ACTA ARITHMETICA
161.1 (2013)

Sur un problème de Rényi et Ivić concernant les fonctions de diviseurs de Piltz

par

RIMER ZURITA (Genève)

1. Introduction

NOTE. Dans cet article on notera $s = \sigma + i\tau$ un nombre complexe s de parties réelle σ et imaginaire τ et p un nombre premier.

Si $n = p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de l'entier $n \geq 1$ on définit $\Omega(n) := v_1 + \cdots + v_r$ et $\omega(n) := r$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec et sans multiplicité respectivement.

Soit (pour $q \geq 0$ entier, $x \geq 1$ réel)

$$v_q(x) := |\{n \leq x : \Omega(n) - \omega(n) = q\}|.$$

En 1955, A. Rényi [8] a démontré que

$$v_q(x) = \rho_q x + o(x) \quad (x \to \infty),$$

où le coefficient positif $0 < \rho_q < 1$ est la densité naturelle de la suite $\{n : \Omega(n) - \omega(n) = q\}$.

Après Rényi, W. Schwarz [11], H. Delange [1], et D. Wolke [18] ont obtenu une évaluation plus précise de $v_q(x)$ (c'est ce qu'on appelle le *problème de Rényi*), dans le cas général ou pour une valeur particulière de q.

En 1994, J. Wu [19] a démontré la meilleure estimation connue à ce jour pour $v_q(x)$. Il a montré que pour $q \geq 1$ entier, on a uniformément, pour x assez grand et $1 \leq J \leq c_1 \log x$,

$$v_q(x) = \rho_q x + x^{1/2} \sum_{j=1}^{J} \frac{P_{j,q-1}(\log\log x)}{(\log x)^{j+1}} + x^{1/2} R(x), \tag{1.1}$$

où $P_{j,q-1}$ est un polynôme de degré $q-1$, et où le terme d'erreur $R(x)$ est petit (voir (1.9) ci-dessous).

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N37; Secondary 11N60, 11M26, 11N25.
Key words and phrases: divisor problems, Rényi problem, Piltz function, Lindelöf hypothesis.

On peut généraliser le problème de l'estimation de $v_q(x)$. Considérons par exemple la *fonction de Piltz d'ordre* k, $d_k = \mathbf{1} * \cdots * \mathbf{1}$ (la convolution k fois de la fonction arithmétique $\mathbf{1}$, ainsi $d_2(n)$ est le nombre de diviseurs de n). En 1987, A. Ivić [5] a proposé d'étudier plus généralement le comportement asymptotique de la somme

$$\sum_{\substack{n \le x \\ \Omega(n)-\omega(n)=q}} d_k(n)\,; \tag{1.2}$$

c'est ce qu'on appelle le *problème de Rényi et Ivić* (le problème de Rényi est le cas $k = 1$ de ce nouveau problème).

On définit la constante α_k, pour $k \ge 1$ entier, comme l'infimum de tous les α tels que

$$\Delta_k(x) = O(x^\alpha), \tag{1.3}$$

avec $\Delta_k(x)$ le terme d'erreur dans l'évaluation asymptotique de la somme de Piltz [6, Ch. 13], soit

$$\sum_{n \le x} d_k(n) = \mathrm{Res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^k(s)x^s}{s}\right) + \Delta_k(x) = xP_{k-1}(\log x) + \Delta_k(x), \tag{1.4}$$

où P_{k-1} est un polynôme de degré $k-1$ et $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann.

Remarque 1.1. On sait que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \le \frac{35}{108}$ et $\alpha_3 \le \frac{43}{96}$. E. C.Titchmarsh [14, Ch. XII] a conjecturé que pour tout $k \ge 1$,

$$\alpha_k = \frac{k-1}{2k}. \tag{HT$_k$}$$

A. Ivić [5] a montré que

$$\sum_{\substack{n \le x \\ \Omega(n)-\omega(n)=q}} d_k(n) = x\sum_{j=0}^{k-1} B_{j,q}\log^j x + O(x^{1/2+\varepsilon} + x^{\alpha_k+\varepsilon}), \tag{1.5}$$

où $B_{j,q}$ sont des constantes qui dépendent de k et q ($j = 0, 1, \ldots, k-1$).

Dans [5], Ivić remarque que, avec les estimations connues $\alpha_2 < 1/2$ et $\alpha_3 < 1/2$, on peut probablement améliorer son résultat (1.5) pour $k = 2$ et $k = 3$. Il remarque de plus que si l'hypothèse de Lindelöf

$$\zeta(1/2 + i\tau) \ll_\varepsilon |\tau|^\varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \tag{HL}$$

est vraie, alors on peut probablement améliorer (1.5) pour tout $k \ge 2$ en utilisant une adaptation de la méthode de Selberg–Delange.

Effectivement, Y.-K. Lau [7] a obtenu en 2002 une amélioration de (1.5) pour $k = 2$. Il a montré que pour $q \geq 0$ un entier et pour tout J, on a

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)-\omega(n)=q}} d_2(n) = x(D_q \log x + E_q) + x^{1/2} \sum_{j=0}^{J} \frac{\bar{Q}_{j,q-1}(\log\log x)}{(\log x)^{j+4}} + x^{1/2} R(x), \tag{1.6}$$

où $\bar{Q}_{j,q-1}$ est un polynôme de degré $q-1$ ($\bar{Q}_{j,-1} = 0$ pour tout j) et $R(x)$ est petit (voir (1.9) ci-dessous).

Dans ce travail, on considérera des fonctions multiplicatives $f(n)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(H1) Il existe un $\alpha_0 \in [1/3, 1/2)$, des constantes positives C_1, C_2, C_3, un entier $k_1 \geq 1$, et des réels k_2 et $A > 0$ tels que pour tout nombre premier p, on ait :

- $f(p) = k_1 + g_1(p)$, avec $|g_1(p)| \leq C_1/p^{1-\alpha_0}$;
- $f(p^2) = k_2 + g_2(p)$, avec $|g_2(p)| \leq C_2/p^{1-2\alpha_0}$;
- $\sum_{i\geq 0} |f(p^{i+3})|(A/p^{\alpha_0})^i \leq C_3 p^{3\alpha_0 - 1}$.

Sous ces hypothèses, on obtient au Théorème 1.3 une évaluation pour

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)-\omega(n)=q}} f(n).$$

Ce résultat est trés général. Les hypothèses (H1) sont par exemple vérifiées par $f(n) = \varphi(n)/n$, où φ est l'indicateur d'Euler. On a le corollaire suivant.

Corollaire 1.2. *Soit*

$$N(x) := \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}. \tag{1.7}$$

Pour $q \geq 1$ entier, il existe des constantes $c, k' > 0$ telles que l'on ait uniformément pour x suffisamment grand et $J \leq k' \log x$,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)-\omega(n)=q}} \frac{\varphi(n)}{n} = A_q x + x^{1/2} \sum_{j=0}^{J} \frac{L_{j,q-1}(\log\log x)}{(\log x)^{j+2}} + O\left(x^{1/2} \left(3^q \frac{(49/48)^J (\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^{J+3}} \right) \left(\frac{(q-1)!}{J} + (J+2)! \right) + e^{-cN(x)} \right),$$

où A_q sont les coefficients de la série de Taylor de la fonction

$$\sum_{q \geq 0} A_q z^q = \frac{6}{\pi^2} \prod_p \left(1 + \frac{z-1}{(p+1)(p-z)} \right) =: F(z),$$

et $L_{j,q-1}$ *est un polynôme de degré* $q-1$. *Le coefficient dominant de* $L_{0,q-1}$ *est donné par*

$$-4\frac{\zeta(1/2)}{(q-1)!}\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p^{1/2}+1)}\right).$$

Si $q=0$ (*on somme sur les entiers sans facteur carré*),

$$\sum_{\substack{n\le x\\ \Omega(n)=\omega(n)}}\frac{\varphi(n)}{n}=A_0x+O(x^{1/2}e^{-cN(x)}),$$

avec

$$A_0=\frac{6}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)\approx 0.428249505$$

la constante "carefree" [10, Section 2.7].

Définissons maintenant la fonction $\mu(\sigma)$ pour $\sigma\in\mathbb{R}$ fixé comme l'infimum de tous les $\sigma'>0$ tels que

$$|\zeta(\sigma+i\tau)|\ll|\tau|^{\sigma'}. \tag{1.8}$$

Cette fonction satisfait à $\mu(\sigma)=0$ si $\sigma\ge1$, $\mu(\sigma)=1/2-\sigma$ si $\sigma\le0$, $\mu(\sigma)$ est continue et convexe [13] et $\mu(1/2)\le32/205$ [4]. On remarque que l'hypothèse de Lindelöf (HL) est équivalente à $\mu(1/2)=0$.

Pour un $k\ge1$ fixé, on fera intervenir les hypothèses :

(HFL$_k$) $\quad\mu(1/2)<1/k\quad$ (hypothèse faible de Lindelöf d'ordre k),

(HFT$_k$) $\quad\alpha_k<1/2\quad$ (hypothèse faible de Titchmarsh d'ordre k).

On sait que (HFL$_k$) est satisfaite pour $1\le k\le6$ [4], et que (HFT$_k$) l'est pour $1\le k\le3$.

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant, qui généralise les résultats (1.1) de Wu et (1.6) de Lau.

Théorème 1.3. *Soit* $f(n)$ *une fonction multiplicative satisfaisant aux conditions* (H1). *Pour* $1\le k_1\le3$ *inconditionnellement, pour* $4\le k_1\le11$ *sous* (HFT$_{k_1}$) *et pour* $k_1\ge12$ *sous* (HFT$_{k_1}$) *et* (HFL$_{k_1}$), *il existe des constantes* $c>0$, $k'>0$, $a_i(q)$, $i=0,\dots,k_1-1$, *et des polynômes* $Q_{j,q-1}$ *de degré* $q-1$ *tels que l'on ait uniformément pour* x *suffisamment grand,* $J\le k'\log x$ *et* $q\ge1$,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ \Omega(n)-\omega(n)=q}}f(n)=x\sum_{i=0}^{k_1-1}a_i(q)(\log x)^i$$
$$+x^{1/2}\sum_{j=0}^{J}\frac{Q_{j,q-1}(\log\log x)}{(\log x)^{j+1+k_1(k_1+1)/2}}+x^{1/2}R(x)$$

avec

$$
(1.9) \qquad R(x) \ll K_q e^{-cN(x)} + K_q(2|k_2|+1)^q \times \frac{\left(\frac{49}{48(1/2-\alpha_0)}\right)^J (\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^{J+2+k_1(k_1+1)/2}} \left(\frac{(q-1)!}{J} + \left(J+1+\frac{k_1(k_1+1)}{2}\right)!\right),
$$

où K_q est une constante comme en (2.4) *ci-dessous.* (*Les polynômes $Q_{j,q-1}$ sont donnés par* (5.23) *et le coefficient dominant de $Q_{0,q-1}$ par* (5.24) *ci-dessous.*) *Si $q=0$,*

$$
\sum_{\substack{n\le x\\ \Omega(n)=\omega(n)}} f(n) = x\sum_{i=0}^{k_1-1} a_i(0)(\log x)^i + O(K_q x^{1/2} e^{-cN(x)}).
$$

Remarque 1.4. Pour $q=0$ et $f(n)=1$ on retrouve l'estimation due à A. Walfisz [17] : il existe une constante $c_0>0$ telle que

$$
v_0(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2}e^{-c_0N(x)}).
$$

Remarque 1.5. Ce résultat, ainsi que les Théorèmes 2.2–2.4, s'applique en particulier aux fonctions de Piltz d'ordre k pour $k\ge 1$ (dans ce cas $k_1=k$), à $f(n)=\varphi(n)/n$, où φ est l'indicateur d'Euler (voir le Corollaire 1.2), à $f(n)=\sigma_r(n)/n^r$, où σ_r est la fonction somme des puissances r-èmes des diviseurs ($r\ge 2/3$), ainsi qu'à certaines fonctions f liées à la notion de diviseur exponentiel. (Pour ces dernières applications on a $k_1=1$, et les résultats sont inconditionnels).

Dans la section 3 (applications), on donne dans le Tableau 1 d'autres fonctions multiplicatives satisfaisant aux conditions (H1) et auxquelles ces théorèmes s'appliquent.

