^2-4(p-2)}}{2} \right\rfloor.$$

Lorsque k est au contraire assez petit devant n, la minoration de $f(n,k)$ déduite du théorème 1 avec $d = 1$ est peu précise, notamment pour $k = 3$, $k = 4$ et plus généralement pour toute valeur de k assez petite comme le montre le résultat très récent suivant (cf. [B4] et [Wa])

$$f(n,k) = 2n - c(k), \qquad \text{pour } 2 \le k \le 1+\sqrt{n+4}, \tag{4}$$

où

$$c(k) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k^2-2k+5}{4} \right\rfloor.$$

Observons que la fonction $c(k)$ prend les valeurs $2,3,5,7,10,13,17,21$ lorsque l'entier k varie de 3 à 10. De plus, elle satisfait $c(k+1) = c(k) + \lfloor k/2 \rfloor$, ce qui montre en particulier qu'elle est strictement croissante. On vérifie également que

$$\frac{c(k)+k}{2} \geq 2\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 2, \qquad \text{pour tout } k \geq 2. \tag{5}$$

La minoration implicite de $f(n,k)$ dans (4) est en fait valable pour tout $2 \leq k \leq 2\sqrt{n-1}$:

Théorème 4. *Soit $n \geq 3$ et k des entiers tels que $2 \leq k \leq 2\sqrt{n-1}$. Alors*

$$f(n,k) \geq 2n - c(k).$$

Lorsque $n = p$ est un nombre premier, Bialostocki et Lotspeich (cf. théorème 5.3 de [BL]) ont donné la majoration

$$f(p,k) \leq 2p - (k/2)^2 + k - 2, \qquad \text{pour } p \geq k \geq 4.$$

Nous proposons ainsi la conjecture suivante :

Conjecture 5. *Soit $p \geq 3$ un nombre premier et k un entier tels que $2 \leq k \leq 2\sqrt{p-1}$. Alors*

$$f(p,k) = 2p - c(k).$$

La démonstration de cette conjecture fournirait avec le corollaire 3 toutes les valeurs de $f(p,k)$, $k = 1, \ldots, p-1$, et ceci pour tout nombre premier p assez grand.

Il semble en outre raisonnable de conjecturer que la conjecture 5 reste valable pour tous les entiers, ce qui se traduirait par l'énoncé suivant.

Conjecture 6. *Soit $n \geq 3$ et k des entiers tels que $2 \leq k \leq 2\sqrt{n-1}$. On a*

$$f(n,k) = 2n - c(k).$$

Grâce aux théorèmes d'addition dont on dispose dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, à savoir le théorème de Cauchy–Davenport et le théorème de Dias da Silva–Hamidoune (cf. lemmes 1 et 2 de la section 3), nous avons pu obtenir le résultat suivant qui établit la conjecture 5 sauf pour au plus 4 valeurs de k, pour chaque nombre premier p fixé.

Théorème 7. *Soit $p \geq 3$ un nombre premier et k un entier tels que*

$$2 \leq k \leq 2\sqrt{p+9} - 4. \tag{6}$$

Alors

$$f(p,k) = 2p - c(k).$$

Nous terminons cette section par quelques notations.

Pour deux ensembles d'entiers A et B, on note $A+B$ l'ensemble des entiers qui sont la somme d'un élément de A et d'un élément de B. Si a est un entier, on pose $a + B = \{a\} + B$. Pour $h \geq 2$ entier, hA est défini par récurrence par $hA = (h-1)A + A$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers qui sont somme de h éléments de A. On note également $h \times A$ l'ensemble des éléments de hA qui sont somme de h éléments distincts de A.

Pour une suite finie A d'entiers non nécessairement distincts, on note $\Sigma(A)$ l'ensemble des entiers qui sont représentables comme somme des termes d'une sous-suite de A. Si B est une sous-suite de A, on note $A \setminus B$ la sous-suite de A obtenue en retirant de A chacun des termes de B. Par exemple $(0,0,1,2,2,3) \setminus (0,3) = (0,1,2,2)$. Lorsqu'un nombre premier p sera fixé, on notera $\overline{A} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes modulo p ayant au moins un représentant dans A.

Soit $a < b$ deux réels quelconques. Les intervalles de bornes a et b seront notés respectivement $[a,b]$ pour le fermé, (a,b) pour l'ouvert et $[a,b)$, $(a,b]$ pour les semi-ouverts.

L'auteur souhaite exprimer sa profonde reconnaissance au rapporteur pour la minutie avec laquelle il a examiné la première version soumise de ce travail.

2. Minorations de la fonction de Brakemeier

Preuve du théorème 1. Si $d = 1$ et $k \geq n/2+1$, la minoration est donnée par le théorème 2 de [GGP].

