ACTA ARITHMETICA
109.1 (2003)

Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés

par

Abdelmalek Azizi et Ali Mouhib (Oujda)

1. Introduction. Soient K un corps de nombres, $K^{(1)}$ le corps de classes de Hilbert de K, p un nombre premier et $K_p^{(1)}$ le p-corps de classes de Hilbert de K. Parmi les plus grands théorèmes concernant le problème de capitulation, on trouve "le théorème de l'idéal principal" qui s'énonce comme suit : *Toutes les classes de K capitulent dans $K^{(1)}$.* Ce théorème a été conjecturé par D. Hilbert et démontré par P. Furtwangler.

Si L est une sous-extension propre de $K^{(1)}/K$, alors la propriété que chaque classe de K capitule dans L n'est pas toujours vérifiée. En effet, il suffit de choisir un corps de nombres dont la p-partie du groupe de classes est non élémentaire.

L'existence d'une sous-extension propre de $K^{(1)}/K$ où toutes les classes capitulent est équivalente à l'existence d'un premier p divisant le nombre de classes de K et d'une sous-extension propre de $K_p^{(1)}/K$ où toutes les p-classes capitulent.

Plusieurs mathématiciens se sont intéressés à l'étude du problème de capitulation pour des cas particuliers de corps de nombres. On note les travaux suivants sur des corps ayant une 2-partie du groupe de classes de type $(2, 2)$.

H. Kisilevsky [Ki-76] a étudié le problème de capitulation pour les corps de nombres ayant un 2-groupe de classes de type $(2, 2)$. En utilisant un calcul sur le transfert, il a lié le problème de capitulation à la structure du groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ où $K_2^{(2)}$ désigne le deuxième 2-corps de classes de Hilbert de K. A. Derhem [De-92] a étudié le problème pour des corps quadratiques réels dont le 2-groupe de classes est de type $(2, 2)$ et le discriminant n'est divisible par aucun premier $q \equiv -1 \pmod 4$. A. Azizi [Az-93] a étudié le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux des corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ où d un entier naturel sans facteurs carrés et le 2-groupe de classes de K

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11R27, 11R37.
Key words and phrases: class group, capitulation, Hilbert class field.

est de type $(2,2)$; en utilisant les unités, il a trouvé le nombre des classes de K qui capitulent dans les sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$, ensuite il a déterminé la structure du groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. I. Benhamza [Be-97] a étudié le même problème pour les corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés et le 2-groupe de classes de K est de type $(2,2)$. Enfin, E. Benjamin et C. Snyder [Be-Sn-95] ont étudié le problème pour des corps quadratiques réels dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$ et le discriminant est divisible par un premier $q \equiv -1 \pmod 4$.

Ici, on s'intéresse au problème de capitulation des 2-classes d'idéaux des corps biquadratiques de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés.

Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ un corps biquadratique où d est un entier naturel sans facteurs carrés, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et $K^{(*)}$ le corps de genres de K. On suppose que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'après la théorie des groupes $K^{(*)} \neq K$ (car sinon le 2-groupe de classes de K serait cyclique) et par suite $[K^{(*)} : K] = 2$ ou $K^{(*)} = K_2^{(1)}$.

Dans cet article, on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$, en distinguant les cas où $[K^{(*)} : K] = 2$ et $K^{(*)} = K_2^{(1)}$. On commence par rappeler quelques résultats utiles dans le reste de ce travail.

2. Résultats préliminaires. Le premier résultat concerne le rang du 2-groupe de classes de certains corps de nombres.

Soient M un corps de nombres dont le nombre de classes est impair, L une extension quadratique de M, r le nombre des idéaux premiers de M ramifiés dans L, $\mathcal{N}_{L/M}$ l'application norme par rapport à l'extension L/M et E_M le groupe des unités de M.

Proposition 1 ([Gr-73]). *Avec les notations ci-dessus, le rang du 2-groupe de classes $C_{2,L}$ de L est donné par la formule suivante :*

$$\mathrm{rang}(C_{2,L}) = r - 1 - e \quad \textit{où} \quad 2^e = [E_M : \mathcal{N}_{L/M}(L^*) \cap E_M].$$

Le résultat suivant concerne une propriété intéressante du symbole du reste normique.

Proposition 2 ([Ha-30]). *Soient k un corps de nombres contenant les racines m-ièmes de l'unité, $\overline{k}$ une extension finie de k, $\alpha \in k^*$ et $\beta \in \overline{k}^*$. On note $\mathcal{P}$ un idéal premier de k, et $\overline{\mathcal{P}}$ un idéal premier de $\overline{k}$ au-dessus de $\mathcal{P}$. Alors*

$$\prod_{\overline{\mathcal{P}}|\mathcal{P}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\overline{\mathcal{P}}}\right)_m = \left(\frac{\mathcal{N}_{\overline{k}/k}(\beta), \alpha}{\mathcal{P}}\right)_m,$$

où le produit est pris sur tous les premiers de $\overline{k}$ *qui sont au-dessus de* $\mathcal{P}$.

Proposition 3 ([Be-Le-Sn-98]). *Soient* p, p', p'' *des premiers tels que pour tout* $i \in \{1, 2, 3\}$ *on a* $p_i \not\equiv -1 \pmod 4$ *et* $\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{p'}{p''}\right) = -\left(\frac{p}{p''}\right) = 1$. *Si on note* ε *l'unité fondamentale de* $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'p''})$, *alors on a :*

$$\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'p''})/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = -1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{p}{p'}\right)_4 \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = \left(\frac{p}{p''}\right)_4 \left(\frac{p''}{p}\right)_4.$$

Proposition 4 ([Be-Le-Sn-98]). *Soient* L *un corps de nombres dont le 2-groupe de classes est de type* $(2^m, 2^n)$ *où* m *et* n *sont deux entiers strictement positifs, et* $L^{(1)}$ *le 2-corps de classes de Hilbert de* L. *S'il existe une extension quadratique non ramifiée de* L *dont la 2-partie du nombre des classes est égale à* 2^{m+n-1}, *alors la 2-partie du nombre des classes des trois extensions quadratiques non ramifiées de* L *est égale à* 2^{m+n-1} *et la suite des 2-corps de classes de Hilbert de* L *s'arrête en* $L^{(1)}$.

Le résultat suivant concerne le problème de capitulation pour un corps de nombres dont le 2-groupe de classes est de type $(2, 2)$.

Soient K un corps de nombres, L une extension cyclique non ramifiée de K, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$. On pose $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. Alors $G' = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K_2^{(1)})$ et $G/G' \simeq \mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$. On note C_K (resp. C_L) le groupe de classes de K (resp. L).

Soit j l'application de C_K vers C_L qui fait correspondre à la classe d'un idéal I de K l'idéal dans L engendré par I ; on désigne par $\mathcal{N}$ la norme de L/K.

On dit que K est de *type* (A) si $|\mathrm{Ker}(j) \cap \mathcal{N}(C_K)| > 1$, est de *type* (B) si $|\mathrm{Ker}(j) \cap \mathcal{N}(C_K)| = 1$, où $\mathcal{N}(C_K)$ est l'image de C_K par $\mathcal{N}$.

On suppose que le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$, c'est-à-dire G/G' est de type $(2, 2)$. Alors d'après [Ki-76], le groupe G est isomorphe à Q_m, D_m ou S_m avec :

$$Q_m = \langle x, y\rangle \quad \text{où} \quad x^{2^{m-2}} = y^2 = a,\ a^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1},$$

$$D_m = \langle x, y\rangle \quad \text{où} \quad x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1},$$

$$S_m = \langle x, y\rangle \quad \text{où} \quad x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{2^{m-2}-1}.$$

Dans tous ces cas on a $G' = \langle x^2\rangle$ et les trois sous-groupes d'indice 2 de G sont $H_1 = \langle x\rangle$, $H_2 = \langle x^2, y\rangle$ et $H_3 = \langle x^2, xy\rangle$.

Soient K_1/K, K_2/K et K_3/K les trois sous-extensions de $K_2^{(1)}/K$ tels que K_i est le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par H_i et j_i l'application défini pour $L = K_i$. Si $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$, alors il existe une sous-extension M de $K_2^{(2)}/K_2^{(1)}$ de degré 2 sur $K_2^{(1)}$.

Théorème 1 ([Ki-76]). *On suppose que G/G' est de type $(2,2)$. Alors on a :*

(i) *Si $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$, alors les corps K_i sont de type (A), $|\mathrm{Ker}(j_i)| = 4$ pour $i = 1, 2, 3$ et G est de type $(2,2)$.*

(ii) *Si $\mathrm{Gal}(M/K) \simeq Q_3$, alors chaque K_i est de type (A), $|\mathrm{Ker}(j_i)| = 2$ pour $i = 1, 2, 3$ et $G \simeq Q_3$.*

(iii) *Si $\mathrm{Gal}(M/K) \simeq D_3$, alors K_2 et K_3 sont de type (B) et $|\mathrm{Ker}(j_2)| = |\mathrm{Ker}(j_3)| = 2$. De plus si M_1 est de type (B), alors $|\mathrm{Ker}(j_1)| = 2$ et $G \simeq S_m$. Si M_1 est de type (A) et $|\mathrm{Ker}(j_1)| = 2$, alors $G \simeq Q_m$. Enfin si M_1 est de type (A) et $|\mathrm{Ker}(j_1)| = 4$, alors $G \simeq D_m$.*

Proposition 5. *Avec les notations précédentes, on a :*

(i) *Il existe une sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$ dont le 2-groupe de classes est cyclique.*

(ii) *Les 2-groupes de classes de K_2 et de K_3 sont cycliques si et seulement si G est abélien ou bien $G \simeq Q_3$.*

(iii) *Si G est diédral, alors H_2 et H_3 sont diédrals.*

(iv) *Si G est quaternionique, alors H_2 et H_3 sont quaternioniques.*

(v) *Si G est semi-diédral, alors H_2 est diédral, tandis que H_3 est quaternionique.*

Proposition 6 ([Ki-76]). *Soient K un corps de nombres dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$, et K_1, K_2 et K_3 les trois extensions quadratiques non ramifiées de K. Alors on a l'une des propriétés suivantes :*

(i) *Les 2-groupes de classes des corps K_1, K_2 et K_3 sont cycliques.*

(ii) *Le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique et les 2-groupes de classes de K_2 et de K_3 sont de type $(2,2)$.*

3. 2-Groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$. Soient $d \neq 2$ un entier naturel sans facteurs carrés, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ un corps biquadratique et $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K. Pour m un entier naturel, on note $e(m)$ la norme par rapport à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$ de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Dans ce paragraphe, on va detérminer tous les entiers d pour lesquels $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$. On aura besoin de certains résultats sur les unités qu'on va démontrer dans ce qui suit :

3.1. *Lemmes sur les unités*

Lemme 1. *Soient p et p' deux premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'})$. Alors on a :*

(i) *L'indice des unités* Q_K *de* K *est égal à* 1 *ou* 2.

(ii) *Si* $e(2pp') = 1$ *et* $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, *alors* $Q_K = 2$.

Preuve. Soient ε_1, ε_2 et ε_3 les unités fondamentales respectives de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$.

(i) On sait d'après [Kub-56] que $Q_K \in \{1, 2, 4\}$; alors il suffit de montrer que $Q_K \neq 4$. Comme $e(2) = -1$, d'après [Kur-43] on a $Q_K = 4$ si et seulement si ε_2 et ε_3 sont des carrés dans K.

On pose $\varepsilon_2 = x/2+(y/2)\sqrt{pp'}$ où x et y sont deux entiers. Si $e(pp') = -1$, alors ε_2 n'est pas un carré dans K. Si $e(pp') = 1$, alors $(x-2)(x+2) = pp'y^2$, par suite s'il existe quatres entiers y_1, y_2, m et n tels que :

$$\begin{cases} x \pm 2 = 2my_1^2, \\ x \mp 2 = 2ny_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } y_1y_2 = y \text{ et } mn = pp',$$

alors $ny_2^2 - my_1^2 = \pm 2$ et par suite y_1 et y_2 sont de même parité. Or $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$ implique que $ny_2^2 - my_1^2 \equiv 0 \pmod 4$. Donc on a une contradiction.

S'il existe deux entiers y_1 et y_2 tels que :

$$\begin{cases} x \pm 2 = pp'y_1^2, \\ x \mp 2 = y_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } y_1y_2 = y \text{ et } mn = pp',$$

alors en posant $W = y_1\sqrt{pp'} + y_2$, on trouve que $W^2 = 4\varepsilon_2$. Ainsi $\sqrt{\varepsilon_2} = W/2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$. Ceci contredit le fait que ε_2 est l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$. Par conséquent, il existe deux entiers y_1 et y_2 tels que :

$$\begin{cases} x \pm 2 = py_1^2, \\ x \mp 2 = p'y_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } y_1y_2 = y.$$

Alors en posant $W = y_1\sqrt{p} + y_2\sqrt{p'}$, on trouve que $W^2 = 4\varepsilon_2$. Ainsi $\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(y_1\sqrt{p} + y_2\sqrt{p'}) \notin K$. D'où $Q_K \in \{1, 2\}$.

(ii) On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = 1$ et $e(2pp') = 1$. On pose $\varepsilon_3 = x' + y'\sqrt{2pp'}$ où x' et y' sont deux entiers. On a $(x'-1)(x'+1) = 2pp'y^2$. Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, nécessairement il existe deux entiers naturels y_1 et y_2 tels que :

$$\begin{cases} x \pm 1 = y_1^2, \\ x \mp 1 = 2pp'y_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } y_1y_2 = y.$$

Alors en posant $W = y_1 + y_2\sqrt{2pp'}$, on trouve que $W^2 = 2\varepsilon_3$. Ainsi $\sqrt{\varepsilon_3} = (y_1/2)\sqrt{2} + y_2\sqrt{pp'} \in K$. D'où le résultat. ∎

Lemme 2. *Soient* p, q_1, q_2 *des premiers différents tels que* $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ *et* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq_1q_2})$. *Si* $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, *alors* $Q_K = 2$.

