ACTA ARITHMETICA
142.4 (2010)

Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels : le cas des puissances

par

Tanguy Rivoal (Saint-Martin-d'Hères)

1. Introduction. Le but de cet article est de présenter des suites de nombres rationnels qui convergent rapidement vers le nombre $\Gamma(a/b)^b$, pour n'importe quel rationnel $a/b \notin \mathbb{Z}$ donné, $b \geq 1$, et dont les séries génératrices sont des G-fonctions. Dans la suite, on supposera que $0 < a/b < 1$ (ce qui ne fait rien perdre en généralité) mais pas que $(a,b) = 1$ (hypothèse inutile qui ferait d'ailleurs perdre en généralité).

Posons

$$(1.1)\qquad I_n := \frac{(sn)!^2(tn)!^\beta}{(rn)!}\,\frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{2i\pi} \times \int_{\mathscr{C}} \frac{(x)_{rn}}{\big(\frac{x-a}{b}-sn\big)_{sn+1}\big(\frac{x-b}{b}-sn\big)_{sn+1}\big(\frac{x}{b}\big)^\beta_{tn}}\,\frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b}\,dx,$$

où les paramètres n, r, s, t, β sont des entiers positifs, avec $s \geq 1$ et avec $0 \leq \beta \leq b$. Par définition, $(\alpha)_m := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$. Le lacet $\mathscr{C}$ entoure dans le sens direct les zéros du polynôme (en x)

$$\left(\frac{x-a}{b}-sn\right)_{sn+1}\left(\frac{x}{b}-sn\right)_{sn+1},$$

c'est-à-dire les entiers $a+kb$ et $b+kb$, $k = 0, \ldots, sn$, et il n'entoure aucun autre pôle de l'intégrande, i.e., aucun provenant de $\Gamma(x)/(\Gamma(x/b)^b(x/b)_t^\beta)$. Comme $\beta \leq b$, les seuls autres pôles possibles de l'intégrande sont parmi les pôles de $\Gamma(x)$ aux entiers négatifs.

La forme de l'intégrale I_n est motivée par certaines intégrales apparaissant dans l'interpolation rationnelle des fonctions méromorphes, telles que la fonction zêta d'Hurwitz $\sum_{n=1}^\infty 1/(n+x)^s$ (voir [13]). Dans le cas présent, on utilise la fonction $\Gamma(x)(b^x\Gamma(x/b)^b)$ mais l'aspect "interpolation" ne sera

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11J04; Secondary 41-99, 41A05.
Key words and phrases: Gamma function, rational approximations, periods.

DOI: 10.4064/aa142-4-4

pas développé ici. Le point essentiel est que I_n est une forme linéaire en 1 et $\Gamma(a/b)^b$ à coefficients rationnels. Pour définir ceux-ci, posons

$$p_n := \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k+1}}{b^{bk+a}} \binom{sn}{k} \frac{(kb+rn+a-1)!}{(rn)!k!^b} \times \frac{(sn)!}{\left(k-sn+\frac{a}{b}-1\right)_{sn+1}} \frac{k!^b}{\left(\frac{a}{b}\right)_k^b} \frac{(tn)!^\beta}{\left(k+\frac{a}{b}\right)_{tn}^\beta}$$

et

$$q_n := \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k}}{b^{bk+b}} \binom{sn}{k} \frac{(bk+rn+b-1)!}{(rn)!k!^b} \times \frac{(sn)!}{\left(k-sn+1-\frac{a}{b}\right)_{sn+1}} \frac{(tn)!^\beta}{(k+1)_{tn}^\beta}.$$

Le résultat principal de cet article est le suivant.

Théorème 1.1. *On se place* a priori *dans les conditions ci-dessus.*

(i) *On a*

$$I_n = q_n \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b - p_n \in \mathbb{Q}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b + \mathbb{Q}.$$

(ii) *Supposons que $2s+\beta t > r$. Si $bt < r$ ou si $[bt = r \neq 0$ et $\beta \neq b]$, alors*

$$\limsup_{n\to+\infty} |I_n|^{1/n} \leq \frac{t^{\beta t} s^{2s} (bx_0 - r)^r}{r^r (x_0 - t)^{\beta t} (x_0 + s)^{2s}},$$

où x_0 est l'unique solution réelle $> r/b$ de l'équation algébrique

$$(x+s)^2 \left(x - \frac{r}{b}\right)^b - x^{b-\beta+2}(x-t)^\beta = 0.$$

(iii) *Supposons que $2s+\beta t > r$ et que $bt \leq r$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} |p_n|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} |q_n|^{1/n} = \frac{t^{\beta t} s^{2s} (r+bx_1)^r}{r^r (s-x_1)^{2s} (t+x_1)^{\beta t}} > 1,$$

où x_1 est l'unique solution réelle dans $]0,s[$ de l'équation algébrique

$$(s-x)^2 \left(x + \frac{r}{b}\right)^b - x^{b-\beta+2}(x+t)^\beta = 0.$$

(iv) *Pour tout entier $n \geq 0$, un dénominateur commun de p_n et q_n est*

$$D_n := b^{b+bn} d_{bsn+b-a} d_{bsn+a}^b d_{b(s+t)n+a-1}^\beta,$$

où $d_n :=$ ppcm$(1,\ldots,n)$.

(v) *Les suites* $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ *et* $(I_n)_{n\geq 0}$ *vérifient une même récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients dans* $\mathbb{Z}[n]$ *(qui dépend du choix des paramètres).*

REMARQUES 1.2. (a) Les points (iii), (iv) et (v) impliquent que les séries $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} q_n z^n$ sont des G-fonctions, solutions d'une même équation différentielle. (Voir la fin de cette introduction pour plus de détails à ce sujet, ainsi que la note ([2]).) Pour cela, on utilise (iv) sous la forme $\lim_n D_n^{1/n} = b^b e^{b(b+1)s+\beta b(s+t)}$.

(b) Il ne semble pas facile de déterminer si $\limsup_n |I_n|^{1/n} < 1$ sous les conditions de (ii) bien que cela soit le cas sur de nombreux exemples.

On présente maintenant une application du théorème précédent, qui correspond à un cas où x_0 et x_1 sont facilement explicitables.

COROLLAIRE 1.3. *Si* $r = b$, $s = 2$, $t = 1$ *et* $\beta = b - 2$, *alors*

$$q_n = \mathcal{Q}^{n(1+o(1))} \quad \textit{et} \quad \left| \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{16^{n(1+o(1))} q_n} = \frac{1}{q_n^{\mu+o(1)}}$$

avec

$$\mathcal{Q} := \frac{4^4(5+\sqrt{17})^2}{(7-\sqrt{17})^4} \approx 311.04964 \quad \textit{et} \quad \mu := 1 + \frac{\log(16)}{\log(\mathcal{Q})} \approx 1.48303.$$

REMARQUE 1.4. On ne peut pas déduire l'irrationalité de $\Gamma(a/b)^b$ du corollaire 1.3 car p_n et q_n ne sont pas des entiers et leur dénominateur commun est trop gros. Le choix le plus simple possible $r = t = 0$, $s = 1$ n'est pas couvert par le théorème 1.1(ii). Dans ce cas particulier, on montrera dans la partie 5 la majoration $I_n = \mathcal{O}(n^{b/2+2})$, dont découle déjà un résultat non trivial :

$$q_n = 4^{n(1+o(1))} \quad \text{et} \quad \left| \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^{1+o(1)}}. \tag{1.2}$$

Il est possible de donner explicitement les récurrences vérifiées par $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ pour tout choix de a, b, r, s, t, β de tailles raisonnables. On en présente quelques-unes dans la partie 6, dont la suivante prouvée dans la sous-partie 6.2.