On définit les constantes

$$
(1.10) \qquad \begin{aligned}
\sigma_0 &:= \frac{1}{57.54\cdot 2\cdot(\log 3)^{2/3}(\log\log 3)^{1/3}} \approx \frac{1}{55.72},\\
\sigma_{\alpha_0} &:= \frac{6}{7}(1/2-\alpha_0),\\
\sigma'_{\alpha_0} &:= \min(\sigma_0,\sigma_{\alpha_0}).
\end{aligned}
$$

On définit le *contour de Hankel tronqué* de centre a, rayon r, et queue L (noté $C_r(a,L)$), $L>r>0$, comme le contour constitué du segment réel $[a-L,a-r]$ parcouru de gauche à droite avec argument $-\pi$, du cercle $|s-a|=r$ privé du point $s=a-r$, parcouru dans le sens trigonométrique, et du segment $[a-L,a-r]$ parcouru de droite à gauche avec argument π.

Pour $k \geq 1$, on définit la fonction

$$(1.11)\qquad \sigma_k(\tau) := \begin{cases} \dfrac{1}{57.54k(\log|k\tau|)^{2/3}(\log\log|k\tau|)^{1/3}} & \text{si } |\tau| \geq 3/k, \\ \dfrac{1}{57.54k(\log 3)^{2/3}(\log\log 3)^{1/3}} = \dfrac{2\sigma_0}{k} & \text{si } |\tau| < 3/k, \end{cases}$$

avec σ_0 comme en (1.10). Soit

$$(1.12)\qquad \mathcal{D} := \{s \in \mathbb{C} : \sigma \geq 1/k - \sigma_k(\tau),\ s \notin [1/k - 2\sigma_0/k, 1/k]\}.$$

On sait que $\zeta(ks) \neq 0$ si $s \in \mathcal{D}$, et que si $\theta(z)$ est holomorphe dans $|z| \leq R$, alors il existe $C > 0$ tel que $\zeta(ks)^{\theta(z)} \ll (\log|k\tau|)^C$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \geq 1/k - \sigma_k(\tau)$ et $|\tau| \geq 3/k$ ([3] et [13, II.3]).

Soit $0 < \delta_k < 1/k$. Définissons la région R_k du plan complexe par

$$(1.13)\qquad R_k := \begin{cases} \mathcal{D} \cup [1/k - 2\sigma_0/k, 1/k] & \text{si } 1/k - 2\sigma_0/k > \delta_k, \\ \big(\mathcal{D} \cap \big\{\sigma \geq 1/k - \frac{9}{10}(1/k - \delta_k)\big\}\big) \cup \big[1/k - \frac{9}{10}(1/k - \delta_k), 1/k\big] & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Résultats intermédiaires

Note. Dans les sections suivantes, du fait de la présence de nombreuses constantes, on emploiera par souci d'économie les notations $c, c', c'', c(\varepsilon')$ pour désigner des constantes positives dont la valeur exacte importe peu.

Dans cette section, on énonce des résultats intermédiaires qui servent à démontrer le Théorème 1.3. Ces résultats, et le Théorème 1.3, sont démontrés à la section 5.

Le théorème suivant établit une décomposition, sous forme de produit de puissances de la fonction zêta de Riemann, de la série de Dirichlet $\mathcal{F}(s,z) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{\Omega(n)-\omega(n)}/n^s$, $z \in \mathbb{C}$, où $f(n)$ est une fonction multiplicative satisfaisant aux conditions (H1).

Théorème 2.1. *Soit $f(n)$ une fonction multiplicative satisfaisant aux conditions* (H1) *et soit $\mathcal{F}(s,z) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{\Omega(n)-\omega(n)}/n^s$ la série de Dirichlet définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < A$. On a*

$$\mathcal{F}(s,z) = \zeta^{k_1}(s)\mathcal{G}(s,z) = \zeta^{k_1}(s)\zeta(2s)^{k_2 z - k_1(k_1+1)/2}\mathcal{G}_1(s,z),$$

où $\mathcal{G}(s,z) := \sum_{n=1}^{\infty} g(n,z)/n^s$, respectivement $\mathcal{G}_1(s,z) := \sum_{n=1}^{\infty} g_1(n,z)/n^s$, sont des séries de Dirichlet absolument convergentes pour $\Re e(s) > 1/2$, respectivement $\Re e(s) > \alpha_0$, et analytiques en z dans $|z| < A$. De plus $\mathcal{G}_1(s,z) \ll_\varepsilon 1$ dans le demi-plan $\Re e(s) \geq \alpha_0 + \varepsilon$ et pour tout z dans $|z| < A$.

En plus il existe une fonction multiplicative $h(n,\rho) \geq 0$ *définie pour tout* $\rho \in [0,A)$ *telle que*

$$|g(n,z)| \leq h(n,|z|), \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, \forall z \text{ dans } |z| < A.$$

Sa série de Dirichlet associée $\mathcal{H}(s,\rho) := \sum_{n=1}^{\infty} h(n,\rho)/n^s$ *est absolument convergente pour* $\Re e(s) > 1/2$ *et différentiable en* $\rho \in [0,A)$ *; elle satisfait aussi*

$$\mathcal{H}(s,\rho) = \zeta(2s)^{|k_2|\rho + k_1(3k_1-1)/2}\mathcal{H}_1(s,\rho),$$

avec $\mathcal{H}_1(s,\rho)$ *une série de Dirichlet absolument convergente pour* $\Re e(s) > \alpha_0$ *et différentiable en* $\rho \in [0,A)$. *Comme pour* $\mathcal{G}_1(s,z)$, *on a* $\mathcal{H}_1(s,\rho) \ll_\varepsilon 1$ *pour tout* s *tel que* $\Re e(s) \geq \alpha_0 + \varepsilon$ *et tout* $\rho \in [0,A)$.

Dans les Théorèmes 2.2–2.4 ci-dessous, les constantes impliquées par le symbole de Landau O peuvent dépendre des paramètres $k_1, k_2, C_1, C_2, C_3, A, \alpha_0$ des conditions (H1).

On peut déduire du Théorème 2.1 le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Soit* $f(n)$ *une fonction multiplicative satisfaisant aux conditions* (H1). *Soit* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < A$. *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème* 1.3, *il existe des fonctions analytiques* $A_i(z)$, $i = 0, 1, \ldots, k_1 - 1$, *et une constante* $c > 0$ *telles que*

$$\sum_{n \leq x} f(n) z^{\Omega(n)-\omega(n)} = x \sum_{i=0}^{k_1-1} A_i(z)(\log x)^i \tag{2.1}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(1/2,\sigma'_{\alpha_0})} \zeta^{k_1}(s)\zeta(2s)^{k_2 z - k_1(k_1+1)/2}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^s}{s}\, ds + O(x^{1/2}e^{-cN(x)}).$$

La série de Dirichlet $\mathcal{G}_1(s,z)$ *est comme dans le Théorème* 2.1. *Ici* $C_r\big(\frac{1}{2}, \sigma'_{\alpha_0}\big)$ *est le contour de Hankel tronqué de centre* $1/2$, *rayon* $r = 1/\log x$ *et queue* $\sigma'_{\alpha_0} = \min\big(\sigma_0, \frac{6}{7}(1/2 - \alpha_0)\big)$ *comme en* (1.10). *Les* $A_i(z)$ *sont des combinaisons linéaires des fonctions*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g(n,z)}{n}(-\log n)^r = \frac{\partial^r \mathcal{G}(s,z)}{\partial s^r}\bigg|_{s=1},$$

analytiques en z *dans* $|z| < A$, *où* $\mathcal{G}(s,z)$ *est comme dans le Théorème* 2.1.

On définit $Q(s)$ la fonction analytique dans $|s - 1/2| < 1/2$ telle que

$$e^{Q(s)} := (s - 1/2)\zeta(2s). \tag{2.2}$$

Du Théorème 2.2 et pour des nombres z satisfaisant une restriction supplémentaire, on peut déduire, en utilisant la formule intégrale de Cauchy, le résultat suivant.

Théorème 2.3. *Soit* $f(n)$ *une fonction multiplicative satisfaisant aux conditions* (H1), *soit* $\bar{A} = \min\left(A, \frac{1+k_1(k_1+1)/2}{|k_2|}\right)$ *si* $k_2 \neq 0$, $\bar{A} = A$ *si* $k_2 = 0$. *Soit* $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq A_1$ *où* $A_1 < \bar{A}$. *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème* 1.3 *on a*

$$\sum_{n \leq x} f(n) z^{\Omega(n)-\omega(n)} \tag{2.3}$$
$$= x \sum_{i=0}^{k_1-1} A_i(z)(\log x)^i + x^{1/2} \int_0^{\sigma_{\alpha_0}} x^{-u} u^{-(k_2 z - k_1(k_1+1)/2)} z T_1(u,z)\, du + R(x,z),$$

avec $R(x,z) = O(x^{1/2} e^{-cN(x)})$, *et où*

$$T_1(u,z) := \frac{\sin(\pi(k_2 z - k_1(k_1+1)/2))}{\pi z} \frac{\zeta^{k_1}(1/2-u)}{1/2-u} \times e^{Q(1/2-u)(k_2 z - k_1(k_1+1)/2)} \mathcal{G}_1(1/2-u, z)$$

est une fonction analytique à deux variables pour $|u| < 1/2 - \alpha_0$ *et* $|z| \leq A_1$. *Les fonctions* $A_i(z)$ *sont comme dans le Théorème* 2.2, *la série de Dirichlet* $\mathcal{G}_1(s,z)$ *comme dans le Théorème* 2.1, *et* σ_{α_0} *comme en* (1.10).

Ce résultat généralise le Théorème 2 de Lau [7].

Pour A_1 comme au Théorème 2.3, on définit la constante

$$K_q := \max(1, A_1^{-q}), \tag{2.4}$$

qui apparaît dans les énoncés des Théorèmes 1.3 et 2.4.

Si l'on cherche le coefficient de z^q des deux membres de l'équation (2.3) du Théorème 2.3, on peut déduire une généralisation du Théorème 2 de Wu [19].

Théorème 2.4. *Soit* $f(n)$ *une fonction multiplicative. Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème* 1.3, *il existe* $c > 0$, *des coefficients* $a_i(q)$, $i = 0, \ldots, k_1 - 1$, *et des polynômes* $P_{j,q-1}$ *de degré* $q-1$, $P_{j,-1} \equiv 0$, *tels que l'on ait uniformément pour* x *suffisamment grand,*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)-\omega(n)=q}} f(n) \tag{2.5}$$
$$= x \sum_{i=0}^{k_1-1} a_i(q)(\log x)^i + x^{1/2} \int_0^{\sigma_{\alpha_0}} x^{-u} V_q(u)\, du + O(K_q x^{1/2} e^{-cN(x)}),$$

où σ_{α_0} *est comme en* (1.10), *les coefficients*

$$a_i(q) := \mathrm{coef}_{z^q}(A_i(z)) \quad (i = 0, \ldots, k_1 - 1)$$

sont réels et apparaissent dans le développement en série de Taylor de $A_i(z)$

définie au Théorème 2.2, et où pour un J fixé,

$$\begin{aligned}(2.6)\quad V_q(u) &= u^{k_1(k_1+1)/2}\sum_{j=0}^{\infty} u^j P_{j,q-1}(-\log u)\\ &= u^{k_1(k_1+1)/2}\bigg[\sum_{j=0}^{J} u^j P_{j,q-1}(-\log u)\\ &\quad + O\bigg(K_q\Big(\frac{49}{48(1/2-\alpha_0)}\Big)^J\Big(\frac{1}{\log\frac{7}{6(1/2-\alpha_0)}}\Big)^q |\log u|^{q-1}u^{J+1}\bigg)\bigg].\end{aligned}$$

En particulier, si $q \geq 1$,

$$(2.7)\qquad V_q(u) \ll K_q\Big(\frac{1}{\log\frac{7}{6(1/2-\alpha_0)}}\Big)^q u^{k_1(k_1+1)/2}(-\log u)^{q-1} \qquad \text{pour } u\in[0,\sigma_{\alpha_0}].$$

Enfin, si $q = 0$, alors $V_0(u) = 0$ et l'intégrale dans (2.5) est nulle. La constante impliquée par les symboles de Landau ne dépend ni de q ni de J.