Preuve. Soit $\varepsilon_1 = x/2+(y/2)\sqrt{pq_1q_2}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq_1q_2})$ où x et y sont deux entiers. On a $e(pq_1q_2) = 1$ et donc $(x-2)(x+2) =$

$pq_1q_2y^2$. Comme $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, il existe deux entiers naturels y_1 et y_2 tels que

$$\begin{cases} x-2 = py_1^2, \\ x+2 = q_1q_2y_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } y_1y_2 = y.$$

En posant $W = y_1\sqrt{p} + y_2\sqrt{q_1q_2}$, on a $W^2 = 4\varepsilon_1$. Par suite,

$$\sqrt{\varepsilon_1} = \frac{y_1\sqrt{p}}{2} + \frac{y_2}{2}\sqrt{q_1q_2}. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon_2 = z + t\sqrt{2pq_1q_2}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$. On a $e(2pq_1q_2) = 1$ et donc $(z-1)(z+1) = 2pq_1q_2t^2$. Comme $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, on a trois possibilités. La première est

$$\begin{cases} z-1 = 2pt_1^2, \\ z+1 = q_1q_2t_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } t_1t_2 = t\,;$$

alors on trouve que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = t_1\sqrt{p} + \frac{t_2}{2}\sqrt{2q_1q_2}. \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire que $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in K$, par conséquent on a $Q_K = 2$.

La deuxième possibilité est

$$\begin{cases} z-1 = 2q_1q_2t_1^2, \\ z+1 = pt_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } t_1t_2 = t\,;$$

alors on trouve que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = t_1\sqrt{q_1q_2} + \frac{t_2}{2}\sqrt{2p}. \tag{3}$$

De (1) et (3), on conclut que $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in K$. Ainsi, $Q_K = 2$.

La troisième possibilité est

$$\begin{cases} z-1 = t_1^2, \\ z+1 = 2pq_1q_2t_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } t_1t_2 = t\,;$$

alors on trouve que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = t_2\sqrt{pq_1q_2} + \frac{t_1}{2}\sqrt{2}.$$

Par conséquent $\sqrt{\varepsilon_2} \in K$, ainsi $Q_K = 2$ et le lemme est démontré. ∎

LEMME 3. *Soient q_1, q_2, q_3 des premiers différents tels que $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2q_3})$. Si $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{2}{q_3}\right) = -1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1$, alors $Q_K \neq 1$.*

Preuve. Soit $\varepsilon = x + y\sqrt{2q_1q_2q_3}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2q_1q_2q_3})$. On a $e(2q_1q_2q_3) = 1$, par suite $(x-1)(x+1) = 2q_1q_2q_3y^2$. Comme $\left(\frac{2}{q_1}\right) =$

$\left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{2}{q_3}\right) = -1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1$, la seule possibilité est :

$$\begin{cases} x-1 = y_1^2, \\ x+1 = 2q_1q_2q_3y_2^2, \end{cases} \quad \text{où } y_1y_2 = y.$$

Si on pose $z = y_1 + y_2\sqrt{2q_1q_2q_3}$, alors $z^2 = 2\varepsilon$. Par suite, $\sqrt{\varepsilon} = (\sqrt{2}/2)y_1 + \sqrt{q_1q_2q_3}y_2 \in K$, ainsi ε est un carré dans K. D'où $Q_K \neq 1$. ∎

Lemme 4. *Soient q_1, q_2, q_3 des premiers différents tels que $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2q_3})$. Si $\left(\frac{2}{q_1}\right) = -\left(\frac{2}{q_2}\right) = -\left(\frac{2}{q_3}\right) = 1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$, alors $Q_K = 1$.*

Preuve. On suppose que $\left(\frac{2}{q_1}\right) = -\left(\frac{2}{q_2}\right) = -\left(\frac{2}{q_3}\right) = 1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = -\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = 1$. Soient $\varepsilon_1 = x + y\sqrt{q_1q_2q_3}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2q_3})$ et $\varepsilon_2 = u + v\sqrt{2q_1q_2q_3}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2q_1q_2q_3})$. Les égalités $e(q_1q_2q_3) = e(2q_1q_2q_3) = 1$ impliquent $(x-1)(x+1) = y^2q_1q_2q_3$ et $(u-1)(u+1) = 2q_1q_2q_3v^2$. Si $\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = 1$, alors les seules possibilités sont :

$$\begin{cases} x-1 = q_2y_1^2, \\ x+1 = q_1q_3y_2^2, \end{cases} \quad \text{où } y_1y_2 = y,$$

et

$$\begin{cases} u-1 = 2q_1q_2v_1^2, \\ u+1 = q_3v_2^2, \end{cases} \quad \text{où } v_1v_2 = v.$$

Si on pose $z_1 = y_1\sqrt{q_2} + y_2\sqrt{q_1q_3}$ et $z_2 = v_1\sqrt{2q_1q_2} + v_2\sqrt{q_3}$, alors $z_1^2 = 2\varepsilon_1$ et $z_2^2 = 2\varepsilon_2$. Par suite, $\sqrt{\varepsilon_1} = z_1\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{\varepsilon_2} = z_2\sqrt{2}/2$. Par conséquent, $\sqrt{\varepsilon_1} \notin K, \sqrt{\varepsilon_2} \notin K$ et $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \notin K$, ainsi $Q_K = 1$.

Si $\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1$, alors les seules possibilités sont :

$$\begin{cases} x-1 = 2q_2y_1^2, \\ x+1 = 2q_1q_3y_2^2, \end{cases} \quad \text{où } 2y_1y_2 = y,$$

et

$$\begin{cases} u-1 = q_1q_2v_1^2, \\ u+1 = 2q_3v_2^2, \end{cases} \quad \text{où } v_1v_2 = v.$$

Si on pose $z_3 = y_1\sqrt{2q_2} + y_2\sqrt{2q_1q_3}$ et $z_4 = v_1\sqrt{q_1q_2} + v_2\sqrt{2q_3}$, alors $z_3^2 = 2\varepsilon_1$ et $z_4^2 = 2\varepsilon_2$, par suite $\sqrt{\varepsilon_1} = z_3\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{\varepsilon_2} = z_4\sqrt{2}/2$. Par conséquent, $\sqrt{\varepsilon_1} \notin K$, $\sqrt{\varepsilon_2} \notin K$ et $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \notin K$, ainsi $Q_K = 1$. ∎

Lemme 5. *Soient p, p', q des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$. Si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$, alors $Q_K = 1$.*

Preuve. On suppose que $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = 1$. Soient $\varepsilon_1 = x + y\sqrt{pp'q}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'q})$ et $\varepsilon_2 = z + t\sqrt{2pp'q}$

l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'q})$. Comme $e(pp'q) = e(2pp'q) = 1$, alors $(x-1)(x+1) = pp'qy^2$ et $(z-1)(z+1) = 2pp'qt^2$. On distingue deux cas :

1) $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$. Alors les seules possibilités sont :

$$\begin{cases} x-1 = 2p'qy_1^2, \\ x+1 = 2py_2^2, \end{cases} \quad \text{où } 2y_1y_2 = y,$$

et

$$\begin{cases} z-1 = 2p't_1^2, \\ z+1 = pqt_2^2, \end{cases} \quad \text{où } t_1t_2 = t.$$

Par suite, on trouve que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{p'q} + y_2\sqrt{p} \tag{1}$$

et

$$\sqrt{\varepsilon_2} = t_1\sqrt{p'} + \frac{t_2}{2}\sqrt{2pq}. \tag{2}$$

De (1) et (2), on conclut que $\sqrt{\varepsilon_1} \notin K$, $\sqrt{\varepsilon_2} \notin K$ et $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \notin K$. Par conséquent, $Q_K = 1$.

2) $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$. Alors les seules possibilités sont :

$$\begin{cases} x \pm 1 = py_1^2, \\ x \mp 1 = p'qy_2^2, \end{cases} \quad \text{où } y_1y_2 = y,$$

et

$$\begin{cases} z \pm 1 = p't_1^2, \\ z \mp 1 = 2pqt_2^2, \end{cases} \quad \text{où } t_1t_2 = t.$$

Par suite, on trouve que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = \frac{y_1}{2}\sqrt{2p} + \frac{y_2}{2}\sqrt{2p'q} \tag{3}$$

et

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{t_1}{2}\sqrt{2p'} + t_2\sqrt{pq}. \tag{4}$$

De (3) et (4), on conclut que $\sqrt{\varepsilon_1} \notin K$, $\sqrt{\varepsilon_2} \notin K$ et $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \notin K$. Par conséquent, $Q_K = 1$. ∎

Lemme 6. *Soient q, p deux premiers différents tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$. Alors on a :*

(i) $e(2p) = 1 \Rightarrow Q_L = 4$.
(ii) $e(2p) = -1 \Rightarrow Q_L = 2$.

Preuve. (i) Soient ε_1, ε_2 et ε_3 les unités fondamentales réspectives de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$. On vérifie facilement qu'il existe deux nombres rationnels a_1 et a_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{2q}. \tag{1}$$

Comme $e(2p) = 1$, il existe deux nombres rationnels b_1 et b_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{p}. \tag{2}$$

D'autre part il existe deux nombres rationnels c_1 et c_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_3} = c_1\sqrt{m} + c_2\sqrt{n} \tag{3}$$

où m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que $mn = 2pq$.

De (1) et (2), on déduit que $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in L$ et de (1) et (3), on déduit que $\sqrt{\varepsilon_3} \in L$ ou bien $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \in L$. Par conséquent, $Q_L = 4$.

(ii) Puisque $e(2p) = -1$, d'après (i), on a $\sqrt{\varepsilon_1} \notin L$ et $\sqrt{\varepsilon_3} \in L$ ou bien $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \in L$. Par suite $Q_L = 2$. ∎

LEMME 7. *Soient p, p' deux premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2p'})$.*

(i) *Si $e(2pp') = e(2p') = 1$, alors $Q_L = 2$.*
(ii) *Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$ et $e(2pp') = -e(2p') = 1$, alors $Q_L = 1$.*

Preuve. Soient ε_1, ε_2 et ε_3 les unités fondamentales respectives de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2p'})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2p'q})$. On a $e(p) = -1$, par suite ε_1 n'est pas un carré dans L.

(i) Comme $e(2p') = 1$, il existe deux nombres rationnels x et y tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = x\sqrt{2} + y\sqrt{p'}. \tag{1}$$

Comme $e(2pp') = 1$, il existe deux nombres rationnels z et t tels que

$$\sqrt{\varepsilon_3} = z\sqrt{m} + t\sqrt{n} \tag{2}$$

où m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que $mn = 2pp'$. De (1) et (2), on tire que $\sqrt{\varepsilon_3} \in L$ ou $\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_3} \in L$, ainsi $Q_L = 2$.

(ii) Comme $e(2p') = -1$, ε_2 n'est pas un carré dans L. On pose $\varepsilon_3 = u + v\sqrt{2pp'}$ où u et v sont deux entiers. Comme $e(2pp') = 1$, $(u-1)(u+1) = 2pp'v^2$. On suppose que ε_3 est un carré dans L. Alors il existe deux entiers v_1 et v_2 tels que :

$$\begin{cases} u \pm 1 = 2pv_1^2, \\ u \mp 1 = p'v_2^2, \end{cases} \qquad \text{où } v_1v_2 = v.$$

On trouve que $\pm 2 = p'v_2^2 - 2pv_1^2$ et comme $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$, on a une contradiction et par suite $Q_L = 1$. ∎

LEMME 8. *Soient q_1, q_2, p des premiers différents tels que $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2}, \sqrt{2p})$. Si $e(2p) = 1$, alors $Q_L = 2$.*

Preuve. Soit ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$. Comme $e(q_1q_2) = 1$, on vérifie facilement qu'il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = y_1\sqrt{q_1} + y_2\sqrt{q_2}. \tag{1}$$

Soit ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$. Comme $e(2p)=1$, il existe deux nombres rationnels t_1 et t_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2}=t_1\sqrt{2}+t_2\sqrt{p}. \tag{2}$$

Soit ε_3 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$. Comme $e(2pq_1q_2)=1$, il existe deux nombres rationnels v_1 et v_2 et deux entiers naturels m et n premiers entre eux tels que $mn=2pq_1q_2$ et

$$\sqrt{\varepsilon_3}=v_1\sqrt{m}+v_2\sqrt{n}. \tag{3}$$

De (1)–(3), on tire qu'il existe trois entiers naturels uniques i, j et k tels que $\{i,j,k\}\subset\{0,1\}$, $i+j+k\neq 0$ et $\sqrt{\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j\varepsilon_3^k}\in L$; par suite, $Q_L=2$. ∎

Lemme 9. *Soient q_1, q_2, p des premiers différents tels que $p\equiv -q_1\equiv -q_2\equiv 1 \pmod 4$ et $L=\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2},\sqrt{2p})$. On suppose que $e(2p)=-1$.*

(i) *Si $\left(\frac{2}{q_1}\right)\left(\frac{2}{q_2}\right)=\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right)=-1$, $\left(\frac{2}{p}\right)=1$ et $\left(\frac{2}{q_1}\right)=\left(\frac{p}{q_1}\right)$, alors $Q_L=2$.*

(ii) *Si $\left(\frac{2}{p}\right)=1$, $\left[\left(\frac{2}{q_1}\right)=-1 \text{ ou } \left(\frac{2}{q_2}\right)=-1\right]$, $\left[\left(\frac{p}{q_1}\right)=-1 \text{ ou } \left(\frac{p}{q_2}\right)=-1\right]$ et $\left(\frac{2}{q_1}\right)\neq\left(\frac{p}{q_1}\right)$, alors $Q_L=1$.*

Preuve. Soit ε_1 et ε_2 les unités fondamentales respectives de $\mathbb{Q}(\sqrt{q_1q_2})$ et de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$.

(i) On sait qu'il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1}=y_1\sqrt{q_1}+y_2\sqrt{q_2}. \tag{1}$$

Soit w un entier naturel sans facteurs carrés tel que $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})/\mathbb{Q}}(1+\varepsilon_2)=wt^2$ où t est un entier naturel. D'après les tables de [Be-Sn-95], on a $w\in\{2pq_1,2pq_2,q_1,q_2\}$, par suite il existe deux nombres rationnels u et v tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2}=u\sqrt{w}+v\sqrt{\frac{2pq_1q_2}{w}}. \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire que $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\in L$ et puisque $e(2p)=-1$, l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ n'est pas un carré dans L et par conséquent $Q_L=2$.