THÉORÈME 1.5. *Posons* $r = t = 0$, $s = 1$ *et* $a/b = 1/3$. *Alors les suites* $(p_n)_{n\geq 0}$ *et* $(q_n)_{n\geq 0}$ *vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre* 2

$$\begin{aligned}
&3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3 u_{n+2} = \\
&(10935n^6+80190n^5+238545n^4+368550n^3+312552n^2+138648n+25408)u_{n+1} \\
&\qquad - 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2 u_n,
\end{aligned}$$

avec pour valeurs initiales $p_0 = 1/2$, $p_1 = 93/10$ *et* $q_0 = 1/9$, $q_1 = 13/27$. *Cette récurrence se traduit par la fraction continue irrégulière*

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{9/2\,|}{|\,C(0)} - \frac{A(0)B(1)|}{|\;C(1)} - \cdots - \frac{A(n)B(n+1)|}{|\;C(n+1)} - \cdots,$$

avec

$$\begin{aligned} A(n) &= 3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3, \\ B(n) &= 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2, \\ C(n) &= 10935n^6 + 80190n^5 + 238545n^4 \\ &\qquad + 368550n^3 + 312552n^2 + 138648n + 25408, \end{aligned}$$

dont les réduites p_n/q_n *convergent vers* $\Gamma(1/3)^3$ *en* $4^{-n(1+o(1))}$.

Il est naturel de se demander si ces résultats peuvent servir à prouver l'irrationalité des nombres $\Gamma(a/b)^b$, dont on ne sait pas grand chose à l'heure actuelle en dehors de la transcendance de $\Gamma(1/2)^2 = \pi$, $\Gamma(1/3)^3$, $\Gamma(1/4)^4$ et les valeurs que l'on obtient en appliquant les équations fonctionnelles à ces trois nombres ([1]). Comme les rationnels p_n et q_n ne sont pas des entiers, il faudrait montrer que $D_n I_n \to 0$. Malheureusement, l'expression obtenue pour D_n semble interdire cette possibilité mais il reste toujours la possibilité que I_n soit plus petit que la borne obtenue dans le théorème 1.1(ii) et que D_n soit surestimé.

La construction donnée ici présente un intérêt théorique dans le contexte des *suites de G-approximations rationnelles* d'un réel. Par cela, on peut entendre deux choses :

– ou bien des suites de rationnels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que $a_n/b_n \to \alpha$ pour un certain réel α et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont des G-fonctions ([2]),
– ou bien des suites de rationnels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que $|b_n| \to +\infty$ et $b_n\alpha - a_n \to 0$ pour un certain réel α et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont des G-fonctions.

L'ensemble des nombres α qui vérifient la seconde possibilité est *a priori* plus restreint que celui des nombres qui vérifient la première. En plus des

([1]) On sait en fait que $\pi, e^{\pi}, \Gamma(1/4)$, respectivement $\pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/3)$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. C'est une conséquence du théorème de Nesterenko [11]. On sait aussi que $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ ne sont pas des nombres de Liouville [6].

([2]) Rappelons qu'une série $F(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est une *G-fonction* si $(u_n)_{n\geq 0}$ a une croissance au plus géométrique et est solution d'une récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients dans $\mathbb{Z}[n]$, et si la suite d'entiers $(\mathcal{D}_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\mathcal{D}_n u_j \in \mathbb{Z}$ pour $j = 0, \ldots, n$ a une croissance au plus géométrique. Les deux premières conditions signifient que le rayon de convergence de F est non nul et fini, et que F est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Voir [2, Chapitre 1].

nombres $\log(2)$, $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, pour lesquels la seconde possibilité est vérifiée depuis Apéry, elle est vraie pour $\zeta(4)$ (Cohen et Rhin [7]) et pour la constante de Catalan G (Zudilin [18]). Fischler et l'auteur l'ont également vérifiée pour une très large classe de nombres algébriques réels (voir [9, partie 6]). Grâce au corollaire 1.3, elle est donc également vraie pour $\Gamma(a/b)^b$. Or tous ces nombres sont des périodes au sens géométrique du terme (voir [3, partie III]). Devant tous ces exemples (parmi beaucoup d'autres, voir [1, 17]), on peut se poser les questions suivantes : *Est-ce que toute période admet des G-approximations rationnelles ? Réciproquement, les réels admettant des G-approximations rationnelles peuvent-ils être décrits à l'aide des périodes ?* Cette question a naturellement sa place dans la "philosophie des périodes" développée par Kontsevich et Zagier [10].

Il est fortement suspecté que les nombres $\Gamma(a/b)$, $a/b \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, ne sont pas des périodes (voir [3, p. 212]) mais les remarques précédentes ne signifient pas qu'on ne trouvera pas d'approximations de $\Gamma(a/b)$ issues d'une récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients polynomiaux ([3]). Aptekarev et ses collaborateurs [4] ont récemment obtenu une telle récurrence d'ordre 3 pour la constante d'Euler γ. Cependant, le dénominateur des solutions rationnelles $(u_n)_{n\geq 0}$ de cette récurrence croît comme une puissance de $n!$ et $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ n'est donc pas une G-fonction. L'auteur [14] a obtenu un résultat similaire pour $\gamma + \log(x)$ pour tout rationnel $x > 0$. Les auteurs de [10] estiment que γ n'est probablement pas une période et on peut raisonnablement penser que c'est aussi le cas du nombre $\gamma + \log(x)$ pour n'importe quel rationnel $x > 0$.

Enfin, terminons avec la remarque suivante. On montrera que sous la condition $2s + t > r$ et pourvu que n soit assez grand, on a

$$I_n = (-1)^{rn+1}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b \sum_{k=rn}^{\infty} \frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k!\,\Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^b \left(-\frac{k}{b}\right)_{tn}^\beta} \times \frac{(k-rn+1)_{rn}}{(rn)!} \frac{(sn)!^2}{\left(\frac{k+a}{b}\right)_{sn+1}\left(\frac{k+b}{b}\right)_{sn+1}}.$$

Cette série présente une grande ressemblance formelle avec celle utilisée dans [5, 12] (sauf les facteurs de symétrie very-well-poised) afin de montrer l'irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. On peut donc espérer qu'une généralisation adéquate de I_n permettra d'obtenir de nouveaux résultats concernant la nature arithmétique des nombres $\Gamma(a/b)^b$.

