ACTA ARITHMETICA
144.1 (2010)

Une remarque sur les extensions pondérées de l'inégalité de Turán–Kubilius

par

R. DE LA BRETÈCHE (Paris) et G. TENENBAUM (Nancy)

1. Introduction. Nous nous intéressons ici à la forme pondérée de l'inégalité de Turán–Kubilius

$$V_f(x;g) := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{n \leqslant x} g(n)|f(n) - E_f(x)|^2 \leqslant C(x;g) D_f(x)^2, \tag{1.1}$$

où f est une fonction additive complexe, g est une fonction arithmétique réelle positive ou nulle et où l'on a posé

$$\begin{aligned} G_1(x) &:= \sum_{n \leqslant x} g(n), \\ E_f(x) &:= \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big), \\ D_f(x)^2 &:= \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\cdot \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse

$$\sup_{n \leqslant x} g(n) \leqslant H_x, \tag{1.2}$$

nous déduisons immédiatement des résultats classiques de Hildebrand [3] et Kubilius [4] que (1.1) a lieu avec

$$C(x;g) := \big\{\tfrac{3}{2} + o(1)\big\} \frac{xH_x}{G_1(x)} \tag{1.3}$$

où la quantité $o(1)$ est indépendante de f et g.

Nous nous proposons ici d'examiner la situation où la majoration individuelle (1.2) est remplacée par une majoration en moyenne.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N25, 11N37, 11N60.
Key words and phrases: Turán–Kubilius inequality, arithmetic functions, additive arithmetic functions, probabilistic number theory, sums of sets, large sieve.

DOI: 10.4064/aa144-1-6

Une telle approche a été considérée dans [1] lorsque g est une fonction arithmétique multiplicative avec comme choix d'espérance la moyenne empirique

$$\frac{1}{G_1(x)}\sum_{n\leqslant x} g(n)f(n).$$

Cette quantité n'est heuristiquement, et en moyenne, proche de $E_f(x)$ que lorsque $g(p)$ est proche de 1. Dans ce cas, le résultat général suivant, dû à Elliott [2] est applicable. Nous en donnons ici une formulation légèrement différente et une nouvelle démonstration. Ici et dans la suite, nous désignons par $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier naturel n.

Théorème 1.1. *Sous l'hypothèse*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d\|n}} g(n)^2 \leqslant \frac{xH_x^2}{d} \qquad (\omega(d)\leqslant 2,\ x\geqslant 1), \tag{1.4}$$

l'inégalité de Turán–Kubilius (1.1) *a lieu, uniformément en g, avec*

$$C(x;g) \ll xH_x/G_1(x).$$

Remarques. (i) Notons encore

$$G_d(x) := \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d\|n}} g(n) \qquad (d\geqslant 1,\ x\geqslant 1).$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, l'hypothèse (1.4) implique

$$G_d(x) \leqslant \frac{xH_x}{d} \qquad (\omega(d)\leqslant 2,\ x\geqslant 1). \tag{1.5}$$

Il en résulte en particulier que $xH_x/G_1(x)\geqslant 1$.

(ii) Nous établissons plus loin que l'on a

$$\frac{1}{G_1(x)}\sum_{n\leqslant x} f(n)g(n) = E_f(x) + O\Big(D_f(x)\,\frac{xH_x}{G_1(x)}\Big). \tag{1.6}$$

Cela justifie le choix, commode pour les applications, de remplacer dans (1.1) la moyenne empirique par $E_f(x)$.

(iii) Il est facile de vérifier que l'énoncé, apparemment plus particulier, donné par Elliott dans [2] implique le Théorème 1.1. La formulation souple donnée plus haut permet d'expliciter l'uniformité sous-jacente et donc de favoriser le développement d'applications.

(iv) La démonstration proposée par Elliott dans [2] repose sur un lemme d'estimation effective de fonctions multiplicatives positives ou nulles et sur une astucieuse utilisation de la formule intégrale de Cauchy. Nous proposons ici une preuve directe utilisant la forme duale de la version classique non pondérée de l'inégalité de Turán–Kubilius.