(ii) D'après les tables de [Be-Sn-95], on a $w\in\{2q_1q_2,2q_1,2q_2,pq_1,pq_2\}$, par suite il existe deux nombres rationnels u' et v' tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2}=u'\sqrt{w}+v'\sqrt{\frac{2pq_1q_2}{w}}. \tag{3}$$

De (1) et (3), on tire que $\sqrt{\varepsilon_1}\notin L$, $\sqrt{\varepsilon_2}\notin L$ et $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\notin L$ et donc $Q_L=1$. ∎

Dans la suite on désigne par m un entier naturel, $h(m)$ (resp. $h'(m)$) le 2-nombre de classes du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ (resp. le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$) et $h(K)$ (resp. $h'(K)$) le 2-nombre de classes de K (resp. le nombre de classes de K). Soit E (resp. E_i) le groupe des unités du corps

K (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{m_i})$) où $m_1 = 2$, $m_2 = d$, $m_3 = 2d$ et $i = 1, 2, 3$. On note $Q_K = [E : \prod_{i=1}^{3} E_i]$ l'indice des unités de K. Alors, d'après [Wa-66], on a

$$(*) \qquad h'(K) = \frac{Q_K h'(2) h'(d) h'(2d)}{4}.$$

Dans ce paragraphe, on va déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur d pour que le 2-groupe de classes $C_{2,K}$ de K soit de type $(2, 2)$. Alors dans la suite on suppose que le 2-groupe de classes de K est d'ordre 4 et on distingue les cas $[K^{(*)} : K] = 2$ et $K^{(*)} = K_2^{(1)}$.

3.2. *2-groupe de classes dans le cas où* $[K^{(*)} : K] = 2$. On suppose que $C_{2,K}$ est d'ordre 4 et $[K^{(*)} : K] = 2$; alors d'après la théorie des genres, les formes possibles de d sont :

(I) $d = pq$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$.
(II) $d = pp'$ où $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$.
(III) $d = pq_1q_2$ où $p \equiv q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 4$.

On suppose que K est de type (I).

Théorème 2. *Soient p et q deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$. Alors le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$.*

Preuve. D'après [Az-Mo-1], le 2-groupe de classes de K est de rang 2 si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$. Alors, dans ce qui suit, on suppose que $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

Si $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, alors d'après [Ka-76], on a $4 \mid h(pq)$ et $4 \mid h(2pq)$. D'autre part, d'après [Az-00], l'indice des unités Q_K de K est différent de 1, par suite 8 divise $h(K)$. Ainsi le cas $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ est à rejeter. Si $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, alors d'après [Ka-76], on a $h(pq) \equiv h(2pq) \equiv 2 \pmod 4$. D'autre part d'après [Kub-56], on a $Q_K \in \{1, 2, 4\}$ et comme $\mathrm{rang}(C_{2,K}) = 2$, alors $4 \mid h(K)$ et par suite $Q_K = 4$ et $h(K) = 4$. Ainsi le théorème est démontré. ∎

On suppose que K est de type (II).

Théorème 3. *Soient p et p' deux premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'})$, alors le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée* :

(i) $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$.

(ii) $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $pp' = a^2 + b^2$, $a \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ *ou* $b \not\equiv 0 \pmod 8$ *et* $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = -\left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8}$.

(iii) $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $pp' = a^2 + b^2$, $a \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ *ou* $b \not\equiv 0 \pmod 8$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = \left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8} = -1$ *et* $e(2pp') = -1$.

(iv) $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$ *et* $\left(\frac{p'}{p}\right)_4 \neq \left(\frac{p}{p'}\right)_4$.

Preuve. On sait, d'après [Az-Mo-1] que $\mathrm{rang}(C_{2,K}) = 2$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(a) $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$.

(b) $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = 1$ et $\left[\left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}\right.$ ou $\left.\left(\frac{2}{p'}\right)_4 \neq (-1)^{(p'-1)/8}\right]$.

Dans la suite, on suppose que p et p' vérifient l'une des conditions précédentes. Puisque l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$ est non ramifiée, $h(K) \equiv 4 \pmod 8$ implique que $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$ ou $h(2pp') \equiv 8 \pmod{16}$.

Supposons que (a) soit vérifiée. Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$, alors d'après [Ka-76], on a $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$ et comme $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$ est une extension non ramifiée et $\mathrm{rang}(C_{2,K}) = 2$, d'après la proposition 6, le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$. Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4$, alors d'après [Kuč-95], $4 \mid h(pp')$. Si de plus $8 \mid h(2pp')$, alors d'après la formule $(*)$ citée précédemment, on trouve que $8 \mid h(K)$; si $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$, alors d'après [Az-Mo-1], on a $\mathrm{rang}(C_{2,M}) = 3$ où $M = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2p'})$; or $M/\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$ est une extension non ramifiée, alors d'après la proposition 6, on obtient une contradiction. Par conséquent le cas $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4$ est à rejeter. Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{p}{p'}\right)_4 \neq \left(\frac{p'}{p}\right)_4$, alors d'après la proposition 3, on a $e(2pp') = 1$ (car $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$), par suite, d'après [Ka-76], $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$ et d'après [Kuč-95], $h(pp') \equiv 2 \pmod 4$; alors en utilisant la formule $(*)$, on a $h(K) = 2Q_K$. Or $\mathrm{rang}(C_{2,K}) = 2$, alors $4 \mid h(K)$ et d'après le lemme 1, on trouve $Q_K = 2$ et $h(K) \equiv 4 \pmod 8$.

Supposons maintenant que (b) soit vérifiée. Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, alors d'après [Ka-76], $8 \mid h(2pp')$ et si $e(2pp') = -1$, alors $16 \mid h(2pp')$. On sait que $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ implique $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$ ou $h(2pp') \equiv 8 \pmod{16}$. Par la suite on suppose que $e(2pp') = 1$; alors $8 \mid h(2pp')$ et $Q_K = 2$ (voir lemme 1), ainsi $8 \mid h(K)$ et le cas $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ est à rejeter. Dans la suite on suppose que $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$; on pose $pp' = a^2 + b^2$ où a et b sont deux entiers naturels. Si $a \equiv \pm 1 \pmod 8$ et $b \equiv 0 \pmod 8$, alors d'après [Ka-76], $8 \mid h(2pp')$ et si $e(2pp') = -1$, alors $16 \mid h(2pp')$; par suite comme dans le cas où $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, on trouve que $h(K) \not\equiv 4 \pmod 8$ et donc le cas $a \equiv \pm 1 \pmod 8$ et $b \equiv 0 \pmod 8$ est à rejeter. On suppose que $a \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ ou $b \not\equiv 0 \pmod 8$; alors si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = -\left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8}$, on a d'après la proposition 3, $e(2pp') = -1$ et d'après [Ka-76], on a $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$. D'après [Kuč-95], on a $h(pp') \equiv 2 \pmod 4$; comme $\mathrm{rang}(C_{2,K}) = 2$, alors $Q_K = 2$ (car $Q_K \neq 4$, voir lemme 1) et $h(K) \equiv 4 \pmod 8$. Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = \left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8} = -1$, alors d'après [Ka-76], on a $e(2pp') = -1$ et $h(2pp') \equiv 8 \pmod{16}$. Soit $M = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2p'})$; puisque $M/\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$ est une extension non ramifiée, alors d'après la proposition 4, on a $h(K) \equiv 4 \pmod 8 \Leftrightarrow h(M) \equiv 4 \pmod 8$. D'autre part, d'après [Kuč-95], on a $h(2p') \equiv 2 \pmod 4$ et $e(2p') = 1$. Or

$e(2p') = 1$ implique qu'il existe deux nombres rationnels x et y tels que $\sqrt{\varepsilon_{pp'}} = x\sqrt{2} + y\sqrt{p'} \notin M$ et comme les unités fondamentales de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$ sont de normes -1, alors $Q_M = 1$ et $h(M) \equiv 4 \pmod 8$, donc $h(K) \equiv 4 \pmod 8$. Ainsi le théorème est démontré. ∎

On suppose que K est de type (III).

THÉORÈME 4. *Soient p, q_1 et q_2 des premiers différents tels que $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq_1q_2})$. Alors le 2-groupe de classes de K est de type $(2,2)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$.
(ii) $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$.
(iii) $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q_1}{p}\right) = -\left(\frac{q_2}{p}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{2}{q_1}\right)\left(\frac{2}{q_2}\right) = -1$.
(iv) $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{2}{q_1}\right)\left(\frac{2}{q_2}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right)$.
(v) $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{2}{q_1}\right) \neq \left(\frac{p}{q_1}\right)$ *et* $\left[\left(\frac{2}{q_1}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{2}{q_2}\right) = -1\right]$.

Preuve. D'après [Az-Mo-1], on a $\operatorname{rang}(C_{2,K}) = 2$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(a) $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ et $\left[\left(\frac{2}{q_1}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{2}{q_2}\right) = -1\right]$.
(b) $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ et $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = 1$.

Dans la suite on suppose que p, q_1 et q_2 vérifient l'une des conditions précédentes.

Supposons que (a) soit vérifiée. Si $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$, alors d'après [Ka-76], on a $4 \mid h(pq_1q_2)$. De plus, d'après [Be-Sn-95], $8 \mid h(2pq_1q_2)$, par suite 8 divise l'ordre de $C_{2,K}$. Ainsi le cas $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ est à rejeter. Si $\left(\frac{p}{q_1}\right) = -1$ ou bien $\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, alors, d'après [Ka-76], on a $h(pq_1q_2) \equiv 2 \pmod 4$. De plus, si $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, alors d'après [Be-Sn-95], on a $8 \mid h(2pq_1q_2)$ et d'après le lemme 2, $Q_K = 2$, d'où 8 divise l'ordre de $C_{2,K}$. Ainsi, le cas $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$ est à rejeter. Si $\left(\frac{2}{q_1}\right)\left(\frac{2}{q_2}\right) = -1$ ou bien $\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, alors, d'après [Be-Sn-95], on a $h(2pq_1q_2) \equiv 4 \pmod 8$. D'autre part, d'après la théorie des genres, le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$ est de type $(2,2)$ et comme $C_{2,K}$ est de rang 2 et K est une extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'q})$, alors d'après la proposition 6, on trouve que $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$. Par conséquent, si $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, alors $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$ si et seulement si $\left[\left(\frac{2}{q_1}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{2}{q_2}\right) = -1\right]$, $\left[\left(\frac{p}{q_1}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{p}{q_2}\right) = -1\right]$ et $\left[\left(\frac{2}{q_1}\right)\left(\frac{2}{q_2}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1\right]$.

Supposons maintenant que (b) soit vérifiée. Si $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$, alors $4 \mid h(pq_1q_2)$ et d'après [Be-Sn-95], on a $8 \mid h(2pq_1q_2)$. Par suite 8 divise l'ordre de $C_{2,K}$, ainsi le cas $\left(\frac{p}{q_1}\right) = \left(\frac{p}{q_2}\right) = 1$ est à rejeter. Si $\left(\frac{p}{q_1}\right) = -1$ ou bien $\left(\frac{p}{q_2}\right) = -1$, alors d'après [Be-Sn-95], $h(2pq_1q_2) \equiv 4 \pmod 8$ et comme $\mathrm{rang}(C_{2,K}) = 2$ et $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$ est une extension quadratique non ramifiée, d'après la proposition 6, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$. ∎

3.3. *2-groupe de classes dans le cas où* $K^{(*)} = K_2^{(1)}$. On suppose que $C_{2,K}$ est d'ordre 4 et $K^{(*)} = K_2^{(1)}$. Alors on a $[K^{(*)} : \mathbb{Q}] = 16$.

Soient p, p', q, q_1, q_2, q_3 et q_4 des premiers impairs. D'après la théorie des genres, les formes possibles de d sont :

1) $d = q_1q_2q_3$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$.
2) $d = pp'q$ où $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$.
3) $d = p_1p_2p_3$ où $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1 \pmod 4$.
4) $d = q_1q_2q_3q_4$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv q_4 \equiv -1 \pmod 4$.
5) $d = pp'q_1q_2$ où $p \equiv p' \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$.

Les cas 3), 4) et 5) sont à rejeter. En effet : D'après la théorie des genres on a $4 \mid h(d)$ et $8 \mid h(2d)$, par suite $8 \mid h(K)$. Pour les cas 1) et 2) on a $4 \mid h(d)$ et $4 \mid h(2d)$, par suite $h(K) \equiv 4 \pmod 8$ si et seulement si $h(d) \equiv h(2d) \equiv 4 \pmod 8$ et $Q_K = 1$.

Étude du cas 1). En ce cas, d'après [Az-Mo-1], $C_{2,K}$ est de rang égal à 2 si et seulement si au plus un élément de $\left\{\left(\frac{2}{q_1}\right), \left(\frac{2}{q_2}\right), \left(\frac{2}{q_3}\right)\right\}$ est égal à 1.

On suppose que $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{2}{q_3}\right) = -1$. Alors d'après [Be-Le-Sn-98] on a :

$$h(q_1q_2q_3) \equiv 4 \pmod 8 \quad \text{si et seulement si} \quad \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1,$$
$$h(2q_1q_2q_3) \equiv 4 \pmod 8 \quad \text{si et seulement si} \quad \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1.$$

PROPOSITION 7. *Soient q_1, q_2, q_3 des premiers différents tels que $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2q_3})$. Si $\left(\frac{2}{q_1}\right) = \left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{2}{q_3}\right) = -1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1$, alors $C_{2,K}$ ne peut jamais être de type $(2,2)$.*

Preuve. On a $h(q_1q_2q_3) \equiv h(2q_1q_2q_3) \equiv 4 \pmod 8$. D'après le lemme 3, on a $Q_K \neq 1$, par suite 8 divise l'ordre de $C_{2,K}$. Ainsi le résultat. ∎

On suppose que $\left(\frac{2}{q_1}\right) = -\left(\frac{2}{q_2}\right) = -\left(\frac{2}{q_3}\right) = 1$. Alors d'après [Be-Le-Sn-98] on a :

$$h(q_1q_2q_3) \equiv 4 \pmod 8 \quad \text{si et seulement si} \quad \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1,$$
$$h(2q_1q_2q_3) \equiv 4 \pmod 8 \quad \text{si et seulement si} \quad \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = 1 \text{ ou } \left(\frac{q_1}{q_3}\right) = 1.$$

Ainsi $h(q_1q_2q_3) \equiv h(2q_1q_2q_3) \equiv 4 \pmod 8$ si et seulement si $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$.

