

Sur un théorème de Gel'fond–Selberg et une conjecture de Bundschuh–Shiokawa

par

MICHAEL WELTER (Bonn)

1. Introduction et résultats. G. Pólya a inauguré dans [21] l'étude des fonctions entières arithmétiques. Là il étudiait les fonctions entières f telles que $f(\mathbb{N}_0) \subset \mathbb{Z}$, où $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, et il a démontré qu'une telle fonction est un polynôme si $\limsup_{r \rightarrow \infty} (\log |f|_r / r) < \log 2$, où $|f|_r$ est le maximum du module de $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$. La fonction 2^z montre que ce résultat est le meilleur possible. Dans le même article Pólya considérait aussi des fonctions entières f telles que $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Cet article remarquable devait susciter de nombreuses recherches et généralisations. Le résultat de Pólya a été amélioré par Hardy [16], Pólya [22] et quelques autres dont Ch. Pisot [20]. En 1926 S. Fukasawa [7] a abordé l'étude des fonctions entières f telles que $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$, et en 1933 A. O. Gel'fond [10] celle des fonctions entières qui prennent des valeurs entières sur une progression géométrique q^n .

On trouve aussi dans la littérature des résultats concernant les fonctions entières de plusieurs variables, par exemple en direction de Pólya par A. Baker [1] ou en direction de Gel'fond par P. Bundschuh [3], J.-P. Bézivin [2] et F. Gramain [14]. En 1929 A. O. Gel'fond [9] a généralisé le résultat de Pólya en étudiant des fonctions entières arithmétiques f telles que

$$f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s-1$$

pour un $s \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Gel'fond a démontré qu'une telle fonction est un polynôme si

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \log |f|_r / r < s \log(1 + e^{(1-s)/s}).$$

On trouve aussi une démonstration de ce résultat dans Fridman [6]. Après une amélioration par A. Selberg [24] en 1941, le meilleur résultat connu dans cette direction est dû à P. Bundschuh et W. Zudilin [5].

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11J81, 30D15.

This work was completed during a post-doctoral stay at the University of Saint-Étienne (France). It was supported by the German Research Foundation (Deutsche Forschungsgemeinschaft, DFG).

THÉORÈME (Bundschuh–Zudilin, 2003). *Soient $s \in \mathbb{N}$ et f une fonction entière telle que*

$$f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s-1$$

et

$\log |f|_r \leq \gamma r$ pour tout r suffisamment grand, où $\gamma < s \cdot 0.32766348 =: \gamma_s$. Alors f est une fonction polynomiale.

REMARQUE 1. P. Bundschuh et W. Zudilin obtiennent de meilleures valeurs de γ_s pour $s = 2, \dots, 9$, par exemple $\gamma_2 = 0.99407702\dots = 2 \cdot 0.497039\dots$, $\gamma_3 = 1.33990538\dots = 3 \cdot 0.446635\dots$, $\gamma_9 = 3.38570755\dots = 9 \cdot 0.37619\dots$. Comme la plupart des autres auteurs, Bundschuh et Zudilin utilisent la méthode des séries d'interpolation. Mais ils exploitent aussi une idée introduite par G. Rhin et C. Viola pour l'étude des mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ en utilisant une action de groupe.

En 1978, M. Waldschmidt [25] a démontré qu'on peut prouver le théorème de Pólya (mais avec une constante plus petite que $\log 2$) en utilisant la méthode de transcendance de Schneider. Dans cet article nous utilisons aussi des méthodes de transcendance, à savoir une variante de la méthode de Schneider utilisant des déterminants d'interpolation (par exemple pour la Proposition 1) et la méthode de Gel'fond avec une construction d'une fonction auxiliaire (par exemple pour la Proposition 2).

Dans le deuxième paragraphe de cet article nous montrons le résultat suivant qui améliore considérablement celui de Bundschuh et Zudilin pour les grandes valeurs de s , mais est malheureusement plus faible pour les petites valeurs de s .

THÉORÈME 1. *Il existe une suite $(\gamma_s)_{s \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telle que $\gamma_s/s \rightarrow 0.78592968\dots$ quand $s \rightarrow \infty$ et ayant la propriété suivante : Si $s \geq 2$ est un nombre entier et si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction entière telle que*

$$f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s-1$$

et

$\log |f|_r \leq \gamma r$ pour tout r suffisamment grand, où $\gamma < \gamma_s$, alors f est une fonction polynomiale.

Bundschuh et Zudilin démontrent aussi dans [5] qu'il existe pour tout $s \in \mathbb{N}$ une fonction entière transcendante f telle que $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour $\sigma = 0, \dots, s-1$ et de croissance majorée par $\log |f|_r \leq (\pi/3)sr + o(r)$. Dans cette situation nous obtenons le résultat suivant. Comme sa démonstration est très semblable à celle du Théorème 1, dans le troisième paragraphe de cet article nous expliquerons seulement les différences entre les deux démonstrations.

THÉORÈME 2. *Il existe une suite $(\gamma_s)_{s \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telle que $\gamma_s/s \rightarrow 0.9905659020\dots$ quand $s \rightarrow \infty$ et ayant la propriété suivante : Si $s \geq 2$ est un nombre entier et si f est une fonction entière telle que*

$$f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s-1$$

et

$$\log |f|_r \leq \gamma r \quad \text{pour tout } r \text{ suffisamment grand, où } \gamma < \gamma_s,$$

alors f est une fonction polynomiale.

En 1967, A. O. Gel'fond [11] a démontré le résultat suivant pour les fonctions entières qui prennent des valeurs entières sur une progression géométrique.

THÉORÈME (Gel'fond, 1967). *Soient $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > 1$ et $s \in \mathbb{N}$. Si une fonction entière f telle que*

$$f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s-1$$

satisfait

$$\log |f|_r \leq \gamma \frac{(\log r)^2}{\log q} \quad \text{pour tout } r \text{ suffisamment grand, où}$$

$$\gamma < \frac{s}{4(1 + 3(s-1)/\pi^2 s)},$$

alors f est une fonction polynomiale.

Dans [4] P. Bundschuh et I. Shiokawa construisent pour tout $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$ une fonction entière transcendante f telle que $f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\sigma = 0, \dots, s-1$ et de croissance majorée par

$$\log |f|_r \leq \frac{s}{4 \log q} (\log r)^2.$$

Ils conjecturent que dans le théorème de Gel'fond on peut remplacer la condition $\gamma < s/4(1 + 3(s-1)/\pi^2 s)$ par $\gamma < s/4$.

Nous allons montrer au paragraphe 4 le

THÉORÈME 3. *Soit $q \in \mathbb{Z}$ tel que $|q| > 1$. Il existe une suite $(\gamma_s)_{s \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs tels que $\gamma_s \sim s/4$ pour s tendant vers l'infini ayant la propriété suivante : Si $s \geq 2$ est un nombre entier et si f est une fonction entière ayant les propriétés*

$$f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s-1$$

et

$$\log |f|_r \leq \gamma \frac{(\log r)^2}{\log |q|} \quad \text{pour tout } r \text{ suffisamment grand, où } \gamma < \gamma_s,$$

alors f est une fonction polynomiale.

REMARQUE 2. Les fonctions construites par Bundschuh et Shiokawa montrent que ce théorème est le meilleur possible dans un sens asymptotique : cela signifie que l'on ne peut pas remplacer $\gamma_s \sim s/4$ par $\gamma_s \sim s \cdot c$ avec une constante $c > 1/4$.

Dans le troisième cas bien étudié des fonctions entières arithmétiques, c'est-à-dire les fonctions entières f telles que $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$, après des travaux de S. Fukasawa [7], A. O. Gel'fond [8], L. Gruman [15], D. Masser [17], finalement F. Gramain [13] a démontré en 1981 le théorème suivant :

THÉORÈME (Gramain, 1981). *Soit K le corps quadratique imaginaire de discriminant $-\Delta$, et $a = \sqrt{\Delta}/2$ l'aire d'un parallélogramme fondamental du réseau O_K des entiers de K .*

(i) *Si f est une fonction entière vérifiant $f(O_K) \subset O_K$ et*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} < \frac{\pi}{2ea},$$

alors f est un polynôme.