Lorsque $g(n)$ désigne le nombre des représentations de n sous la forme $n = a + b$ où a (resp. b) parcourt un ensemble de taille A (resp. B), le Théorème 1.1 n'est utile que si l'hypothèse (1.4) est satisfaite avec

$$H_x = o(\min(A, B)) \qquad \text{lorsque } x \to \infty.$$

Le résultat suivant peut en effet être considéré comme un énoncé de base pour l'ensemble des poids g de ce type.

Théorème 1.2. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des sous ensembles de $[1, x]$ tels que $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subset [1, x]$, $|\mathcal{A}| = A$, $|\mathcal{B}| = B$. Si $g(n) := |\{(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : a + b = n\}|$ $(n \geqslant 1)$, alors l'hypothèse* (1.2), *et donc aussi la relation* (1.3), *est vérifiée avec $H_x := \min(A, B)$.*

À titre d'illustration d'un cas représentatif d'application du Théorème 1.1, nous énonçons le résultat obtenu pour le choix $g = \omega$.

Théorème 1.3. *Pour le choix $g = \omega$, l'inégalité de Turán–Kubilius* (1.1) *est réalisée avec*

$$C(x; \omega) \ll 1.$$

La démonstration est immédiate puisque l'on a dans les hypothèses considérées

$$G_1(x) \asymp x \log_2 x, \qquad H_x \asymp \log_2 x.$$

Ici et dans la suite, nous désignons par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

La forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius pondérée peut être énoncée comme suit.

Théorème 1.4. *Soit g une fonction arithmétique positive ou nulle satisfaisant* (1.4). *Pour toute suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes, on a*

$$\sum_{p^\nu \leqslant x} p^\nu \Bigg| \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^\nu \| n}} g(n) c_n - \frac{1 - 1/p}{p^\nu} \sum_{n \leqslant x} g(n) c_n \Bigg|^2 \ll x H_x \sum_{n \leqslant x} g(n) |c_n|^2. \tag{1.7}$$

Preuve de la relation (1.6). Notons M le membre de gauche de (1.6). D'après l'additivité de f, nous pouvons écrire

$$M - E_f(x) = \frac{1}{G_1(x)} \sum_{p^\nu \leqslant x} f(p^\nu) \bigg\{ G_{p^\nu}(x) - \frac{1 - 1/p}{p^\nu} \, G_1(x) \bigg\}$$

d'où, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|M - E_f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{G_1(x)^2} \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu} \sum_{p^\nu \leqslant x} p^\nu \bigg| G_{p^\nu}(x) - \frac{1 - 1/p}{p^\nu} \, G_1(x) \bigg|^2.$$

La dernière somme relève de la version duale de l'inégalité de Turán–Kubilius —cf., par exemple, [6, chap. III.3]. Nous avons

$$\sum_{p^\nu\leqslant x} p^\nu\left|G_{p^\nu}(x)-\frac{1-1/p}{p^\nu}\,G_1(x)\right|^2 \ll x\sum_{n\leqslant x} g(n)^2 \ll x^2H_x^2.$$

Cela établit bien le résultat annoncé.

2. Démonstration du Théorème 1.1. Nous pouvons classiquement nous restreindre au cas où f est réelle, positive ou nulle. Décomposons f sous la forme $f = f_1 + f_2$ où $f_2(p^\nu)$ a pour support l'ensemble $\mathcal{E}$ des puissances p^ν telles que $p^\nu > x^{1/4}$ ou $\nu \geqslant 2$ et $f_1(p^\nu)$ a pour support l'ensemble complémentaire dans celui de toutes les puissances de nombres premiers.