On suppose maintenant que $d \geq 2$ ou $k \leq n/2+1$. On pose $x = n+d+1-k$. Notons que $2x \geq n+1$. En reprenant la notation utilisée dans [GGP] selon laquelle m^t représente t copies de l'entier m, on considère les n suites contenant chacune $n+d$ éléments

$$\begin{aligned}
&0,1,2,\ldots,d-2,(d-1)^x,d,d+1,\ldots,k-1\\
&0,1,2,\ldots,d-2,(d-1)^{x-1},d^2,d+1,\ldots,k-1\\
&0,1,2,\ldots,d-2,(d-1)^{x-2},d^3,d+1,\ldots,k-1\\
&\vdots\\
&0,1,2,\ldots,d-2,d-1,d^x,d+1,\ldots,k-1\\
&0,1,2,\ldots,d-2,d-1,d^{x-1},(d+1)^2,d+2,\ldots,k-1\\
&0,1,2,\ldots,d-2,d-1,d^{x-2},(d+1)^3,d+2,\ldots,k-1\\
&\vdots\\
&0,1,2,\ldots,d-2,d-1,d^{2x-n},(d+1)^{n-x+1},d+2,\ldots,k-1.
\end{aligned}$$

Puisque $n \geq d+x$, les n-sommes minimales de ces n suites sont distinctes et parcourent un intervalle d'entiers de longueur n. L'une de ces suites a sa n-somme minimale, notée $S_{\min}$, congruente à 1 modulo n. Comme $k-d \geq d+1$, la n-somme maximale de cette même suite vaut donc

$$S_{\max} = S_{\min} + (k-1) + \cdots + (k-d) - (0+1+\cdots+d-1).$$

On a donc $S_{\max} - S_{\min} \leq n-2$ car par hypothèse $dk \leq n + d^2 - 2$, ce qui montre que pour cette suite de $n+d$ termes, aucune n-somme n'est nulle modulo n. ■

Preuve du théorème 4. On distingue deux cas selon la parité de $k \geq 2$.

1) Si k est pair, on pose $l = k/2$, et on note A la suite

$$-(l-1), -(l-2), \ldots, -1, 0^x, 1^x, 2, \ldots, l-1, l,$$

où $x = n - l(l+1)/2$.

Si on suppose $n \geq l^2+1$, la plus petite n-somme de A est

$$s_{\min}(A) = -(l-1) - \cdots - 1 + x\cdot 0 + \left(\frac{l(l+1)}{2} - (l-1)\right)\cdot 1 = 1,$$

et la plus grande n-somme est

$$s_{\max}(A) = \left(\frac{l(l+1)}{2} - (l-1)\right)\cdot 0 + x\cdot 1 + 2 + \cdots + l = n-1,$$

donc aucune n-somme ne peut être nulle modulo n. De plus, on a $|A| = 2x + 2(l-1) = 2n - l^2 + l - 2$, d'où le résultat.

2) Si k est impair, on pose $l = (k-1)/2$, et on note A la suite

$$-(l-1), -(l-2), \ldots, -1, 0^x, 1^y, 2, \ldots, l, l+1,$$

où $x = n - l(l+1)/2$ et $y = n - (l+1)(l+2)/2$.

Si on suppose $n \geq l^2 + l + 2$, la plus petite n-somme de A est

$$s_{\min}(A) = -(l-1) - \cdots - 1 + x\cdot 0 + \left(\frac{l(l+1)}{2} - (l-1)\right)\cdot 1 = 1,$$

et la plus grande n-somme est

$$s_{\max}(A) = \left(\frac{(l+1)(l+2)}{2} - l\right)\cdot 0 + y\cdot 1 + 2 + \cdots + l + (l+1) = n-1,$$

donc aucune n-somme ne peut-être nulle modulo n. De plus $|A| = x + y + 2l - 1 = 2n - l^2 - 2$, donnant le résultat. ■

3. Évaluation de $f(p,k)$, pour p premier. Soit p un nombre premier fixé. Nous ferons à maintes reprises usage des deux résultats suivants qui se rapportent à l'addition d'ensembles de classes modulo p.

Lemme 1 (Théorème de Cauchy–Davenport). *Soit $r \geq 2$ un entier et A_i, $i = 1, \ldots, r$, des ensembles non vides finis d'entiers. Alors*

$$|\overline{A_1 + \cdots + A_r}| \geq \min(p, |\overline{A}_1| + \cdots + |\overline{A}_r| - (r-1)).$$

Le second résultat fut conjecturé au début des années 60 par Erdős et Heilbronn et démontré il y a seulement quelques années (cf. [DH]).

LEMME 2 (Théorème de Dias da Silva–Hamidoune). *Soit $h \geq 2$ un entier et A un ensemble non vide fini d'entiers. Alors*

$$|\overline{h \times A}| \geq \min(p, h(|\overline{A}| - h) + 1).$$

Preuve du théorème 2. On montre d'abord la majoration. Soit A une suite d'entiers de $p+d+1$ termes, rencontrant exactement k classes modulo p. D'après le théorème de Dias da Silva–Hamidoune, on a

$$|\overline{(d+1) \times A}| \geq \min(p, (d+1)(|\overline{A}| - d - 1) + 1) = p,$$

car $|\overline{A}| = k$ satisfait la minoration de (3).

Notons s la somme de tous les éléments de A. De ce qui précède, il ressort qu'il existe $d+1$ éléments de la suite A dont la somme est congruente à s modulo p. Donc la somme des p éléments restants est nulle modulo p.

La minoration est une conséquence directe du théorème 1. La condition sur p montre avec (3) que $2d < k$, donc que le théorème 1 peut s'appliquer, donnant le résultat. ∎

Preuve du corollaire 3. Il suffit de voir que pour p et k donnés tels que $k \geq \sqrt{4p-7}$, il existe un unique entier $d \geq 1$ satisfaisant (3), et on a $d = \left\lfloor \frac{k - \sqrt{k^2 - 4(p-2)}}{2} \right\rfloor$. ∎

Preuve du théorème 7. Le résultat est clairement vrai pour $k = 2$. On suppose dans la suite que $k \geq 3$. On pose $c = c(k)$.