([3]) L'auteur a d'ailleurs construit de telles approximations dans [15]. La méthode est totalement différente de celle présentée ici et est beaucoup plus dans l'esprit de [4, 14].

2. Une construction générale. On remplace provisoirement rn, sn, tn par des entiers quelconques $r, s, t \geq 0$. Posons

$$\begin{aligned} I &= I(r,s,t,\beta;a,b) \\ &:= \frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{(x)_r}{\big(\frac{x-a}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x-b}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x}{b}\big)_t^\beta} \, \frac{\Gamma(x)}{b^x \Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b}\, dx, \end{aligned}$$

avec $0 \leq \beta \leq b$. Le lacet $\mathscr{C}$ est défini comme dans l'introduction.

On se servira de diverses propriétés classiques de la fonction Gamma, telles que :

$$\Gamma(x+r) = (x)_r \Gamma(x), \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

(La seconde identité est connue comme la *formule des compléments*.)

LEMME 2.1. *Dans les conditions décrites ci-dessus, on a*

$$I \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b.$$

Démonstration. Par le théorème des résidus, on vérifie sans difficulté que

$$\begin{aligned} I = {} & \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \frac{(kb+b)_r \Gamma(kb+b)}{k!(s-k)!\big(k-s-\frac{a}{b}+1\big)_{s+1}(k+1)_t^\beta b^{b+bk}} \frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{\Gamma(k+1)^b} \\ & - \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k+1} \frac{(kb+a)_r \Gamma(kb+a)}{k!(s-k)!\big(k-s+\frac{a}{b}-1\big)_{s+1}\big(k+\frac{a}{b}\big)_t^\beta b^{a+bk}} \frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{\Gamma\big(k+\frac{a}{b}\big)^b}. \end{aligned}$$

La première somme est dans $\mathbb{Q}\Gamma(a/b)^b$ et on peut l'écrire sous la forme simplifiée $Q\Gamma(a/b)^b$ avec

$$\begin{aligned} Q &= Q(r,s,t,\beta;a,b) \\ &:= \frac{1}{s!} \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} b^{-b-bk} \binom{s}{k} \frac{(kb+b+r-1)!}{\big(k-s-\frac{a}{b}+1\big)_{s+1} k!^{b-\beta}(k+t)!^\beta}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On peut écrire la seconde somme comme

$$\begin{aligned} P &= P(r,s,t,\beta;a,b) \\ &:= \frac{1}{s!} \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k+1} b^{-a-bk} \binom{s}{k} \frac{(kb+a+r-1)!}{\big(k-s+\frac{a}{b}-1\big)_{s+1}\big(\frac{a}{b}\big)_k^{b-\beta}\big(\frac{a}{b}\big)_{k+t}^\beta}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

qui est dans $\mathbb{Q}$.

On a donc bien obtenu

$$I = Q\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b - P \in \mathbb{Q}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b + \mathbb{Q}$$

comme annoncé. ∎

On prouve maintenant une expression de l'intégrale I sous forme de série, qui sera plus maniable pour les majorations futures.

LEMME 2.2. *Supposons que $2s+\beta t-r-(b-1)/2>1$. Alors,*

$$I=(-1)^{r+1}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^{b}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(-b)^{k}}{k!\,\Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^{b}\left(-\frac{k}{b}\right)_{t}^{\beta}}\,\frac{(k-r+1)_{r}}{\left(\frac{k+a}{b}\right)_{s+1}\left(\frac{k+b}{b}\right)_{s+1}}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Notons $T=bN+1/2$ pour tout entier $N\geq 0$. On considère l'intégrale

$$J(T)=\frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^{b}}{2i\pi}\int_{\mathscr{R}}\frac{(x)_{r}}{\left(\frac{x-a}{b}-s\right)_{s+1}\left(\frac{x-b}{b}-s\right)_{s+1}\left(\frac{x}{b}\right)_{t}^{\beta}}\,\frac{\Gamma(x)}{b^{x}\Gamma\left(\frac{x}{b}\right)^{b}}\,dx,$$

où $\mathscr{R}$ est le contour rectangulaire de sommets $\pm T\pm iT$, $T>0$. Pour simplifier, on note f l'intégrande de $J(T)$:

$$f(x)=\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^{b}\cdot\frac{(x)_{r}}{\left(\frac{x-a}{b}-s\right)_{s+1}\left(\frac{x-b}{b}-s\right)_{s+1}\left(\frac{x}{b}\right)_{t}^{\beta}}\,\frac{\Gamma(x)}{b^{x}\Gamma\left(\frac{x}{b}\right)^{b}}.$$

Comme les pôles de f aux entiers négatifs sont ceux de $\Gamma(x)$ (qui sont simples, avec résidu $(-1)^{k}/k!$ au point $-k$), on a

$$J(T)=I+\sum_{k=r}^{[T]}\mathrm{Res}_{x=-k}(f(x)),$$

pourvu que T soit assez grand (ce que l'on supposera) pour que les autres pôles de f aux entiers $a+kb$ et $b+bk$, $k=0,\dots,n$, aient une contribution égale à I.

On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{x=-k}(f(x))&=\frac{(-1)^{k}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^{b}}{k!\,b^{-k}\Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^{b}\left(-\frac{k}{b}\right)_{t}^{\beta}}\,\frac{(-k)_{r}}{\left(-\frac{k+a}{b}-s\right)_{s+1}\left(-\frac{k+b}{b}-s\right)_{s+1}}\\&=\frac{(-1)^{k+r}b^{k}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^{b}}{k!\,\Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^{b}\left(-\frac{k}{b}\right)_{t}^{\beta}}\,\frac{(k-r+1)_{r}}{\left(\frac{k+a}{b}\right)_{s+1}\left(\frac{k+b}{b}\right)_{s+1}}.\end{aligned}$$

Donc le lemme revient à montrer que $J(T)$ tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ puisqu'alors on obtient l'identité attendue (2.3) :

$$I=-\sum_{k=r}^{\infty}\mathrm{Res}_{x=-k}(f(x)).$$

Pour cela, on décompose $J(T)$ en la somme des quatre intégrales sur les quatre côtés de $\mathscr{R}$. Les intégrales sur les trois côtés $[-T-iT,T-iT]$, $[T-iT,T+iT]$ et $[T+iT,-T+iT]$ se traitent simultanément. On utilise la formule de Stirling sous la forme

$$\Gamma(z) = z^z e^{-z}\sqrt{2\pi/z}\,(1+\mathcal{O}(1/|z|)),$$

avec $|\arg(z)| < \pi$ et la branche principale du logarithme, afin d'obtenir

$$\left|\frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma(x/b)^b}\right| \ll |x|^{(b-1)/2},$$

où la constante implicite ne dépend pas de T. L'intégrande $f(x)$ vérifie donc

$$|f(x)| \ll \frac{1}{T^{2s+\beta t-r-(b-1)/2}}$$

sur les trois côtés en question. Les trois intégrales correspondantes tendent donc vers 0 pourvu que $2s+\beta t-r-(b-1)/2>1$, ce qui est la condition de l'énoncé.