Pour $j = 1, 2$, posons

$$M_{1j} := \frac{1}{G_1(x)}\sum_{n\leqslant x} g(n)f_j(n), \qquad M_{2j} := \frac{1}{G_1(x)}\sum_{n\leqslant x} g(n)f_j(n)^2,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad V_f(x;g) &\leqslant 2\sum_{1\leqslant j\leqslant 2}\big(M_{2j}-2M_{1j}E_{f_j}(x)+E_{f_j}(x)^2\big)\\ &\leqslant 2P+2\sum_{1\leqslant j\leqslant 2}\big(Q_j-2M_{1j}E_{f_j}(x)+E_{f_j}(x)^2\big),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}P &:= \frac{1}{G_1(x)}\sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)^2G_{p^\nu}(x),\\ Q_1 &:= \frac{1}{G_1(x)}\sum_{\substack{p,q\leqslant x^{1/4}\\ p\neq q}} f(p)f(q)G_{pq}(x),\\ Q_2 &:= \frac{1}{G_1(x)}\sum_{\substack{p^\nu,q^\mu\in\mathcal{E}\\ p\neq q}} f(p^\nu)f(q^\mu)G_{p^\nu q^\mu}(x).\end{aligned}$$

Comme, en vertu de (1.5), on a $P \leqslant xH_xD_f(x)^2/G_1(x)$, nous pouvons écrire

$$(2.2)\qquad V_f(x;g) \ll \sum_{1\leqslant j\leqslant 2}\big(Q_j-2M_{1j}E_{f_j}(x)+E_{f_j}(x)^2\big)+\frac{xH_x}{G_1(x)}\,D_f(x)^2.$$

Soient

$$G_d^*(x) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ d|n}} g(n) \qquad (d \geqslant 1),$$

$$R_{pq}^*(x) := G_{pq}^*(x) - \frac{G_q^*(x)}{p} - \frac{G_p^*(x)}{q} + \frac{G_1(x)}{pq} \qquad (p \neq q).$$

Pour majorer Q_1, nous observons que l'on a identiquement

$$\begin{aligned} R_{pq}(x) := G_{pq}(x) &- \frac{(1-1/p)G_q(x)}{p} \\ &- \frac{(1-1/q)G_p(x)}{q} + \frac{(1-1/p)(1-1/q)G_1(x)}{pq} \\ &= R_{pq}^*(x) - \left\{ G_{p^2q}^*(x) - \frac{G_{p^2}^*(x)}{q} \right\} - \left\{ G_{pq^2}^*(x) - \frac{G_{q^2}(x)}{p} \right\} \\ &+ \frac{1}{p^2}\left\{ G_q^*(x) - \frac{G_1(x)}{q} \right\} + \frac{1}{q^2}\left\{ G_p^*(x) - \frac{G_1(x)}{p} \right\} \\ &+ G_{p^2q^2}^*(x) - \frac{G_{q^2}^*(x)}{p^2} - \frac{G_{p^2}^*(x)}{q^2} + \frac{G_1(x)}{p^2q^2} \end{aligned}$$

pour tous nombres premiers p, q, $p \neq q$, et nous utilisons le grand crible sous la forme

$$\sum_{pq \leqslant \sqrt{x}} pq R_{pq}^*(x)^2 \ll x \sum_{n \leqslant x} g(n)^2 \ll x^2 H_x^2$$

établie dans [5]. Il suit

$$\begin{aligned} Q_1 - 2M_{11}E_{f_1}(x) + E_{f_1}(x)^2 &= U + \sum_{\substack{p,q \leqslant x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q)\,\frac{R_{pq}(x)}{G_1(x)} \\ &= U + V - 2W_1 + 2W_2 + W_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} U &:= \sum_{p \leqslant x^{1/4}} f(p)^2 \left\{ \frac{(1-1/p)^2}{p^2} - \frac{2(1-1/p)G_p(x)}{pG_1(x)} \right\} \\ &\ll \frac{xH_x}{G_1(x)} \sum_{p \leqslant x^{1/4}} \frac{f(p)^2}{p^2} \ll \frac{xH_x}{G_1(x)}\, D_f(x)^2, \\ V &:= \sum_{\substack{p,q \leqslant x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q)\,\frac{R_{pq}^*(x)}{G_1(x)} \ll \frac{xH_x}{G_1(x)}\, D_f(x)^2, \end{aligned}$$