Soit A une suite d'entiers de longueur $2p - c$ rencontrant exactement k classes modulo p. On peut supposer que les termes de A sont dans l'intervalle $(-p/2, p/2)$, puisque seules leurs classes modulo p nous intéressent. Il s'agit de montrer qu'il existe une p-somme de A nulle modulo p.

On note S l'ensemble des entiers entre $-p/2$ et $p/2$ présents au moins une fois dans A. On a $|S| = k$. Pour chaque entier $m \in \{-(p-1)/2, \ldots, (p-1)/2\}$, on note $\mu(m)$ le nombre d'occurrences de m dans la suite $A \setminus S$. Quitte à opérer au préalable une transformation affine modulo p de A, on peut supposer que

$$\mu(0) \geq \mu(1) \geq \mu(m), \qquad 0 < |m| \leq (p-1)/2.$$

On a

$$\sum_{|m|<p/2} \mu(m) = 2p - c - k. \tag{7}$$

Si $\mu(0) \geq p - 1$, alors il y a p termes nuls dans A, donc A possède clairement une p-somme nulle.

On suppose donc $\mu(0) \leq p - 2$. La condition (6) implique

$$p + 6 \geq \left\lceil \frac{k^2}{4} + 2k + 1 \right\rceil \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 4 \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil. \tag{8}$$

On distingue deux cas :

Premier cas : $\mu(0) \leq p - \lceil k/2 \rceil$.

1) On suppose $\mu(0)+\mu(1) \geq 2p-c-k-\lceil k/2\rceil+3$. D'après (7), cela suppose que $k \geq 5$. On note $W=(a_1,\dots,a_{|W|})$ la suite des termes de $A\setminus S$ qui ne sont ni égaux à 0, ni à 1. Alors

$$|W| = \sum_{\substack{|m|<p/2\\ m\notin\{0,1\}}} \mu(m) \leq \lceil k/2\rceil - 3. \tag{9}$$

Par le théorème de Dias da Silva–Hamidoune, on a

$$\left|\overline{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \times S}\right| \geq \min\left(p, \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil + 1\right). \tag{10}$$

On pose

$$X := \lceil k/2\rceil \times S + \{0,a_1\} + \dots + \{0,a_{|W|}\}.$$

Par le théorème de Cauchy–Davenport et (10), on obtient

$$|\overline{X}| \geq \min\left(p, \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil + 1 + |W|\right).$$

Comme $\mu(0)+\lceil k/2\rceil-(p-\mu(1)) = p-\lfloor k/2\rfloor\lceil k/2\rceil-|W|-1 \geq 0$, par (8) et (9), il existe donc $\alpha \in \lceil k/2\rceil \times S$, $W_0 \subset W$ et $\beta \in [p-\mu(1), \mu(0)+\lceil k/2\rceil]$ tels que

$$\beta \equiv \alpha + \sum_{a\in W_0} a \bmod p.$$

On a (i) $0 \leq p-\beta \leq \mu(1)$ et (ii) $0 \leq \beta - \lceil k/2\rceil - |W_0| \leq \mu(0)$. Le point (i) est clair. Puisque $\mu(1)\leq\mu(0)$, on a en utilisant la minoration (5)

$$\mu(1) \leq \min(\mu(0), 2p-c-k-\mu(0)) \leq p - \frac{c+k}{2} \leq p - 2\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil + 2,$$

donc $\beta \geq p-\mu(1) \geq 2\lceil k/2\rceil - 2 \geq \lceil k/2\rceil + |W| \geq \lceil k/2\rceil + |W_0|$, ce qui donne le point (ii). D'où

$$\alpha + \sum_{a\in W_0} a + (p-\beta)\cdot 1 + (\beta - \lceil k/2\rceil - |W_0|)\cdot 0$$

est une p-somme nulle modulo p de A.

2) On suppose $\mu(0)+\mu(1) \leq 2p-c-k-\lceil k/2\rceil+2$. On pose $m=\lceil k/2\rceil-2$. On montre d'abord que l'on peut extraire de $A\setminus S$ successivement m sous-ensembles $\{a_i, a'_i, a''_i\}$, $1\leq i\leq m$, de trois entiers distincts et $p-c-k-\lceil k/2\rceil+4$ sous-ensembles $\{a_i,a'_i\}$, $m+1\leq i\leq p-c-k+2$, de deux entiers distincts.

(i) Si $k\leq 4$, on passe directement à l'extraction des paires décrite dans (ii). Sinon, on commence par ranger les $r := |\overline{A\setminus S}|$ entiers différents modulo p, $c_0=0$, $c_1=1, c_2,\dots,c_r$ rencontrés dans $A\setminus S$ par ordre décroissant de leurs nombres d'occurrences. On pose $y_i = y_i^{(0)} = \mu(c_i)$ pour $i = 0, \dots, r$ et $y_{r+1} = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
&y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_r,\\
&y_0 + y_1 + \cdots + y_r = 2p - c - k \geq p + 3(\lceil k/2\rceil - 2) \geq p \geq 2\lceil k/2\rceil, \text{ par (8)},\\
&y_1 + y_2 + \cdots + y_r = 2p - c - k - y_0 \geq 3(\lceil k/2\rceil - 2) + \lceil k/2\rceil - 2,\\
&\hfill \text{car } y_0 \leq p - \lceil k/2\rceil,\\
&y_2 + \cdots + y_r = 2p - c - k - y_0 - y_1 \geq \lceil k/2\rceil - 2.
\end{aligned}$$

Notons $j_0 = \min\{j \geq 1 : y_j < y_{j-1}\}$.