Sur le côté $C=[-T+iT,-T-iT]$, on ne peut pas utiliser la formule de Stirling car on sort du secteur angulaire $|\arg(x)|<\pi$. Pour contourner ce problème, on remarque tout d'abord que

$$\frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b} = \frac{\sin\big(\pi\frac{x}{b}\big)^b}{\pi^{b-1}\sin(\pi x)}\,\frac{b^{-x}\Gamma\big(1-\frac{x}{b}\big)^b}{\Gamma(1-x)},$$

ce qui découle d'une double application de la formule des compléments. Lorsque la partie réelle de x est négative, ce qui est le cas sur le côté C, la formule de Stirling montre que

$$\left|\frac{b^{-x}\Gamma\big(1-\frac{x}{b}\big)^b}{\Gamma(1-x)}\right| \ll \frac{1}{|x|^{(b-1)/2}} \ll \frac{1}{T^{(b-1)/2}}.$$

On vérifie de plus que pour tout $x=-T+iy\in C$, on a

$$\sin(\pi x) = (-1)^{bN+1}i\cosh(\pi y),$$
$$\sin\left(\pi\,\frac{x}{b}\right) = (-1)^N(e^{-i\pi/2b}e^{-\pi y/b}-e^{i\pi/2b}e^{\pi y/b}).$$

Il vient donc que $|\sin(\pi x)|\ge e^{\pi|y|}$ et $|\sin(\pi x/b)|\ll e^{\pi|y|/b}$, d'où

$$\left|\frac{\sin\big(\pi\frac{x}{b}\big)^b}{\sin(\pi x)}\right| = \mathcal{O}(1)$$

sur C, indépendamment de T. Finalement, on a

$$|f(x)| \ll \frac{1}{T^{2s+\beta t-r+(b-1)/2}}$$

et l'intégrale sur C tend vers 0 quand $T\to+\infty$ pourvu que $2s+\beta t-r+(b-1)/2>1$, ce qui est plus faible que la condition de l'énoncé.

Ceci termine la démonstration du lemme 2.2. ∎

3. Démonstration du théorème 1.1. On se replace maintenant dans le contexte du théorème 1.1 et l'on remplace r par rn, s par sn et t par tn, où n, r, s, t sont des paramètres entiers. (En fait, on pourrait même se contenter de demander que r, s, t soient des rationnels et n un entier tels que rn, sn, tn soient des entiers.)

3.1. Démonstration de (i). L'intégrale I_n définie en (1.1) s'écrit

$$I_n := \frac{(sn)!^2 (tn)!^\beta}{(rn)!} I(rn, sn, tn, \beta; a, b),$$

si bien que

$$I_n = q_n \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b - p_n,$$

avec

$$p_n = \frac{(sn)!^2 (tn)!^\beta}{(rn)!} P(rn, sn, tn, \beta; a, b),$$
$$q_n = \frac{(sn)!^2 (tn)!^\beta}{(rn)!} Q(rn, sn, tn, \beta; a, b),$$

où les rationnels P et Q sont définis en (2.2) et (2.1) au cours de la preuve du lemme 2.1. Ceci prouve le point (i) du théorème 1.1.

3.2. Démonstration de (ii). Puisque $2s + \beta t - r > 0$, l'inégalité $2sn + \beta tn - rn - (b-1)/2 \geq 2$ est vérifiée pour n assez grand (ce que l'on peut supposer ici) et donc, grâce au lemme 2.2, on déduit que

$$\begin{aligned} I_n = (-1)^{rn+1} \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b \sum_{k=rn}^{\infty} & \frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k! \Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^b \left(-\frac{k}{b}\right)_{tn}^\beta} \\ & \times \frac{(k-rn+1)_{rn}}{(rn)!} \frac{(sn)!^2}{\left(\frac{k+a}{b}\right)_{sn+1} \left(\frac{k+b}{b}\right)_{sn+1}}. \end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned} \frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k! \Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^b \left(-\frac{k}{b}\right)_{tn}^\beta} &= \frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k! \Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^{b-\beta} \Gamma\left(-\frac{k}{b} + tn\right)^\beta} \\ &= (tn)!^\beta (-b)^k \left(\frac{\sin \pi (tn - k/b)}{\pi}\right)^\beta \left(\frac{\sin(-\pi k/b)}{\pi}\right)^{b-\beta} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k}{b}\right)^{b-\beta} \Gamma\left(1 + \frac{k}{b} - tn\right)^\beta}{k!}. \end{aligned}$$

(De nouveau, on se sert de la formule des compléments.) Donc

$$|I_n| \leq \Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b \sum_{k=rn}^{\infty} \frac{b^k (tn)!^\beta \Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^{b-\beta}\Gamma\big(1+\frac{k}{b}-tn\big)^\beta}{k!} \\ \times \frac{\Gamma(k+1)}{(rn)!\Gamma(k-rn+1)} \frac{(sn)!^2\Gamma\big(\frac{k+a}{b}\big)\Gamma\big(\frac{k+b}{b}\big)}{\Gamma\big(\frac{k+a}{b}+sn+1\big)\Gamma\big(\frac{k+b}{b}+sn+1\big)}.$$

La série à droite, que l'on note J_n, étant à termes positifs et grâce à la formule de Stirling (qui s'applique à $\Gamma(1+k/b-tn)$ car on suppose que $k \geq rn \geq btn$), on peut appliquer la méthode de Laplace discrète ([4]) pour déduire que

$$(3.1) \qquad \lim_{n\to+\infty} J_n^{1/n} = \max_{x>r}\bigg(\frac{b^x t^{\beta t}(x/b-t)^{\beta(x/b-t)}(x/b)^{x(b-\beta+2)/b}s^{2s}}{r^r(x-r)^{x-r}(x/b+s)^{2(x/b+s)}}\bigg) \\ = \max_{x>r/b}\bigg(\frac{b^{bx}t^{\beta t}(x-t)^{\beta(x-t)}x^{x(b-\beta+2)}s^{2s}}{r^r(bx-r)^{bx-r}(x+s)^{2(x+s)}}\bigg).$$

(Voir par exemple la seconde preuve du lemme 3 de [5] dans un contexte très similaire.) On note g la fonction de x sur la seconde ligne de (3.1). Pour déterminer les points critiques de g dans $]r/b,+\infty[$, il est plus facile de déterminer ceux de $\log(g)$ puisque

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = (\log(g))'(x) = \log\bigg(\frac{b^b(x-t)^\beta x^{b-\beta+2}}{(bx-r)^b(x+s)^2}\bigg).$$