PROPOSITION 8. *Soient q_1, q_2, q_3 des premiers différents tels que $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2q_3})$. Si $\left(\frac{2}{q_1}\right) = -\left(\frac{2}{q_2}\right) = -\left(\frac{2}{q_3}\right) = 1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$, alors $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.*

Preuve. On a $h(q_1q_2q_3) \equiv h(2q_1q_2q_3) \equiv 4 \pmod 8$. D'après le lemme 4, on a $Q_K = 1$, par suite $h(K) \equiv 4 \pmod 8$. Puisque $C_{2,K}$ est de rang 2, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$. ∎

Étude du cas 2). En ce cas, d'après [Az-Mo-1], $C_{2,K}$ est de rang égal à 2 si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$. On sait d'après la théorie des genres que $4 \mid h(pp'q)$ et $4 \mid h(2pp'q)$, par suite $h(K) \equiv 4 \pmod 8$ si et seulement si $h(pp'q) \equiv h(2pp'q) \equiv 4 \pmod 8$ et $Q_K = 1$. On suppose dans la suite que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$. D'après [Be-Sn-95], on a :

$$h(pp'q) \equiv 4 \pmod 8 \quad \text{si et seulement si} \quad \left(\frac{q}{p'}\right) = -1 \text{ ou } \left(\frac{q}{p}\right) = -1,$$

$$h(2pp'q) \equiv 4 \pmod 8 \quad \text{si et seulement si} \quad \text{on n'a pas } \left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{2}{p}\right).$$

Par conséquent, $h(pp'q) \equiv h(2pp'q) \equiv 4 \pmod 8$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$.

Proposition 9. *Soient p, p', q des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$. Si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$, alors $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.*

Preuve. On a $h(pp'q) \equiv h(2pp'q) \equiv 4 \pmod 8$. D'après le lemme 5, $Q_K = 1$, par suite $h(K) \equiv 4 \pmod 8$. Puisque $C_{2,K}$ est de rang 2, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$. ∎

En résumé, on énonce le théorème qui détermine tous les corps biquadratiques de la forme $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ ayant un 2-groupe de classes de type $(2,2)$ et de corps de genres de degré 4 sur K. On note par p, p', q, q_1, q_2, q_3 des premiers différents vérifiant $p \equiv p' \equiv -q \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv -q_3 \equiv 1 \pmod 4$.

Théorème 5. *Soient d un entier naturel sans facteurs carrés, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$, $K^{(*)}$ le corps de genres de K et $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K. On suppose que $K^{(*)} = K_2^{(1)}$. Alors H est de type $(2,2)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) $d = q_1q_2q_3$, $\left(\frac{2}{q_1}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{2}{q_3}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$,
2) $d = pp'q$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$.

Exemples numériques : Soient $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés et $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K. Dans ce qui suit, on va donner des exemples numériques illustrant chaque cas des théorèmes 2, 3, 4 et 5.

(1) Soient $p = 17$, $q = 3$ et $d = pq$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$; par suite, d'après le théorème 2, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(2) Soient $p = 113$, $q = 19$ et $d = pq$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$; par suite, d'après le théorème 2, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(3) Soient $p=113$, $p'=5$ et $d=pp'$. On a $\left(\frac{2}{p}\right)=-\left(\frac{2}{p'}\right)=-\left(\frac{p}{p'}\right)=1$ et $\left(\frac{2}{p}\right)_4=(-1)^{(p-1)/8}=1$; par suite, d'après le théorème 3, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(4) Soient $p=17$, $p'=73$ et $d=pp'$. On a $pp'=a^2+b^2$ où $a=4\not\equiv 0 \pmod 8$ et $b=35\not\equiv \pm 1 \pmod 8$ et $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{2}{p'}\right)=-\left(\frac{p}{p'}\right)=1$. De plus, $\left(\frac{2}{p}\right)_4\neq(-1)^{(p-1)/8}$ et $\left(\frac{2}{p'}\right)_4\neq(-1)^{(p'-1)/8}$. Ainsi, d'après le théorème 3, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(5) Soient $p=41$, $p'=17$ et $d=pp'$. On a $pp'=a^2+b^2$ où $a=16\equiv 0 \pmod 8$ et $b=21\not\equiv \pm 1 \pmod 8$ et $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{2}{p'}\right)=-\left(\frac{p}{p'}\right)=1$. De plus, $\left(\frac{2}{p}\right)_4=(-1)^{(p-1)/8}$ et $\left(\frac{2}{p'}\right)_4\neq(-1)^{(p'-1)/8}$. Ainsi, d'après le théorème 3, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(6) Soient $p=337$, $p'=37$ et $d=pp'$. On a $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{p}{p'}\right)=-\left(\frac{2}{p'}\right)=1$. De plus, $\left(\frac{2}{p}\right)_4=(-1)^{(p-1)/8}=1$ et $\left(\frac{p}{p'}\right)_4\neq\left(\frac{p'}{p}\right)_4$. Ainsi, d'après le théorème 3, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(7) Soient $p=5$, $q_1=7$, $q_2=47$ et $q=pq_1q_2$. On a $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{q_1}{p}\right)=-1$ et $\left(\frac{2}{q_1}\right)=\left(\frac{2}{q_2}\right)=1$. Ainsi, d'après le théorème 4, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(8) Soient $p=17$, $q_1=7$ et $q_2=11$. On a $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{2}{q_1}\right)=1$ et $\left(\frac{2}{q_2}\right)=\left(\frac{p}{q_1}\right)=-1$, donc, d'après le théorème 4, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(9) Soient $q_1=7$, $q_2=3$, $q_3=11$ et $d=q_1q_2q_3$. On a $\left(\frac{2}{q_1}\right)=-\left(\frac{2}{q_2}\right)=-\left(\frac{2}{q_3}\right)=1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)=-\left(\frac{q_1}{q_3}\right)=1$. Ainsi, d'après le théorème 5, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

(10) Soient $p=5$, $p'=13$, $q=11$ et $d=pp'q$. On a $\left(\frac{p}{q}\right)=1$ et $\left(\frac{p'}{q}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{2}{p'}\right)=-1$. Ainsi, d'après le théorème 5, $C_{2,K}$ est de type $(2,2)$.

4. Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{d})$. Soient $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et $K^{(*)}$ le corps de genres de K. On suppose que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, d'après la théorie des groupes, $K^{(*)}\neq K$, car sinon le 2-groupe de classes de K serait cyclique. Dans ce qui suit, on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K, en distinguant les cas $[K^{(*)}:K]=2$ et $K^{(*)}=K_2^{(1)}$.

4.1. *Cas où* $[K^{(*)}:K]=2$. On sait d'après les théorèmes 2, 3 et 4 déterminer tous les corps $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{d})$ dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$ et $[K^{(*)}:K]=2$. On commence par donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que $K_2^{(1)}\neq K_2^{(2)}$.

4.1.1. *Conditions pour que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$.* On suppose que d remplie les conditions du théorème 2.

Théorème 6. *Soient p, q deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$. Si $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$.*

Preuve. Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$. Alors le 2-groupe de classes de L est cyclique. En effet, $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ est de nombre de classes impair et d'après la proposition 1, on a $\mathrm{rang}(C_{2,L}) = r - 1 - e$ où r est le nombre des premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ ramifiés dans L et e est l'entier naturel défini par $2^e = [E_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})} : \mathcal{N}_{L/\mathbb{Q}(\sqrt{q})}(L^*) \cap E_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})}]$ où $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{q})}$ est le groupe des unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et $\mathcal{N}_{L/\mathbb{Q}(\sqrt{q})}$ est l'application norme par rapport à l'extension $L/\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Comme $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ et 2 se ramifie totalement dans L, on a $r = 2$ et par suite $\mathrm{rang}(C_{2,L}) = 1 - e$. D'autre part, $L/\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ est une extension quadratique ramifiée, donc d'après la théorie des corps de classes $h(2p)$ divise $h(L)$. Or $h(2p)$ est pair, d'où le nombre de classes de L est pair. Par suite $e = 0$ et $\mathrm{rang}(C_{2,L}) = 1$.

D'autre part, l'extension $K_2^{(1)}/L$ est non ramifiée, par suite et d'après [Ta-37], $K_2^{(1)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Ainsi $h(K_2^{(1)}) = \frac{1}{4}h(L)$ et par conséquent on a

$$K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)} \Leftrightarrow 2 \mid h(K_2^{(1)}) \Leftrightarrow 8 \mid h(L).$$

Alors on se ramène à calculer la 2-partie du nombre de classes de L.

On a $h(q) = 1$ et d'après [Ka-76], $h(2pq) \equiv 2 \pmod 4$. On a $h(L) = \frac{Q_L}{4}h(2pq)h(2p)$. Si on suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}$, alors d'après [Kuč-95], $h(2p) \equiv 2 \pmod 4$ et $e(2p) = 1$. D'autre part, d'après le lemme 6, on a $Q_L = 4$. Ainsi, $h(L) \equiv 4 \pmod 8$, par suite $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si on suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$, alors d'après [Kuč-95], $4 \mid h(2p)$. On distingue deux cas :

(i) $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$. Alors d'après [Kuč-95], on a : Si $e(2p) = -1$, alors $8 \mid h(2p)$ et d'après le lemme 6, on a $Q_L = 2$ et par conséquent $8 \mid h(L)$. Si $e(2p) = 1$, alors, d'après le lemme 6, on a $Q_L = 4$ et par conséquent $8 \mid h(L)$.

(ii) $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1$. Alors d'après [Kuč-95], on a $h(2p) \equiv 4 \pmod 8$ et $e(2p) = -1$. D'autre part, d'après le lemme 6, on a $Q_L = 2$. Par suite $h(L) \equiv 4 \pmod 8$, d'où $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Ainsi le théorème est démontrée. ∎

On suppose que d remplie les conditions du théorème 3.

Proposition 10. *Soient p et p' deux premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'})$. Alors on a :*

• *Si $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 \mid h(2p)$ ou $[Q_L = 2$ et $h(2p) \equiv 4 \pmod 8]$ où $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{2p})$.*

• *Si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $pp' = a^2 + b^2$, $a \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ ou $b \not\equiv 0 \pmod 8$ et $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = -\left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8} = -1$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p'}\right)_4 = (-1)^{(p'-1)/8} = 1$.*

• *Si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $pp' = a^2 + b^2$, $a \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ ou $b \not\equiv 0 \pmod 8$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = \left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8} = -1$ et $e(2pp') = -1$, alors $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$.*

• *Si $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$ et $\left(\frac{p'}{p}\right)_4 \neq (\frac{p}{p'})_4$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$.*

Preuve

• Si $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$, alors d'après [Ka-76], on a $h(2pp') = 4$. D'après [Az-Mo-1], le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{2p})$ est cyclique. L'extension $K_2^{(1)}/L$ est une extension abélienne, non ramifiée, donc $K_2^{(1)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. Par suite, $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$ si et seulement si $8 \mid h(L)$. D'après [Ka-76], $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$, par suite $h(L) = Q_L h(2p)$ et on trouve que $8 \mid h(L)$ si et seulement si $8 \mid h(2p)$ ou $[Q_L = 2$ et $h(2p) \equiv 4 \pmod 8]$.

• Si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $pp' = a^2 + b^2$, $a \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ ou $b \not\equiv 0 \pmod 8$ et $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = -\left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8}$, alors d'après [Ka-76], $h(2pp') = 4$ et $e(2pp') = 1$. Si on suppose que $\left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}$, alors, d'après [Az-Mo-1], le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2p'})$ est cyclique et d'après [Kuč-95], $4 \mid h(2p')$. Si $\left(\frac{2}{p'}\right)_4 = (-1)^{(p'-1)/8} = -1$, alors d'après [Kuč-95], on a $h(2p') \equiv 4 \pmod 8$ et $e(2p') = -1$ et d'après le lemme 7, on a $Q_L = 1$, par suite $h(L) \equiv 4 \pmod 8$ et donc $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si $\left(\frac{2}{p'}\right)_4 = (-1)^{(p'-1)/8} = 1$, alors d'après [Kuč-95], $e(2p') = -1$ implique $8 \mid h(2p')$ et par suite 8 divise $h(L)$, ainsi $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. Si $e(2p') = 1$, alors d'après le lemme 7, on a $Q_L = 2$ et par suite $8 \mid h(L)$ et donc $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. Par conséquent, $8 \mid h(L)$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p'}\right)_4 = (-1)^{(p'-1)/8} = 1$.

• Si $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $pp' = a^2 + b^2$, $a \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ ou $b \not\equiv 0 \pmod 8$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8} = \left(\frac{2}{p'}\right)_4 (-1)^{(p'-1)/8} = -1$ et $e(2pp') = -1$, alors d'après [Ka-76], on a $h(2pp') = 8$ et d'après la proposition 4, on a $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$.

• Si $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$ et $\left(\frac{p'}{p}\right)_4 \neq \left(\frac{p}{p'}\right)_4$, alors on a $h(2pp') = 4$. D'après [Az-Mo-1], le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{2p})$ est cyclique et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 \mid h(L)$; alors comme précédemment, $8 \mid h(L)$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$. Ainsi la proposition est démontrée. ∎

On suppose que d remplie les conditions de l'un des cas du théorème 4.

THÉORÈME 7. *Soient p, q_1 et q_2 des premiers différents tels que $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq_1q_2})$. Alors on a :*

• *Si K vérifie les cas* (i) *ou* (ii) *du théorème* 4, *alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 \mid h(2q_1q_2)$ ou $[h(2q_1q_2) \equiv 4 \pmod 8$ et $Q_L = 2]$ où $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q_1q_2})$.*

• *Si K vérifie les cas* (iii) *ou* (v) *du théorème* 4, *alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$.*

• *Si K vérifie le cas* (iv) *du théorème* 4, *alors $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2p}, \sqrt{q_1q_2})$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8}$.*

Preuve

• Supposons que K vérifie les cas (i) ou (ii) du théorème 4. Alors d'après [Az-Mo-1], le corps $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q_1q_2})$ est de 2-groupe de classes cyclique. On a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 \mid h(L)$. D'autre part, d'après [Ka-76] on a $h(2pq_1q_2) \equiv 4 \pmod 8$, par suite $h(K) = Q_L h(2q_1q_2)$ et on trouve que $8 \mid h(L)$ si et seulement si $8 \mid h(2q_1q_2)$ ou $[h(2q_1q_2) \equiv 4 \pmod 8$ et $Q_L = 2]$.