(ii) *Il existe une fonction entière f telle que $f(O_K) \subset O_K$ et*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} = \frac{\pi}{2ea}.$$

En particulier, f n'est pas un polynôme.

On peut assez facilement généraliser les démonstrations de F. Gramain en considérant les fonctions entières telles que $f^{(\sigma)}(O_K) \subset O_K$ pour $\sigma = 0, \dots, s-1$, où $s \in \mathbb{N}$ est fixé. Pour démontrer l'analogue de (i) il suffit d'utiliser un lemme de Schwarz avec multiplicités dans la démonstration originale. Dans cette situation on obtient l'analogue de (i) sous la condition

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} < s \frac{\pi}{2ea},$$

et on peut construire une fonction f satisfaisant

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} = s \frac{\pi}{2ea}$$

pour l'analogue de (ii).

Contrairement au cas quadratique imaginaire où la preuve est analogue aux travaux antérieurs, les démonstrations des Théorèmes 1–3 utilisent une démarche nouvelle : on commence par démontrer que, sous leur hypothèses, la fonction f est solution d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux (ce qui explique que la preuve n'est valable que si $s \geq 2$). Ainsi toutes les dérivées de la fonction f ont des propriétés arithmétiques et on conclut en généralisant des résultats déjà connus : en 1968, dans l'article [6] déjà cité, G. A. Fridman a commencé l'étude des fonctions entières f telles que

$f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $\sigma \in \mathbb{N}_0$. Il a démontré qu'une telle fonction est un polynôme si $\limsup_{r \rightarrow \infty} (\log \log |f|_r / r) < \log(1 + e^{-1})$. Dans [27–29] nous avons étudié ce problème et aussi les analogues sur une progression géométrique q^n ou un corps imaginaire quadratique. Nous avons montré le théorème suivant dont les points (i) et (iii) sont aussi corollaires des Propositions 2 et 5 de cet article.

THÉORÈME (Welter, 2000/02). *Soit f une fonction entière transcendante. On a :*

- (i) *Si la fonction f satisfait $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $\sigma \in \mathbb{N}_0$, alors*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log |f|_r}{r} \geq \log 2.$$

- (ii) *Si $q \in \mathbb{Z}$ avec $|q| > 1$ et si la fonction f satisfait $f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $\sigma \in \mathbb{N}_0$, alors*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log |f|_r}{(\log r)^2} \geq \frac{1}{4 \log |q|}.$$

- (iii) *Si K est le corps quadratique imaginaire de discriminant $-\Delta$, et $a = \sqrt{\Delta}/2$ l'aire d'un parallélogramme fondamental du réseau O_K des entiers de K , et si la fonction f satisfait $f^{(\sigma)}(O_K) \subset O_K$ pour tout $\sigma \in \mathbb{N}_0$, alors*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log |f|_r}{r^2} \geq \frac{\pi}{2ea}.$$

Remerciements. L'auteur remercie vivement F. Gramain pour ses nombreuses corrections et améliorations du présent travail.

2. Démonstration du Théorème 1

2.1. Deux propositions. La démonstration du Théorème 1 comporte deux étapes successives que nous présentons sous la forme de deux propositions.

Dans la démonstration de la première proposition nous utilisons les polynômes de Fel'dman. On pose

$$\Delta(z; r) := \frac{z(z+1) \cdots (z+r-1)}{r!}.$$

Soit $H_1 \in \mathbb{N}$. Pour tout $h \in \mathbb{N}_0$ il existe $q, r \in \mathbb{N}_0$, avec $0 \leq r < H_1$, tels que $h = H_1q + r$. On pose alors

$$\Delta(z; h, H_1) := (\Delta(z; H_1))^q \Delta(z; r),$$

et pour $\sigma \geq 0$,

$$\Delta(z; h, H_1, \sigma) := \left(\frac{d}{dz} \right)^\sigma \Delta(z; h, H_1).$$

Si $\nu(n) := \text{ppcm}(1, \dots, n)$ on a $\nu(n) = \exp(n + o(n))$ pour $n \rightarrow \infty$ par le théorème des nombres premiers. Le lemme suivant est dû à Matveev [18] (ou voir par exemple [19]) :

LEMME 1. Soient $H_1 > 0, h \geq 0, \sigma \geq 0$ des nombres entiers. Pour tout $\kappa \in \{0, \dots, \sigma\}$ et tout $m \in \mathbb{Z}$ on a

$$\nu(H_1)^\sigma \frac{1}{\kappa!} \Delta(m; h, H_1, \kappa) \in \mathbb{Z},$$

et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} |\Delta(z; h, H_1, \tau)| \leq \sigma! e^{h+H_1} \left(\frac{|z|}{H_1} + 1 \right)^h.$$

Le deuxième outil dont nous avons besoin est une version du lemme de Schwarz bien adaptée à la situation des fonctions entières arithmétiques et qui est due à François Gramain [12].

LEMME 2. Soient $\theta > 1$ un nombre réel et $t \in \mathbb{N}$. Il existe une constante $c = c(\theta) > 0$ telle que : Si $N \in \mathbb{N}$, si $3 \leq N + 1 \leq \theta N$ et si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction entière telle que $f^{(\tau)}(n) = 0$ pour tout $(n, \tau) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tel que $0 \leq n \leq N - 1$ et $0 \leq \tau \leq t - 1$ alors

$$|f(N + re^{i\varphi})| \leq |f|_{\theta N} e^{-h(\theta)tN + ct \log N}$$

pour tout $(r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[$, où $h(\theta) = (2\theta^2 - 1) \log \theta - (\theta^2 - 1) \log(\theta^2 - 1)$. Sous les mêmes hypothèses, pour tout $\tau \in \mathbb{N}_0$ on a

$$|f^{(\tau)}(N)/\tau!| \leq |f|_{\theta N} e^{-h(\theta)tN + ct \log N}.$$

REMARQUE 3. Nous utiliserons dans la démonstration de la Proposition 1 l'estimation

$$|f^{(\tau)}(N)/\tau!| \leq |f|_{\theta(N+1)} e^{-h(\theta)tN + ct(1 + \log_+ N)}$$

qui est aussi valide pour $N = 0$ et $N = 1$, si on note $\log_+ x := \log \max(1, x)$.

Démonstration du Lemme 2. La formule

$$g(z) := f(z) \prod_{0 \leq n \leq N-1} \left(\frac{\theta^2 N^2 - zn}{\theta N(z - n)} \right)^t$$

définit une fonction entière g . Les propriétés des facteurs de Blaschke (automorphismes du disque) donnent $|g|_{\theta N} = |f|_{\theta N}$.

Soit $z = N + re^{i\varphi}$ ($0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$) tel que $f(z) \neq 0$. Pour $0 \leq n \leq N - 1$ on a $|z - n| \leq N + 1 - n$ et $|\theta^2 N^2 - zn| \geq \theta^2 N^2 - (N + 1)n$. Ainsi

$$|g(z)| \geq |f(z)| \left(\frac{N + 1}{\theta N} \right)^{tN} \prod_{0 \leq n \leq N-1} \left(\frac{\theta^2 N^2 / (N + 1) - n}{N + 1 - n} \right)^t.$$

En utilisant la propriété $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ de la fonction Γ on obtient

$$\prod_{0 \leq n \leq N-1} \frac{\theta^2 N^2 / (N + 1) - n}{N + 1 - n} = \prod_{0 \leq n \leq N-1} \frac{\Gamma(\theta^2 N^2 / (N + 1) - n + 1) \Gamma(N + 1 - n)}{\Gamma(\theta^2 N^2 / (N + 1) - n) \Gamma(N - n + 2)}$$

$$= \frac{\Gamma(\theta^2 N^2 / (N + 1) + 1) \Gamma(2)}{\Gamma(\theta^2 N^2 / (N + 1) - N + 1) \Gamma(N + 2)}.$$

La formule de Stirling $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} e^{\lambda/(12x)}$ pour tout $x > 0$, où $0 < \lambda = \lambda(x) < 1$, donne l'existence d'une constante absolue c telle que

$$x \log x - x - \frac{1}{2} \log x \leq \log \Gamma(x) \leq x \log x - x + c$$

pour tout $x \geq 1$.