Ceci conduit à résoudre l'équation algébrique

$$(x+s)^2\Big(x-\frac{r}{b}\Big)^b - (x-t)^\beta x^{b-\beta+2} = 0$$

dont les solutions sont exactement les points critiques de g. On va montrer un peu plus loin que cette équation a exactement une seule solution réelle $x_0 > r/b$. Un rapide calcul montre alors que

$$g(x_0) = \frac{t^{\beta t}s^{2s}(bx_0-r)^r}{r^r(x_0-t)^{\beta t}(x_0+s)^{2s}},$$

et donc que

$$\limsup_{n\to+\infty} |I_n|^{1/n} \leq \lim_{n\to+\infty} J_n^{1/n} = g(x_0).$$

Il nous reste à montrer que le polynôme $(x+s)^2\big(x-\frac{r}{b}\big)^b-(x-t)^\beta x^{b-\beta+2}$ s'annule une seule fois dans l'intervalle $]r/b,+\infty[$. Pour simplifier, on pose $u = r/b$. Puisque $x > r/b \geq t \geq 0$, il est équivalent de montrer que la

([4]) Cette méthode demande que le ou les extrema soient atteints en des points de l'intervalle ouvert $]r/b,+\infty[$. C'est bien le cas sous les hypothèses du théorème 1.1(ii).

fonction rationnelle

$$R(x) := \frac{(x+s)^2(x-u)^b}{(x-t)^\beta x^{b-\beta+2}}$$

prend une seule fois la valeur 1 sur $]r/b, +\infty[$ dans les conditions du théorème. (Au passage, on note que c'est manifestement faux lorsque $u = t$ et $\beta = b$ car alors $R(x) = (x+s)^2/x^2$.) On vérifie que

$$R(x) = 1 + \frac{2s + \beta t - r}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

lorsque $x \to +\infty$, et donc que $f(x) > 1$ pour tout x assez grand puisque l'on a supposé que $2s + \beta t - r > 0$.

On suppose dans un premier temps que $u > t$. On a

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{2}{x+s} + \frac{b}{x-u} - \frac{\beta}{x-t} - \frac{b-\beta+2}{x} = \frac{\rho(x)}{(x+s)(x-u)(x-t)x},$$

où $\rho(x) = -(2s + \beta t - r)x^2 + \cdots$ est un polynôme de degré 2. Comme $\rho(u) = bu(u+s)(u-t) > 0$ (par l'hypothèse $u > t$) et $\lim_{+\infty} \rho(x) = -\infty$, ρ s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]u, +\infty[$. Puisque $R(u) = 0$ et $R(x) > 0$ pour $x > u$, on déduit de tout ce qui précède que R est croissante sur un certain intervalle $[u, \alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. Comme elle est > 1 à partir d'un certain rang, il suit que R prend une seule fois la valeur 1 sur l'intervalle $]u, +\infty[$.

Supposons maintenant que $u = t \neq 0$ et $\beta < b$. On a

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{2}{x+s} + \frac{b-\beta}{x-t} - \frac{b-\beta+2}{x} = \frac{\rho(x)}{(x+s)(x-t)x},$$

où $\rho(x) = -(2s + \beta t - bt)x + (b - \beta s + 2)ts$ s'annule en

$$X := \frac{(b-\beta+2)ts}{2s + \beta t - bt} > u.$$

(L'inéquation $X > u$ équivaut à $(b-\beta)s > -(b-\beta)t$, qui est manifestement vraie sous la condition $b \neq \beta$.) On conclut alors comme dans le cas précédent.

3.3. Démonstration de (iii). On donne la preuve pour $(q_n)_{n\geq 0}$ et on laisse le soin au lecteur de l'adapter dans le cas de $(p_n)_{n\geq 0}$. Rappelons que

$$q_n = \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k}}{b^{bk+b}} \binom{sn}{k} \frac{(bk + rn + b - 1)!}{k!^b (rn)!} \times \frac{(sn)!\,\Gamma\big(k - sn + 1 - \frac{a}{b}\big)}{\Gamma\big(k + 2 - \frac{a}{b}\big)} \frac{(tn)!^\beta\,\Gamma(k+1)^\beta}{\Gamma(k + tn + 1)^\beta}.$$

Par la formule des compléments,

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(k - sn + 1 - \frac{a}{b}\Big) &= \frac{\pi}{\Gamma\big(sn - k + \frac{a}{b}\big)\sin\pi\big(sn - k + \frac{a}{b}\big)}\\ &= \frac{(-1)^{sn-k}\pi}{\Gamma\big(sn - k + \frac{a}{b}\big)\sin\big(\pi\frac{a}{b}\big)}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}q_n = \frac{\pi}{\sin\big(\pi\frac{a}{b}\big)}\sum_{k=0}^{sn}\binom{sn}{k}\frac{(bk+rn+b-1)!}{k!^b(rn)!b^{bk+b}}\\ \times\frac{(sn)!}{\Gamma\big(k+2-\frac{a}{b}\big)\Gamma\big(sn-k+\frac{a}{b}\big)}\,\frac{(tn)!^\beta\Gamma(k+1)^\beta}{\Gamma(k+tn+1)^\beta}.\end{aligned}$$

On observe maintenant que q_n est en fait une somme de termes positifs (au facteur constant $\pi/\sin(\pi a/b)$ près), en utilisant l'hypothèse que $0 < a/b < 1$ pour le terme $\Gamma(k+2-a/b)\Gamma(sn-k+a/b)$. Grâce à la formule de Stirling, on peut de nouveau appliquer la méthode de Laplace discrète (modulo la remarque faite en note ([4])), qui nous donne

$$\lim_{n\to+\infty}|q_n|^{1/n} = \max_{0<x<s}\bigg(\frac{1}{b^{bx}}\,\frac{s^{2s}}{x^{2x}(s-x)^{2(s-x)}}\,\frac{(r+bx)^{r+bx}}{x^{bx}r^r}\,\frac{t^{t\beta}x^{\beta x}}{(x+t)^{\beta(x+t)}}\bigg).$$

Notons $h(x)$ la fonction dont on cherche le maximum. Pour déterminer les points critiques de h dans $[0, s]$, il suffit de déterminer ceux de $\log(h)$ puisque

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = (\log(h))'(x) = \log\bigg(\frac{(s-x)^2(r+bx)^b}{b^bx^{b-\beta+2}(x+t)^\beta}\bigg).$$

Ceci conduit à résoudre l'équation algébrique

$$(s-x)^2(x+r/b)^b = x^{b-\beta+2}(x+t)^\beta$$

pour $x \in\,]0, s[$. On procède alors comme pour l'étude de la fonction R au cours de la preuve du point (ii) du théorème 1.1 en étudiant les variations de la fonction rationnelle $S(x) := (s-x)^2(x+r/b)^b/x^{b-\beta+2}(x+t)^\beta$ afin de montrer qu'elle prend une seule fois la valeur 1 dans l'intervalle $]0, s[$. Clairement, $S(x) \geq 0$ sur l'intervalle $]0, s]$ avec $\lim_0 S(x) = +\infty$ et $S(s) = 0$. De plus,