• Supposons K vérifie les cas (iii) ou (v) du théorème 4. D'après [Ka-76], le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$ est de type $(2, 2)$ et l'extension $M = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q_1q_2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$ est une extension quadratique non ramifiée. D'après [Az-Mo-1], le 2-groupe de classes de M est de rang 2 ; or K est une extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$ dont le 2-groupe de classes est de type $(2, 2)$, alors d'après la proposition 6, la troisième extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2})$ qui n'est autre que $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2p}, \sqrt{q_1q_2})$ doit avoir un 2-groupe de classes cyclique. On a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 \mid h(L)$. On a $h(L) = Q_L h(2p)$. Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}$, alors d'après [Kuč-95], on a $h(2p) \equiv 2 \pmod 4$ et d'après le lemme 8, $Q_L = 2$, par suite $h(L) \equiv 4 \pmod 8$ et donc $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1$, alors d'après [Kuč-95], $h(2p) \equiv 4 \pmod 8$ et d'après le lemme 9, $Q_L = 1$, par suite $h(L) \equiv 4 \pmod 8$ et donc $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$, alors d'après [Kuč-95], si $e(2p) = -1$, on a $8 \mid h(2p)$ et dans ce cas $8 \mid h(L)$.

Si $e(2p) = 1$, alors d'après le lemme 8, on a $Q_L = 2$, par suite $8 \mid h(L)$ et donc $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$.

• On suppose que K vérifie le cas (iv) du théorème 4. D'après [Ka-76], $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$. Comme dans le cas précédent, on vérifie que le 2-groupe de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2p}, \sqrt{q_1q_2})$ est cyclique. On a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si $8 \mid h(L)$. Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 \neq (-1)^{(p-1)/8}$, on a $h(L) = Q_L h(2p)$; alors d'après [Kuč-95], $h(2p) \equiv 2 \pmod 4$ et d'après le lemme 8, $Q_L = 2$, par suite $h(L) \equiv 4 \pmod 8$ et donc $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1$, alors d'après [Kuč-95], $h(2p) \equiv 4 \pmod 8$ et d'après le lemme 9, $Q_L = 2$, par suite $8 \mid h(L)$ et donc $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. Si $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$, alors comme dans le cas précédent, on trouve que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. ∎

4.1.2. *Structure du groupe* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ un corps biquadratique dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$ et $[K^{(*)} : K] = 2$. Dans le cas où $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ est non ramifiée (dans ce cas d remplie les conditions des théorèmes 3 et 4), d'après [Az-Mo-2], le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ est de type $(2, 2^2)$ ou $(2,2)$. Si ce groupe est de type $(2, 2^2)$, alors $K_2^{(1)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ et d'après la proposition 4, la suite des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ s'arrête en $K_2^{(1)}$ et donc le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien. Si le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ est de type $(2,2)$, alors $K^{(*)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$ et on sait d'après [Az-Mo-2] que le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique, par suite $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$. Ainsi $K_2^{(2)}$ est le deuxième 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{2d})$. D'après [De-92] et [Be-Sn-95], on sait déterminer la structure du groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2d}))$ et comme $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2d}))$, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est bien déterminé.

En utilisant [De-92] et [Be-Sn-95], on retrouve les deux théorèmes suivants :

Théorème 8. *Soient p et p' deux premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv 1 \pmod 4$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'})$ et $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. Alors on a :*

• *Si K vérifie le cas* (i) *du théorème* 3 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est diédral si $e(2p) = 1$ ou $[e(2p) = -1$ et $Q_L = 1]$, sinon G est quaternionique.*

• *Si K vérifie le cas* (ii) *du théorème* 3 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est diédral.*

• *Si K vérifie le cas* (iii) *du théorème* 3, *alors G est abélien.*

• *Si K vérifie le cas* (iv) *du théorème* 3 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est diédral si $e(2p) = -1$, sinon G est quaternionique.*

Preuve. Supposons que K vérifie le cas (i) du théorème 3. D'après [Ka-76], on a $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$. Si $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors d'après [De-92], $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'}))$ est diédral si $e(2p) = 1$ ou $[e(2p) = -1$ et $Q_L = 1]$, sinon $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'}))$ est quaternionique. Comme G est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$, on a le résultat.

Pour les cas (ii) et (iv) du théorème 3, d'après [Ka-76] on a $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$. Alors de même comme dans le cas (i) du théorème 3, en utilisant [De-92], on trouve le résultat.

Pour le cas (iii) du théorème 3, d'après [Ka-76] on a $h(2pp') \equiv 8 \pmod{16}$ et dans ce cas la tour des 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$ s'arrête en $K_2^{(1)}$. Par conséquent, le groupe G est abélien. ∎

Dans le théorème qui suit on désigne par u l'entier naturel sans facteurs carrés défini par $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2q_1q_2})/\mathbb{Q}}(1 + \varepsilon_{2q_1q_2}) = un^2$ où $\varepsilon_{2q_1q_2}$ est l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2q_1q_2})$ et n un entier naturel.

Théorème 9. *Soient p, q_1 et q_2 des premiers différents tels que $p \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod 4$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq_1q_2})$ et $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. Alors on a :*

- *Si K vérifie le cas* (i) *du théorème* 4 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est quaternionique si $u = 2$, sinon G est diédral.*
- *Si K vérifie le cas* (ii) *du théorème* 4 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est quaternionique si $u \in \{2q_1, 2q_2\}$, sinon G est diédral.*
- *Si K vérifie le cas* (iii) *du théorème* 4 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est diédral.*
- *Si K vérifie le cas* (iv) *du théorème* 4 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est quaternionique si $e(2p) = -1$, sinon G est diédral.*
- *K vérifie le cas* (v) *du théorème* 4 *et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors G est diédral.*

Preuve. Supposons que K vérifie le cas (i) du théorème 4. Alors d'après [Be-Sn-95], on a $h(2pq_1q_2) \equiv 4 \pmod 8$. Si $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors d'après [Be-Sn-95], $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq_1q_2}))$ est semi-diédral si $u = 2$, et diédral sinon. De plus, G est quaternionique si $u = 2$, et diédral sinon. Pour les autres cas du théorème 4, on a toujours $h(2pq_1q_2) \equiv 4 \pmod 8$, alors en utilisant [Be-Sn-95], on trouve le résultat. ∎

Dans ce qui suit, on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. D'après [Ka-76], on a $h(pq) \equiv h(2pq) \equiv 2 \pmod 4$, par suite les méthodes utilisées dans les cas précédents pour déterminer la structure du groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ ne sont pas valables dans ce cas.

Dans la suite, on va déterminer les classes engendrant le 2-groupe de classes de K. On note par O_M l'anneau des entiers d'un corps M.

Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, on a $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. De plus, pour $i \in \{1, 2\}$ on a $\mathcal{P}_iO_K = Y_i^2$ où Y_i est un idéal premier de K.

Proposition 11. *Avec les mêmes notations, si $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes d'idéaux de Y_1 et de Y_2.*

Preuve. On sait que le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est égal à 1. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ils sont principaux. Or pour $i \in \{1, 2\}$ on a $\mathcal{P}_iO_K = Y_i^2$, donc les classes $[Y_1]$ et $[Y_2]$ sont des 2-classes de K. Montrons que Y_1 n'est pas principal.

On vérifie facilement que Y_1 reste inerte dans $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}, \sqrt{q})$, alors d'après la loi de réciprocité d'Artin appliquée à l'extension $K^{(*)}/K$, l'idéal Y_1 n'est pas principal. Montrons que Y_1Y_2 n'est pas principal.

On a $\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(Y_1Y_2) = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$. Si Y_1Y_2 est principal, alors il existe une unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tel que pu est norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Cela est impossible. En effet, en utilisant le symbole du reste normique, on sait que pu est norme dans $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ si et seulement si $\left(\frac{pu,pq}{\mathcal{Q}}\right) = 1$ pour tout premier $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ramifié dans K (voir [Az-Mo-1]). D'autre part, l'idéal premier $\mathcal{P}_1$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ se ramifie dans K et on a

$$\left(\frac{-1, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = 1$$

et

$$\left(\frac{\varepsilon_2, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_2, p}{\mathcal{P}_1}\right)\left(\frac{\varepsilon_2, q}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{\varepsilon_2, p}{\mathcal{P}_1}\right).$$

Dans [Az-Mo-1], on démontre que

$$\left(\frac{\varepsilon_2, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)_4 (-1)^{(p-1)/8}.$$

Comme $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, d'après la proposition 10 on a $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$, par suite $\left(\frac{\varepsilon_2,p}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$ et donc $\left(\frac{\varepsilon_2,pq}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$. Ainsi l'unité u de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ vérifie $\left(\frac{u,pq}{\mathcal{P}_1}\right) = 1$. De plus,

$$\left(\frac{p, pq}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{p, p}{\mathcal{P}_1}\right)\left(\frac{p, q}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

D'où $\left(\frac{pu,pq}{\mathcal{P}_1}\right) = -1$, par conséquent on a une contradiction. Ainsi Y_1Y_2 n'est pas principal et la proposition est démontrée. ∎

Dans la suite, on va déterminer les 2-classes de K qui capitulent dans $K^{(*)}$.

On sait que Y_1 et Y_2 restent inertes dans $K^{(*)}$, donc $Y_1 O_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_1$ et $Y_2 O_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_2$ où $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont deux idéaux premiers de $K^{(*)}$. D'autre part on a $pO_L = \mathcal{Q}^2$ où $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ et $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de L, par suite $\mathcal{Q}O_{K^{(*)}} = Y_1 Y_2$.

Proposition 12. *Avec les mêmes notations, les idéaux premiers $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont principaux si et seulement si l'idéal premier $\mathcal{Q}$ est principal.*

Preuve. On sait que si $\mathcal{Q}_1$ est principal, alors $\mathcal{Q} = \mathcal{N}_{K^{(*)}/L}(\mathcal{Q}_1)$ est principal.

Inversement, si l'idéal premier $\mathcal{Q}$ est principal, on raisonne comme suit. On sait que le 2-groupe de classes de L est cyclique et $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui est $K_2^{(2)}$. D'autre part, d'après la théorie des corps de classes de Hilbert, le noyau de l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/L$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux de L. Comme l'idéal premier $\mathcal{Q}$ est principal, $\mathcal{Q}$ se décompose complètement dans $K_2^{(2)}$, par suite les idéaux premiers $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ se décomposent complètement dans $K_2^{(2)}$. Comme $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$, le noyau de l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/K^{(*)}$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux de $K^{(*)}$. Ainsi $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont principaux et la proposition est démontrée. ∎

Théorème 10. *Soient p et q deux premiers tels que $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$. Si $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, alors toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. Par suite, le groupe $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.*

Preuve. Le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes d'idéaux $[Y_1]$ et $[Y_2]$ définis dans la proposition 11. Montrons que $Y_1 Y_2$ capitule dans $K^{(*)}$.

On a $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})} = \mathcal{P}^2$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$, par suite $\mathcal{P}O_K = Y_1 Y_2$. Ainsi, il existe deux 2-classes ambigues de K relativement à $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$, la classe triviale et la classe $[Y_1 Y_2]$. Comme $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ est une extension abélienne et $K^{(*)}/K$ est une extension non ramifiée, $K^{(*)}$ est le 2-corps de genres relatif à l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$. D'après [Te-71], toutes les 2-classes ambigues de $K^{(*)}/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ capitulent dans $K^{(*)}$. Ainsi la classe $[Y_1 Y_2]$ capitule dans $K^{(*)}$. Montrons que Y_1 capitule dans $K^{(*)}$.

On sait que $Y_1 O_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_1$ où $\mathcal{Q}_1$ est un idéal premier de $K^{(*)}$ et que $pO_L = \mathcal{Q}^2$ où $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de L. D'après la proposition 12, Y_1 capitule dans $K^{(*)}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$ est principal. Montrons que $\mathcal{Q}$ est principal. Soit ε l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Alors il existe deux nombres rationnels y_1 et y_2 tels que $\sqrt{\varepsilon_q} = y_1\sqrt{2} + y_2\sqrt{2q}$. De plus, $pO_L = (\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon})^2\varepsilon^{-1}O_L = \mathcal{Q}^2$. Comme $\sqrt{p}\sqrt{\varepsilon_q}$ est un entier de L, l'idéal $\mathcal{Q}$ est principal, par suite l'idéal $\mathcal{Q}_1$ est principal. Ainsi, toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. Comme $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, d'après le théorème 1 le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. ∎

4.2. *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où $K^{(*)} = K_2^{(1)}$.* On suppose que le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ et que $K^{(*)} = K_2^{(1)}$. On va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$.

D'après le théorème 5, le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$ si et seulement si d vérifie l'un des deux cas suivants :

Cas 1 : $d = q_1q_2q_3$ où $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{q_1}\right) = -\left(\frac{2}{q_2}\right) = -\left(\frac{2}{q_3}\right) = 1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$.

Cas 2 : $d = pp'q$ où $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$.

Dans la suite, on désigne par :

- $h(m)$ la 2-partie du nombre de classes du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$,
- $h(M)$ la 2-partie du nombre de classes du corps M,
- $\mathrm{Ker}(\phi_{E/S})$ le noyau de l'application d'Artin dans l'extension abélienne, non ramifiée E/S,
- O_M l'anneau des entiers du corps M,
- L.R.A. la loi de réciprocité d'Artin.

Dans la suite, on va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les cas 1 et 2.