Si $j_0 \geq 3$, on pose $i_0 = j_0 - 3$, $i_0' = j_0 - 2$ et $i_0'' = j_0 - 1$.

Si $j_0 = 2$, on pose $i_0 = 0$, $i_0' = 1$ et $i_0'' = \max\{i : y_i = y_2\}$.

Si $j_0 = 1$, on pose $i_0 = 0$. Notons $j_1 = \max\{j : y_j = y_1\}$. Si $j_1 \neq 1$, on pose $i_0' = j_1 - 1$ et $i_0'' = j_1$. Sinon on pose $i_0' = 1$ et $i_0'' = \max\{i : y_i = y_2\}$.

On définit alors $a_1 = c_{i_0}$, $a_1' = c_{i_0'}$ et $a_1'' = c_{i_0''}$. Pour $i = 0, \dots, r$, on note $y_i^{(1)}$ le nombre d'occurrences de c_i dans la sous-suite $A \setminus (S \cup \{a_1, a_1', a_1''\})$ et $y_{r+1}^{(1)} = 0$.

Notons que l'on a

$$\begin{aligned}
&y_0^{(1)} \geq y_1^{(1)} \geq y_2^{(1)} \geq \cdots \geq y_r^{(1)},\\
&y_0^{(1)} + y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + \cdots + y_r^{(1)} \geq p + 3(\lceil k/2\rceil - 3) \geq p \geq 2\lceil k/2\rceil,\\
&y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + \cdots + y_r^{(1)} \geq 3(\lceil k/2\rceil - 3) + \lceil k/2\rceil - 2,\\
&y_2^{(1)} + \cdots + y_r^{(1)} \geq \lceil k/2\rceil - 3.
\end{aligned}$$

Les trois premières assertions sont évidentes. La dernière se justifie de la façon suivante. C'est clair si $i_0 = 0$ et $i_0' = 1$.

Si $i_0 = 0$ et $i_0' \geq 2$, alors $y_2 = y_1$, et par suite

$$y_2 + \cdots + y_r \geq (y_1 + \cdots + y_r)/2 \geq 2\lceil k/2\rceil - 4,$$

d'où $y_2^{(1)} + \cdots + y_r^{(1)} = y_2 + \cdots + y_r - 2 \geq 2\lceil k/2\rceil - 6 \geq \lceil k/2\rceil - 3$.

Si $i_0 \geq 1$, alors $y_3 = y_2 = y_1 = y_0$ d'où

$$y_2^{(1)} + \cdots + y_r^{(1)} = y_2 + \cdots + y_r - 3 \geq (y_0 + \cdots + y_r)/2 - 3 \geq \lceil k/2\rceil - 3.$$

Soit $s \leq \lceil k/2\rceil - 2$. Supposons avoir extrait de $A \setminus S$ successivement s triplets $\{a_i, a_i', a_i''\}$ de termes deux à deux distincts de $A \setminus S$, $i = 1, \dots, s$, de sorte que les nombres d'occurrences $y_i^{(s)}$, $i = 0, \dots, r$, des termes $c_0, c_1, \dots, c_r$ restants satisfont

$$\begin{aligned}
&y_0^{(s)} \geq y_1^{(s)} \geq y_2^{(s)} \geq \cdots \geq y_r^{(s)},\\
&y_0^{(s)} + y_1^{(s)} + \cdots + y_r^{(s)} \geq p + 3(\lceil k/2\rceil - 2 - s) \geq p \geq 2\lceil k/2\rceil,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&y_1^{(s)}+y_2^{(s)}+\cdots+y_r^{(s)}\ge 3(\lceil k/2\rceil-2-s)+\lceil k/2\rceil-2,\\&y_2^{(s)}+\cdots+y_r^{(s)}\ge\lceil k/2\rceil-2-s.\end{aligned}$$

On fixe également $y_{r+1}^{(s)}=0$. Si $s\le\lceil k/2\rceil-3$, on a $y_2^{(s)}\ge 1$ et on peut extraire un nouveau triplet, comme cela a été décrit précédemment, donnant pour les nombres d'occurrences :

$$\begin{aligned}&y_0^{(s+1)}\ge y_1^{(s+1)}\ge y_2^{(s+1)}\ge\cdots\ge y_r^{(s+1)},\\&y_0^{(s+1)}+y_1^{(s+1)}+\cdots+y_r^{(s+1)}\ge p+3(\lceil k/2\rceil-2-(s+1))\ge 2\lceil k/2\rceil,\\&y_1^{(s+1)}+y_2^{(s+1)}+\cdots+y_r^{(s+1)}\ge 3(\lceil k/2\rceil-2-(s+1))+\lceil k/2\rceil-2,\\&y_2^{(s+1)}+\cdots+y_r^{(s+1)}\ge\lceil k/2\rceil-2-(s+1).\end{aligned}$$