On notera c_1, c_2, c_3, \dots des constantes ne dépendant que de θ . On suppose $N \geq c_1$ de sorte que $\theta^2 N^2 / (N + 1) - N + 1 \geq 2$ et $\theta^2 N - [\theta^2] \geq 2$ pour utiliser la croissance de Γ sur $[2, \infty[$. Alors on obtient

$$\log \Gamma\left(\frac{\theta^2 N^2}{N + 1} - N + 1\right) \leq \log(\Gamma((\theta^2 - 1)N)((\theta^2 - 1)N + 1))$$

$$\leq c_2 \log N + (\theta^2 - 1)N \log((\theta^2 - 1)N) - (\theta^2 - 1)N + c,$$

$$\log \Gamma(N + 2) \leq \log(\Gamma(N)(N + 2)^2)$$

$$\leq c_3 \log N + N \log N - N + c,$$

et

$$\log \Gamma\left(\frac{\theta^2 N^2}{N + 1} + 1\right) \geq \log(\Gamma(\theta^2 N)(\theta^2 N)^{-[\theta^2]})$$

$$\geq c_4 \log N + \theta^2 N \log(\theta^2 N) - \theta^2 N - \frac{1}{2} \log(\theta^2 N).$$

Ainsi

$\log |g(z)| \geq \log |f(z)| + tN(\theta^2 \log \theta^2 - (\theta^2 - 1) \log(\theta^2 - 1) - \log \theta) + c_5 t \log N$
 et $|g(z)| \leq |g|_{\theta N}$ donne la première conclusion. La majoration pour les dérivées est obtenue par la formule de Cauchy :

$$\frac{f^{(\tau)}(N)}{\tau!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi - N|=1} \frac{f(\xi)}{(\xi - N)^{\tau+1}} d\xi. \blacksquare$$

Maintenant nous pouvons montrer notre première proposition.

PROPOSITION 1. *Il existe une suite $(\gamma_s)_{s \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs avec $\gamma_s \sim s \cdot 0.78592968 \dots$ pour $s \rightarrow \infty$ ayant la propriété suivante : Si $s \geq 2$ est un nombre entier et si f est une fonction entière ayant les propriétés*

$$f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s - 1$$

et

$\log |f|_r \leq \gamma r$ pour tout r suffisamment grand, où $\gamma < \gamma_s$,
 alors il existe $P_0, P_1, \dots, P_s \in \mathbb{Z}[z]$, non tous nuls, tels que

$$P_0(z) + \sum_{\sigma=1}^s P_\sigma(z) f^{(\sigma-1)}(z) = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit L_0 suffisamment grand. Soient $\theta > 1$ et $h(\theta) := (2\theta^2 - 1) \log \theta - (\theta^2 - 1) \log(\theta^2 - 1)$. Soient $h_0, h_1 \in \mathbb{R}_+$ et $r, t \in \mathbb{N}$ avec $t + r - 1 = s$. Les paramètres θ, h_0, h_1, r et t seront choisis plus tard.

On notera c toutes les constantes ne dépendant que de ces paramètres (et indépendantes de L_0) qui interviendront dans la suite de cette démonstration. Comme ces constantes ne seront pas numérotées, la valeur de c changera.

On pose $H_0 := [h_0 L_0] + 1$ et $H_1 := [h_1 L_0] + 1$. On note ϕ_1, \dots, ϕ_L les $L = H_0(r + 1)$ fonctions

$$\nu(H_1)^{t-1} \Delta(z; h, H_1), \quad \nu(H_1)^{t-1} \Delta(z; h, H_1) f^{(\varrho)}(z)$$

pour $h = 0, \dots, H_0 - 1$ et $\varrho = 0, \dots, r - 1$.

Considérons la matrice infinie à L lignes

$M :=$

$$\begin{pmatrix} \phi_1(0) & \cdots & \phi_1^{(t-1)}(0) & \phi_1(1) & \cdots & \phi_1^{(t-1)}(1) & \cdots & \phi_1(n) & \cdots & \phi_1^{(t-1)}(n) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \phi_L(0) & \cdots & \phi_L^{(t-1)}(0) & \phi_L(1) & \cdots & \phi_L^{(t-1)}(1) & \cdots & \phi_L(n) & \cdots & \phi_L^{(t-1)}(n) & \cdots \end{pmatrix}.$$

Si on note C_ν la ν -ième colonne en posant

$$C_\nu = \begin{pmatrix} \phi_1^{(\tau_\nu)}(n_\nu) \\ \vdots \\ \phi_L^{(\tau_\nu)}(n_\nu) \end{pmatrix},$$

alors $n_\nu = [(\nu - 1)/t]$ et $\tau_\nu = \text{card} \{i \mid 1 \leq i < \nu, n_i = n_\nu\}$.

Supposons que le rang de M est égal à L . Alors il existe $(\nu_1, \dots, \nu_L) \in \mathbb{N}^L$ tel que $\nu_1 < \dots < \nu_L$ et que pour tous μ et ν tels que $1 \leq \mu \leq L$ et $1 \leq \nu < \nu_\mu$ on ait

$$\text{rang}(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_{\mu-1}}, C_\nu) = \mu - 1 \quad \text{mais} \quad \text{rang}(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_L}) = L.$$

On a donc $|\det(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_L})| \geq 1$ parce que les fonctions ϕ_λ satisfont $\phi_\lambda^{(\tau)}(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour $\tau = 0, \dots, t - 1$. Notons Δ ce déterminant. Le lemme suivant donne une majoration de $|\Delta|$.

LEMME 3. Dans la situation ci-dessus on a

$$|\Delta| \leq L! \max_{\alpha \in \mathfrak{S}_L} \prod_{\mu=1}^L \tau_{\nu_\mu}! |\phi_{\alpha(\mu)}|_{\theta(n_{\nu_\mu+1})} \exp(-h(\theta)tn_{\nu_\mu} + ct(1 + \log_+ n_{\nu_\mu}))$$

où \mathfrak{S}_L est le groupe des permutations de $\{1, \dots, L\}$.

Démonstration. Nous montrons le lemme par récurrence sur L .

Pour $L = 1$ on a par hypothèse

$$\phi_1^{(\tau)}(\mu) = 0$$

pour tout $(\mu, \tau) \in \{0, \dots, n_{\nu_1} - 1\} \times \{0, \dots, t - 1\}$. Donc le Lemme 2 (et la Remarque 3) donne

$$|\phi_1^{(\tau_{\nu_1})}(n_{\nu_1})| \leq \tau_{\nu_1}! |\phi_1|_{\theta(n_{\nu_1+1})} \exp(-h(\theta)tn_{\nu_1} + ct(1 + \log_+ n_{\nu_1})).$$

Supposons que le lemme est montré pour la même situation avec $L - 1$. Soit F la fonction entière définie par

$$F(z) := \det(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_{L-1}}, C(z)), \quad \text{où } C(z) = \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \vdots \\ \phi_L(z) \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a $F(z) = \sum_{\lambda=1}^L (-1)^{L+\lambda} \Delta_\lambda \phi_\lambda(z)$ où les Δ_λ sont certains déterminants extraits de Δ . Il suit que $F^{(\tau_\nu)}(n_\nu) = \det(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_{L-1}}, C_\nu)$. Donc on trouve

$$F^{(\tau)}(\mu) = 0$$

pour tout $(\mu, \tau) \in \{0, \dots, n_{\nu_L} - 1\} \times \{0, \dots, t - 1\}$. On déduit du Lemme 2 que

$$|\Delta| = |F^{(\tau_{\nu_L})}(n_{\nu_L})| \leq \tau_{\nu_L}! |F|_{\theta(n_{\nu_L+1})} \exp(-h(\theta)tn_{\nu_L} + ct(1 + \log_+ n_{\nu_L})).$$

Par ailleurs on a

$$|F|_{\theta(n_{\nu_L+1})} \leq L \max_{1 \leq \lambda \leq L} |\Delta_\lambda \phi_\lambda(z)|_{\theta(n_{\nu_L+1})} =: L |\Delta_{\lambda_0}| |\phi_{\lambda_0}|_{\theta(n_{\nu_L+1})}.$$