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{2s}{s-x} + \frac{b}{x+r/b} - \frac{b-\beta+2}{x} - \frac{\beta}{x+t} = \frac{\sigma(x)}{x(s-x)(x+t)(x+r/b)},$$

où $\sigma(x) = -(2s+\beta t - r)x^2 + \cdots$ est un polynôme de degré 2 tel que

$$\begin{aligned}\sigma(-t) &= \beta t(t+s)(r-bt) \geq 0,\\ \sigma(0) &= -rst(b-\beta+2) < 0,\\ \sigma(s) &= -s(s+t)(bs+r) < 0\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sigma(x)=-\infty.$$

L'ensemble de ces propriétés de σ implique que σ ne s'annule pas dans $[0,s]$ et qu'elle est donc <0. Il s'ensuit que la fonction S est décroissante et elle prend une seule fois la valeur 1 en un point que l'on note x_1. Un rapide calcul montre alors que

$$h(x_1)=\frac{t^{\beta t}s^{2s}(r+bx_1)^r}{r^r(s-x_1)^{2s}(t+x_1)^{\beta t}}.$$

Il faut maintenant montrer que l'on a $h(x_1)>1$. Pour tout $x\in[0,s[$, définissons la fonction

$$H(x)=\frac{t^{\beta t}s^{2s}b^r(x+r/b)^r}{r^r(x+t)^{\beta t}(s-x)^{2s}},$$

de sorte que $H(x_1)=h(x_1)$. Comme $H(0)=1$ et $\lim_s H(x)=+\infty$, il nous suffit de montrer que H est strictement croissante sur $[0,s[$. On constate que

$$\frac{H'(x)}{H(x)}=\frac{r}{x+r/b}-\frac{\beta t}{x+t}+\frac{2s}{s-x}=\frac{-\sigma(x)}{(x-r/b)(x+t)(s-x)},$$

donc $H'(x)>0$ sur $[0,s[$, ce qui termine la preuve du point (iii).

3.4. Démonstration de (iv). On va obtenir une estimation distincte des dénominateurs de p_n et q_n. L'expression proposée d'un dénominateur D_n suit immédiatement.

LEMME 3.1. *On a*

$$b^{b+bsn}d_{bsn+b-a}d^{\beta}_{(s+t)n}q_n\in\mathbb{Z}$$

et

$$b^{a+bsn}d_{bsn+b-a}d^{b}_{bsn+a}d^{\beta}_{b(s+t)n+a-1}p_n\in\mathbb{Z}.$$

Lorsque $t=0$, *on peut remplacer* $d^{\beta}_{(s+t)n}$, *respectivement* $d^{\beta}_{b(s+t)n+a-1}$, *par* 1.

Démonstration. On commence par traiter le cas de q_n. On a

$$q_n=\sum_{k=0}^{sn}(-1)^{sn-k}b^{-b-bk}\binom{sn}{k}\frac{(kb+b+rn-1)!}{(rn)!k!^b}\times\frac{(sn)!}{\left(k-sn-\frac{a}{b}+1\right)_{sn+1}}\frac{(tn)!^{\beta}}{(k+1)^{\beta}_{tn}}.\tag{3.2}$$

Comme $b-1\geq 0$, il est clair que

$$\frac{(kb+b+rn-1)!}{(rn)!k!^b}\in\mathbb{Z},$$

puisque c'est un multiple entier d'un coefficient multinomial.

Par ailleurs,

$$\frac{(tn)!}{(k+1)_{tn}} = \sum_{j=1}^{tn} \frac{(-1)^{tn-j}\binom{tn}{j} j}{k+j}$$

et donc, puisque k varie de 0 à sn, on voit que

$$d_{(s+t)n}^{\beta}\,\frac{(tn)!^{\beta}}{(k+1)_{tn}^{\beta}} \in \mathbb{Z}.$$

Si $t=0$, on a $(tn)!/(k+1)_{tn}=1$ et le dénominateur cherché est seulement 1.

De même,

$$\frac{(sn)!}{\left(k-sn-\frac{a}{b}+1\right)_{sn+1}} = \sum_{j=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-j}\binom{sn}{j}}{k-\frac{a}{b}+1-j}$$

et donc, lorsque k varie de 0 à sn,

$$d_{bsn+b-a}\,\frac{(sn)!}{\left(k-sn-\frac{a}{b}+1\right)_{sn+1}} \in \mathbb{Z}.$$

En recollant les divers morceaux, on obtient le dénominateur annoncé pour q_n.

Passons maintenant à p_n, qui s'exprime comme

$$\begin{aligned}
p_n &= \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k+1}}{b^{bk+a}}\binom{sn}{k}\frac{(kb+a+rn-1)!(sn)!(tn)!^{\beta}}{(rn)!\left(k-sn+\frac{a}{b}-1\right)_{sn+1}\left(\frac{a}{b}\right)_k^{b-\beta}\left(\frac{a}{b}\right)_{k+tn}^{\beta}} \qquad (3.3)\\
&= \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k+1}}{b^{bk+a}}\binom{sn}{k}\frac{(kb+a+rn-1)!}{(rn)!k!^b}\\
&\qquad\qquad \times \frac{(sn)!}{\left(k-sn+\frac{a}{b}-1\right)_{sn+1}}\,\frac{k!^b}{\left(\frac{a}{b}\right)_k^b}\,\frac{(tn)!^{\beta}}{\left(k+\frac{a}{b}\right)_{tn}^{\beta}}.
\end{aligned}$$

Par les mêmes méthodes que pour q_n, on vérifie que

$$\frac{(kb+a+rn-1)!}{(rn)!k!^b} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad d_{bsn+b-a}\,\frac{(sn)!}{\left(k-sn+\frac{a}{b}-1\right)_{sn+1}} \in \mathbb{Z}.$$

De plus,

$$\frac{k!}{\left(\frac{a}{b}\right)_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j}{j+\frac{a}{b}},$$

d'où

$$d_{bsn+a}^{b}\,\frac{k!^b}{\left(\frac{a}{b}\right)_k^b} \in \mathbb{Z}.$$

Enfin,

$$\frac{(tn)!}{\left(k+\frac{a}{b}\right)_{tn}}=\sum_{j=1}^{tn}\frac{(-1)^{tn-j}\binom{tn}{j}j}{k+\frac{a}{b}+j-1},$$

ce qui nous donne

$$d_{b(s+t)n+a-1}^{\beta}\,\frac{(tn)!^{\beta}}{\left(k+\frac{a}{b}\right)_{tn}^{\beta}}\in\mathbb{Z}.$$

L'estimation du dénominateur de p_n en découle. ∎

3.5. Démonstration de (v). Les expressions des suites $(q_n)_{n\ge 0}$ et $(p_n)_{n\ge 0}$ données en (3.2) et (3.3) sont des sommes hypergéométriques. On voit en effet que

$$(3.4)\quad q_n=(-1)^{sn}\,\frac{(rn+b-1)!(sn)!\Gamma\left(1-sn-\frac{a}{b}\right)}{b^b(rn)!\Gamma\left(2-\frac{a}{b}\right)}$$
$$\times\ {}_{b+2}F_{b+1}\left[\begin{matrix}-sn,1-sn-\frac{a}{b},\frac{rn+b}{b},\frac{rn+b+1}{b},\dots,\frac{rn+2b-1}{b}+1\\ 2-\frac{a}{b},1,\dots,1,tn+1,\dots,tn+1\end{matrix};1\right]$$