3. Applications. Dans cette section on donne quelques exemples de fonctions arithmétiques $f(n)$ qui satisfont aux conditions (H1).

(1) Soit $f(n) = d_{n_1}(n)\cdots d_{n_r}(n)$ ($n_1,\ldots,n_r \geq 1$ entiers) produit de fonctions de Piltz. Sachant que $d_n(p^v) = \binom{v+n-1}{v}$ on a

- $f(p) = n_1\cdots n_r$ $(= k_1)$,
- $f(p^2) = \frac{n_1(n_1+1)}{2}\cdots\frac{n_r(n_r+1)}{2}$ $(= k_2)$,
- pour $v \geq 3$, $f(p^v) = \frac{(v+1)\cdots(v+n_1-1)}{(n_1-1)!}\cdots\frac{(v+1)\cdots(v+n_r-1)}{(n_r-1)!} \ll v^{\sum_{i=1}^r(n_i-1)}$.

On peut voir que cette fonction satisfait aux conditions (H1) avec $\alpha_0 = 1/3$, $A < 2^{1/3}$.

(2) La fonction $f(n) = (\sigma(n)/n)^r$, $r\in\mathbb{R}$, où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n, satisfait aussi aux conditions (H1) avec $\alpha_0 = 1/3$, $A < 2^{1/3}$. En effet,

- $f(p) = (1+1/p)^r = 1 + r/p + O(1/p^2) = 1 + O(1/p^{2/3})$,
- $f(p^2) = (1+1/p+1/p^2)^r = 1 + r(1/p+1/p^2) + O((1/p+1/p^2)^2) = 1 + O(1/p^{1/3})$,
- si $v \geq 3$,

$$f(p^v) = \Big(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^v}\Big)^r \leq \begin{cases}(v+1)^r & \text{si } r\geq 0,\\ 1 & \text{sinon,}\end{cases}$$

ce qui implique que

$$\sum_{i\geq 0}|f(p^{i+3})|\left(\frac{A}{p^{\alpha_0}}\right)^i \leq \sum_{i\geq 0}|f(p^{i+3})|\left(\frac{A}{2^{1/3}}\right)^i < \infty.$$

De la même manière, on peut montrer que la fonction $\sigma_r(n)/n^r$, avec $r \geq 2/3$ et $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$, satisfait aux conditions (H1) (voir le Tableau 1) avec aussi $\alpha_0 = 1/3$, $A < 2^{1/3}$.

(3) Un diviseur exponentiel (*e-diviseur*) $d = p_1^{b_1}\cdots p_r^{b_r}$ de $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ satisfait par définition $b_i \mid a_i$ $(i = 1,\ldots,r)$. L'entier n est appelé *e-squarefree* si $\omega(a_i) = \Omega(a_i)$ pour tout i (ces deux notions ont été introduites par M. V. Subbarao [12]). Si n et m ont les mêmes diviseurs premiers, nous appelons $\kappa(n)$ $(= \kappa(m)) := p_1\cdots p_r$ leur *noyau*, et leur *e-pgcd* est défini par $(n,m)_{(e)} := \prod_{1\leq i\leq r} p_i^{(a_i,b_i)}$. Si $(n,m)_{(e)} = \kappa(n) = \kappa(m)$, alors n et m sont *e-copremiers.*

À partir de ces définitions on peut définir des fonctions multiplicatives, comme par exemple :

(i) $\tau^{(e)}(n)$ = nombre des e-diviseurs de n [12].
(ii) $\sigma^{(e)}(n)$ = somme des e-diviseurs de n [12].
(iii) $t^{(e)}(n)$ = nombre des e-diviseurs de n qui sont e-squarefree [16].
(iv) $\varphi^{(e)}(n)$ = nombre des diviseurs de n qui sont e-copremiers avec n (l'analogue de la fonction indicatrice d'Euler) [9].
(v) $\tilde{P}(n) := \sum_{1\leq j\leq n,\, \kappa(j)=\kappa(n)} (j,n)_{(e)}$ (l'analogue de la fonction de Pillai définie par $P(n) = \sum_{1\leq j\leq n}(j,n)$) [15].

On montre que $\tau^{(e)}(n), t^{(e)}(n), \sigma^{(e)}(n)/n, \varphi^{(e)}(n), \tilde{P}(n)/n$ satisfont aussi aux conditions (H1) avec $\alpha_0 = 1/3$, $A < 2^{1/3}$. Vérifions-le par exemple pour les fonctions $t^{(e)}(n)$ et $\tilde{P}(n)/n$.

Pour $f(n) = t^{(e)}(n)$, si $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ alors $t^{(e)}(n) = 2^{\omega(a_1)}\cdots 2^{\omega(a_r)}$, $t^{(e)}(p^v) = 2^{\omega(v)} \leq v$ car si $v = q_1^{b_1}\cdots q_s^{b_s}$ (q_i premiers) alors $v \geq 2^s = 2^{\omega(v)}$; pour conclure on procède comme dans l'exemple (2).

Pour $f(n) = \tilde{P}(n)/n$, si $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ alors

$$\tilde{P}(n) = \sum_{1\leq\beta_i\leq a_i} p_1^{(a_1,\beta_1)}\cdots p_r^{(a_r,\beta_r)},$$

ce qui implique que

$$\frac{\tilde{P}(p)}{p} = 1, \qquad \frac{\tilde{P}(p^2)}{p^2} = \frac{p^2+p}{p^2} = 1 + \frac{1}{p},$$

$$\frac{\tilde{P}(p^v)}{p^v} = \frac{p^{(1,v)} + p^{(2,v)} + \cdots + p^{(v,v)}}{p^v} \leq \frac{p + p^2 + \cdots + p^v}{p^v}$$
$$= 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{v-1}} \leq v$$

et on procède comme dans l'exemple (2).

(4) Au Tableau 1 on donne un exemple d'une fonction multiplicative satisfaisant aux conditions (H1) avec $\alpha_0 \in [1/3, 1/2)$ choisi arbitrairement.

Dans le même tableau on a $a(n) =$ nombre de groupes abéliens d'ordre n. C'est une fonction multiplicative et on montre que $a(p^v) = \mathbf{p}(v)$ où $\mathbf{p}(v)$ est la fonction nombre de partitions de v. Par exemple $\mathbf{p}(1) = 1$, $\mathbf{p}(2) = 2$ et on sait qu'il existe des constantes positives c_1, c_2 telles que $\mathbf{p}(v) \sim (c_1/v)e^{c_2\sqrt{v}}$.

Tableau 1. Fonctions arithmétiques $f(n)$ satisfaisant aux conditions (H1)

$f(n)$	α_0	A	k_1	k_2
d_k (fonction de Piltz)	$1/3$	$< 2^{1/3}$	k	$k(k+1)/2$
$d_{n_1} \cdots d_{n_r}$	$1/3$	$< 2^{1/3}$	$\prod_{i=1}^r n_i$	$\prod_{i=1}^r n_i(n_i+1)/2$
$\varphi(n)/n$, $(n/\varphi(n))^r$, $r \in \mathbb{R}$	$1/3$	$< 2^{1/3}$	1	1
$P(n)/n$ (fonction de Pillai)	$1/3$	$< 2^{1/3}$	2	3
$k^{\omega(n)}$ $(k \geq 2)$	$1/3$	$< 2^{1/3}$	k	k
$\sigma_r(n)/n^r$ $(r \geq 2/3)$, $(\sigma(n)/n)^r$ $(r \in \mathbb{R})$	$1/3$	$< 2^{1/3}$	1	1
$\tau^{(e)}(n)$, $t^{(e)}(n)$	$1/3$	$< 2^{1/3}$	1	2
$\sigma^{(e)}(n)/n$, $\varphi^{(e)}(n)$	$1/3$	$< 2^{1/3}$	1	1
$\tilde{P}(n)/n$	$1/3$	$< 2^{1/3}$	1	1
$a(n) =$ nombre des groupes abéliens d'ordre n	$1/3$	$< 2^{1/3}$	1	2
$f(p) = k_1 \in \mathbb{N}$, $f(p^2) = k_2 \in \mathbb{R}$, $f(p^v) = p^{\beta_0 v - 1}$ si $v \geq 3$	β_0	< 1	k_1	k_2

4. Résultats auxiliaires. Au Théorème 2.1 on remarque que la série de Dirichlet $\mathcal{G}(s,z)$ donnée par $\sum_{n\geq 1} g(n,z)n^{-s}$ possède un facteur du type $\zeta(2s)^{k_2 z - k_1(k_1+1)/2}$. Dans le lemme qui suit, on utilise la méthode de Selberg–Delange pour estimer $\sum_{n\leq x} g(n,z)$ dans un cas plus général. Ce lemme nous sera utile pour la démonstration du Théorème 2.2.

Lemme 4.1. *Soit $g(n,z)$ une fonction arithmétique en n définie pour tout complexe z tel que $|z| \leq R$ et soit $\mathcal{G}(s,z) := \sum_{n=1}^{\infty} g(n,z)/n^s$ sa série de Dirichlet associée, absolument convergente pour $\Re e(s) > 1/k$, où $k \geq 1$.*

Supposons que l'on peut écrire

$$\mathcal{G}(s,z) = \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z),$$

où $\theta(z)$ est une fonction holomorphe en z pour $|z| \le R$ et $\mathcal{G}_1(s,z)$ une fonction analytique en s dans la région R_k de la définition (1.13) *avec un certain δ_k tel que $0 < \delta_k < 1/k$.*

Supposons aussi que $|\mathcal{G}_1(s,z)| \le M(1+|\tau|)^{1-\delta}$ pour un certain δ avec $0 < \delta \le 1$ pour tout $s \in R_k$ et tout z dans $|z| \le R$.

Supposons encore qu'il existe une fonction arithmétique positive $h(n,\rho)$ définie pour tout $\rho \in [0,R]$ qui satisfait $|g(n,z)| \le h(n,|z|)$ pour tout n et tout z dans $|z| \le R$. Soit $\mathcal{H}(s,\rho) := \sum_{n=1}^{\infty} h(n,\rho)/n^s$ sa série de Dirichlet associée, et supposons comme pour $\mathcal{G}(s,z)$ que l'on peut écrire

$$\mathcal{H}(s,\rho) = \zeta(ks)^{g(\rho)}\mathcal{H}_1(s,\rho),$$

avec $g(\rho)$ continue pour tout $\rho \in [0,A]$ et $\mathcal{H}_1(s,\rho)$ analytique en s dans la région de la définition (1.13) *pour un certain δ'_k avec $0 < \delta'_k < 1/k$ au lieu de δ_k, région que nous notons R'_k. De plus supposons que $|\mathcal{H}_1(s,\rho)| \le M'(1+|\tau|)^{1-\delta'}$ pour un certain δ' avec $0 < \delta' \le 1$, tout $s \in R'_k$ et $\rho \in [0,A]$.*

Sous ces hypothèses il existe $c > 0$ tel que pour x suffisamment grand,

$$\begin{aligned} G(x,z) &:= \sum_{n\le x} g(n,z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^s}{s}\,ds + O(M'' x^{1/k}e^{-cN(x)}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $M'' = \max(M,M')$ et C_r est le contour de Hankel tronqué de centre $1/k$, rayon $r = 1/\log x$ et queue

$$\sigma_k = \begin{cases} 2\sigma_0/k & \textit{si } 1/k - 2\sigma_0/k > \delta_k, \\ \frac{9}{10}(1/k-\delta_k) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La constante impliquée par le symbole de Landau dépend de $k, \delta_k, \delta'_k, R, \delta, \delta'$.

Preuve. Par la formule de Perron [13, §II.2],

$$\int_0^x G(t,z)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{1/k+2/\log x - i\infty}^{1/k+2/\log x+i\infty} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds, \tag{4.2}$$

On considère deux cas selon la position de δ_k par rapport à $1/k$.

Cas 1. Si $1/k - 2\sigma_0/k > \delta_k$, on définit $\sigma_k := 2\sigma_0/k$ et $\gamma_k := 3/k$.