On construit donc de cette façon $\lceil k/2\rceil-2$ triplets $\{a_i,a_i',a_i''\}$ de termes deux à deux distincts de $A\setminus S$. On pose

$$B_i=\{a_i,a_i',a_i''\},\qquad i=1,\dots,m=\lceil k/2\rceil-2.$$

(ii) Les nombres d'occurrences des entiers présents dans les $2p-c-k-3m$ termes de $A\setminus S$ qui ne sont pas dans l'un des B_i, $1\le i\le m$ sont tous inférieurs à $p-\lceil k/2\rceil-m$. En effet, par construction des ensembles B_i, on $a_i=0$ pour $1\le i\le\min(m,\mu(0)-\mu(1))$, donc

$$y_0^{(m)}\le\mu(0)-\min(m,\mu(0)-\mu(1))=\max(\mu(0)-m,\mu(1)).$$

Or $\mu(0)\le p-\lceil k/2\rceil$ et $\mu(1)\le p-(c+k)/2\le p-\lceil k/2\rceil-m$ par (5), d'où le résultat.

On réordonne cette suite en une suite $(b_i)_{1\le i\le 2p-c-k-3m}$, de sorte que les termes identiques soient regroupés par blocs, eux-mêmes rangés par ordre décroissant de leur longueur respective. On pose $a_{m+j}=b_j$ et $a'_{m+j}=b_{j+p-\lceil k/2\rceil-m}$ pour $1\le j\le p-c-2m-\lfloor k/2\rfloor$. On a donc fabriqué, en plus des m triplets précédents, $p-c-2m-\lfloor k/2\rfloor$ paires $\{a_i,a_i'\}$ de termes distincts de $A\setminus S$. On pose

$$B_i=\{a_i,a_i'\},\qquad i=m+1,\dots,p-c-k+2.$$

On note T la suite non vide de tous les termes restants, qui sont au nombre de $2p-c-k-2(p-c-k+2)-m=c+k-m-4\ge 1$. La somme t de tous les éléments de T est donc une $(c+k-m-4)$-somme de A.

Le théorème de Dias da Silva–Hamidoune montre que $\lceil k/2\rceil\times S$, qui est constitué de $\lceil k/2\rceil$-sommes de A, rencontre au moins $\lfloor k/2\rfloor\lceil k/2\rceil+1$ classes modulo p. Par le théorème de Cauchy–Davenport, on obtient donc que l'ensemble

$$X:=\lceil k/2\rceil\times S+B_1+\cdots+B_{p-c-k+2},$$

constitué de $(\lceil k/2\rceil + p - c - k + 2)$-sommes de A, rencontre au moins

$$\min\left(p, \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil + 1 + p - c - k + 2 + m\right) = \min\left(p, p - \left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil + 2 + m\right) = p$$

classes modulo p. Donc $t + X$, constitué de p-sommes, rencontre toutes les classes modulo p, et en particulier la classe nulle modulo p.

Second cas : $p - 2 \geq \mu(0) \geq p - \lceil k/2\rceil + 1$, donc $k \geq 5$. On note $W = (A \setminus S)^*$ la suite des termes non nuls de $A \setminus S$. Pour $a \in W$, on définit $W_{\pm a}$ comme étant la sous-suite de W constituée des termes différents de $\pm a$ modulo p. Notons que, par (8), on a

$$|W| = 2p - c - k - \mu(0) \geq 3l_0 - 2, \tag{11}$$

où

$$l_0 = \mu(0) + \lceil k/2\rceil - p.$$

1) On suppose que pour tout a, on a $|W_{\pm a}| \geq l_0$. Alors on peut écrire $W = W' \cup W''$ avec

$$\min(|W'|, |W''|) \geq l_0, \qquad W' \cap \pm W'' = \emptyset.$$

En effet, s'il existe b_0 tel que $\mu(b_0) + \mu(-b_0) \geq l_0$, il suffit de définir W' comme la sous-suite de tous les termes de W égaux à $\pm b_0$ et $W'' = W \setminus W'$: on a bien $|W'| = \mu(b_0) + \mu(-b_0) \geq l_0$ et $|W''| = |W_{\pm b_0}| \geq l_0$.

Sinon, on considère un ensemble B_0 d'entiers positifs de cardinal minimal tel que

$$\sum_{b\in B_0} (\mu(b) + \mu(-b)) \geq l_0.$$

Alors, pour $b_0 \in B_0$ arbitrairement fixé, on a

$$\sum_{b\in B_0\setminus\{b_0\}} (\mu(b) + \mu(-b)) < l_0 \leq \sum_{b\in B_0} (\mu(b) + \mu(-b)).$$

Comme $\mu(b_0) + \mu(-b_0) \leq l_0 - 1$, on obtient $\sum_{b\in B_0}(\mu(b) + \mu(-b)) \leq 2l_0 - 2$. On définit alors W' comme la suite de tous les termes de W égaux à l'un des entiers $\pm b$, pour $b \in B_0$, et $W'' = W \setminus W'$. On a $|W'| = \sum_{b\in B_0}(\mu(b) + \mu(-b)) \geq l_0$ et $|W''| = |W| - |W'| \geq l_0$ par (11).