$$W_1 := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p,q \leqslant x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q)\Big\{G^*_{p^2q}(x) - \frac{G^*_{p^2}(x)}{q}\Big\},$$

$$W_2 := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p,q \leqslant x^{1/4} \\ p \neq q}} \frac{f(p)}{p^2} f(q)\Big\{G^*_{q}(x) - \frac{G_1(x)}{q}\Big\},$$

$$W_3 := \frac{1}{G_1(x)} \sum_{\substack{p,q \leqslant x^{1/4} \\ p \neq q}} f(p)f(q)\Big\{G^*_{p^2q^2}(x) - \frac{G^*_{q^2}(x)}{p^2} - \frac{G^*_{p^2}(x)}{q^2} + \frac{G_1(x)}{p^2q^2}\Big\}.$$

La forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius fournit

$$\begin{aligned} W_1 &\ll \frac{1}{G_1(x)} \sum_{p \leqslant x^{1/4}} f(p) \Big\{ \sum_{q \leqslant x} \frac{f(q)^2}{q} \sum_{q \leqslant x/p^2} q \Big\{ G^*_{p^2q}(x) - \frac{G^*_{p^2}(x)}{q} \Big\}^2 \Big\}^{1/2} \\ &\ll \frac{D_f(x) x H_x}{G_1(x)} \sum_{p \leqslant x^{1/4}} \frac{f(p)}{p^2} \ll D_f(x)^2 \, \frac{xH_x}{G_1(x)} \end{aligned}$$

puisque

$$\Big(\sum_{p \leqslant x^{1/4}} \frac{f(p)}{p^2} \Big)^2 \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)^2}{p} \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^3} \ll D_f(x)^2.$$

Par un argument semblable, nous obtenons la même majoration pour W_2. L'estimation de W_3 résulte directement de (1.5), et nous omettons les détails. En reportant dans (2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} V_f(x;g) &\ll Q_2 + E_{f_2}(x)^2 + \frac{xH_x}{G_1(x)} \, D_f(x)^2 \\ &\ll \frac{xH_x}{G_1(x)} \Big\{ \Big(\sum_{p^\nu \in \mathcal{E}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \Big)^2 + D_f(x)^2 \Big\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où nous avons fait appel à (1.5). Or

$$\Big(\sum_{p^\nu \in \mathcal{E}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \Big)^2 \leqslant D_f(x)^2 \sum_{p^\nu \in \mathcal{E}} \frac{1}{p^\nu} \ll D_f(x)^2.$$

Références

[1] A. Biró and T. Szamuely, *A Turán–Kubilius inequality with multiplicative weights*, Acta Math. Hungar. 70 (1996), 39–56.

[2] P. D. T. A. Elliott, *Arithmetic Functions and Integer Products*, Grundlehren Math. Wiss. 272, Springer, New York, 1985.

[3] A. Hildebrand, *An asymptotic formula for the variance of an additive function*, Math. Z. 183 (1983), 145–170.

[4] J. Kubilius, *Estimate of the second central moment for any additive arithmetic functions*, Litovsk. Mat. Sb. 23 (1983), 110–117 (en russe).

[5] H. L. Montgomery, *A note on the large sieve*, J. London Math. Soc. 43 (1968), 93–98.

[6] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ème éd., coll. Échelles, Belin, 2008.

Régis de la Bretèche
IMJ, UMR 7586
Université Paris Diderot-Paris 7
UFR de Mathématiques, Case 7012
Bâtiment Chevaleret
75205 Paris Cedex 13, France
E-mail: breteche@math.jussieu.fr

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex, France
E-mail: gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr

Reçu le 13.11.2009
et révisé le 7.1.2010 (6217)