4.2.1. *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2q_3})$.* On suppose que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2q_3})$ où q_1, q_2 et q_3 sont des premiers vérifiant les conditions du cas 1. Les trois extensions quadratiques de K contenues dans $K_2^{(1)}$ sont $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1}, \sqrt{q_2q_3})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_2}, \sqrt{q_1q_3})$ et $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_3}, \sqrt{q_1q_2})$. On sait que 2 se ramifie totalement dans K, donc $2O_K = \mathcal{P}^4$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de K. De plus, $q_1O_K = \mathcal{P}_1^2\mathcal{P}_2^2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers différents de K. Dans la suite, on suppose que $\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = -1$ et $\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = 1$.

Proposition 13. *Avec les notations précédentes, le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes $[\mathcal{P}]$ et $[\mathcal{P}_1]$.*

Preuve. Montrons que $\mathcal{P}$ n'est pas principal. Comme $\left(\frac{2}{q_1}\right) = 1$ et $\left(\frac{2}{q_2}\right) = -1$, l'idéal premier $\mathcal{P}$ est inerte dans K_3/K. Or l'extension K_3/K est abélienne et non ramifiée, donc, d'après L.R.A. appliquée à K_3/K, $\mathcal{P}$ n'est pas principal. De plus, la classe $[\mathcal{P}]$ est une 2-classe, car $\mathcal{P}^4$ est principal. Montrons que $\mathcal{P}_1$ n'est pas principal.

On sait que $\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = 1$, donc $\mathcal{P}_1$ est inerte dans K_3/K. De même en appliquant L.R.A. à l'extension K_3/K, on trouve que $\mathcal{P}_1$ n'est pas principal. De plus, la classe de $\mathcal{P}_1$ est une 2-classe. En effet, comme $\left(\frac{2}{q_1}\right) = 1$, q_1 se décompose complètement dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. On pose $q_1 O_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = Y_1 Y_2$ où Y_1 et Y_2 sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Puisque le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est égal à 1, Y_1 et Y_2 sont principaux. De plus, $Y_1 O_K = \mathcal{P}_1^2$, par conséquent la classe de $\mathcal{P}_1$ est une 2-classe non triviale de K. Montrons que $\mathcal{P}\mathcal{P}_1$ n'est pas principal. Comme $\left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{2}{q_3}\right) = -1$, $\mathcal{P}$ se décompose complètement dans K_1. D'autre part, $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$, donc $\mathcal{P}_1$ est inerte dans K_1. Si $\mathcal{P}\mathcal{P}_1$ est principal, alors d'après L.R.A. appliquée à l'extension K_1/K, on trouve que $\mathcal{P}\mathcal{P}_1 \in \mathrm{Ker}(\phi_{K_1/K})$, ce qui est impossible. ∎

THÉORÈME 11. *Soient* q_1, q_2, q_3 *des premiers différents tels que* $q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv -1 \pmod 4$ *et* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1 q_2 q_3})$. *Si* $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *alors le groupe* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ *est abélien.*

Preuve. D'après [Az-Mo-1], le nombre de classes de $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1})$ est impair. Comme 2 se ramifie totalement dans L, on a $2O_L = \mathcal{Q}^4$ où $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de L. Par suite, $\mathcal{Q}$ est principal. De plus, $\mathcal{Q}O_{K_1} = \mathcal{P}O_{K_1}$, par conséquent $\mathcal{P}$ capitule dans K_1.

D'autre part, $\left(\frac{2}{q_1}\right) = 1$, donc $q_1 O_L = \mathcal{Q}_1^2 \mathcal{Q}_2^2$ où $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont deux idéaux premiers différents de L. Comme dans la proposition 13, on vérifie que les classes $[\mathcal{Q}_1]$ et $[\mathcal{Q}_2]$ sont des 2-classes de L, donc elles sont triviales. Ainsi $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont principaux. D'où $Q_1 O_{K_1} = \mathcal{P}_1 O_{K_1}$ est principal. Par conséquent toutes les 2-classes de K capitulent dans K_1. Pour montrer que $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien, il suffit de montrer que toutes les 2-classes de K capitulent dans K_3 (voir théorème 1). Montrons que $\mathcal{P}$ capitule dans K_3. D'après [Az-Mo-1], le rang du 2-groupe de classes de $L' = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_3})$ est égal à 0 ; donc de la même façon que dans le cas précédent, on vérifie que $\mathcal{P}$ capitule dans K_3.

Montrons que $\mathcal{P}_1$ capitule dans K_3. D'après [Az-Mo-1], le nombre de classes de $L'' = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1 q_2})$ est impair. D'autre part, $\left(\frac{2}{q_1}\right) = 1$, donc $q_1 O_{L''} = \mathcal{B}_1^2 \mathcal{B}_2^2$ où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux idéaux premiers différents de L''. Comme dans la proposition 13, on vérifie que les classes $[\mathcal{B}_1]$ et $[\mathcal{B}_2]$ sont des 2-classes. Or $\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = 1$, donc $\mathcal{B}_1$ est inerte dans K_3/L''. D'où $\mathcal{B}_1 O_{K_3} = \mathcal{P}_1 O_{K_3}$ est principal. Par suite, $\mathcal{P}$ capitule dans K_3. Par conséquent, toutes les 2-classes de K capitulent dans K_3. Ainsi le théorème est démontré. ∎

4.2.2. *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$.* On suppose que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$ vérifie les conditions du cas 2. Les trois extensions quadratiques de K contenues dans $K_2^{(1)}$ sont $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{pp'})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}, \sqrt{qp'})$ et $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{qp})$. On va étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les extensions $K_1/K, K_2/K$ et K_3/K.

On note par ε_2, ε_p et ε_{2p} les unités fondamentales réspectives de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$.

On sait que le nombre de classes de $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$ est impair. De plus, $h(2p) \equiv 2 \pmod 4$, $h(2) = 1$ et $h(p)$ est impair. En utilisant la formule de $(*)$ (page 37), on trouve que l'indice des unités Q_M de M est égal à 2. Par conséquent et d'après les systèmes fondamentales donnés dans [Kur-43], $\{\varepsilon_2, \varepsilon_p, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_p\varepsilon_{2p}}\}$ est un système fondamental des unités de M.

Dans toute la suite on suppose que $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$. Comme $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, on a $qO_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} = \mathcal{Q}_1'\mathcal{Q}_2'$ où $\mathcal{Q}_1'$ et $\mathcal{Q}_2'$ sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Si $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$, alors $\mathcal{Q}_1'O_M = \mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2'O_M = \mathcal{Q}_2$ où $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont deux idéaux premiers de M. Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, alors $p'O_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} = \mathcal{P}_1'\mathcal{P}_2'$ où $\mathcal{P}_1'$ et $\mathcal{P}_2'$ sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. De plus, $\left(\frac{2}{p'}\right) = -1$, donc $\mathcal{P}_1'O_M = \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2'O_M = \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers de M. Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$, alors $\left(\frac{2p}{p'}\right) = 1$, par suite $p'O_{\mathbb{Q}(\sqrt{2p})} = \mathcal{B}_1'\mathcal{B}_2'$ où $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_2'$ sont deux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$. De plus, on pose $\mathcal{B}_1'O_M = \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2'O_M = \mathcal{B}_2$ où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux idéaux premiers de M. Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, on a $2O_M = \mathcal{P}^2$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de M et on pose $2O_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} = \mathcal{P}'$ où $\mathcal{P}'$ est un idéal premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. On conclut ainsi que si $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$, alors les premiers de M qui se ramifient dans K_2 sont :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \text{ et } \mathcal{P} & \text{si } \left(\dfrac{p}{p'}\right) = 1, \\ \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ et } \mathcal{P} & \text{si } \left(\dfrac{p}{p'}\right) = -1. \end{cases}$$

Proposition 14. *Sous les hypothèses de ce paragraphe, on a toujours $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$.*

Preuve. On montre que le 2-groupe de classes de K_2 n'est pas cyclique. On sait que le nombre de classes du corps M est impair. Soit C_{2,K_2} le 2-groupe de classes de K_2. D'après la proposition 1, on a $\mathrm{rang}(C_{2,K_2}) = r - 1 - e$, où r est le nombre des premiers de M ramifiés dans K_2 et e l'entier défini par $2^e = [E_M : \mathcal{N}_{K_2/M}(K_2^*) \cap E_M]$, où E_M est le groupe des unités de M. De plus, $\{\varepsilon_2, \varepsilon_p, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_p\varepsilon_{2p}}\}$ est un système fondamental d'unités de M. La détermination de l'entier e revient à chercher quand est ce que les éléments $\pm\varepsilon_2^{i_1}\varepsilon_p^{i_2}\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_p\varepsilon_{2p}}^{i_3}$ où $\{i_1, i_2, i_3\} \subset \{0, 1\}$ sont des normes ou non dans l'extension K_2/M. Par suite, l'entier e est compris entre 0 et 4. En utilisant les propriétés du symbole du reste normique, on distingue deux cas :

(i) $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$. Comme $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, le nombre r des premiers de M ramifiés dans K_2 est égal à 7. Ainsi $\mathrm{rang}(C_{2,K_2}) = 6 - e$ et comme $e \leq 4$, le 2-groupe de classes de K_2 n'est pas cyclique.

(ii) $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$. On a $r = 5$, par suite $\mathrm{rang}(C_{2,K_2}) = r - 1 - e = 4 - e$. Montrons que -1 est norme dans l'extension K_2/M. On sait que $K_2 = M(\sqrt{p'q})$ et pour $i \in \{1, 2\}$, d'après la proposition 2,

$$\left(\frac{-1, p'q}{\mathcal{Q}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(-1), p'q}{\mathcal{Q}'_i}\right) = \left(\frac{1, p'q}{\mathcal{Q}'_i}\right) = 1.$$

De même

$$\left(\frac{-1, p'q}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{1, p'q}{\mathcal{P}'}\right) = 1,$$

et on a :

$$\begin{cases} \left(\frac{-1, p'q}{\mathcal{P}_i}\right) = 1 \quad \text{si } \left(\frac{p}{p'}\right) = 1, \\ \left(\frac{-1, p'q}{\mathcal{B}_i}\right) = 1 \quad \text{si } \left(\frac{p}{p'}\right) = -1. \end{cases}$$

Par conséquent, -1 est norme dans l'extension K_2/M, d'où $e \neq 4$ et par suite $e \leq 3$. On a $e = 3$ si et seulement si pour tout $\{i_1, i_2, i_3\} \subset \{0, 1\}$, $\varepsilon_2^{i_1} \varepsilon_p^{i_2} \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_p \varepsilon_{2p}}^{i_3}$ n'est pas norme dans l'extension K_2/M. Montrons que ε_p est norme dans l'extension K_2/M.

D'après la proposition 2, pour $i \in \{1, 2\}$ on a

$$\left(\frac{\varepsilon_p, p'q}{\mathcal{Q}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(\varepsilon_p), p'q}{\mathcal{Q}'_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon_p^2, p'q}{\mathcal{Q}'_i}\right) = 1$$

et de même

$$\left(\frac{\varepsilon_p, p'q}{\mathcal{P}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_p^2, p'q}{\mathcal{P}'}\right) = 1.$$

De plus on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\varepsilon_p, p'q}{\mathcal{P}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(\varepsilon_p), p'q}{\mathcal{P}'_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon_p^2, p'q}{\mathcal{P}'_i}\right) = 1 \quad \text{si } \left(\frac{p}{p'}\right) = 1, \\ \left(\frac{\varepsilon_p, p'q}{\mathcal{B}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{2p})}(\varepsilon_p), p'q}{\mathcal{B}'_i}\right) = \left(\frac{-1, p'q}{\mathcal{B}'_i}\right) = 1 \quad \text{si } \left(\frac{p}{p'}\right) = -1. \end{cases}$$

Par conséquent, ε_p est norme dans l'extension K_2/M. Ainsi, on a $e < 3$, d'où $\mathrm{rang}(C_{2,K_2}) > 1$ et le 2-groupe de classes de K_2 n'est pas cyclique. Donc, $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. ∎

Dans la suite, pour étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K, on distingue deux cas.

Cas 1 : $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$. On pose $2O_K = \mathcal{P}^4$, $qO_K = \mathcal{Q}_1^2\mathcal{Q}_2^2$ où $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont des premiers différents de K.

Proposition 15. *Si $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$, alors le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes $[\mathcal{P}]$ et $[\mathcal{Q}_1]$.*

Preuve. On sait que $\mathcal{P}$ est inerte dans K_2/K et que l'extension K_2/K est abélienne, non ramifiée. Alors d'après la L.R.A. appliquée à cette extension, on trouve que $\mathcal{P}$ n'est pas principal. Comme $\mathcal{P}^4$ est principal, la classe $[\mathcal{P}]$ est une 2-classe non triviale de K. D'autre part, $\mathcal{Q}_1$ reste inerte dans K_1/K, alors comme pour $\mathcal{P}$, l'idéal $\mathcal{Q}_1$ n'est pas principal. De plus, q se décompose dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, qui est de nombre de classes égal à 1, donc $\mathcal{Q}_1^2$ est principal. Ainsi $[\mathcal{Q}_1]$ est une 2-classe non triviale de K. Comme $\mathcal{Q}_1$ est inerte dans K_1/K et $\mathcal{P}$ se décompose dans K_1/K, d'après la L.R.A. appliquée à l'extension K_1/K, on trouve que $\mathcal{Q}_1\mathcal{P}$ n'est pas principal. Ainsi la proposition est démontrée. ∎

Théorème 12. *Soient p, p', q des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$. Si $\left(\frac{2}{q}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$, alors le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.*

Preuve. On pose $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q})$. D'après [Az-Mo-1], le nombre de classes de L est impair. De plus, 2 se ramifie totalement dans L, donc $2O_L = \mathcal{Y}^4$ où $\mathcal{Y}$ est un idéal premier principal de L. Comme $\mathcal{Y}O_{K_1} = \mathcal{P}O_{K_1}$, $\mathcal{P}$ capitule dans K_1. D'autre part, $\left(\frac{2}{q}\right) = 1$, donc $qO_L = \mathcal{Y}_1^2\mathcal{Y}_2^2$ où $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ sont deux idéaux premiers principaux de L. Comme $\mathcal{Y}_1O_{K_1} = \mathcal{Q}_1O_{K_1}$, $\mathcal{Q}_1$ capitule dans K_1. Ainsi toutes les 2-classes de K capitulent dans K_1 et comme $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ le théorème 1 montre que $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. ∎

Corollaire 1. *Le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique, tandis que les 2-groupes de classes de K_2 et de K_3 ne sont pas cycliques.*

Preuve. Comme toutes les 2-classes de K capitulent dans K_1, le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique. Comme $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$ le théorème 4(i) montre que les 2-groupes de classes de K_2 et de K_3 ne sont pas cycliques. ∎

Cas 2 : $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$. On a $2O_K = \mathcal{P}^4$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier non principal de K (car $\mathcal{P}$ est inerte dans K_2 et K_2/K n'est pas ramifiée).