Cas 2. Si $1/k - 2\sigma_0/k \le \delta_k$, on définit $\sigma_k := \frac{9}{10}(1/k-\delta_k)$ et γ_k comme l'ordonnée positive de l'intersection de la droite verticale $\sigma = 1/k - \sigma_k$ avec la courbe $\sigma = 1/k - \sigma_k(\tau)$ définie en (1.11).

Soient maintenant :

L_6 : la demi-droite verticale $[1/k + 2/\log x + iT, 1/k + 2/\log x + i\infty)$,
L_5 : le segment horizontal $[1/k - \sigma_k(T) + iT, 1/k + 2/\log x + iT]$,
L_4 : la courbe décrite par $[1/k-\sigma_k, 1/k-\sigma_k+\gamma_k\, i]\cup\{\sigma = 1/k-\sigma_k(\tau)+i\tau, \gamma_k \le \tau \le T\}$,
C_r : le contour de Hankel tronqué C_r de centre $1/k$, rayon $r = 1/\log x$ et queue σ_k,

et L_1, L_2, L_3 les chemins symétriques de L_6, L_5, L_4 par rapport à l'axe réel. D'après la remarque qui suit (1.12) on a

$$\int_{L_6} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds \ll Mx^{1+1/k}\int_T^\infty \frac{(\log kt)^C}{t^{1+\delta}}\,dt \ll Mx^{1+1/k}T^{-\delta/2}$$

et

$$\int_{L_5} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds \ll Mx^{1+1/k}\frac{(\log(kT))^C}{T^{1+\delta}} \ll Mx^{1+1/k}T^{-\delta/2}.$$

Il est facile de voir que $\zeta(ks)^{\theta(z)} \ll 1$ si $s \in [1/k - \sigma_k, 1/k - \sigma_k + \gamma_k\, i]$ et $|z| \le A$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}(4.3)\qquad &\int_{L_4} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds \\ &\qquad \ll Mx^{1+1/k-\sigma_k(T)}\left(\int_{\gamma_k}^\infty \frac{1}{t^{1+\delta/2}}\,dt + \gamma_k\right) \ll Mx^{1+1/k-\sigma_k(T)}.\end{aligned}$$

Par symétrie on obtient la mêmes bornes pour les intégrales sur les chemins L_1, L_2, L_3.

De (4.2) et par le théorème des résidus, on a donc

$$\begin{aligned}(4.4)\qquad &\int_0^x G(t,z)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds + O(Mx^{1+1/k}(T^{-\delta/2} + x^{-\sigma_k(T)})) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds + O(Mx^{1+1/k}e^{-c_2 N(x)}).\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on a posé $T = e^{c_1 N(x)}$. Notons

$$\Phi(x,z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \zeta(ks)^{\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds.$$

Pour $s \in C_r$ et $|z| \le R$, on a

$$(s-1/k)^{-\theta(z)} = e^{-\theta(z)(\log|s-1/k|+i\varphi_s)} \ll e^{-|\theta(z)|\log r} \ll (\log x)^B$$

avec $B := \max_{|z|\le R}|\theta(z)|$. Ceci implique

$$\begin{aligned}\Phi''(x,z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}(\zeta(ks)(s-1/k))^{\theta(z)}(s-1/k)^{-\theta(z)}\mathcal{G}_1(s,z)x^{s-1}\,ds\\ &\ll Mx^{1/k-1}(\log x)^B.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Soit $0 < y < \frac{1}{2}x$. De (4.4) on a

$$\begin{aligned}\int_x^{x+y} G(t,z)\,dt &= \Phi(x+y,z)-\Phi(x,z)+O(Mx^{1+1/k}e^{-c_3N(x)})\\ &= y\Phi'(x,z)+y^2\int_0^1(1-t)\Phi''(x+ty,z)\,dt+O(Mx^{1+1/k}e^{-c_3N(x)})\\ &= y\Phi'(x,z)+O(My^2x^{1/k-1}(\log x)^B+Mx^{1+1/k}e^{-c_3N(x)}).\end{aligned}\tag{4.6}$$

En écrivant $G(t,z)=G(t,z)-G(x,z)+G(x,z)$ nous avons

$$\begin{aligned}G(x,z) = \Phi'(x,z) &+ O(My^{-1}x^{1+1/k}e^{-c_3N(x)}\\ &+ Myx^{1/k-1}(\log x)^B + y^{-1}L),\end{aligned}\tag{4.7}$$

avec $L = \int_x^{x+y}|G(t,z)-G(x,z)|\,dt$.

Pour majorer L on utilise l'hypothèse de l'existence de la fonction arithmétique positive $h(n,\rho)$. En notant $H(t,z) := \sum_{n\le t} h(n,z)$ on a

$$\begin{aligned}L &\le \int_x^{x+y}\sum_{x<n\le t}h(n,|z|)\,dt = \int_x^{x+y}(H(t,|z|)-H(x,|z|))\,dt\\ &\le \int_x^{x+y}H(t,|z|)\,dt - \int_{x-y}^{x}H(t,|z|)\,dt.\end{aligned}$$

On montre de façon analogue à (4.5) et (4.6) que

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+y}H(t,\rho)\,dt\\ &\quad = y\Psi'(x,\rho)+O(M'x^{1+1/k}e^{-c_4N(x)}+M'y^2x^{1/k-1}(\log x)^{B'})\end{aligned}\tag{4.8}$$

et

$$\Psi''(x,\rho) \ll M'x^{1/k-1}(\log x)^{B'},\tag{4.9}$$

avec

$$\Psi(x,\rho) := \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_r}\zeta(ks)^{g(\rho)}\mathcal{H}_1(s,\rho)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds$$

(où C'_r est le contour de Hankel de centre $1/k$, rayon $r = 1/\log x$ et queue σ'_k définie comme dans les cas 1 et 2 du début de la preuve de ce lemme avec δ'_k au lieu de δ_k).

De (4.8) on obtient

$$\int_x^{x+y} H(t,|z|)\,dt - \int_{x-y}^{x} H(t,|z|)\,dt = y\Psi'(x,|z|) - y\Psi'(x-y,|z|) \\ + O(M'x^{1+1/k}e^{-c_5N(x)} + M'y^2x^{1/k-1}(\log x)^{B'}). \tag{4.10}$$

On a donc pour un certain $\theta \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} L &\le y^2\Psi''(x-y+\theta y,|z|) + O(M'x^{1+1/k}e^{-c_5N(x)} + M'y^2x^{1/k-1}(\log x)^{B'}) \\ &\ll y^2M'x^{1/k-1}(\log x)^{B'} + O(M'x^{1+1/k}e^{-c_5N(x)} + M'y^2x^{1/k-1}(\log x)^{B'}) \end{aligned}$$

et donc

$$L \ll M'x^{1+1/k}e^{-c_5N(x)} + M'y^2x^{1/k-1}(\log x)^{B'}.$$

En remplaçant cette majoration en (4.7) et en posant $y = xe^{-c_6N(x)}$ on obtient (4.1). ∎

Dans la démonstration du Théorème 2.2 on va utiliser le Théorème 1 de Lau [7] dans une version légèrement modifiée et un peu plus générale, le Théorème A ci-dessous.

Théorème A (Théorème de Lau modifié). *Soient f, g deux fonctions arithmétiques et α, a, η trois nombres positifs avec $0 < \alpha < a < \eta < 1$. On définit $\mathcal{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$, $\mathcal{G}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)/n^s$ les séries de Dirichlet associées et on fait les hypothèses suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}(s), \mathcal{G}(s)$ sont absolument convergentes pour $\Re e(s) > 1$, $\Re e(s) > a$ respectivement.*

(ii) *$\mathcal{F}(s)$ admet une continuation méromorphe dans $\Re e(s) > \alpha - \varepsilon$ qui possède un nombre fini de pôles dans la région $\eta < \Re e(s) \le 1$ mais aucun pôle dans la région $\alpha \le \Re e(s) \le \eta$. En plus on suppose que*

$$\mathcal{F}(\sigma + i\tau) \ll |\tau|^{2-\varepsilon} \tag{4.11}$$

pour $\alpha \le \sigma \le 1$ et $|\tau|$ assez grand, et que

$$\int_2^T |\mathcal{F}(\alpha \pm i\tau)|\,d\tau \ll T^{2-\varepsilon}. \tag{4.12}$$

(iii) *Notons $U^- = U^-(a,\delta,Y)$ un voisinage ouvert sans sa partie réelle du contour de Hankel tronqué $C_\delta(a,Y)$ de centre a, rayon δ et queue Y. Alors $\mathcal{G}(s)$ possède un prolongement analytique dans une région qui contient U^- et en plus il existe $c > 0$ tel que $\mathcal{G}(s) \ll r^{-c}$ si $|s-a| = r$ et $s \in U^-$. On a $\delta < Y$, $0 < \delta < \eta - a$ et $Y < a - \alpha$.*

(iv) *Si $x \to \infty$ on a*

$$G(x) := \sum_{n \le x} g(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(a,Y)} \mathcal{G}(s) \frac{x^s}{s}\, ds + O(x^a e^{-c' L(x)}), \tag{4.13}$$

où $L(x)$ est croissante pour x suffisamment grand, $L(x)/\log\log x \to \infty$, $L(x^\gamma) \gg_\gamma L(x)$ pour un certain $\gamma \in (0,1)$, et $L(x) = O(\log x)$.

Sous ces hypothèses, si $\varepsilon' > 0$ est suffisamment petit, et $y = xe^{-\varepsilon' L(x)}$, on a

$$\sum_{n \le x} (f * g)(n) = \sum_{\substack{\xi \text{ pôles} \\ \eta < \Re e(\xi) \le 1}} \operatorname{Res}_\xi \left(\mathcal{F}(s)\mathcal{G}(s) \frac{x^s}{s} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(a,Y)} \mathcal{F}(s)\mathcal{G}(s) \frac{x^s}{s}\, ds$$
$$+ \sum_{n \le y} g(n) E\left(\frac{x}{n}\right) + O(x^a e^{-c(\varepsilon') L(x)}),$$

où $F(x) = \sum_{n \le x} f(n) = P(x) + E(x)$ avec

$$P(x) = \sum_{\substack{\xi \text{ pôles} \\ \eta < \Re e(\xi) \le 1}} \operatorname{Res}_\xi \left(\mathcal{F}(s) \frac{x^s}{s} \right)$$

le terme principal et $E(x)$ le terme d'erreur.

Preuve. La preuve est pratiquement identique à celle du Théorème 1 de Lau [7]. Voir l'annexe 7.2 de [20]. ■

Remarque 4.2. Le Théorème 1 de Lau [7] a pour hypothèse (ii)

$$\mathcal{F}(\sigma + i\tau) \ll |\tau|^{1-\varepsilon}$$

pour $\alpha \le \sigma \le 1$ et $|\tau|$ assez grand. C'est J. Wu qui m'a suggéré de remplacer cette hypothèse par (4.11) et (4.12).

Le lemme suivant permet de majorer $|\zeta(s)^k|$ dans une bande verticale $\{r_k \le \sigma \le 1,\ |\tau| \ge 2\}$ avec un certain $0 < r_k < 1/2$. Cette majoration sera utile pour la vérification de l'hypothèse (4.11) dans la démonstration du Théorème 2.2.

Lemme 4.3. *Pour k fixé, il existe $r_k \in (0, 1/2)$ et $\varepsilon_k > 0$ tels que pour $r_k \le \sigma \le 1$ et $|\tau| \ge 2$,*

$$|\zeta(s)^k| \ll \begin{cases} |\tau|^{1-\varepsilon_k} & \text{si } 1 \le k \le 6, \\ |\tau|^{2-\varepsilon_k} & \text{si } 7 \le k \le 11, \\ |\tau|^{1-\varepsilon_k} & \text{si } k \ge 12 \text{ sous } (\mathrm{HFL}_k). \end{cases}$$

Preuve. Si $k \ge 12$: Par hypothèse on sait que $\mu(1/2) < 1/k$. Soit $\mu_k := \frac{1}{2}\big(\frac{1}{k} + \mu\big(\frac{1}{2}\big)\big)$; on a donc pour $r_k = \frac{1}{2}\big(\frac{1/2-\mu_k}{1/2-\mu(1/2)}\big)$ et par convexité de $\mu(\sigma)$ (1.8) que $\mu(r_k) \le \mu_k$. Par le théorème de Lindelöf modifié [2, p. 186] on a

$|\zeta(\sigma+i\tau)| \ll |\tau|^{\mu_k+\varepsilon'}$ pour $r_k \leq \sigma \leq 1$, $|\tau| \geq 2$ et tout $\varepsilon' > 0$. Ceci implique $|\zeta(\sigma+i\tau)^k| \ll |\tau|^{1-\varepsilon_k}$ lorsque $0 < \varepsilon_k < \frac{1}{2}\big(1 - k\mu(\frac{1}{2})\big)$.