Ainsi, il existe $\beta \in \mathfrak{S}_L$ tel que $\beta(L) = \lambda_0$ et que

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq L \tau_{\nu_L}! |\phi_{\lambda_0}|_{\theta(n_{\nu_L+1})} e^{-h(\theta)tn_{\nu_L} + ct(1 + \log_+ n_{\nu_L})} \\ &\quad \times (L - 1)! \prod_{\mu=1}^{L-1} \tau_{\nu_\mu}! |\phi_{\beta(\mu)}|_{\theta(n_{\nu_\mu+1})} e^{-h(\theta)tn_{\nu_\mu} + ct(1 + \log_+ n_{\nu_\mu})} \\ &\leq L! \max_{\alpha \in \mathfrak{S}_L} \prod_{\mu=1}^L \tau_{\nu_\mu}! |\phi_{\alpha(\mu)}|_{\theta(n_{\nu_\mu+1})} \exp(-h(\theta)tn_{\nu_\mu} + ct(1 + \log_+ n_{\nu_\mu})). \blacksquare \end{aligned}$$

L'hypothèse $|f|_R \leq e^{\gamma R}$ pour tout $R \geq R_0$ donne l'existence d'une constante $c' > 0$ telle que $|f^{(\sigma)}|_R \leq e^{\gamma R + c'}$ pour tout $R \geq 0$ et pour tout σ tel que $0 \leq \sigma < s$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le Lemme 1 (pour $\sigma = 0$) on obtient, pour $h \in \{0, \dots, H_0 - 1\}$ et $\varrho \in \{0, \dots, r - 1\}$,

$$\nu(H_1)^{t-1} |\Delta(z; h, H_1)|_R \leq e^{(1+\varepsilon)H_1(t-1)+h+H_1} (R/H_1 + 1)^h$$

pour tout $R > 0$, si L_0 (et donc H_1) est suffisamment grand.

On pose

$$\varepsilon_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq \alpha(\mu) \leq H_0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et alors

$$\begin{aligned} \prod_{\mu=1}^L |\phi_{\alpha(\mu)}|_{\theta(n_{\nu_\mu}+1)} &\leq e^{(1+\varepsilon)H_1L(t-1)+H_1L+(r+1)H_0(H_0-1)/2} \\ &\times \prod_{\mu=1}^L e^{\theta\gamma(1-\varepsilon_\mu)n_{\nu_\mu}+c} \left(\frac{\theta(n_{\nu_\mu} + 1)}{H_1} + 1 \right)^{H_0} \end{aligned}$$

et par le Lemme 3 on obtient

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq L! e^{(1+\varepsilon)H_1L(t-1)+H_1L+(r+1)H_0(H_0-1)/2+cL} \\ &\times \prod_{\mu=1}^L e^{-\theta\gamma\varepsilon_\mu n_{\nu_\mu}+(\theta\gamma-h(\theta)t)n_{\nu_\mu}+ct(1+\log_+ n_{\nu_\mu})} \left(\frac{\theta(n_{\nu_\mu} + 1)}{H_1} + 1 \right)^{H_0}. \end{aligned}$$

Or, on a $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_L$ et $n_\nu = [(\nu - 1)/t]$ donc la suite des n_ν est croissante. Supposons $D := -\theta\gamma + h(\theta)t > 0$. Alors

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq L! e^{(1+\varepsilon)H_1L(t-1)+H_1L+(r+1)H_0^2/2+cL} \\ &\times \prod_{\mu=1}^L e^{-\theta\gamma\varepsilon_\mu n_{\nu_\mu} - D(\nu_\mu - 1)/t + ct(1+\log_+ n_{\nu_\mu})} \left(\frac{\theta(\nu_\mu + t - 1)}{tH_1} + 1 \right)^{H_0}. \end{aligned}$$

En utilisant $\log(1 + x) \leq x$ pour $x \geq 0$ on a

$$\left(\frac{\theta(\nu_\mu + t - 1)}{tH_1} + 1 \right)^{H_0} \leq \left(\frac{\theta\nu_\mu}{tH_1} + 1 \right)^{H_0} e^{H_0 \log(1+\theta/H_1)} \leq \left(\frac{\theta\nu_\mu}{tH_1} + 1 \right)^{H_0} e^{\theta h_0/h_1}.$$

Les variations de $x \mapsto (ax + b)e^{-cx}$ montrent que

$$\prod_{\mu=1}^L e^{-D\nu_\mu/t} \left(\frac{\theta\nu_\mu}{tH_1} + 1 \right)^{H_0}$$

est maximal pour $\nu_1 = m + 1, \nu_2 = m + 2, \dots, \nu_L = m + L$ avec un $m \in \mathbb{N}_0$.

Alors $\prod_{\mu=1}^L e^{-\theta\gamma\varepsilon_\mu n_\nu\mu}$ est maximal si $\varepsilon_\mu = 1$ pour $1 \leq \mu \leq H_0$ et il est donc majoré par

$$\exp\left(-\theta\gamma \sum_{l=0}^{H_0-1} \left(\frac{m+l}{t} - 1\right)\right) = e^{\theta\gamma H_0 - (\theta/t)\gamma(mH_0 + H_0(H_0-1)/2)}.$$

On obtient donc

$$|\Delta| \leq e^{(1+\varepsilon)H_1L(t-1) + H_1L + (r+1)H_0^2/2 - (\theta\gamma/2t)H_0^2 - (D/2t)L^2 + 2L \log L} \times \left(\frac{tH_1}{\theta}\right)^{-H_0L} \psi(m),$$

où

$$\psi(m) = e^{-(\theta/t)\gamma H_0 m - (DL/t)m} \prod_{j=1}^L \left(\frac{tH_1}{\theta} + m + j\right)^{H_0}.$$

Comme

$$\prod_{j=1}^L \left(\frac{tH_1}{\theta} + m + j\right) = \frac{\Gamma(tH_1/\theta + m + L + 1)}{\Gamma(tH_1/\theta + m + 1)}$$

la formule de Stirling (voir p. 369) donne $\log \psi(m) \leq \Psi(m)$ où

$$\begin{aligned} \Psi(m) := & -\frac{\theta}{t} \gamma H_0 m - \frac{DL}{t} m \\ & + H_0 \left\{ \left(\frac{tH_1}{\theta} + m + L + 1\right) \log \left(\frac{tH_1}{\theta} + m + L + 1\right) \right. \\ & \left. - L + c - \left(\frac{tH_1}{\theta} + m + \frac{1}{2}\right) \log \left(\frac{tH_1}{\theta} + m + 1\right) \right\}. \end{aligned}$$

Ψ' est une fonction décroissante de m et $\Psi'(0)$ est du signe de

$$\log \left(1 + \frac{L\theta}{tH_1 + \theta}\right) + \frac{\theta}{2(tH_1 + \theta)} - \frac{\theta\gamma + D(r+1)}{t}$$

que l'on supposera ≤ 0 . Dans ces conditions $\Psi(m)$ est maximal pour $m = 0$ et le logarithme de $(tH_1/\theta)^{-H_0L} \psi(m)$ est majoré par

$$H_0 \left(\frac{tH_1}{\theta} + L\right) \log \left(1 + \frac{\theta(L+1)}{tH_1}\right) - H_0L + O(L \log L).$$

Comme $|\Delta| \geq 1$ pour L_0 tendant vers l'infini on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq & (t-1)h_0h_1(r+1) + h_0h_1(r+1) + \frac{r+1}{2} h_0^2 - \frac{\theta\gamma}{2t} h_0^2 - \frac{Dh_0^2(r+1)^2}{2t} \\ & - h_0^2(r+1) + h_0 \left(\frac{th_1}{\theta} + h_0(r+1)\right) \log \left(1 + \frac{\theta h_0(r+1)}{th_1}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \gamma &\geq t \frac{(r+1)^2}{r(r+2)} \frac{h(\theta)}{\theta} - \frac{2t}{r(r+2)\theta} \left((r+1)t \frac{h_1}{h_0} - \frac{r+1}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{th_1}{\theta h_0} + r + 1 \right) \log \left(1 + \frac{\theta h_0(r+1)}{th_1} \right) \right) \\ &=: \gamma_s(\theta, r, t, h_0, h_1). \end{aligned}$$

Si

$$\gamma < \gamma_s(\theta, r, t, h_0, h_1)$$

et si les conditions $D > 0$ et

$$\log \left(1 + \frac{L\theta}{tH_1 + \theta} \right) + \frac{\theta}{2(tH_1 + \theta)} - \frac{\theta\gamma + D(r+1)}{t} \leq 0$$

sont satisfaites pour L_0 assez grand, on trouve une contradiction quand on fait tendre L_0 vers l'infini : $\gamma_s(\theta, r, t, h_0, h_1)$ peut donc être choisi comme valeur pour γ_s . ■

Choix des paramètres. Un choix fournissant un $\gamma_s > 0$ pour toute valeur de $s \geq 2$, mais qui ne donne pas le meilleur résultat possible pour s grand, est $t = 1, r = s, \theta = 25, h_1/h_0 = (r + 1)^{-1}$.