(avec $b-\beta$ paramètres 1 et β paramètres $tn+1$) et

$$(3.5)\quad p_n=(-1)^{sn+1}\,\frac{(rn+a-1)!(sn)!\Gamma\left(\frac{a}{b}-1-sn\right)\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^{\beta}(tn)!^{\beta}}{b^a(rn)!\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)\Gamma\left(tn+\frac{a}{b}\right)^{\beta}}$$
$$\times\ {}_{b+2}F_{b+1}\left[\begin{matrix}-sn,\frac{a}{b}-1-sn,\frac{rn+a}{b},\frac{rn+a+1}{b},\dots,\frac{rn+a+b-1}{b}\\ \frac{a}{b},\dots,\frac{a}{b},tn+\frac{a}{b},\dots,tn+\frac{a}{b}\end{matrix};1\right]$$

(avec $b-\beta+1$ paramètres a/b et β paramètres $tn+\frac{a}{b}$) ([5]). Il résulte donc de la théorie développée par Wilf et Zeilberger [16] que chacune de ces suites vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux (qui dépendent de a,b,r,s,t et β), dont l'ordre est majoré par une fonction de b. Il est alors bien connu que l'on peut trouver une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux (d'ordre éventuellement plus grand) dont $(p_n)_{n\ge 0}$ et $(q_n)_{n\ge 0}$ sont simultanément solutions. Comme I_n est une combinaison linéaire de p_n et q_n, $(I_n)_{n\ge 0}$ vérifie aussi cette récurrence.

Sur tous les exemples calculés (voir la section 6), il s'avère que les suites $(p_n)_{n\ge 0}$ et $(q_n)_{n\ge 0}$ vérifient la même récurrence *minimale*.

4. Démonstration du corollaire 1.3. On va en fait montrer un peu plus. On suppose qu'il existe un nombre rationnel κ tel que $0<\kappa<1$ et $t=r/b=\kappa s$. Le corollaire correspond au cas $\kappa=1/2$.

([5]) L'intégrale I_n est quant à elle une somme de b séries hypergéométriques.

On applique tout d'abord le théorème 1.1(ii), dont la condition $2s+\beta t > r$ se réduit à $s>t$, ce qui est automatiquement vérifié ici puisque $t=\kappa s$ avec $\kappa<1$. On vérifie que $x_0 = st/(s-t) = s\kappa/(1-\kappa)$ puisque dans ce cas l'équation algébrique à résoudre se met sous la forme $(x-t)^{b-2}((x+s)^2(x-t)^2-x^4)=0$. Il en découle que

$$\limsup_{n\to+\infty} |I_n|^{1/n} \le \left(\frac{t^t(s-t)^{s-t}}{t^t}\right)^2 = (\kappa^\kappa(1-\kappa)^{1-\kappa})^{2s}.$$

On applique ensuite le théorème 1.1(iii) dans lequel l'équation algébrique à résoudre est

$$(x+t)^{b-2}((x-s)^2(x+t)^2-x^4)=0.$$

On déduit facilement que

$$x_1 = \frac{s-t+\sqrt{s^2+6st+t^2}}{4} = \omega(\kappa)s.$$

Il en découle que

$$\lim_{n\to+\infty} q_n^{1/n} = \left(\frac{(\kappa+\omega(\kappa))^\kappa}{\kappa^\kappa(1-\omega(\kappa))}\right)^{2s},$$

ce qui termine la preuve.

5. Démonstration des estimations (1.2). Lorsque $r=t=0$ et $s=1$ (ce que l'on suppose dans la suite), la condition $2sn+\beta tn-rn > 1+(b-1)/2$ du lemme 2.2 est vérifiée pour n assez grand (lorsque l'on remplace r,s,t par rn,sn,tn respectivement). On a donc

$$I_n = -\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-b)^k}{k!\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b}\, \frac{n!^2}{\big(\frac{k+a}{b}\big)_{n+1}\big(\frac{k+b}{b}\big)_{n+1}}.$$

On ne peut pas appliquer le théorème 1.1(ii) et on va montrer directement que

$$|I_n| \le c(a,b)n^{b/2+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k\Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^b}{k!k^{b/2+2}}, \tag{5.1}$$

où $c(a,b)$ est une constante indépendante de n et où la série est convergente (comme on le voit par une application de la formule de Stirling).

Rappelons tout d'abord que

$$\frac{(-b)^k}{k!\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b} = \frac{(-b)^k\Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^b}{k!\pi} \sin\left(-\pi\,\frac{k}{b}\right)^b. \tag{5.2}$$

Par ailleurs, pour tout $k\ge1$, on a

$$\left(\frac{k+a}{b}\right)_{n+1} \ge \left(\frac{a}{b}\right)_{n+1} = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)_n \ge \frac{a}{b}\,n!. \tag{5.3}$$

De plus, pour tout $k \geq 1$ et tout n tel que $n - [b/2] - 2 \geq 0$, on a

$$\left(\frac{k+b}{b}\right)_{n+1} = \left(\frac{k+b}{b}\right)_{[b/2]+3} \left(\frac{k+b}{b} + \left[\frac{b}{2}\right] + 3\right)_{n-[b/2]-2} \geq k^{[b/2]+3} b^{-[b/2]-3} (n - [b/2] - 2)!. \tag{5.4}$$

Il découle de (5.2)–(5.4) que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(-b)^k}{k! \Gamma\left(-\frac{k}{b}\right)^b} \frac{n!^2}{\left(\frac{k+a}{b}\right)_{n+1} \left(\frac{k+b}{b}\right)_{n+1}} \right| &\leq \frac{b^{1+[b/2]+3}}{a\pi} \frac{b^k \Gamma\left(1+\frac{k}{b}\right)^b}{k! k^{[b/2+3]}} \frac{n!}{\left(n - \left[\frac{b}{2}\right] - 2\right)!} \\
&\leq \frac{b^{1+[b/2]+3}}{a\pi} n^{[b/2]+2} \frac{b^k \Gamma\left(1+\frac{k}{b}\right)^b}{k! k^{[b/2]+3}} \\
&\leq c(a,b) n^{b/2+2} \frac{b^k \Gamma\left(1+\frac{k}{b}\right)^b}{k! k^{b/2+2}},
\end{aligned}$$

ce qui prouve (5.1).

Pour obtenir le comportement asymptotique de q_n, on peut en revanche appliquer le théorème 1.1(iii). On obtient $x_1 = 1/2$ puisque l'équation algébrique à résoudre se réduit à $x^b((1-x)^2 - x^2) = 0$. Il vient alors que

$$\lim_{n \to +\infty} |q_n|^{1/n} = 4.$$

On a donc bien $I_n = \mathcal{O}(n^{b/2+2}) = q_n^{o(1)}$, ce qui termine la preuve des estimations (1.2).