Si $1 \leq k \leq 11$: Soit $h := 32/205$ et $h' := \frac{1}{2}\big(h + \frac{1}{6}\big)$. Comme avant on montre que

$$|\zeta(\sigma+i\tau)^k| \ll \begin{cases} |\tau|^{6h'+6\varepsilon'} & \text{si } 1 \leq k \leq 6, \\ |\tau|^{11h'+11\varepsilon'} & \text{si } 7 \leq k \leq 11 \end{cases}$$

pour $r_k \leq \sigma \leq 1$ avec $r_k = \frac{1}{2}\big(\frac{1/2-h'}{1/2-h}\big)(\approx 0.492317), |\tau| \geq 2$ et tout $\varepsilon' > 0$. Alors

$$|\zeta(\sigma+i\tau)^k| \ll \begin{cases} |\tau|^{1-\varepsilon_k} & \text{si } 1 \leq k \leq 6 \ \big(0 < \varepsilon_k < \frac{1-6h}{2}\big), \\ |\tau|^{2-\varepsilon_k} & \text{si } 7 \leq k \leq 11 \ \big(0 < \varepsilon_k < \frac{13-66h}{12}\big). \ \blacksquare \end{cases}$$

Soit $k \geq 4$; on définit le nombre $M(k)$ (≥ 1) comme l'infimum de tous les nombres $M \geq 1$ tels que

$$\int_1^T |\zeta(1/2+it)|^k \, dt \ll T^{M+\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{4.14}$$

Les deux lemmes qui suivent sont utiles dans la preuve du Théorème 2.2.

Lemme 4.4 ([6, Théorème 8.3]). *Si $k \geq 4$ est un nombre réel,*

$$M(k) \leq \begin{cases} 1 + (k-4)/8 & \textit{si } 4 \leq k \leq 12, \\ 2 + 3(k-12)/22 & \textit{si } 12 \leq k \leq 178/13 \approx 13.6923, \\ 1 + 4(k-6)/25 & \textit{si } k \geq 178/13. \end{cases}$$

Remarque 4.5. Ce résultat représente une légère amélioration du Théorème 8.3 de [6] où l'on trouve le coefficient 35/216 à la place de 4/25. Ce dernier s'obtient immédiatement en suivant la même preuve.

Lemme 4.6 ([6, Lemme 8.3]). *Soit $\mathcal{F}(s)$ une fonction analytique dans la région $\mathcal{D} : \alpha \leq \sigma \leq \beta, \tau \geq 1$, et telle que $\mathcal{F}(s) \ll e^{C\tau^2}$ dans $\mathcal{D}$. Pour $q > 0$ fixé et $\alpha < \gamma < \beta$ on a*

$$\int_2^T |\mathcal{F}(\gamma+it)|^q \, dt \ll \Big(\int_1^{2T} |\mathcal{F}(\alpha+it)|^q \, dt + 1\Big)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}} \times \Big(\int_1^{2T} |\mathcal{F}(\beta+it)|^q \, dt + 1\Big)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Pour la preuve du Théorème 2.1 on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.7 ([13, II.1]). *Soit f une fonction multiplicative et $s \in \mathbb{C}$. Sa série de Dirichlet associée $\mathcal{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$ est absolument convergente* *si et seulement si*

$$\sum_p \sum_{v\geq 1} \left| \frac{f(p^v)}{p^{vs}} \right| < \infty,$$

et dans ce cas on peut écrire

$$\mathcal{F}(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{v\geq 1} \frac{f(p^v)}{p^{vs}}\right).$$

Pour la démonstration du Théorème 1.3 on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.8. *Soit $j \geq 0$ et $k \geq 0$ des entiers ; on définit*

$$F(j,k) := \int_1^\infty t^j (\log t)^k e^{-t}\, dt. \tag{4.15}$$

Alors

$$F(j,k) \leq (j+1)!k!.$$

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} F(j,k) &= \int_1^\infty t^j (\log t)^k e^{-t}\, dt = k! \int_1^\infty t^j \frac{(\log t)^k}{k!} e^{-t}\, dt \leq k! \int_1^\infty t^j e^{\log t} e^{-t}\, dt \\ &= k! \int_1^\infty t^{j+1} e^{-t}\, dt \leq k! \int_0^\infty t^{j+1} e^{-t}\, dt = k!(j+1)!. \ \blacksquare \end{aligned}$$

5. Preuve des résultats intermédiaires et du Théorème 1.3

5.1. Preuve du Théorème 2.1. Pour $\mathfrak{Re}(s) = \sigma \geq \varepsilon_1 > 1, |z| < A$, on a

$$\begin{aligned} &\left|(k_1 + g_1(p))p^{-s} + (k_2 + g_2(p))zp^{-2s} + \sum_{i\geq 3} f(p^i) z^{i-1} p^{-is}\right| \qquad (5.1) \\ &\leq C_1 p^{-\varepsilon_1 - 1 + \alpha_0} + k_1 p^{-\varepsilon_1} + k_2 A p^{-2\varepsilon_1} + C_2 A p^{-2\varepsilon_1 - 1 + 2\alpha_0} + A^2 C_3 p^{-3\varepsilon_1 + 3\alpha_0 - 1} \\ &= O(1/p^{\varepsilon_1}). \end{aligned}$$

Par le Lemme 4.7 la série de Dirichlet $\mathcal{F}(s,z) = \sum_{n\geq 1} f(n) z^{\Omega(n) - \omega(n)}/n^s$ peut donc être décomposée en produit d'Euler

(5.2)

$$\mathcal{F}(s,z) = \prod_p \Big(1 + (k_1 + g_1(p))p^{-s} + (k_2 + g_2(p))zp^{-2s} + \sum_{i\geq 3} f(p^i) z^{i-1} p^{-is}\Big)$$

pour tout s tel que $\sigma > 1$, et $\mathcal{F}$ est analytique pour tout z dans $|z| < A$.

De (5.2) on a $\mathcal{F}(s,z)=\zeta^{k_1}(s)\mathcal{G}(s,z)$ avec

$$\begin{aligned}(5.3)\qquad \mathcal{G}(s,z) &:= \prod_p (1-p^{-s})^{k_1}\\ &\quad\times\Big(1+(k_1+g_1(p))p^{-s}+(k_2+g_2(p))zp^{-2s}+\sum_{i\ge 3} f(p^i)z^{i-1}p^{-is}\Big)\\ &= \prod_p\Big(1-k_1p^{-s}+\frac{k_1(k_1-1)}{2}p^{-2s}+O(p^{-3\sigma})\Big)\\ &\quad\times\big(1+(k_1+g_1(p))p^{-s}+(k_2+g_2(p))zp^{-2s}+O(p^{-3\sigma+3\alpha_0-1})\big)\\ &= \prod_p\Big(1+g_1(p)p^{-s}+\Big(k_2z-\frac{k_1(k_1+1)}{2}+g_2(p)z-k_1g_1(p)\Big)p^{-2s}\\ &\qquad\qquad +O(p^{-3\sigma+3\alpha_0-1})\Big).\end{aligned}$$

De là et sachant que $g_1(p)=O(p^{-1+\alpha_0})$ on a, pour $\sigma\ge\varepsilon_1>1/2$,

$$(5.4)\qquad \mathcal{G}(s,z)=\prod_p(1+O(p^{-2\varepsilon_1}+p^{-\varepsilon_1-1+\alpha_0})),$$

donc la série de Dirichlet $\mathcal{G}(s,z)=\sum_{n\ge1}g(n,z)/n^s$ converge uniformément vers une fonction analytique en s pour $\Re e(s)>1/2$ et en z pour $|z|<A$. (De (5.3) on a en particulier $g(p^2,z)=k_2z-k_1(k_1+1)/2+g_2(p)z-k_1g_1(p)$ et $g(p,z)=g_1(p)$.)

On peut écrire $\mathcal{G}(s,z)$ sous forme de produit où intervient la fonction zêta de Riemann, de la façon suivante :

$$(5.5)\qquad \mathcal{G}(s,z)=\zeta(2s)^{k_2z-k_1(k_1+1)/2}\mathcal{G}_1(s,z),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(s,z) &= \prod_p(1-p^{-2s})^{k_2z-k_1(k_1+1)/2}\Big(1+g_1(p)p^{-s}\\ &\quad+\Big(k_2z-\frac{k_1(k_1+1)}{2}+g_2(p)z-k_1g_1(p)\Big)p^{-2s}+O(p^{-3\sigma-1+3\alpha_0})\Big).\end{aligned}$$

Pour $\sigma\ge\varepsilon_1>\alpha_0$ on a

$$\begin{aligned}(5.6)\qquad \mathcal{G}_1&(s,z)\\ &= \prod_p\Big(1-\Big(k_2z-\frac{k_1(k_1+1)}{2}\Big)p^{-2s}+O(p^{-4\sigma})\Big)\Big(1+g_1(p)p^{-s}\\ &\quad+\Big(k_2z-\frac{k_1(k_1+1)}{2}+g_2(p)z-k_1g_1(p)\Big)p^{-2s}+O(p^{-3\sigma+3\alpha_0-1})\Big)\\ &= \prod_p(1+O(p^{-\sigma-1+\alpha_0}))=\prod_p(1+O(p^{-\varepsilon_1-1+\alpha_0})).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{G}_1(s,z) = \sum_{n\geq 1} g_1(n,z)/n^s$ est une série de Dirichlet qui converge uniformément vers une fonction analytique en s pour $\mathfrak{Re}(s) > \alpha_0$ et en z pour $|z| < A$.

De plus pour $\sigma \geq \alpha_0 + \varepsilon$ et $|z| < A$ on a

$$|\mathcal{G}_1(s,z)| = \prod_p |1 + O(p^{-\sigma-1+\alpha_0})| \leq \prod_p \left(1 + \frac{C'}{p^{1+\varepsilon}}\right) = C_\varepsilon.$$

Il s'agit maintenant de construire une fonction multiplicative $h(n,\rho)$ réelle positive qui majore $|g(n,z)|$ si $|z| = \rho$.

En s'inspirant de (5.3) construisons la fonction multiplicative $h(n,\rho) \geq 0$, définie pour tout $\rho \in [0,A)$, de la façon suivante : Pour $v \geq 1$, $h(p^v,\rho)$ est le coefficient de p^{-vs} dans le développement formel de

$$(1+p^{-s})^{k_1}\Big(1+(k_1 + |g_1(p)|)p^{-s}+(|k_2| + |g_2(p)|)\rho p^{-2s}+\sum_{i=3}^{\infty} |f(p^i)|\rho^{i-1}p^{-is}\Big) - 2k_1 p^{-s}.$$

Par construction on a $h(p,\rho) = |g_1(p)|$ et $|g(p^v,z)| \leq h(p^v,|z|)$ pour $v \geq 1$, et donc $|g(n,z)| \leq h(n,|z|)$ pour tout n.

Soit

$$\mathcal{H}(s,\rho) = \sum_{n\geq 1} \frac{h(n,\rho)}{n^s}$$

la série de Dirichlet associée. Pour $\sigma \geq \varepsilon_1 > 1/2$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(s,\rho) &= \prod_p \left(1 + k_1 p^{-s} + \frac{k_1(k_1-1)}{2}p^{-2s} + O(p^{-3\sigma})\right) \\
&\quad \times \left(1 + (k_1 + |g_1(p)|)p^{-s} + (k_2 + |g_2(p)|)\rho p^{-2s} + O(p^{-3\sigma+3\alpha_0-1}) - 2k_1 p^{-s}\right) \\
&= \prod_p \Bigg(1 + |g_1(p)|p^{-s} + \left(|k_2|\rho + \frac{k_1(3k_1-1)}{2} + |g_2(p)|\rho + k_1|g_1(p)|\right)p^{-2s} \\
&\qquad\qquad + O(p^{-3\sigma+3\alpha_0-1})\Bigg) \\
&= \prod_p (1 + O(p^{-2\varepsilon_1} + p^{-\varepsilon_1-1+\alpha_0})),
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(s,\rho)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\sigma > 1/2$ et différentiable en $\rho \in [0,A)$.