Pour obtenir l'estimation asymptotique du meilleur γ_s fourni par notre démonstration, on peut supposer que s est grand et on pose par exemple $\theta := 1.7830684901099\dots$ (ce qui maximise $h(\theta)/\theta$), $t := s - r + 1, r := \lceil s/\log s \rceil$ et $h_1/h_0 := s^{-1}$. On obtient alors $\gamma_s \sim sh(\theta)/\theta$.

Numériquement on obtient les choix suivants pour quelques petites valeurs de s :

s	r	t	h_1/h_0	θ	γ_s/s	s	r	t	h_1/h_0	θ	γ_s/s
2	2	1	0.8655	6.9	0.036192	33	10	24	0.037	2.35	0.326716
3	3	1	0.8465	4.19	0.053996	34	11	24	0.037	2.3	0.330837
4	3	2	0.4235	4.19	0.080995	100	21	80	0.0115	2.06	0.464194
5	3	3	0.282	4.19	0.097194	1000	79	922	0.001	1.87	0.65499
6	4	3	0.282	3.37	0.116506	5000	194	4807	0.0002	1.825	0.72072
7	4	4	0.212	3.37	0.13315	10000	284	9717	0.0001	1.813	0.738086
8	4	5	0.1695	3.37	0.145633	50000	685	49316	0.00002	1.797	0.76294
9	5	5	0.1695	2.98	0.160464	10^5	996	99005	10^{-5}	1.793	0.769236
10	5	6	0.142	2.98	0.173302	10^6	3421	996580	10^{-6}	1.787	0.780233

Conclusion. Nous savons que si $\gamma < \gamma_s$ alors le rang l de la matrice M est strictement inférieur à L . Alors il existe $C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_l}$ avec

$$\text{rang}(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_l}) = l$$

et la fonction entière F qui est définie par

$$F(z) := \det \begin{pmatrix} \phi_1^{(\tau_{\nu_1})}(n_{\nu_1}) & \cdots & \phi_1^{(\tau_{\nu_l})}(n_{\nu_l}) & \phi_1(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_{l+1}^{(\tau_{\nu_1})}(n_{\nu_1}) & \cdots & \phi_{l+1}^{(\tau_{\nu_l})}(n_{\nu_l}) & \phi_{l+1}(z) \end{pmatrix}$$

satisfait

$$F^{(\tau)}(n) = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et } \tau = 0, \dots, t - 1.$$

Le développement de ce déterminant suivant la dernière colonne s'écrit

$$F(z) = \sum_{\lambda=1}^{l+1} (-1)^{l+1+\lambda} \Delta_\lambda \phi_\lambda(z).$$

La version suivante du théorème de Carlson suffit pour montrer que F est identiquement nulle ce qui nous donne la Proposition 1. La démonstration est très voisine de celle du théorème de Carlson dans Rubel [23].

LEMME 4. *Soit F une fonction entière telle que $F^{(\tau)}(n) = 0$ pour $\tau = 0, \dots, t - 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F|_r}{r} < \pi t.$$

Alors F est identiquement nulle.

REMARQUE 4. La fonction entière définie par $g(z) = (\sin(\pi z))^t$ montre que la constante πt est optimale.

Démonstration du Lemme 4. Nous allons appliquer la formule de Carleman (voir [23, p. 45]). Supposons que F n'est pas identiquement nulle. Soit

$$\gamma > \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F|_r}{r}.$$

Soit $\varrho \in]0, 1[$ tel que F n'ait pas de zéros sur le cercle $|z| = \varrho$. Soit $\theta > 0$ et soit $R > 0$ un nombre réel suffisamment grand. Si $a \in \mathbb{C}$ est un zéro d'une fonction g , on note $\text{ord}_g(a)$ l'ordre de a . Pour R tendant vers l'infini on a

$$\begin{aligned} \Sigma(F, R) &:= \sum_{\substack{a=re^{i\phi} \in F^{-1}(0) \\ \text{Re}(a) \geq 0, \varrho < |a| < R}} \text{ord}_F(a) \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right) \cos \phi \\ &\geq t \sum_{1 \leq n < R} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{R^2} \right) \sim t \log R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I(F, R) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\varrho}^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log |F(it)F(-it)| dt \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\varrho}^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \gamma t dt + O(1) \leq \frac{\gamma}{\pi} \log R + O(1), \\
 J(F, R) &:= \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log |F(Re^{it})| \cos t dt = O(1).
 \end{aligned}$$

Par la formule de Carleman

$$\Sigma(F, R) = I(F, R) + J(F, R) + O(1)$$

on obtient

$$t \log R \leq \frac{\gamma}{\pi} \log R + O(1). \blacksquare$$

La prochaine proposition est une légère modification d'un résultat de [28, 29] où nous avons étudié des fonctions entières f ayant la propriété $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z}$ pour tous $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$. Si $r \in \mathbb{Q}^\times$, on note $\text{den}(r) \in \mathbb{N}$ son dénominateur.

PROPOSITION 2. *Soit f une fonction entière qui satisfait $f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Q}$ pour tous $n, \sigma \in \mathbb{N}_0$. S'il existe des constantes c, C telles que, pour tous $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$,*

$$D_{\sigma,n} := \text{ppcm}(\text{den}(f(n)), \dots, \text{den}(f^{(\sigma)}(n))) \leq C \exp(c\sigma \log_+ n)$$

et si l'on a

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log |f|_r}{r} < \log 2,$$

alors f est une fonction polynomiale.

Démonstration. Soit N suffisamment grand. Supposons que

$$\log \log |f|_r \leq \gamma r$$

pour tout r suffisamment grand, où $\gamma < \log 2$. Nous posons $S_n := [\exp(2\gamma n)] + 1$, $H := [S_N(\log N)^3] + 1$ et $K := [N/(\log N)^2] + 1$.

ÉTAPE 1. Il existe $a_{h,k} \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq h < H, 0 \leq k < K$) avec

$$0 < \max_{h,k} |a_{h,k}| \leq \exp(S_N \cdot O(N/\log N))$$

tels que la fonction entière F définie par

$$F(z) := \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{h,k} z^h f(z)^k$$

satisfasse

$$F^{(\sigma)}(n) = 0$$

pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et tout $\sigma \in \{0, \dots, S_N-1\}$.

Pour $n \in \{0, \dots, N - 1\}$ et $\sigma \in \{0, \dots, S_N - 1\}$ on a

$$(D_{\sigma,n})^K \leq \exp(S_N \cdot O(N/\log N)).$$

Alors $(D_{\sigma,n})^K F^{(\sigma)}(n) = 0$ pour $n = 0, \dots, N - 1$ et $\sigma = 0, \dots, S_N - 1$ est un système de $S_N N$ équations en HK inconnues dont les coefficients sont dans \mathbb{Z} et majorés par $\exp(S_N O(N))$. Le lemme de Siegel (voir par exemple Waldschmidt [26, Lemme 1.2.1, p. 1.6]) donne donc la première étape.