On pose $L_0 := \lceil k/2\rceil \times S \subset \mathbb{Z}$. Par le théorème de Dias da Silva–Hamidoune, on a $|\overline{L_0}| \geq \lfloor k/2\rfloor\lceil k/2\rceil + 1$.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 3. *Soit A un ensemble fini d'entiers tel que $|\overline{A}| \geq 2$, et a, b deux entiers premiers avec p tels que $a \not\equiv \pm b \bmod p$. Alors*

$$\max(|\overline{A + \{0, a\}}|, |\overline{A + \{0, b\}}|) \geq \min(p, |\overline{A}| + 2).$$

Preuve. Par un changement de variable linéaire, on peut se ramener au cas où $a = 1$. On peut donc également supposer $2 \leq b \leq p - 2$. Si

$|A| \geq p-1$, le lemme 3 résulte du lemme 1. Supposons $|A| \leq p-2$ et $|\overline{A+\{0,1\}}| = |A|+1$. $\overline{A}$ est donc un intervalle $[\overline{u}, \overline{v}]$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où u et v sont deux entiers tels que $1 \leq v-u < p-2$. Puisque $2 \leq b \leq p-2$, on a $\overline{v+1}, \overline{v+2} \in \overline{A+b} \setminus \overline{A}$ si $2 \leq b \leq v-u$, et $\overline{u+b}, \overline{u+b+1} \in \overline{A+b} \setminus \overline{A}$ si $v-u+1 \leq b \leq p-2$. D'où $|\overline{A+b}| \geq |\overline{A}|+2$. ■

Il existe donc soit dans W' soit dans W'' un élément a_1 tel que $L_1 := L_0 + \{0, a_1\}$ vérifie $|\overline{L}_1| \geq \min(p, |\overline{L}_0|+2)$. Puisque $\min(|W'|, |W''|) \geq l_0$, on peut répéter cette argument l_0 fois, de sorte que l'on obtient des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_{l_0}$ de W tels que

$$X := \lceil k/2 \rceil \times S + \{0, a_1\} + \cdots + \{0, a_{l_0}\}$$

rencontre au moins $\min(p, \lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil + 2l_0 + 1)$ classes modulo p.

On note a'_i, $i = 1, \ldots, t_0 := 2p - c - k - \mu(0) - l_0$ les termes de $W \setminus \{a_1, \ldots, a_{l_0}\}$ et on pose

$$Y := X + \{0, a'_1\} + \cdots + \{0, a'_{t_0}\}.$$

Par le théorème de Cauchy–Davenport,

$$|\overline{Y}| \geq \min(p, \lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil + 2l_0 + t_0 + 1) = p,$$

donc $\overline{Y} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Comme $\mu(0) \geq 2p - c - k - \mu(0) = l_0 + t_0$, les éléments de Y sont des $(\lceil k/2 \rceil + l_0 + t_0)$-sommes de A. D'où l'existence d'une p-somme nulle modulo p, car $\lceil k/2 \rceil + l_0 + t_0 \leq p$ et $\mu(0) \geq p - \lceil k/2 \rceil$.

2) On suppose qu'il existe $a \in W$ tel que $|W_{\pm a}| \leq l_0 - 1$. Quitte à changer le signe de a, on peut supposer que $\mu(a) \geq \mu(-a)$; par un changement de variable linéaire, on peut se ramener au cas où $a = 1$. On renonce ici à la propriété $\mu(1) \geq \mu(m)$ pour $0 < |m| \leq (p-1)/2$.

Si -1 est représenté dans A et $\mu(-1) \geq (p - \mu(0) - 1)/2$, alors

$$0 = \mu(-1) \cdot (-1) + \mu(-1) \cdot 1 + (p - 2\mu(-1)) \cdot 0$$

est une p-somme de A.

On suppose donc dans ce qui suit que $\mu(-1) \leq (p - \mu(0))/2 - 1$. Cela donne

$$\begin{aligned} 2p - c - k &= \mu(0) + \mu(1) + \mu(-1) + |W_{\pm 1}| \\ &\leq \mu(0) + \mu(1) + (p - \mu(0))/2 + l_0 - 2 \\ &= \mu(0) + \mu(1) - (p - \mu(0))/2 + \lceil k/2 \rceil - 2 \\ &\leq \mu(0) + \mu(1) + \lceil k/2 \rceil - 3 \end{aligned}$$

d'où

$$\mu(0) + \mu(1) - p \geq p - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 2\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 2 \geq k - 4, \tag{12}$$

par (8).

(i) On suppose qu'il existe $a \in S$ tel que $|a| \geq k$. Notons $S_a = S \setminus \{a\}$. On a par le théorème de Dias da Silva–Hamidoune

$$\left|\overline{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \times S_a}\right| \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 \right) + 1 = c.$$

On note m le plus petit entier tel que $\lfloor k/2 \rfloor \times S_a + m\{0,1\}$ est un intervalle modulo p. En fait, $m+1$ est égal à la différence maximale de deux éléments consécutifs de $\lfloor k/2 \rfloor \times S_a$, et m est aussi le plus petit nombre tel que $\lfloor k/2 \rfloor \times S_a + r\{0,1\} + (m-r)\{0,-1\}$ soit un intervalle, ceci pour tout r satisfaisant $0 \leq r \leq m$. On distingue trois cas selon la taille de m.