D'autre part comme en (5.5) et (5.6) pour $\sigma \geq \varepsilon_1 > \alpha_0$ on a

$$\mathcal{H}(s,\rho) = \zeta(2s)^{|k_2|\rho + k_1(3k_1-1)/2}\mathcal{H}_1(s,\rho)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(s,\rho) = \prod_p \bigg(1 - \bigg(|k_2|\rho + \frac{k_1(3k_1-1)}{2}\bigg)p^{-2s} + O(p^{-4\sigma})\bigg)\bigg(1 + |g_1(p)|p^{-s} \\ + \bigg(|k_2|\rho + \frac{k_1(3k_1-1)}{2} + |g_2(p)|\rho + k_1|g_1(p)|\bigg)p^{-2s} + O(p^{-3\sigma+3\alpha_0-1})\bigg) \\ = \prod_p (1 + O(p^{-\sigma-1+\alpha_0})),\end{aligned}$$

et comme pour $\mathcal{G}_1(s,z)$ il est facile de voir que $|\mathcal{H}_1(s,\rho)| \le C_\varepsilon$ pour $\mathfrak{Re}(s) \ge \alpha_0 + \varepsilon$ et $\rho \in [0, A)$.

5.2. Preuve du Théorème 2.2. Soit $\varepsilon' > 0$ petit ; on définit $y := xe^{-\varepsilon' N(x)}$. Montrons d'abord que pour $1 \le k_1 \le 11$, ou $k_1 \ge 12$ sous (HFL_{k_1}), on a pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < A$,

$$\sum_{n\le x} f(n) z^{\Omega(n)-\omega(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} g(n,z)\frac{x}{n}P_{k_1-1}(\log(x/n)) \tag{5.7}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(1/2,Y)} \zeta^{k_1}(s)\mathcal{G}(s,z)\frac{x^s}{s}\,ds + \sum_{n\le y} g(n,z)\Delta_{k_1}(x/n) + O(x^{1/2}e^{-c(\varepsilon')N(x)}),$$

où $C_r(1/2, Y)$ est le contour de Hankel tronqué de centre $1/2$, rayon $r = 1/\log x$ et queue $Y = \min(\sigma_0, \sigma_{\alpha_0}, 1/2 - \alpha)$ pour un certain α avec $0 < \alpha < 1/2$ (voir le point (ii) qui suit). Le polynôme P_{k_1-1} de degré $k_1 - 1$ et le terme d'erreur Δ_{k_1} sont définis par $\sum_{n\le x} d_{k_1}(n)$ comme en (1.4).

Avec le Théorème 2.1 on peut déjà affirmer que

$$f(n)z^{\Omega(n)-\omega(n)} = (d_{k_1}(\cdot) * g(\cdot, z))(n),$$

où d_{k_1} est la fonction de Piltz, dont la série de Dirichlet associée est $\zeta^{k_1}(s)$, et $g(n,z)$ est une fonction multiplicative avec sa série de Dirichlet associée $\mathcal{G}(s,z)$. Pour montrer (5.7) il s'agit de vérifier que les hypothèses du Théorème A sont satisfaites par les fonctions arithmétiques $d_{k_1}(n)$ et $g(n,z)$. Vérifions donc une à une les quatre hypothèses de ce théorème.

(i) Par le Théorème 2.1, $\zeta^{k_1}(s), \mathcal{G}(s,z)$ sont absolument convergentes pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ et $\mathfrak{Re}(s) > a := 1/2$ respectivement.

(ii) Pour l'hypothèse (4.11) : Par le Lemme 4.3 on sait qu'il existe $r_{k_1} \in (0, 1/2)$ et $\varepsilon_{k_1} > 0$ tels que (4.11) soit vérifiée pour $r_{k_1} \le \sigma \le 1$ et $|\tau| \ge 2$.

Pour l'hypothèse (4.12) : Si $1 \le k_1 \le 3$, ou $k_1 \ge 12$ sous (HFL_{k_1}), du Lemme 4.3 on sait que $|\zeta(\sigma + i\tau)^{k_1}| \ll |\tau|^{1-\varepsilon_{k_1}}$ pour $r_{k_1} \le \sigma \le 1$ et $\varepsilon_{k_1} > 0$. Ceci implique que $\int_2^T |\zeta(\sigma \pm i\tau)^{k_1}|\,d\tau \ll T^{2-\varepsilon_{k_1}}$ pour $r_{k_1} \le \sigma \le 1$.

Si $4 \le k_1 \le 11$, du Lemme 4.4 on sait que $M(k_1) \le 1 + (k_1 - 4)/8 < 2$ ($M(k)$ est défini en (4.14)). Une application directe du Lemme 4.6 avec

$\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $q = k_1$ montre l'existence de $0 < r'_{k_1} < 1/2$ et $\varepsilon'_{k_1} > 0$ petit, tels que $\int_2^T |\zeta(\sigma \pm i\tau)^{k_1}|\, d\tau \ll T^{2-\varepsilon'_{k_1}}$ pour tout $r'_{k_1} \le \sigma \le 1/2$.

Dans tous les cas on définit $\alpha := \max(r_{k_1}, r'_{k_1})$ et $\varepsilon := \min(\varepsilon_{k_1}, \varepsilon'_{k_1})$. D'autre part on prend $\eta = 3/4$ par exemple.

(iii) Par le Théorème 2.1, $\mathcal{G}(s,z)$ peut être prolongée analytiquement dans une région qui contient $U^-(1/2, \delta, Y)$ avec $\delta = 1/\log x$ et $Y := \min(\sigma_0, \sigma_{\alpha_0}, 1/2 - \alpha)$ avec α comme en (ii), $\sigma_0, \sigma_{\alpha_0}$ comme en (1.10). Si $s \in U^-$ et $|s - 1/2| = r$, alors

$$|\mathcal{G}(s,z)| \ll r^{-k_2 \Re e(z) + k_1(k_1+1)/2} \ll \begin{cases} r^{-A|k_2|} & \text{si } k_2 \ne 0, \\ r^{-1} & \text{si } k_2 = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

On peut aussi remarquer que cette majoration reste vraie si l'on prend $s \in U^-(1/2, \delta, Y')$ avec un Y' tel que $1/2 - Y' > \alpha_0$.

(iv) Avec le Théorème 2.1 on vérifie aussi que la fonction $g(n,z)$ satisfait aux hypothèses du Lemme 4.1 (dans ces hypothèses il faut prendre $k = 2$, $\delta_k = \delta_{k'} = \alpha_0$). On a donc

$$G(x,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \mathcal{G}(s,z) \frac{x^s}{s}\, ds + O(x^{1/2} e^{-c_1 N(x)}), \tag{5.9}$$

où C_r représente le contour de Hankel tronqué de centre $1/2$, rayon $r = 1/\log x$ et queue

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } 1/2 - \sigma_0 > \alpha_0, \\ \frac{9}{10}(1/2 - \alpha_0) & \text{si } 1/2 - \sigma_0 \le \alpha_0. \end{cases}$$

Notons qu'on peut remplacer $\int_{C_r}$ par l'intégrale $\int_{C_r(1/2,Y)}$, soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \mathcal{G}(s,z) \frac{x^s}{s}\, ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(1/2,Y)} \mathcal{G}(s,z) \frac{x^s}{s}\, ds + O(x^{1/2 - \min(Y, \sigma_r)}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(1/2,Y)} \mathcal{G}(s,z) \frac{x^s}{s}\, ds + O(x^{1/2} e^{-c_2 N(x)}). \end{aligned} \tag{5.10}$$

On applique donc le Théorème A et on montre (5.7).

De (5.7) on a

$$\sum_{n \le y} g(n,z) \Delta_{k_1}(x/n) \ll \sum_{n \le y} |g(n,z)| (x/n)^{\alpha_{k_1} + \varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

On sait que $\alpha_{k_1} < 1/2$ pour $k_1 = 1, 2, 3$ [6] et que sous (HFT_{k_1}), $\alpha_{k_1} < 1/2$ si $k_1 \ge 4$, donc on peut prendre, sous cette hypothèse, un ε assez petit pour que $\alpha_{k_1} + \varepsilon = \delta_{k_1} < 1/2$, et on aura

$$\sum_{n \le y} g(n,z) \Delta_{k_1}(x/n) \ll x^{\delta_{k_1}} \sum_{n \le y} \frac{|g(n,z)|}{n^{\delta_{k_1}}}.$$

D'autre part, en intégrant par parties,

$$\sum_{n\le y}\frac{|g(n,z)|}{n^{\delta_{k_1}}}=\frac{\sum_{n\le t}|g(n,z)|}{t^{\delta_{k_1}}}\bigg|_{1^-}^{y}+\delta_{k_1}\int_1^y\frac{\sum_{n\le t}|g(n,z)|}{t^{\delta_{k_1}+1}}\,dt. \tag{5.11}$$

On se rappelle qu'au Théorème 2.1 on a construit une fonction multiplicative $h(n,\rho)\ge 0$, $\rho\in[0,A)$, telle que $\sum_{n\le t}|g(n,z)|\le\sum_{n\le t}h(n,|z|)$.

En remarquant que le Lemme 4.1 peut aussi être appliqué à $\mathcal{H}(s,\rho)=\zeta(2s)^{|k_2|\rho+k_1(3k_1-1)/2}\mathcal{H}_1(s,\rho)$, on obtient

$$\sum_{n\le x}h(n,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\zeta(2s)^{|k_2|\rho+k_1(3k_1-1)/2}\mathcal{H}_1(s,\rho)\frac{x^s}{s}\,ds+O(x^{1/2}e^{-c_3N(x)}),$$

où C_r est comme en (5.9). De

$$\begin{aligned}&\zeta(2s)^{|k_2|\rho+k_1(3k_1-1)/2}\\&\qquad=(\zeta(2s)(s-1/2))^{|k_2|\rho+k_1(3k_1-1)/2}(s-1/2)^{-|k_2|\rho-k_1(3k_1-1)/2}\end{aligned}$$

on obtient

$$\sum_{n\le x}h(n,\rho)\ll x^{1/2}(\log x)^K,\qquad \rho\in[0,A),$$

avec $K=A|k_2|+k_1(3k_1-1)/2$.

On continue les calculs en (5.11) et on a

$$\sum_{n\le y}\frac{|g(n,z)|}{n^{\delta_{k_1}}}\ll y^{1/2-\delta_{k_1}}(\log y)^K,$$

et donc le résultat (5.7) devient, avec $y=xe^{-\varepsilon' N(x)}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x}f(n)z^{\Omega(n)-\omega(n)}\\&=x\sum_{i=0}^{k_1-1}A_i(z)(\log x)^i+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(1/2,Y)}\zeta^{k_1}(s)\mathcal{G}(s,z)\frac{x^s}{s}\,ds+O(x^{1/2}e^{-cN(x)}),\end{aligned}\tag{5.12}$$

valable pour $1\le k_1\le 3$, $4\le k_1\le 11$ sous (HFT_{k_1}), ou $k_1\ge 12$ sous (HFL_{k_1}) et (HFT_{k_1}) ; les $A_i(z)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions

$$\sum_{n\ge 1}\frac{g(n,z)}{n}(-\log n)^r=\frac{\partial^r\mathcal{G}(s,z)}{\partial s^r}\bigg|_{s=1},$$

qui sont analytiques en z dans $|z|<A$.

On peut aussi remplacer l'intégrale $\int_{C_r(1/2,Y)}$ de (5.12) par $\int_{C_r(1/2,\sigma'_{\alpha_0})}$ avec la queue de $C_r(1/2,\sigma'_{\alpha_0})$ égale à $\sigma'_{\alpha_0}=\min\big(\sigma_0,\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)\big)$ en absorbant l'intégrale sur les segments supplémentaires dans $O(x^{1/2}e^{-cN(x)})$.