ÉTAPE 2. Pour tout $M \geq N$ et tout $S \in \{S_M, S_M + 1, \dots, S_{M+1}\}$ on a

$$(*_{M,S}) \quad F^{(\sigma)}(m) = 0 \quad \text{pour tout } m \in \{0, \dots, M - 1\}$$

et tout $\sigma \in \{0, \dots, S - 1\}$.

La démonstration est analogue à celle de [28, page 43]. Si $S < S_{M+1}$ on montre que $(*_{M,S}) \Rightarrow (*_{M,S+1})$ et si $S = S_{M+1}$ on montre que $(*_{M,S}) \Rightarrow (*_{M+1,S})$. On utilise la représentation intégrale

$$F^{(\sigma)}(m) = \frac{\sigma!}{2\pi i} \int_{|\xi|=2M} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - m)^{\sigma+1} \prod_{\substack{\mu=0, \mu \neq m \\ \mu \neq m}}^{M-1} (\xi - \mu)^S} \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq m}}^{M-1} (m - \mu)^S$$

pour obtenir une majoration de $|F^{(\sigma)}(m)|$. Et pour $n \in \{0, \dots, M\}$ et $\sigma \in \{0, \dots, S\}$ on a

$$(D_{\sigma,n})^K \leq \exp(S \cdot O(M/\log M)).$$

ÉTAPE 3. La fonction f est polynomiale.

La deuxième étape donne $F^{(\sigma)}(0) = 0$ pour tout $\sigma \in \mathbb{N}_0$, les coefficients de Taylor de F en 0 sont donc tous nuls. Ainsi la fonction F est identiquement nulle, et f est une fonction algébrique. Comme f est une fonction entière, elle est polynomiale. ■

2.2. Démonstration du Théorème 1. Par la Proposition 1 il existe $P_0, \dots, P_s, Q \in \mathbb{Z}[z]$ avec $Q \neq 0$ tels que

$$Q(z) f^{(s)}(z) = P_0(z) + \sum_{\sigma=1}^s P_\sigma(z) f^{(\sigma-1)}(z).$$

Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $Q(n)$ est un dénominateur de $f^{(s)}(n)$. Par récurrence on montre que $f^{(k)}(n) \in \mathbb{Q}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $Q(n)^{k-s+1}$ est un dénominateur de $f^{(s)}(n), \dots, f^{(k)}(n)$. Le théorème suit par la Proposition 2 appliquée à la fonction $f(z + n_0)$. ■

3. Démonstration du Théorème 2. Elle est analogue à celle du Théorème 1 et utilise la variante suivante du Lemme 2.

LEMME 5. Soient $\theta > 1$ un nombre réel et $t \in \mathbb{N}$. Il existe une constante $c = c(\theta) > 0$ telle que : Si $N \in \mathbb{N}$ et $3 \leq N + 1 \leq \theta N$ et si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est

une fonction entière telle que $f^{(\tau)}(n) = 0$ pour tout $(n, \tau) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ tel que $-N + 1 \leq n \leq N - 1$ et $0 \leq \tau \leq t - 1$ alors

$$|f(\pm N + re^{i\varphi})| \leq |f|_{\theta N} e^{-h(\theta)tN + ct \log N}$$

pour tout $(r, \phi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[$, où

$$h(\theta) = (\theta^2 + 1) \log(\theta^2 + 1) - (\theta^2 - 1) \log(\theta^2 - 1) - 2 \log(2\theta).$$

Sous les mêmes hypothèses, pour tout $\tau \in \mathbb{N}_0$, on a

$$|f^{(\tau)}(\pm N)/\tau!| \leq |f|_{\theta N} e^{-th(\theta)N + ct \log N}.$$

Démonstration. La formule

$$g(z) := f(z) \left(\frac{\theta N}{z}\right)^t \prod_{1 \leq n \leq N-1} \left\{ \left(\frac{\theta^2 N^2 - zn}{\theta N(z-n)}\right) \left(\frac{\theta^2 N^2 + zn}{\theta N(z+n)}\right) \right\}^t$$

définit une fonction entière g telle que $|g|_{\theta N} = |f|_{\theta N}$. Pour $z = \pm N + re^{i\varphi}$ ($0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$) tel que $f(z) \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq n \leq N-1} \left\{ \left(\frac{\theta^2 N^2 - zn}{\theta N(z-n)}\right) \left(\frac{\theta^2 N^2 + zn}{\theta N(z+n)}\right) \right\}^t = \prod_{1 \leq n \leq N-1} \left(\frac{\theta^4 N^4 - z^2 n^2}{\theta^2 N^2(z^2 - n^2)}\right)^t \\ & \geq \left(\frac{N+1}{\theta N}\right)^{2t(N-1)} \prod_{1 \leq n \leq N-1} \left(\frac{(\theta^2 N^2/(N+1))^2 - n^2}{(N+1)^2 - n^2}\right)^t \\ & = \left(\frac{N+1}{\theta N}\right)^{2t(N-1)} \prod_{1 \leq n \leq N-1} \left\{ \left(\frac{\theta^2 N^2/(N+1) - n}{N+1-n}\right) \left(\frac{\theta^2 N^2/(N+1) + n}{N+1+n}\right) \right\}^t \\ & = \left(\frac{N+1}{\theta N}\right)^{2tN} \left\{ \frac{\Gamma(2)\Gamma(\theta^2 N^2/(N+1) + N)}{\Gamma(\theta^2 N^2/(N+1) - (N-1))(2N)!} \right\}^t \end{aligned}$$

et on obtient le résultat annoncé en utilisant la formule de Stirling comme dans la démonstration du Lemme 2. ■

Comme dans le paragraphe précédent on démontre que la fonction entière arithmétique f satisfait une équation différentielle :

PROPOSITION 3. *Il existe une suite $(\gamma_s)_{s \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs avec $\gamma_s \sim s \cdot 0.9905659020 \dots$ pour $s \rightarrow \infty$ ayant la propriété suivante : Si $s \geq 2$ est un nombre entier et si f est une fonction entière ayant les propriétés*

$$f^{(\sigma)}(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s - 1$$

et

$$\log |f|_r \leq \gamma r \quad \text{pour tout } r \text{ suffisamment grand, où } \gamma < \gamma_s,$$

alors il existe $P_0, P_1, \dots, P_s \in \mathbb{Z}[z]$, non tous nuls, tels que

$$P_0(z) + \sum_{\sigma=1}^s P_\sigma(z) f^{(\sigma-1)}(z) = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Comme pour la Proposition 1, on suppose L_0 suffisamment grand et on a des paramètres r, t, h_0, h_1, θ . On pose $H_0 := [h_0 L_0] + 1$ et $H_1 := [h_1 L_0] + 1$ et on note ϕ_1, \dots, ϕ_L les $L = H_0(r + 1)$ fonctions

$$\nu(H_1)^{t-1} \Delta(z; h, H_1), \quad \nu(H_1)^{t-1} \Delta(z; h, H_1) f^{(\varrho)}(z)$$

pour $h = 0, \dots, H_0 - 1$ et $\varrho = 0, \dots, r - 1$.

La seule différence est que l'on considère la matrice infinie

$$M := \begin{pmatrix} \phi_1(0) & \dots & \phi_1^{(t-1)}(0) & \phi_1(-1) & \dots & \phi_1^{(t-1)}(-1) & \phi_1(1) & \dots & \phi_1^{(t-1)}(1) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \phi_L(0) & \dots & \phi_L^{(t-1)}(0) & \phi_L(-1) & \dots & \phi_L^{(t-1)}(-1) & \phi_L(1) & \dots & \phi_L^{(t-1)}(1) & \dots \end{pmatrix}.$$

Si on suppose que le rang de M est L et si la ν -ième colonne est C_ν , il existe $(\nu_1, \dots, \nu_L) \in \mathbb{N}^L$ tel que $\nu_1 < \dots < \nu_L$ et que pour tous μ, ν tels que $1 \leq \mu \leq L$ et $1 \leq \nu < \nu_\mu$ on ait

$$\text{rang}(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_{\mu-1}}, C_\nu) = \mu - 1 \quad \text{mais} \quad \text{rang}(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_L}) = L.$$

On pose $\Delta := \det(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_L})$. Le Lemme 5 donne une majoration de $|\Delta|$. Comme dans la démonstration de la Proposition 1 on montre qu'il existe un $\gamma_s > 0$ tel que le rang de Δ soit plus petit que L si $\gamma < \gamma_s$. Comme la fonction réelle définie par $\varphi(\theta) := h(\theta)/\theta$ prend son maximum 0.9905659020... en $\theta = 2.091659954 \dots$, on trouve que $\gamma_s \sim s \cdot 0.9905659020 \dots$ pour $s \rightarrow \infty$. Remarquons que $0.990565 \dots = \pi/3.171 \dots$.