Si $m \leq \mu(-1)$, on pose

$$X := \lfloor k/2 \rfloor \times S_a + m\{0,-1\} + \{0,a\},$$

et on a $|\overline{X}| \geq \min(p, c + 2m + k)$. En notant $W_{\pm 1} = (a_1, \ldots, a_{|W_{\pm 1}|})$ et

$$Y := X + \{0,a_1\} + \cdots + \{0,a_{|W_{\pm 1}|}\} + (\mu(-1) - m)\{0,-1\} + \mu(1)\{0,1\},$$

on obtient par le théorème de Cauchy–Davenport $|\overline{Y}| \geq \min(p, c + 2m + k + |W_{\pm 1}| + \mu(-1) - m + \mu(1)) = p$ et comme $|W_{\pm 1}| = \sum_{b \notin \{-1,0,1\}} \mu(b) = 2p - c - k - \mu(-1) - \mu(0) - \mu(1)$, on a $|Y| = p$, d'où $\overline{Y} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} \text{(13)} \quad \mu(0) &\geq p - \lceil k/2 \rceil + 1 \geq p - \lfloor k/2 \rfloor \geq 2p - c - k - (p - \lceil k/2 \rceil + 1) + 1 \\ &\geq 2p - c - k - \mu(0) + 1 = \mu(1) + \mu(-1) + |W_{\pm 1}| + 1, \end{aligned}$$

donc les éléments de Y sont des $(\lfloor k/2 \rfloor + \mu(1) + \mu(-1) + |W_{\pm 1}| + 1)$-sommes de A. La relation (13) donne aussi

$$\text{(14)} \qquad \lfloor k/2 \rfloor + \mu(1) + \mu(-1) + |W_{\pm 1}| + 1 \leq p,$$

d'où l'existence d'une p-somme de A nulle modulo p.

Si $\mu(-1) < m \leq \mu(-1) + \mu(1)$, on pose

$$X := \lfloor k/2 \rfloor \times S_a + \mu(-1)\{0,-1\} + (m - \mu(-1))\{0,1\} + \{0,a\},$$

et

$$Y := X + \{0,a_1\} + \cdots + \{0,a_{|W_{\pm 1}|}\} + (\mu(-1) + \mu(1) - m)\{0,1\},$$

et on obtient de même $\overline{Y} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et par (13) et (14), l'existence d'une p-somme de A nulle modulo p suit.

Si $\mu(-1) + \mu(1) < m$, on pose

$$X := \lfloor k/2 \rfloor \times S_a + \mu(-1)\{0,-1\} + \mu(1)\{0,1\} + \{0,a\},$$

et

$$Y := X + \{0,a_1\} + \cdots + \{0,a_{|W_{\pm 1}|}\},$$

et on obtient $|\overline{Y}| \geq \min(p, c + 2\mu(-1) + 2\mu(1) + |W_{\pm 1}| + 1)$. Or

$$\begin{aligned}
\mu(1)+\mu(-1) &= 2p-c-k-\mu(0)-|W_{\pm 1}| \\
&\geq 2p-c-k-\mu(0)-\left(\mu(0)+\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-p-1\right) \\
&= (\mu(0)+k-p-1) \\
&\quad+\left(p+3(p-\mu(0))-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-k-2\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+1\right) \\
&\geq (\mu(0)+k-p-1)+\left(p+7-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-k-2\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil\right) \\
&\geq \mu(0)+k-p-1, \quad \text{par (8)},
\end{aligned}$$

et

$$c+\mu(1)+\mu(-1)+|W_{\pm 1}|+1 = 2p-k-\mu(0)+1,$$

d'où $\overline{Y} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Par (13) et (14) à nouveau, il existe une p-somme de A nulle modulo p.

(ii) On suppose que pour tout $a \in A$, on a $|a| \leq k-1$. On pose $x = \mu(0)+1$ et $y = \mu(1)+1$, respectivement le nombre de 0 et de 1 dans A. On note A_{01} la sous-suite de A composée des termes différents de 0 et de 1. On va montrer que $\Sigma(A_{01})$ rencontre au moins une classe modulo p de l'intervalle $[p-y, x]$. Pour cela, on pose $W_{01} = A_{01} \setminus S$ et

$$S^+ = S \cap (1,k), \qquad S^- = S \cap (-k,0),$$
$$W_{01}^+ = W_{01} \cap (1,k), \qquad W_{01}^- = W_{01} \cap (-k,0).$$

Si $\Sigma(S^+ \cup W_{01}^+) \cap [p-y, +\infty) \neq \emptyset$, alors il existe

$$\alpha \in \Sigma(S^+ \cup W_{01}^+) \cap [p-y, x], \tag{15}$$

car les éléments positifs de A sont inférieurs à $k-1$ et $x+y-p = \mu(0)+\mu(1)+2-p \geq k-2$ par (12). Par (15), α est une somme de m éléments strictement positifs et $1 \leq m \leq \alpha \leq x \leq p$. Par suite on peut construire une p-somme nulle modulo p en ajoutant à α suffisamment de 1 et 0 : $p = \alpha + (p-\alpha)\cdot 1 + (\alpha - m)\cdot 0$. On obtient un résultat analogue s'il existe $\alpha \in \Sigma(S^- \cup W_{01}^-) \cap (-\infty, x-p]$.