5.3. Preuve du Théorème 2.3. On remarque d'abord que l'intégrale de (2.1) peut s'écrire
$$\int_{C_r(1/2,\sigma'_{\alpha_0})} = \int_{C_{r'}(1/2,\sigma'_{\alpha_0})} = \int_{I_1\cup I_2} + \int_C ,$$
où $I_1 = -I_2$ sont les segments horizontaux et C le cercle de $C_{r'}(1/2,\sigma'_{\alpha_0})$; et ceci pour tout r' avec $0 < r' \le r$, car l'intégrand est analytique en s au voisinage de $1/2$ privé de la demi-droite $(-\infty, 1/2]$. On a,

$$\begin{aligned}(5.13)\qquad &\Big|\int_C \zeta^{k_1}(s)\zeta(2s)^{k_2z-k_1(k_1+1)/2}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^s}{s}\,ds\Big|\\ &= \Big|\int_C \zeta^{k_1}(s)e^{Q(s)(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}(s-1/2)^{-k_2z+k_1(k_1+1)/2}\mathcal{G}_1(s,z)\frac{x^s}{s}\,ds\Big|\\ &\ll x^{1/2+r'}r'^{1+k_1(k_1+1)/2-k_2\Re e(z)}.\end{aligned}$$

Si $|z| \le A_1$ ($< \frac{1+k_1(k_1+1)/2}{|k_2|}$ si $k_2 \ne 0$), le dernier terme de (5.13) tend vers 0 lorsque $r' \to 0$.

On vient de montrer que

$$\begin{aligned}(5.14)\qquad &\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(1/2,\sigma'_{\alpha_0})}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-\sigma'_{\alpha_0}}^{1/2} \zeta^{k_1}(v)e^{Q(v)(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}(1/2-v)^{-(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}\\ &\quad\times(e^{i\pi(k_2z-k_1(k_1+1)/2)} - e^{-i\pi(k_2z-k_1(k_1+1)/2)})\mathcal{G}_1(v,z)\frac{x^v}{v}\,dv\\ &= x^{1/2}\int_0^{\sigma'_{\alpha_0}} x^{-u}u^{-(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}zT_1(u,z)\,du\end{aligned}$$

avec $T_1(u,z)$ comme dans l'énoncé.

En écrivant la dernière intégrale $\int_0^{\sigma'_{\alpha_0}} = \int_0^{\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)} - \int_{\sigma'_{\alpha_0}}^{\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)}$ on remarque que

$$x^{1/2}\int_{\sigma'_{\alpha_0}}^{\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)} x^{-u}u^{-(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}zT_1(u,z)\,du \ll x^{1/2-\sigma'_{\alpha_0}} \ll x^{1/2}e^{-cN(x)},$$

où la première majoration est justifiée par le fait que

$$\int_{\sigma'_{\alpha_0}}^{\sigma_{\alpha_0}} x^{-u}u^{-(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}zT_1(u,z)\,du \ll x^{-\sigma'_{\alpha_0}}\frac{u^{1-k_2\Re e(z)+k_1(k_1+1)/2}}{1-k_2\Re e(z)+k_1(k_1+1)/2}\Big|_{\sigma'_{\alpha_0}}^{\sigma_{\alpha_0}}$$

(avec $\sigma_{\alpha_0} = \frac{6}{7}(1/2 - \alpha_0)$), et que

$$1 - k_2 \Re e(z) + \frac{k_1(k_1+1)}{2} \geq |k_2| \left(\frac{1 + k_1(k_1+1)/2}{|k_2|} - A_1 \right) > 0$$

si $k_2 \neq 0$.

5.4. Preuve du Théorème 2.4. En partant du Théorème 2.3, l'idée essentielle est de déterminer le coefficient de z^q dans le membre de droite de (2.3).

Puisque les fonctions $A_i(z)$ sont analytiques en z dans $|z| \leq A_1$, le coefficient de z^q dans le développement en série de Taylor de $A_i(z)$ autour de 0 est une constante

$$a_i(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=A_1} \frac{A_i(z)}{z^{q+1}}\, dz.$$

Par (2.3) le terme d'erreur $R(x,z)$ est analytique en z dans $|z| \leq A_1$ car tous les autres termes de cette équation le sont. On a ainsi

$$\begin{aligned} \text{(5.15)} \qquad \operatorname{coef}_{z^q}(R(x,z)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=A_1} \frac{R(x,z)}{z^{q+1}}\, dz \\ &\ll A_1^{-q} x^{1/2} e^{-cN(x)} \leq K_q x^{1/2} e^{-cN(x)}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de déterminer le coefficient de z^q dans

$$x^{1/2} \int_0^{\sigma_{\alpha_0}} x^{-u} u^{-(k_2 z - k_1(k_1+1)/2)} z T_1(u,z)\, du.$$

Puisque $T_1(u,z)$ est analytique à deux variables, en u dans $|u| < 1/2 - \alpha_0$ et en z dans $|z| \leq A_1$, on peut développer $T_1(u,z)$ en série double de Taylor

$$T_1(u,z) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \alpha_{j,k} u^j z^k,$$

avec

$$\alpha_{j,k} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|s|=\frac{8}{7}\sigma_{\alpha_0}} \int_{|z|=A_1} T_1(s,z) \frac{dz}{z^{k+1}} \frac{ds}{s^{j+1}} \ll \left(\frac{48}{49}(1/2 - \alpha_0) \right)^{-j} A_1^{-k}.$$

Observons que

$$\alpha_{0,0} = T_1(0,0) = 2 \cdot (-1)^{k_1(k_1+1)/2} \cdot k_2 \cdot \zeta^{k_1}(1/2) 2^{k_1(k_1+1)/2} \mathcal{G}_1(1/2, 0)$$

et

$$\mathcal{G}_1(1/2,0) = \prod_p (1 - p^{-1})^{-k_1(k_1+1)/2} (1 - p^{-1/2})^{k_1} (1 + (k_1 + g_1(p)) p^{-1/2}),$$

car on avait obtenu en (5.3) et (5.5) :

$$\mathcal{G}_1(s,z)=\prod_p(1-p^{-2s})^{k_2z-k_1(k_1+1)/2}(1-p^{-s})^{k_1}$$
$$\times\Big(1+(k_1+g_1(p))p^{-s}+(k_2+g_2(p))zp^{-2s}+\sum_{i=3}^{\infty}f(p^i)z^{i-1}p^{-is}\Big),$$

et donc

$$\alpha_{0,0}=(-1)^{k_1(k_1+1)/2}2^{1+k_1(k_1+1)/2}k_2\zeta^{k_1}(1/2)$$
$$\times\prod_p(1-p^{-1})^{-k_1(k_1+1)/2}(1-p^{-1/2})^{k_1}(1+(k_1+g_1(p))p^{-1/2}). \tag{5.16}$$

En remarquant aussi que le coefficient de z^0 de l'intégrale en (2.3) est nul, on a que pour $q=0$ l'intégrale en (2.5) est nulle et $K_0=1$.

On peut donc supposer dorénavant que $q\ge 1$.

On écrit

$$zu^{-(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}T_1(u,z)=:\sum_{t=1}^{\infty}V_t(u)z^t,$$

avec

$$V_t(u)=u^{k_1(k_1+1)/2}\sum_{l=0}^{t-1}\frac{(-k_2\log u)^l}{l!}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j,t-l-1}u^j.$$

Alors

$$\operatorname{coef}_{z^q}\Big(x^{1/2}\int_0^{\sigma_{\alpha_0}}zu^{-(k_2z-k_1(k_1+1)/2)}T_1(u,z)x^{-u}\,du\Big)=x^{1/2}\int_0^{\sigma_{\alpha_0}}x^{-u}V_q(u)\,du,$$

avec

$$V_q(u)=\Big(\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}+\sum_{j=J+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{q-1}\Big)\alpha_{j,q-l-1}u^{k_1(k_1+1)/2+j}\frac{(-k_2\log u)^l}{l!}. \tag{5.17}$$

En notant

$$P_{j,q-1}(X):=\sum_{l=0}^{q-1}\Big(\frac{(k_2)^l}{l!}\alpha_{j,q-l-1}\Big)X^l, \tag{5.18}$$

on remarque que

$$\begin{aligned}V_q(u)&=u^{k_1(k_1+1)/2}\sum_{j=0}^{\infty}u^jP_{j,q-1}(-\log u)\\&=u^{k_1(k_1+1)/2}\sum_{j=0}^{J}u^jP_{j,q-1}(-\log u)\\&\quad+\sum_{j=J+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{q-1}\alpha_{j,q-l-1}u^{k_1(k_1+1)/2+j}\frac{(-k_2\log u)^l}{l!}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

On a d'autre part

$$\sum_{j=J+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{q-1}\alpha_{j,q-l-1}u^{k_1(k_1+1)/2+j}\frac{(-k_2\log u)^l}{l!} \tag{5.20}$$
$$\ll K_q u^{k_1(k_1+1)/2}\sum_{j=J+1}^{\infty}\bigg(\frac{u}{\frac{48}{49}(1/2-\alpha_0)}\bigg)^j\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-|k_2|\log u)^l}{l!}.$$

Montrons que

$$\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-|k_2|\log u)^l}{l!}\ll\bigg(\frac{\log u}{\log\big(\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)\big)}\bigg)^{q-1} \tag{5.21}$$

pour $q\geq 1$ entier, $u\in[0,\sigma_{\alpha_0}]$. En effet, si $k_2\neq 0$ on a

$$\sum_{l=0}^{q-1}\frac{(-|k_2|\log u)^l}{l!(-|k_2|\log u)^{q-1}}\leq\sum_{l=0}^{q-1}\frac{1}{l!}\bigg(\frac{1}{-|k_2|\log\big(\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)\big)}\bigg)^{q-1-l}$$
$$\leq e^{-|k_2|\log(\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0))}\bigg(\frac{1}{-|k_2|\log\big(\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)\big)}\bigg)^{q-1},$$

ce qui implique (5.21).

De (5.20) on a ainsi pour $u\in[0,\sigma_{\alpha_0}]$,

$$\sum_{j=J+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{q-1}\alpha_{j,q-l-1}u^{k_1(k_1+1)/2+j}\frac{(-k_2\log u)^l}{l!}$$
$$\ll K_q\bigg(\frac{49}{48(1/2-\alpha_0)}\bigg)^J u^{J+1+k_1(k_1+1)/2}\bigg(\frac{\log u}{\log\big(\frac{6}{7}(1/2-\alpha_0)\big)}\bigg)^{q-1}.$$

On remarque que cette estimation reste vraie pour $J=-1$, ce qui implique (2.7). On a donc montré (2.6).