Proposition 16. *Avec les notations précédentes, le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique et le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral ou quaternionique.*

Preuve. On sait que $\mathcal{P}$ n'est pas principal et se décompose dans K_1. Comme dans la preuve du théorème 11, on montre que $\mathcal{P}$ capitule dans

K_1, par suite K_1 est de type (A). Donc, d'après le théorème 1, le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique. De plus, d'après la proposition 14, $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$, donc d'après le théorème 1, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral ou quaternionique. ∎

Remarque 1. *Les* 2*-groupes de classes de* K_2 *et de* K_3 *ne sont pas cycliques.*

Preuve. D'après la preuve de la proposition 14, le 2-groupe de classes de K_2 n'est pas cyclique et puisque le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique, la proposition 6 montre que le 2-groupe de classes de K_3 n'est pas cyclique. ∎

Proposition 17. *Soient* p, p' *et* q *des premiers différents tels que* $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ *et* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$. *Si* $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$, *alors* $2h(pp') \mid |\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)|$.

Preuve. Soit $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'}, \sqrt{q})$. D'après le corollaire 1 et la proposition 16, le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique et par suite $K_2^{(2)}$ est son 2-corps de classes de Hilbert. D'autre part, 2 se ramifie totalement dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q})$ et ne se ramifie pas dans $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$. Par suite, il existe un premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{pp'})$ qui se ramifie totalement dans K_1 et d'après la théorie des corps de classes on a $h(pp') \mid h(K_1)$ (voir [Ja-73, p. 195]). Or $|\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)| = [K_2^{(2)} : K] = 2h(K_1)$, d'où le résultat. ∎

Dans la suite, pour résoudre le problème de capitulation dans le cas où $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$, on aura besoin d'autres corps biquadratiques, à savoir les corps $E = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2pp'})$ et $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{qp})$.

Proposition 18. *Soient* p, p' *et* q *des premiers différents tels que* $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$ *et* $E = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2pp'})$. *Alors le* 2*-groupe de classes de* E *est de type* $(2, 2)$.

Preuve. On sait d'après [Kuč-95] et [Be-Sn-95] que $h(2pp') \equiv 4 \pmod 8$ et $h(2pp'q) \equiv 4 \pmod 8$. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 les unités fondamentales respectives des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'q})$. On a $e(2pp') = -1$, par suite ε_2 n'est pas un carré dans E et il existe deux nombres rationnels x et y tels que

$$\sqrt{\varepsilon_1} = x\sqrt{2} + y\sqrt{2q}. \tag{1}$$

D'autre part, d'après la preuve du lemme 5, il existe deux nombres rationnels t_1 et t_2 et deux entiers naturels m et n premiers entre eux tels que

$$\sqrt{\varepsilon_3} = t_1\sqrt{m} + t_2\sqrt{n} \quad \text{où } m \in \{p', 2p'\} \text{ et } mn = 2pp'q. \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire que les unités $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ne sont pas des carrés dans E, par suite $Q_F = 1$ et donc $h(E) \equiv 4 \pmod 8$. D'autre part, $K_2^{(1)}/E$

où $K_2^{(1)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}, \sqrt{p'}, \sqrt{q})$ est une extension abélienne non ramifiée de degré 4, donc le 2-groupe de classes de E est de type $(2, 2)$. ∎

Le corps $K_2^{(1)}$ est aussi le 2-corps de classes de Hilbert du corps E et les trois extensions quadratiques de E contenues dans $K_2^{(1)}$ sont $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{pp'})$, $E_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{2p'})$ et $E_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p'}, \sqrt{q}, \sqrt{2p})$.

THÉORÈME 13. *On garde les notations et hypothèses de la proposition précédente. Soient* $K_2^{(1)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* K *et* $K_2^{(2)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* $K_2^{(1)}$. *Si* $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$, *alors le* 2*-groupe de classes de* E_1 *est cyclique. De plus*, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K) \simeq D_3$ *et* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E) \simeq Q_3$.

Preuve. On sait que le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique. On veut montrer que le 2-groupe de classes de E_1 est cyclique.

On pose $M = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p})$. D'après [Az-Mo-1], le nombre de classes de M est impair. On note C_{2,E_1} le 2-groupe de classes de E_1. On a $\mathrm{rang}(C_{2,E_1}) = r - 1 - e$ où r et e sont les entiers naturels définies relativement à l'extension E_1/M (voir proposition 1). Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{q}{p'}\right) = -1$, on a $r = 3$, ainsi $\mathrm{rang}(C_{2,E_1}) = r - 1 - e = 2 - e$. Montrons que $e \neq 0$, c'est-à-dire il existe une unité de M qui n'est pas norme dans l'extension E_1/M. Soit $\varepsilon = x + y\sqrt{qp}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{qp})$. On sait que $e(pq) = 1$, par suite $(x-1)(x+1) = pqy^2$. Comme $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, il existe deux entiers naturels y_1 et y_2 tels que

$$\begin{cases} x - 1 = 2qy_1^2, \\ x + 1 = 2py_2^2, \end{cases} \quad \text{où } 2y_1y_2 = y.$$

Alors, on trouve que $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{q}\, y_1 + \sqrt{p}\, y_2 \in M$. Par conséquent, il existe un élément $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$ tel que $\varepsilon = qu^2$ où $u = y_1 + (y_2/q)\sqrt{pq}$.

D'autre part, on pose $p'O_M = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers différents de M. Comme $\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p'}\right) = -1$, p' se décompose dans $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$. Par suite, $p'O_{\mathbb{Q}(\sqrt{pq})} = \mathcal{P}'_1\mathcal{P}'_2$ où $\mathcal{P}'_1$ et $\mathcal{P}'_2$ sont deux idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$ et $\mathcal{P}'_1O_M = \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}'_2O_M = \mathcal{P}_2$. Alors d'après la proposition 2, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}, p'q}{\mathcal{P}_1}\right) &= \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{pq})}(\sqrt{\varepsilon}), p'q}{\mathcal{P}'_1}\right) = \left(\frac{-\varepsilon, p'q}{\mathcal{P}'_1}\right) = \left(\frac{-qu^2, p'q}{\mathcal{P}'_1}\right) \\ &= \left(\frac{-q, p'q}{\mathcal{P}'_1}\right) = \left(\frac{-q, p'}{\mathcal{P}'_1}\right) = \left(\frac{q}{p'}\right) = -1.\end{aligned}$$

Par suite, $\sqrt{\varepsilon}$ n'est pas norme dans l'extension E_1/M. D'où $e \neq 0$ et puisque l'extension $K_2^{(1)}/E_1$ est abélienne, non ramifiée, on a $e = 1$, ce qui donne la première partie du théorème.

La proposition 5 implique que $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ est abélien ou isomorphe à Q_3. Comme $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ est isomorphe à Q_3. De plus, les 2-groupes de classes de K_2 et de K_3 ne sont pas cycliques, donc, d'après la proposition 5, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K) \simeq D_3$. ∎

On pose $2O_E = \mathcal{B}^2$ où $\mathcal{B}$ est un idéal premier de $E = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2pp'})$ et $qO_E = \mathcal{B}_1^2\mathcal{B}_2^2$ où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux idéaux premiers différents de E.

PROPOSITION 19. *Soit $E = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2pp'})$ où p, p' et q sont des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$. Si $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$, alors le 2-groupe de classes de E est engendré par les classes $[\mathcal{B}]$ et $[\mathcal{B}_1^l]$ où l est la partie impaire du nombre de classes de E.*

Preuve. La démonstration est la même que celle de la proposition 15. Le nombre l intérvient pour que $[\mathcal{B}_1^l]$ soit une 2-classe de E. ∎

On suppose que $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$. Dans tout ce qui suit on suppose que

$$\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1.$$

PROPOSITION 20. *Soient $E = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2pp'})$ où p, p' et q sont des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$, $E_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p}, \sqrt{2p'})$ et $E_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p'}, \sqrt{2p})$. Si $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$ et $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, alors les 2-groupes de classes de E_1 et de E_2 ne sont pas cycliques et le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ est diédral ou quaternionique.*

Preuve. Le nombre des premiers de $M = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ ramifiés dans E_1 est $r = 3$. Soit C_{2,E_1} le 2-groupe de classes de E_1. Alors $\mathrm{rang}(C_{2,E_1}) = r - 1 - e = 2 - e$. Soit ε_m l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Alors $\sqrt{\varepsilon_{pq}} \in M$ (voir preuve du théorème 13). Comme ε_p et ε_q ne sont pas des carrés dans M, $\{\varepsilon_p, \varepsilon_q, \sqrt{\varepsilon_{pq}}\}$ est un système fondamental des unités de M. D'autre part, $-1, \varepsilon_p, \varepsilon_q$ et $\sqrt{\varepsilon_{pq}}$ sont des normes dans l'extension E_1/M. En effet, on pose $2O_M = \mathcal{Q}^2$ où $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de M, $p'O_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} = \mathcal{P}_1'\mathcal{P}_2'$ où $\mathcal{P}_1'$ et $\mathcal{P}_2'$ sont deux idéaux premiers différents de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. De plus, $\mathcal{P}_1'O_M = \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2'O_M = \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers de M. Alors les premiers de M qui se ramifient dans $E_1 = M(\sqrt{2p'})$ sont $\mathcal{Q}, \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, on a

$$\left(\frac{-1, 2p'}{\mathcal{P}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(-1), 2p'}{\mathcal{P}_i'}\right) = \left(\frac{1, 2p'}{\mathcal{P}_i'}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{-1, 2p'}{\mathcal{Q}}\right) = 1.$$

Par conséquent, -1 est norme dans l'extension E_1/M. Aussi,

$$\left(\frac{\varepsilon_p, 2p'}{\mathcal{P}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(\varepsilon_p), 2p'}{\mathcal{P}_i'}\right) = \left(\frac{\varepsilon_p^2, 2p'}{\mathcal{P}_i'}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\varepsilon_p, 2p'}{\mathcal{Q}}\right) = 1.$$

Par conséquent ε_p est norme dans l'extension E_1/M. De plus,

$$\left(\frac{\varepsilon_q, 2p'}{\mathcal{P}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(\varepsilon_q), 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right) = \left(\frac{1, 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\varepsilon_q, 2p'}{\mathcal{Q}}\right) = 1.$$

Par conséquent ε_q est norme dans l'extension E_1/M. Finalement,

$$\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{pq}}, 2p'}{\mathcal{P}_i}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}(\sqrt{p})}(\sqrt{\varepsilon_{pq}}), 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right) = \left(\frac{\pm 1, 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right) = \left(\frac{\pm 1}{p'}\right) = 1$$

et

$$\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{pq}}, 2p'}{\mathcal{Q}}\right) = 1.$$

Par conséquent $\sqrt{\varepsilon_{pq}}$ est norme dans l'extension E_1/M.

Ainsi $e = 0$ et donc le 2-groupe de classes de E_1 n'est pas cyclique. On sait que K_1 est une extension quadratique non ramifiée de E dont le 2-groupe de classes est cyclique (voir proposition 16). Alors d'après la proposition 6, le 2-groupe de classes de E_2 n'est pas cyclique. Ainsi on a la première partie de la proposition.

Montrons que $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ est diédral ou quaternionique. L'idéal $\mathcal{B}$ se décompose dans K_1. De plus, le corps $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q})$ est de nombre de classes impair. Si on pose $2O_L = \mathcal{Y}^4$ où $\mathcal{Y}$ est un idéal premier de L, alors $\mathcal{Y}O_{K_1} = \mathcal{B}O_{K_1}$ est principal. D'où $\mathcal{B}$ capitule dans K_1 et donc K_1 est de type (A). Donc, d'après le théorème 1, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ est diédral ou quaternionique. ∎

Proposition 21. *Soit $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$ où p, p' et q sont des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$. Si $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, alors le 2-groupe de classes de S est de type $(2, 2)$.*

Preuve. On sait d'après [Be-Sn-95] que $h(2pp'q) \equiv 4 \pmod 8$ et d'après [Ka-76], on a $h(pq) \equiv 2 \pmod 4$, de plus d'après [Kuč-95], $h(2p') \equiv 2 \pmod 4$. Soit ε_1, ε_2 et ε_3 les unités fondamentales réspectives de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p'})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2pp'q})$. On a $e(2p') = -1$ et par suite ε_1 n'est pas un carré dans S. Comme $\left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = 1$, on vérifie facilement qu'il existe deux nombres rationnels x et y tels que

$$\sqrt{\varepsilon_2} = x\sqrt{2p'} + y\sqrt{2q}. \tag{1}$$

D'autre part, puisque $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, d'après la preuve du lemme 5, il existe deux nombres rationnels t_1 et t_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_3} = t_1\sqrt{p'} + t_2\sqrt{2pq}. \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire que les unités $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ et $\varepsilon_2\varepsilon_3$ ne sont pas des carrés dans S, par suite $Q_S = 1$ et donc $h(S) \equiv 4 \pmod 8$. D'autre part, $K_2^{(1)}/S$

où $K_2^{(1)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}, \sqrt{p'}, \sqrt{q})$ est une extension abélienne non ramifiée de degré 4, d'où le 2-groupe de classes de S est de type $(2, 2)$. ■

Dans toute la suite $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$ et les trois extensions quadratiques non ramifiés de S sont $E_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p}, \sqrt{2p'})$, $S_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq}, \sqrt{2p})$ et $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{pq})$.

Comme 2 se ramifie totalement dans S, on a $2O_S = \mathcal{G}^4$ où $\mathcal{G}$ est un idéal premier de S. D'autre part, $\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{p'}{q}\right) = -1$, donc $qO_S = \mathcal{G}_1^2\mathcal{G}_2^2$ où $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont deux idéaux premiers différents de S.