On suppose maintenant que l'on a simultanément

$$\Sigma(S^+ \cup W_{01}^+) \subset [0, p-y), \qquad \Sigma(S^- \cup W_{01}^-) \subset (x-p, 0].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
p-y-1 &\geq \max \Sigma(S^+ \cup W_{01}^+) = \max \Sigma(S^+) + \max \Sigma(W_{01}^+) \\
&\geq |S^+|(|S^+|+3)/2 + |W_{01}^+|,
\end{aligned}$$

et

$$x-p+1 \leq \min \Sigma(S^- \cup W_{01}^-) \leq -|S^-|(|S^-|+1)/2 - |W_{01}^-|.$$

Puisque

$$x+y+|W_{01}^+|+|W_{01}^-|+k-2 = 2p-c,$$

on obtient, en posant $\lambda = p - x - 1 - |W_{01}^-|$,

$$|S^+|(|S^+| + 3)/2 \le c + k - 5 - \lambda \quad \text{et} \quad |S^-|(|S^-| + 1)/2 \le \lambda,$$

où $0 \le \lambda \le \lceil k/2 \rceil - 3$, car $|W_{01}^-| \le -\max \Sigma(W_{01}^-) < p - x$ et $\lambda \le p - x - 1 = p - \mu(0) - 2 \le \lceil k/2 \rceil - 3$. Cela donne

$$|S^+| \le (2c + 2k - 10 - 2\lambda + 9/4)^{1/2} - 3/2, \qquad |S^-| \le (2\lambda + 1/4)^{1/2} - 1/2.$$

D'où

$$\begin{aligned} k - 2 = |S^+| + |S^-| &\le \phi(\lambda) \\ &:= (2c + 2k - 10 - 2\lambda + 9/4)^{1/2} + (2\lambda + 1/4)^{1/2} - 2. \end{aligned} \tag{16}$$

En dérivant, on constate que $\phi'(t)$ s'annule pour $t = c/2 + k/2 - 2$ et que $\phi(t)$ est croissante pour $0 \le t \le \lceil k/2 \rceil - 3$; de plus

$$\phi\left(\left\lfloor \tfrac{k}{2} \right\rfloor - 3\right) = \left(2\left\lfloor \tfrac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \tfrac{k}{2} \right\rceil + \tfrac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(2\left\lceil \tfrac{k}{2} \right\rceil - \tfrac{23}{4}\right)^{1/2} - 2 < k - 2 \qquad (\text{car } k \ge 5),$$

en contradiction avec (16).

Cela achève la preuve du théorème 7. ■

Références

[BD] A. Bialostocki and P. Dierker, *On the Erdős–Ginzburg–Ziv theorem and the Ramsey numbers for stars and matchings*, Discrete Math. 110 (1992), 1–8.

[B4] A. Bialostocki, P. Dierker, D. Grynkiewicz and M. Lotspeich, *On some developments of the Erdős–Ginzburg–Ziv Theorem, II*, Acta Arith. 110 (2003), 173–184.

[BL] A. Bialostocki and M. Lotspeich, *Some developments of the Erdős–Ginzburg–Ziv theorem*, dans : Sets, Graphs and Numbers (Budapest, 1991), Colloq. Math. Soc. János Bolyai 60, North-Holland, Amsterdam, 1992, 97–117.

[Br] W. Brakemeier, *Eine Anzahlformel von Zahlen modulo n*, Monatsh. Math. 85 (1978), 277–282.

[DH] J. A. Dias da Silva and Y. O. Hamidoune, *Cyclic spaces for Grassmann derivatives and additive theory*, Bull. London Math. Soc. 26 (1994), 140–146.

[EGZ] P. Erdős, A. Ginzburg and A. Ziv, *Theorem in the additive number theory*, Bull. Res. Council Israel Sect. F Math. Phys. 10 (1961–62), 41–43.

[GG] L. Gallardo and G. Grekos, *On Brakemeier's variant of the Erdős–Ginzburg–Ziv problem*, Tatra Mt. Math. Publ. 20 (2000), 91–98.

[G6] L. Gallardo, G. Grekos, L. Habsieger, F. Hennecart, B. Landreau and A. Plagne, *Restricted addition in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ and an application to the Erdős–Ginzburg–Ziv problem*, J. London Math. Soc. 65 (2002), 513–523.

[GGP] L. Gallardo, G. Grekos and J. Pihko, *On a variant of the Erdős–Ginzburg–Ziv problem*, Acta Arith. 89 (1999), 331–336.

[He] F. Hennecart, *Restricted addition and some developments of the Erdős–Ginzburg–Ziv theorem*, Bull. London Math. Soc., accepté.

[Le] V. F. Lev, *Three-fold restricted addition in groups*, Europ. J. Combin. 23 (2002), 613–617.

[Wa] C. Wang, *Note on a variant of the Erdős–Ginzburg–Ziv problem*, Acta Arith. 108 (2003), 53–59.

Laboratoire Muse
Université Jean-Monnet
23, rue du Docteur Paul Michelon
42023 Saint-Etienne Cedex 02, France
E-mail: francois.hennecart@univ-st-etienne.fr

Reçu le 13.11.2003
et révisé le 21.9.2004 (4665)