5.5. Preuve du Théorème 1.3. L'idée principale est de développer l'intégrale $x^{1/2}\int_0^{\sigma_{\alpha_0}}x^{-u}V_q(u)\,du$ en (2.5). De (5.18) et (2.6), on a

$$x^{1/2}\int_0^{\sigma_{\alpha_0}}x^{-u}V_q(u)\,du \tag{5.22}$$
$$=x^{1/2}\bigg(\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}\int_0^{\sigma_{\alpha_0}}\alpha_{j,q-l-1}u^{k_1(k_1+1)/2+j}\frac{(-k_2\log u)^l}{l!}x^{-u}\,du$$
$$+O\bigg(K_q\bigg(\frac{7}{8\sigma_{\alpha_0}}\bigg)^J\bigg(\frac{1}{-\log\sigma_{\alpha_0}}\bigg)^q\int_0^{\sigma_{\alpha_0}}|\log u|^{q-1}u^{J+1+k_1(k_1+1)/2}x^{-u}\,du\bigg)\bigg).$$

Estimons d'abord l'intégrale dans le terme d'erreur de (5.22). En posant $v = u\log x$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sigma_{\alpha_0}} |\log u|^{q-1} u^{J+1+k_1(k_1+1)/2} x^{-u}\, du \\
&\quad = \frac{1}{(\log x)^{J+2+k_1(k_1+1)/2}} \int_0^{\sigma_{\alpha_0}\log x} v^{J+1+k_1(k_1+1)/2} (\log\log x - \log v)^{q-1} e^{-v}\, dv \\
&\quad \ll \frac{(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^{J+2+k_1(k_1+1)/2}} \left(\frac{(q-1)!}{J} + \left(J + 1 + \frac{k_1(k_1+1)}{2}\right)! \right).
\end{aligned}$$

La dernière majoration est justifiée par

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 v^{J+1+k_1(k_1+1)/2} (\log\log x - \log v)^{q-1} e^{-v}\, dv \\
&\qquad = \sum_{m=0}^{q-1} \binom{q-1}{m} (\log\log x)^m \int_0^1 v^{J+1+k_1(k_1+1)/2} (-\log v)^{q-1-m} e^{-v}\, dv \\
&\qquad \le \sum_{m=0}^{q-1} \binom{q-1}{m} (\log\log x)^m \int_0^\infty e^{-(J+2+k_1(k_1+1)/2)u} u^{q-1-m}\, du \\
&\qquad = \sum_{m=0}^{q-1} \binom{q-1}{m} \frac{(\log\log x)^m}{(J+2+k_1(k_1+1)/2)^{q-m}} \Gamma(q-m) \\
&\qquad \ll \frac{(q-1)!}{J} (\log\log x)^{q-1}
\end{aligned}$$

et par

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\sigma_{\alpha_0}\log x} v^{J+1+k_1(k_1+1)/2} (\log\log x - \log v)^{q-1} e^{-v}\, dv \\
&\qquad\qquad \le (\log\log x)^{q-1} \int_0^\infty v^{J+1+k_1(k_1+1)/2} e^{-v}\, dv \\
&\qquad\qquad = \left(J + 1 + \frac{k_1(k_1+1)}{2}\right)! (\log\log x)^{q-1}.
\end{aligned}$$

Développons maintenant le terme principal à droite dans (5.22). On écrit

$$\int_0^{\sigma_{\alpha_0}} = \int_0^\infty - \int_{\sigma_{\alpha_0}}^\infty = I_1 - I_2$$

et on évalue I_1 et I_2.

Posons $v = u\log x$; puisque $\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty (\log v)^n v^{z-1} e^{-v}\, dv$ si $\Re e(z) > 0$, on a

$$I_1 := \frac{\alpha_{j,q-l-1}(-k_2)^l}{l!}\int_0^\infty u^{j+k_1(k_1+1)/2}(\log u)^l x^{-u}\,du$$
$$= \frac{\alpha_{j,q-l-1}(-k_2)^l}{l!}\int_0^\infty \left(\frac{v}{\log x}\right)^{j+k_1(k_1+1)/2}(\log v-\log\log x)^l e^{-v}\,\frac{dv}{\log x}$$
$$= \sum_{h=0}^{l}\frac{\alpha_{j,q-1-l}(-k_2)^l(-1)^h\binom{l}{h}}{l!(\log x)^{j+1+k_1(k_1+1)/2}}(\log\log x)^h\Gamma^{(l-h)}\left(j+1+\frac{k_1(k_1+1)}{2}\right).$$

Donc

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1} I_1 = \sum_{j=0}^{J}\frac{Q_{j,q-1}(\log\log x)}{(\log x)^{j+1+k_1(k_1+1)/2}},$$

où $Q_{j,q-1}(X)$ est le polynôme de degré $q-1$ donné par

$$(5.23)\qquad Q_{j,q-1}(X)$$
$$= \sum_{h=0}^{q-1}\left(\sum_{l=h}^{q-1}(-1)^h\frac{\alpha_{j,q-1-l}(-k_2)^l}{h!(l-h)!}\Gamma^{(l-h)}\left(j+1+\frac{k_1(k_1+1)}{2}\right)\right)X^h.$$

On remarque que par (5.16) le coefficient dominant de $Q_{0,q-1}$ est (faire $j=0$ et $h=l=q-1$)

$$(5.24)\qquad (-1)^{k_1(k_1+1)/2}2^{1+k_1(k_1+1)/2}k_2^q\frac{\zeta^{k_1}(1/2)}{(q-1)!}\left(\frac{k_1(k_1+1)}{2}\right)!$$
$$\times\prod_p(1-p^{-1})^{-k_1(k_1+1)/2}(1-p^{-1/2})^{k_1}\big(1+(k_1+g_1(p))p^{-1/2}\big).$$

On estime maintenant $\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1} I_2$. On a (avec $v=u\log x$ pour la première égalité)

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}\int_{\sigma_{\alpha_0}}^{\infty}\alpha_{j,q-1-l}u^{j+k_1(k_1+1)/2}\frac{(-k_2\log u)^l}{l!}x^{-u}\,du$$
$$= \sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{l}\frac{(-k_2)^l}{l!}\,\frac{\alpha_{j,q-1-l}}{(\log x)^{j+1+k_1(k_1+1)/2}}(-\log\log x)^m\binom{l}{m}$$
$$\times\int_{\sigma_{\alpha_0}\log x}^{\infty} v^{j+k_1(k_1+1)/2}(\log v)^{l-m}e^{-v/2}e^{-v/2}\,dv$$
$$\underset{(v/2=u)}{\ll} K_q(\log\log x)^{q-1}x^{-\sigma_{\alpha_0}/2}\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{l}\frac{(|k_2|)^l}{l!}\,\frac{\left(\frac{48}{49}(1/2-\alpha_0)\right)^{-j}}{(\log x)^{j+1+k_1(k_1+1)/2}}$$
$$\times\binom{l}{m}2^{j+1+k_1(k_1+1)/2+l-m}\int_1^\infty u^{j+k_1(k_1+1)/2}(\log u)^{l-m}e^{-u}\,du$$

$$\ll K_q(\log\log x)^{q-1}x^{-\sigma_{\alpha_0}/2}\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{l}\frac{(|k_2|)^l}{l!}\frac{\left(\frac{48}{49}(1/2-\alpha_0)\right)^{-j}}{(\log x)^{j+1+k_1(k_1+1)/2}}$$
$$\times\binom{l}{m}2^{j+1+k_1(k_1+1)/2+l-m}\left(j+\frac{k_1(k_1+1)}{2}+1\right)!(l-m)!$$
$$\ll K_q(\log\log x)^{q-1}x^{-\sigma_{\alpha_0}/2}R_{k_2}(q)$$
$$\times\sum_{j=0}^{J}\frac{\left(2\left(\frac{48}{49}(1/2-\alpha_0)\right)^{-1}\right)^j(j+k_1(k_1+1)/2+1)!}{(\log x)^{j+1+k_1(k_1+1)/2}}$$

(l'avant dernière majoration est justifiée par le Lemme 4.8), où

$$R_{k_2}(q):=\sum_{l=0}^{q-1}(2|k_2|)^l\sum_{m=0}^{l}\frac{2^{-m}}{m!}\le e^{1/2}\begin{cases}\frac{(2|k_2|)^q-1}{2|k_2|-1} & \text{si } |k_2|\neq 1/2,\\ q & \text{si } |k_2|=1/2.\end{cases}\tag{5.25}$$

En continuant les calculs précédents on a (en utilisant la formule de Stirling)

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}I_2\ll K_qR_{k_2}(q)(\log\log x)^{q-1}x^{-\sigma_{\alpha_0}/2}$$
$$\times\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\frac{49}{24(1/2-\alpha_0)}(j+k_1(k_1+1)/2+1)}{e\log x}\right)^{j+k_1(k_1+1)/2+1}\sqrt{j+\frac{k_1(k_1+1)}{2}+1}.$$

Pour x suffisamment grand et $J\le k'\log x$, avec $k'>0$ assez petit, il suit que

$$\sum_{j=0}^{J}\sum_{l=0}^{q-1}I_2\ll K_qR_{k_2}(q)(\log\log x)^{q-1}x^{-\sigma_{\alpha_0}/2}(\log x)^{1/2}$$
$$\overset{(\star)}{\ll}K_q(2|k_2|+1)^q\frac{(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^{J+2+k_1(k_1+1)/2}}\left(J+1+\frac{k_1(k_1+1)}{2}\right)!.$$

Justifions $(\star)$: La fonction $f(t)=t\log(at)$, $t>0$, $a>0$, est décroissante sur l'intervalle $(0,e^{-1}/a]$ et croissante sur l'intervalle $[e^{-1}/a,\infty)$. De plus $\lim_{t\to0^+}f(t)=0$.

On a donc, avec $a=1/(3\log x)$ et $k'>0$ suffisamment petit,

$$J\log\left(\frac{J}{3\log x}\right)\ge k'\log(k'/3)\log x\ge-\frac{\sigma_{\alpha_0}}{4}\log x.$$

De là on a les majorations suivantes :

$$x^{-\sigma_{\alpha_0}/2}(\log x)^{1/2}\le\left(\frac{J}{3\log x}\right)^Jx^{-\sigma_{\alpha_0}/4}(\log x)^{1/2}$$
$$\ll\left(\frac{J}{3\log x}\right)^J\frac{1}{(\log x)^{2+k_1(k_1+1)/2}}$$

$$\leq \frac{\left(\frac{J+1+k_1(k_1+1)/2}{e}\right)^{J+3/2+k_1(k_1+1)/2}}{(\log x)^{J+2+k_1(k_1+1)/2}}$$
$$\ll \frac{(J+1+k_1(k_1+1)/2)!}{(\log x)^{J+2+k_1(k_1+1)/2}},$$

où l'on a utilisé la formule de Stirling. Finalement, de (5.25) on sait que

$$R_{k_2}(q) \ll (|2k_2|+1)^q,$$

ce qui montre $(\star)$.

Remerciements. Cet article est basé sur ma thèse de doctorat [20], élaborée à l'université de Genève sous la direction de Y.-F. S. Pétermann et J. Steinig. Je tiens à les remercier, ainsi que J. Wu (Institut Élie Cartan, Nancy I), pour leur direction et soutien dans ce travail. Je remercie également O. Ramaré pour une amélioration du Lemme 4.8.

Références

[1] H. Delange, *Sur un théorème de Rényi, III*, Acta Arith. 23 (1973), 153–182.

[2] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.

[3] K. Ford, *Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002), 565–633.

[4] M. N. Huxley, *Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function*, dans : Number Theory for the Millennium, II (Urbana, IL, 2000), A K Peters, Natick, MA, 2002, 275–290.

[5] A. Ivić, *Sums of products of certain arithmetical functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 41 (55) (1987), 31–41.

[6] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, New York, 1985.

[7] Y.-K. Lau, *Summatory formula of the convolution of two arithmetical functions*, Monatsh. Math. 136 (2002), 35–45.

[8] A. Rényi, *On the density of certain sequences of integers*, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 8 (1955), 157–162.

[9] J. Sándor, *On an exponential totient function.* Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 41 (1996), 91–94.

[10] M. R. Schroeder, *Number Theory in Science and Communication. With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing and Self-Similarity*, 2e éd., Springer Ser. Inform. Sci. 7, Springer, Berlin, 1986.

[11] W. Schwarz, *Eine Bemerkung zu einer asymptotischen Formel von Herrn Rényi*, Arch. Math. (Basel) 21 (1970), 157–166.

[12] M. V. Subbarao, *On some arithmetic convolutions*, dans : The Theory of Arithmetic Functions (Kalamazoo, MI, 1971), Lecture Notes in Math. 251, Springer, 247–271.

[13] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 2e éd., Soc. Math. France, Paris, 1995.

[14] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2e éd., Clarendon Press, New York, 1986.

[15] L. Tóth, *On certain arithmetic functions involving exponential divisors*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 24 (2004), 285–294.

[16] L. Tóth, *On certain arithmetical functions involving exponential divisors. II*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 27 (2007), 155–166.

[17] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1963.

[18] D. Wolke, *On a problem of A. Rényi*, Monatsh. Math. 111 (1991), 323–330.

[19] J. Wu, *Sur un problème de Rényi*, Monatsh. Math. 117 (1994), 303–322.

[20] R. Zurita, *Sur un problème de Rényi et Ivić concernant les fonctions de diviseurs de Piltz*, thèse de doctorat, Univ. de Genève, 2013.

Rimer Zurita
Section de Mathématiques
Université de Genève
Case postale 64
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 4, Suisse
E-mail: Rimer.Zurita@unige.ch
kachuchi@gmail.com

Reçu le 1.5.2013 (7424)