6. Récurrences linéaires. Les fonctions hypergéométriques en (3.4) et (3.5) étant d'ordre $b+2$, il faut s'attendre à obtenir des récurrences linéaires d'ordre au moins $b+2$ en général, bien que cela puisse être moins dans certains cas. Dans cette section, on présente des récurrences pour $a/b = 1/2$, $1/3$ et $1/4$, avec à chaque fois $r = 0$, $s = 1$, $t = 0$, $\beta = 0$. Dans les deux premiers cas, les récurrences sont d'ordre 2, ce qui conduit à des fractions continues irrégulières pour $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ et $\Gamma(1/3)^3$ dont $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ sont les réduites. La vitesse de convergence des diverses suites p_n/q_n vers leurs limites respectives est en $4^{-n(1+o(1))}$, puisque l'on est dans le cadre des estimations (1.2).

6.1. Une récurrence linéaire d'ordre 2 pour $\Gamma(1/2)^2 = \pi$. L'algorithme Ekhad de Zeilberger [8] appliqué aux suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$ montre qu'elles vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre 2 suivante :

$$4(4n+3)(2n+3)^2u_{n+2}$$
$$= -(16n^4-192n^3-872n^2-1088n-411)u_{n+1}+(4n+3)(4n+1)(2n+3)^2u_n.$$

Les valeurs initiales sont $p_0 = 1$, $p_1 = 14/3$ et $q_0 = 1/2$, $q_1 = 3/2$.

6.2. Une récurrence linéaire d'ordre 2 pour $\Gamma(1/3)^3$. Cette partie contient la preuve du théorème 1.5. L'algorithme Ekhad appliqué aux suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ montre qu'elles vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre 2 suivante :

$$3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3u_{n+2} =$$
$$(10935n^6+80190n^5+238545n^4+368550n^3+312552n^2+138648n+25408)u_{n+1}$$
$$- 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2u_n.$$

Les valeurs initiales sont $p_0 = 1/2$, $p_1 = 93/10$ et $q_0 = 1/9$, $q_1 = 13/27$.

Cette récurrence peut se traduire par la fraction continue irrégulière

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{9/2\,|}{|\,C(0)} - \frac{A(0)B(1)|}{|\quad C(1)} - \cdots - \frac{A(n)B(n+1)|}{|\quad C(n+1)} - \cdots,$$

avec

$$A(n) = 3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3,$$
$$B(n) = 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2,$$
$$C(n) = 10935n^6+80190n^5+238545n^4$$
$$+ 368550n^3+312552n^2+138648n+25408.$$

6.3. Une récurrence linéaire d'ordre 3 pour $\Gamma(1/4)^4$. L'algorithme Ekhad appliqué aux suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ montre qu'elles vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre 3 suivante :

$$-512(4n+1)(4n-1)(18432n^5+208896n^4+936832n^3+2072304n^2$$
$$+2253348n+959715)(n+2)^2(n+1)^2u_n+8(42467328n^9+655884288n^8$$
$$+4366073856n^7+16381784064n^6+38033003520n^5+56442202112n^4$$
$$+53351659456n^3+30889737792n^2+9930226356n$$
$$+1353935925)(n+2)^2u_{n+1}-(226492416n^{11}+4794089472n^{10}$$
$$+45521829888n^9+255616548864n^8+941567410176n^7$$
$$+2383767474176n^6+4220315685888n^5+5204016664704n^4$$
$$+4354235126272n^3+2333220107040n^2+710068731174n$$
$$+90532639413)u_{n+2}+8(18432n^5+116736n^4+285568n^3+330864n^2$$
$$+175812n+32303)(n+3)^2(4n+9)^4u_{n+3} = 0.$$

Les valeurs initiales sont $p_0 = 1/3$, $p_1 = 676/211$ et $q_0 = 1/32$, $q_1 = 47/256$.

Références

[1] G. Almkvist, D. van Straten and W. Zudilin, *Apéry limits of differential equations of order* 4 *and* 5, dans : Modular Forms and String Duality, N. Yui, H. Verrill, and C. F. Doran (éd.), Fields Inst. Comm. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, et Fields Inst., Toronto, 2008, 105–123.

[2] Y. André, *G-functions and Geometry*, Aspects Math. E13, Vieweg, Braunschweig, 1989.

[3] —, *Une introduction aux motifs* (*motifs purs*, *motifs mixtes*, *périodes*), Panor. Synthèses 17, Soc. Math. de France, Paris, 2004.

[4] A. I. Aptekarev (éd.), *Rational Approximations of the Euler Constant and Recurrence Relations*, Sovrem. Probl. Mat. 9, Mat. Inst. Steklova, Moscou, 2007 (en russe).

[5] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. 146 (2001), 193–207.

[6] S. Bruiltet, *D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité : le cas de* $\Gamma(1/4)$ *et* $\Gamma(1/3)$, Acta Arith. 104 (2002), 243–281.

[7] H. Cohen, *Accélération de la convergence de certaines récurrences linéaires*, Sémin. Théor. Nombres 1980–1981, exposé no. 16, 2 pp. (1981).

[8] S. B. Ekhad, programme en *Maple* disponible à http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/EKHAD8.

[9] S. Fischler et T. Rivoal, *Un exposant de densité en approximation rationnelle*, Int. Math. Res. Not. 2006 (2006), article ID 95418, 48 pp.

[10] M. Kontsevich and D. Zagier, *Periods*, dans : Mathematics Unlimited—2001 and Beyond, Springer, Berlin, 2001, 771–808.

[11] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, Mat. Sb. 187 (1996), no. 9, 65–96 (en russe); traduction en anglais : Sb. Math. 187 (1996), 1319–1348.

[12] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), 267–270.

[13] —, *Applications arithmétiques de l'interpolation lagrangienne*, Int. J. Number Theory 5 (2009), 185–208.

[14] —, *Rational approximations for values of derivatives of the Gamma function*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 6115–6149.

[15] —, *Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels*, J. Number Theory 130 (2010), 944–955.

[16] H. S. Wilf and D. Zeilberger, *An algorithmic proof theory for hypergeometric* (*ordinary and "q"*) *multisum/integral identities*, Invent. Math. 108 (1992), 575–633.

[17] Y. Yang, *Apéry limits and special values of L-functions*, J. Math. Anal. Appl. 343 (2008), 492–513.

[18] W. Zudilin, *An Apéry-like difference equation for Catalan's constant*, Electron. J. Combin. 10 (2003), research paper 14, 10 pp.

Tanguy Rivoal
Institut Fourier, CNRS UMR 5582
Université Grenoble 1
100 rue des Maths, BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France
E-mail: tanguy.rivoal@fourier.ujf-grenoble.fr

Reçu le 12.2.2009
et révisé le 10.12.2009 (5938)