Nous épargnons au lecteur le détail de la démonstration.

Le Lemme 4 suffit pour conclure que la fonction F est identiquement nulle. ■

La Proposition 2 suffit pour finir la démonstration du Théorème 2 de la même façon qu'on a obtenu le Théorème 1 au paragraphe 2.2.

4. Démonstration du Théorème 3. Comme dans les démonstrations précédentes nous commençons par montrer que f satisfait une équation différentielle.

PROPOSITION 4. Soit $q \in \mathbb{Z}$ avec $|q| > 1$. Il existe une suite $(\gamma_s)_{s \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs avec $\gamma_s \sim s/4$ pour $s \rightarrow \infty$ ayant la propriété suivante : Si $s \geq 2$ est un nombre entier et f est une fonction entière ayant les propriétés

$$f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0 \text{ et pour } \sigma = 0, \dots, s - 1$$

et

$$\log |f|_r \leq \gamma \frac{(\log r)^2}{\log |q|} \quad \text{pour tout } r \text{ suffisamment grand, où } \gamma < \gamma_s,$$

alors il existe $P_0, P_1, \dots, P_s \in \mathbb{Z}[z]$, non tous nuls, tels que

$$P_0(z) + \sum_{\sigma=1}^s P_\sigma(z) f^{(\sigma-1)}(z) = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

REMARQUE 5. Dans la démonstration suivante nous n’essayons pas d’obtenir de bonnes valeurs pour γ_s si s est petit. Pour simplifier les considérations nous n’introduisons pas de paramètre h_0 comme dans la démonstration du Théorème 1. On pourrait aussi introduire des q -analogues des polynômes de Fel’dman (voir Gramain [14]) afin d’améliorer γ_s .

Démonstration de la Proposition 4. Soit L_0 suffisamment grand. Soient $\theta > 1$ et $h(\theta) := (2\theta^2 - 1) \log \theta - (\theta^2 - 1) \log(\theta^2 - 1)$. Soient $r, t \in \mathbb{N}$ avec $t + r - 1 = s$. On choisira plus tard les paramètres t, r et θ .

On notera c toutes les constantes ne dépendant que de ces paramètres (et indépendantes de L_0) qui interviendront dans la suite de cette démonstration. Comme ces constantes ne seront pas numérotés, la valeur de c changera. On note ϕ_1, \dots, ϕ_L les $L = L_0(r + 1)$ fonctions $z^h, z^h f^{(\varrho)}(z)$ pour $h = 0, \dots, L_0 - 1$ et $\varrho = 0, \dots, r - 1$.

Considérons la matrice

$$M := \begin{pmatrix} \phi_1(1) & \dots & \phi_1^{(t-1)}(1) & \phi_1(q) & \dots & \phi_1^{(t-1)}(q) & \dots & \phi_1(q^n) & \dots & \phi_1^{(t-1)}(q^n) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \phi_L(1) & \dots & \phi_L^{(t-1)}(1) & \phi_L(q) & \dots & \phi_L^{(t-1)}(q) & \dots & \phi_L(q^n) & \dots & \phi_L^{(t-1)}(q^n) & \dots \end{pmatrix}.$$

On note C_ν la ν -ième colonne et on pose

$$C_\nu = \begin{pmatrix} \phi_1^{(\tau_\nu)}(q^{n_\nu}) \\ \vdots \\ \phi_L^{(\tau_\nu)}(q^{n_\nu}) \end{pmatrix}.$$

Alors $n_\nu = [(\nu - 1)/t]$ et $\tau_\nu = \text{card} \{i \mid 1 \leq i < \nu, n_i = n_\nu\}$.

Supposons que le rang de M est L . Alors il existe $(\nu_1, \dots, \nu_L) \in \mathbb{N}^L$ tel que $\nu_1 < \dots < \nu_L$ et que pour tous μ, ν tels que $1 \leq \mu \leq L$ et $1 \leq \nu < \nu_\mu$ on ait

$$\text{rang}(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_{\mu-1}}, C_\nu) = \mu - 1 \quad \text{mais} \quad \text{rang}(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_L}) = L.$$

On a $|\det(C_{\nu_1}, \dots, C_{\nu_L})| \geq 1$ comme $\phi_\lambda^{(\tau)}(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour $\tau = 0, \dots, t - 1$. On note Δ ce déterminant. Le lemme suivant donne une majoration de $|\Delta|$.

LEMME 6. Dans la situation ci-dessus on a

$$|\Delta| \leq L! \max_{\alpha \in \mathfrak{S}_L} \prod_{\mu=1}^L \tau_{\nu_\mu}! |\phi_{\alpha(\mu)}|_{2|q|^{\theta n_{\nu_\mu}}} \exp(-(\theta - 1)t n_{\nu_\mu}^2 \log |q| + c n_{\nu_\mu}).$$

Démonstration. Elle est analogue à celle du Lemme 3, mais au lieu du Lemme 2 nous utilisons dans ce cas le lemme suivant qui est un corollaire du lemme de Schwarz.

LEMME 7. Soient $q \in \mathbb{Z}$ avec $|q| > 1$, $t \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}_0$ et $\theta > 1$. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière telle que $f^{(\tau)}(q^n) = 0$ pour tout $(n, \tau) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tel que $0 \leq n \leq N - 1$ et $0 \leq \tau \leq t - 1$. Alors on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 2|q|^N$,

$$|f(z)| \leq |f|_{2|q|^{\theta N}} \exp(-t(\theta - 1)N^2 \log |q| + tN \log 2),$$

et pour tout $\tau \in \mathbb{N}_0$,

$$|f^{(\tau)}(q^N)/\tau!| \leq |f|_{2|q|^{\theta N}} \exp(-t(\theta - 1)N^2 \log |q| + tN \log 2).$$

Démonstration. Si r et R sont des nombres réels tels que $0 \leq r \leq R$ et si une fonction f analytique dans le disque fermé de rayon R admet (au moins) N zéros de multiplicité au moins t dans le disque fermé de rayon r , alors le lemme du Schwarz (voir par exemple Waldschmidt [26, Lemme 1.3.1, p. 1.10]) donne

$$|f|_r \leq |f|_R \left(\frac{R^2 + r^2}{2Rr} \right)^{-tN}.$$

On en déduit la première estimation en prenant $r = 2|q|^N$ et $R = 2|q|^{\theta N}$. La majoration pour les dérivées est obtenue par la formule de Cauchy :

$$\frac{f^{(\tau)}(q^N)}{\tau!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi - q^N|=1} \frac{f(\xi)}{(\xi - q^N)^{\tau+1}} d\xi. \blacksquare$$

L'hypothèse $|f|_R \leq e^{\gamma(\log R)^2/\log |q|}$ pour tout $R \geq R_0$ donne l'existence d'une constante $c' > 0$ telle que $|f^{(\sigma)}|_R \leq e^{\gamma(\log R)^2/\log |q| + c'}$ pour tout $R \geq 2$ et pour tout σ tel que $0 \leq \sigma < s$. On obtient

$$\max_{\alpha \in \mathfrak{S}_L} \prod_{\mu=1}^L |\phi_{\alpha(\mu)}|_{2|q|^{\theta n_{\nu_\mu}}} \leq \exp \left(\sum_{\mu=1}^L (L_0 \theta n_{\nu_\mu} + \theta^2 \gamma n_{\nu_\mu}^2 + cL_0) \log |q| \right)$$

et par le Lemme 6 on obtient

$$|\Delta| \leq L! \exp \left((\theta^2 \gamma - (\theta - 1)t) \sum_{\mu=1}^L n_{\nu_\mu}^2 \log |q| + L_0 \theta \sum_{\mu=1}^L n_{\nu_\mu} \log |q| + cL_0 L \right).$$