Proposition 22. *Avec les notations précédentes, si* $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{p'}{q}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p'}{p}\right) = 1$, *alors le 2-groupe de classes de S est engendré par les classes $[\mathcal{G}]$ et $[\mathcal{G}_1^m]$ où m est la partie impaire du nombre de classes de S.*

Preuve. Il est clair que $[\mathcal{G}]$ et $[\mathcal{G}_1^m]$ sont des 2-classes de S. De plus, comme $\mathcal{G}$ est inerte dans E_1/S, alors d'après L.R.A. appliquée à l'extension E_1/S, $\mathcal{G}$ est non principal. Puisque $\mathcal{G}_1$ est inerte dans K_3 et m est impair, alors la L.R.A. appliquée à l'extension K_3/S montre que $\mathcal{G}_1^m$ est non principal. D'autre part, $\mathcal{G}$ se décompose dans S_1 et $\mathcal{G}_1$ est inerte dans S_1, donc, d'après L.R.A. appliquée à l'extension S_1/S, $\mathcal{G}\mathcal{G}_1^m$ est non principal. ■

Proposition 23. *Avec les hypothèses de la proposition précédente, le 2-groupe de classes de $S_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{2p}, \sqrt{pq})$ est cyclique. De plus, $\mathcal{G}\mathcal{G}_1^m$ capitule dans S_1.*

Preuve. Les trois extensions quadratiques non ramifiés de S sont K_3, E_1 et S_1. D'après la proposition 20, le 2-groupe de classes de E_1 n'est pas cyclique. De plus, d'après la remarque 1, le 2-groupe de classes de K_3 n'est pas cyclique. Par conséquent, le 2-groupe de classes de S_1 doit être cyclique (voir proposition 5). Montrons que $\mathcal{G}\mathcal{G}_1^m$ capitule dans S_1.

Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2q}, \sqrt{2p'})$. Comme 2 se ramifie totalement dans L, on a $2O_L = \mathcal{H}^4$ où $\mathcal{H}$ est un idéal premier de L. Comme $\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{p'}{q}\right) = -1$, on a $qO_L = \mathcal{H}_1^2\mathcal{H}_2^2$ où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux idéaux premiers différents de L. D'autre part, on vérifie facilement que le 2-nombre de classes de L est égal à 2 et que $L_2^{(1)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{p'})$ est le 2-corps de classes de Hilbert de L. Puisque $\mathcal{H}$ reste inerte dans $L_2^{(1)}$, d'après la théorie des corps de classes de Hilbert (le noyau de l'application d'Artin de l'extension $L_2^{(1)}/L$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux), l'idéal premier $\mathcal{H}$ n'est pas principal et donc $[\mathcal{H}]$ est une 2-classe non triviale de L. De plus, $\mathcal{H}_1$ est inerte dans $L_2^{(1)}$, donc l'idéal premier $\mathcal{H}_1$ n'est pas principal et donc $[\mathcal{H}_1^m]$ est une 2-classe non triviale de L. Comme la 2-partie du nombre de classes de L est égal à 2, $\mathcal{H}\mathcal{H}_1^m$ est principal. D'autre part, $L \subset S_1$ et $\mathcal{H}\mathcal{H}_1^m O_{S_1} = \mathcal{G}\mathcal{G}_1^m O_{S_1}$ est principal. Ainsi $\mathcal{G}\mathcal{G}_1^m$ capitule dans S_1. ∎

Corollaire 2. *Avec les hypothèses précédentes, le groupe* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S)$ *est diédral ou semi-diédral.*

Preuve. L'idéal $\mathcal{G}\mathcal{G}_1^m$ capitule dans S_1. Comme $\mathcal{G}$ se décompose complétement dans S_1 et $\mathcal{G}_1$ est inerte dans S_1, la classe de $\mathcal{G}\mathcal{G}_1^m$ ne peut pas être norme de la classe d'un idéal de S_1. Par suite, S_1 est de type (B) ou bien toutes les 2-classes de S capitulent dans S_1. Ainsi, par application du théorème 1, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S)$ est diédral ou semi-diédral. ∎

Proposition 24. *Avec les hypothèses et les notations précédentes, le groupe* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S)$ *est semi-diédral si et seulement si le groupe* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ *est quaternionique.*

Preuve. Soient $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$ et $E = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2pp'})$. On sait que le 2-groupe de classes de E est engendré par les classes des idéaux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1^l$ où $2O_E = \mathcal{B}^4, qO_E = \mathcal{B}_1^2\mathcal{B}_2^2$ et l est la partie impaire du nombre de classes de E. De plus, le 2-groupe de classes de S est engendré par les classes des idéaux $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_1^m$ où $2O_S = \mathcal{G}^4, qO_S = \mathcal{G}_1^2\mathcal{G}_2^2$ et m la partie impaire du nombre de classes de S.

D'après la preuve de la proposition 20, $\mathcal{B}$ capitule dans $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{pp'})$. De plus, d'après la proposition 23, $\mathcal{G}\mathcal{G}_1^m$ capitule dans S_1. Ainsi $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ est quaternionique si et seulement si $\mathcal{B}_1^l$ ne capitule pas dans K_1. De plus, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S)$ est semi-diédral si et seulement si $\mathcal{G}_1^m$ ne capitule pas dans S_1. D'où on est ramené à montrer que $\mathcal{B}_1^l$ capitule dans K_1 si et seulement si $\mathcal{G}_1^m$ capitule dans S_1.

On sait que K_1 et S_1 ont des 2-groupes de classes cycliques et $K_2^{(2)}$ est leurs 2-corps de classes de Hilbert. Si $\mathcal{B}_1^l$ capitule dans K_1, alors $\mathcal{B}_1^l O_{K_1} = \mathcal{B}_1'^l$ où $\mathcal{B}_1'$ est un idéal premier de K_1 et $\mathcal{B}_1'^l$ est principal. Par suite, l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/K_1$ vérifie $\phi_{K_2^{(2)}/K_1}(\mathcal{B}_1'^l) = 1$. Comme l est impair et l'extension $K_2^{(2)}/K_1$ est de degré une puissance de 2, on a $\phi_{K_2^{(2)}/K_1}(\mathcal{B}_1')$ $= 1$, ainsi $\mathcal{B}_1'$ se décompose complètement dans $K_2^{(2)}/K_1$. D'autre part, $\mathcal{G}_1^m O_{S_1} = \mathcal{G}_1'^m$ où $\mathcal{G}_1'$ est un idéal premier de S_1 et le degré résiduel $f_{K_1/Q}(\mathcal{B}_1')$ $= f_{S_1/Q}(\mathcal{G}_1') = 2$. Comme $\mathcal{B}_1'$ se décompose complètement dans $K_2^{(2)}/K_1$, $\mathcal{G}_1'$ doit se décomposer complètement dans $K_2^{(2)}/S_1$. Par suite, l'application d'Artin dans l'extension $K_2^{(2)}/S_1$ vérifie $\phi_{K_2^{(2)}/S_1}(\mathcal{G}_1'^m) = 1$. Par conséquent, l'idéal $\mathcal{G}_1'^m$ est principal. De même, si $\mathcal{G}_1'^m$ capitule dans S_1, on montre que $\mathcal{B}_1'^l$ capitule dans K_1. Ainsi la proposition est démontrée. ∎

Finalement on énonce le théorème suivant.

THÉORÈME 14. *Soit* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$ *où* p, p' *et* q *sont des premiers tels que* $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$. *Si* $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, *alors le groupe* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ *est diédral.*

Preuve. Les trois extensions quadratiques, non ramifiés de K sont $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{pp'})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}, \sqrt{qp'})$ et $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{qp})$. Les trois extensions quadratiques non ramifiés de E sont $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{pp'})$, $E_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p}, \sqrt{2p'})$ et $E_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p'}, \sqrt{2p})$. De plus, les trois extensions quadratiques non ramifiés de S sont $S_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{2p}, \sqrt{pq})$, $E_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p}, \sqrt{2p'})$ et $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{qp})$. D'après le corollaire 2, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S)$ est diédral ou semi-diédral.

Si $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S)$ est diédral, alors $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K_3)$ est diédral. Puisque $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral ou quaternionique (voir proposition 16), la proposition 5 montre que $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.

Si $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S)$ est semi-diédral, d'après la proposition 5, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/S_1)$ est cyclique, donc $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E_1)$ est quaternionique (resp. $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K_3)$ est diédral) ou bien $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E_1)$ est diédral (resp. $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K_3)$ est quaternionique). D'après la proposition 24, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E)$ est quaternionique, par suite $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E_1)$ est quaternionique (voir proposition 5), ainsi $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K_3)$ est diédral. De plus, d'après la proposition 16, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral ou quaternionique, donc $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. ∎

En résumé on a le théorème suivant :

THÉORÈME 15. *Soient* p, p', q, q_1, q_2 *et* q_3 *des premiers différents tels que* $p \equiv p' \equiv -q \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv -q_3 \equiv 1 \pmod 4$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ *où* d *est un entier naturel sans facteurs carrés,* $K^{(*)}$ *le corps de genres de* K, $K_2^{(1)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* K *et* $K_2^{(2)}$ *le* 2*-corps de classes de Hilbert de* $K_2^{(1)}$. *Si* $K^{(*)} = K_2^{(1)}$ *et* $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *alors* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ *est abélien ou diédral. Plus précisément on a :*

(i) $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$ *est abélien si et seulement si* $d = q_1q_2q_3$ *avec* $\left(\frac{2}{q_1}\right) = -\left(\frac{2}{q_2}\right) = -\left(\frac{2}{q_3}\right) = 1$ *et* $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$.

(ii) $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$ *et* $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$ *est diédral si et seulement si* $d = pp'q$ *avec* $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$. *De plus, si* $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$, *alors* $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K) \simeq D_3$.

Exemples numériques

(1) Soient $p = 3313$ et $q = 11$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = 1$ et $h(2p) = 16$. De plus, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2p})$ est de 2-groupe de

classes cyclique et $e(2p) = -1$, par suite $Q_L = 2$ (lemme 6). Ainsi d'après la proposition 10, on a $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$. D'autre part, $|\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)| = h(L) = h(2p) = 16$ et d'après le théorème 10, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral d'ordre 16.

(2) Soient $p = 41$ et $q = 19$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, de plus $\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{(p-1)/8} = -1$, alors, d'après la proposition 10, $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$ et le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

(3) Soient $q_1 = 7, q_2 = 3$ et $q_3 = 11$. On a $\left(\frac{2}{q_1}\right) = -\left(\frac{2}{q_2}\right) = -\left(\frac{2}{q_3}\right) = 1$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_1}{q_3}\right) = -1$, donc, d'après le théorème 5, le 2-groupe de classes de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2q_3})$ est de type $(2, 2)$. De plus, d'après le théorème 11, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

(4) Soient $p = 13, p' = 5$ et $q = 3$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{p}{p'}\right) = -1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$, alors d'après le théorème 13, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K) \simeq D_3$ et $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/E) \simeq Q_3$ où $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pp'q})$ et $E = \mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{2pp'})$.

(5) Soient $p = 29$, $p' = 181$ et $q = 23$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = 1$. De plus on a $h(29.181) = 8$ et d'après la proposition 17, 16 divise $|\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)|$. Donc, d'après le théorème 12, $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est isomorphe à D_n où $n \geq 4$.

(6) Soient $p = 101, p' = 3917$ et $q = 19$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = 1$. De plus on a $h(101.3917) = 16$ et d'après la proposition 17, 32 divise $|\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)|$. Donc, d'après le théorème 14, G est isomorphe à D_n où $n \geq 5$.

Références

[Az-93] A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, thèse, Université Laval, Québec, Canada, 1993.

[Az-00] —, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$, Acta Arith. 94 (2000), 383–399.

[Az-Mo-1] A. Azizi et A. Mouhib, *Sur le rang du 2-groupe de classes de* $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ *où* $m = 2$ *ou un premier* $p \equiv 1 \pmod 4$, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 2741–2752.

[Az-Mo-2] —, —, *Sur le 2-groupe de classes du corps de genres de certains corps biquadratiques*, Ann. Sci. Math. Québec, to appear.

[Be-97] I. Benhamza, *Unités des corps* $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{-d})$ *et application au problème de capitulation sur le corps* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$, thèse, Université Mohammed I, Oujda, 1997.

[Be-Le-Sn-98] E. Benjamin, F. Lemmermeyer and C. Snyder, *Real quadratic fields with abelian 2-class field tower*, J. Number Theory 73 (1998), 182–194.

[Be-Sn-95] E. Benjamin and C. Snyder, *Real quadratic number fields with 2-class group of type* $(2,2)$, Math. Scand. 76 (1995), 161–178.

[De-92] A. Derhem, *Un problème de capitulation*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 314 (1992), 785–788.

[Gr-73] G. Gras, *Sur les l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23 (3) (1973), 1–48.

[Ha-30] H. Hasse, *Neue Begründung der Theorie des Normenrestsymbols*, J. Reine Angew. Math. 162 (1930), 134–143.

[Ja-73] G. J. Janusz, *Algebraic Number Fields*, Academic Press, New York, 1973.

[Ka-76] P. Kaplan, *Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. Reine Angew. Math. 283/284 (1976), 313–363.

[Ki-76] H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to 4 modulo 8 and Hilbert's theorem 94*, J. Number Theory 8 (1976), 271–279.

[Kub-56] T. Kubota, *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. 10 (1956), 65–85.

[Kuč-95] R. Kučera, *On the parity of the class number of a biquadratic field*, J. Number Theory 52 (1995), 43–52.

[Kur-43] S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Zahlkörper*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sec. I 4 (1943), 383–406.

[Ta-37] O. Taussky, *A remark on the class field tower*, J. London Math. Soc. 12 (1937), 82–85.

[Te-71] F. Terada, *A principal ideal theorem in the genus fields*, Tôhoku Math. J. (2) 23 (1971), 697–718.

[Wa-66] H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 13 (1966), 201–209.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohammed I
Oujda, Maroc
E-mail: azizi@sciences.univ-oujda.ac.ma

Reçu le 21.12.2001
et révisé le 26.8.2002 (4172)