On pose $S(L) := \sum_{\mu=1}^L n_{\nu_\mu}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\sum_{\mu=1}^L n_{\nu_\mu}^2 \geq \frac{1}{L} \left(\sum_{\mu=1}^L n_{\nu_\mu} \right)^2 \geq \frac{S(L)}{L} \left(\sum_{\mu=1}^L \left(\frac{\nu_\mu - 1}{t} - 1 \right) \right) \geq S(L) \left(\frac{L}{2t} + O(1) \right).$$

On trouve donc, en supposant $\theta^2 \gamma \leq (\theta - 1)t$,

$$1 \leq |\Delta| \leq \exp \left(\left\{ (\theta^2 \gamma - (\theta - 1)t) \frac{r+1}{2t} + \theta \right\} S(L)L_0 \log |q| + o(S(L)L_0) \right)$$

car $L = o(S(L))$. Si

$$\gamma < t \frac{\theta - 1}{\theta^2} - \frac{2t}{\theta(r + 1)} =: \gamma_s$$

on trouve une contradiction quand on fait tendre L_0 vers l'infini.

Choix des paramètres. On trouve que $\gamma_s > 0$ pour tout $s > 1$ si l'on choisit $r = s$, $t = 1$ et $\theta > (s + 1)/(s - 1)$. Pour $s \rightarrow \infty$ on choisit $\theta := 2$, $t := s - r + 1$ et $r := \lceil s/\log s \rceil$, et on obtient $\gamma_s/s \sim 1/4$.

Conclusion. On conclut la démonstration de la Proposition 4 comme pour la Proposition 1, mais avec le Lemme 8 au lieu du Lemme 4.

LEMME 8. Soient $q \in \mathbb{Z}$ avec $|q| > 1$ et F une fonction entière telle que $F^{(\tau)}(q^n) = 0$ pour $\tau = 0, \dots, t - 1$ et tout $n \in \mathbb{N}_0$ et telle que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F|_r}{(\log r)^2} < \frac{t}{2 \log |q|}.$$

Alors F est identiquement nulle.

REMARQUE 6. La fonction entière g définie par le produit convergent

$$g(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^n} \right)^t$$

montre que l'on ne peut pas remplacer la constante $t/2 \log |q|$ par une constante plus grande.

Démonstration du Lemme 8. Supposons que F n'est pas identiquement nulle et

$$\log |F|_r \leq \gamma t \frac{(\log r)^2}{\log |q|}$$

pour tout $r > 0$ assez grand. Si $F(z) = cz^h + O(z^{h+1})$ avec $c \neq 0$, la formule de Jensen (voir [23, p. 6]) s'écrit

$$\sum_{\substack{a \in F^{-1}(0) \\ 0 < |a| < \varrho}} \text{ord}_F(a) \log \left(\frac{\varrho}{|a|} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(\varrho e^{it})| dt - \log |c| - h \log \varrho$$

pour tout $\varrho > 0$. Pour $\varrho := |q|^n$ et $n \rightarrow \infty$ on a

$$\sum_{\substack{a \in F^{-1}(0) \\ 0 < |a| < \varrho}} \text{ord}_F(a) \log \left(\frac{\varrho}{|a|} \right) \geq \sum_{\nu=0}^n (n - \nu)t \log |q| \geq \frac{1}{2} tn^2 \log |q| + O(n).$$

D'autre part, pour n suffisamment grand,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(\varrho e^{it})| dt \leq \gamma tn^2 \log |q|;$$

alors la formule de Jensen donne

$$0 \leq (\gamma - 1/2)tn^2 \log |q| + O(n), \quad \text{donc } \gamma \geq 1/2. \blacksquare$$

La prochaine proposition est presque un corollaire du Théorème 1 dans [27], mais il faut que nous intensifions la condition aux dénominateurs.

PROPOSITION 5. *Soient $q \in \mathbb{Z}$ avec $|q| > 1$ et f une fonction entière qui satisfait $f^{(\sigma)}(q^n) \in \mathbb{Q}$ pour tous $n, \sigma \in \mathbb{N}_0$. S'il existe des constantes c, C telles que, pour tous $\sigma, n \in \mathbb{N}_0$,*

$$D_{\sigma,n} := \text{ppcm}(\text{den}(f(q^n)), \dots, \text{den}(f^{(\sigma)}(q^n))) \leq C \exp(c\sigma n)$$

et si l'on a

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log |f|_r}{(\log r)^2} < \frac{1}{4 \log |q|},$$

alors f est une fonction polynomiale.

Démonstration. Dans la démonstration du Théorème 1 de [27], choisissons : $S_N := [\exp(4\gamma N^2 \log |q|)] + 1$, $H_N := [S_N N^{1/2}] + 1$, $K_N := [N^{1/2} \log N] + 1$ et $\theta = 2$. Alors, pour $0 \leq n \leq N$ et $0 \leq \sigma \leq S$,

$$\log D_{\sigma,n}^{K_N} = S \cdot O(N^{3/2} \log N).$$

Cela suffit pour démontrer la Proposition 5. \blacksquare

4.1. Démonstration du Théorème 3. Par la Proposition 4 il existe $P_0, \dots, P_s, Q \in \mathbb{Z}[z]$ avec $Q \neq 0$ tels que

$$Q(z)f^{(s)}(z) = P_0(z) + \sum_{\sigma=1}^s P_\sigma(z)f^{(\sigma-1)}(z).$$

Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Q(q^n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $Q(q^n)$ est un dénominateur de $f^{(s)}(q^n)$. Par récurrence on montre que $f^{(k)}(q^n) \in \mathbb{Q}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $Q(q^n)^{k-s+1}$ est un dénominateur de $f^{(s)}(q^n), \dots, f^{(k)}(q^n)$. Le théorème suit donc par la Proposition 5 appliquée à la fonction $f(q^{n_0}z)$. \blacksquare

Références

- [1] A. Baker, *A note on integral integer-valued functions of several variables*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 63 (1967), 715–720.
- [2] J.-P. Bézivin, *Une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de Gel'fond*, Analysis 4 (1984), 125–141.
- [3] P. Bundschuh, *Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen mehrerer Variablen*, J. Reine Angew. Math. 313 (1980), 116–132.
- [4] P. Bundschuh and I. Shiokawa, *A remark on a theorem of Gel'fond*, Arch. Math. (Basel) 65 (1995), 32–35.
- [5] P. Bundschuh and W. Zudilin, *On theorems of Gelfond and Selberg concerning integral-valued entire functions*, J. Approx. Theory, à paraître.
- [6] G. A. Fridman, *Entire integer-valued functions*, Mat. Sb. (N.S.) 75 (117) (1968), 417–431 (en russe).
- [7] S. Fukasawa, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Tôhoku Math. J. 27 (1926), 41–52.
- [8] A. O. Gel'fond, *Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières*, ibid. 30 (1929), 280–285.
- [9] —, *Sur un théorème de M. G. Pólya*, Atti Reale Accad. Naz. Lincei 10 (1929), 569–574.
- [10] —, *Sur les fonctions entières, qui prennent des valeurs entières dans les points β^n , β est un nombre entier positif et $n = 1, 2, \dots$* , Mat. Sb. 40 (1933), 42–47 (en russe, avec sommaire en français).
- [11] —, *On functions assuming integral values*, Mat. Zametki 1 (1967), 509–513 (en russe).
- [12] F. Gramain, communication orale.
- [13] —, *Sur le théorème de Fukasawa–Gel'fond*, Invent. Math. 63 (1981), 495–506.
- [14] —, *Fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes prenant des valeurs entières sur une progression géométrique*, dans : Cinquante ans de polynômes (Paris, 1988), Lecture Notes in Math. 1415, Springer, Berlin, 1990, 123–137.
- [15] L. Gruman, *Propriétés arithmétiques des fonctions entières*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 421–440.
- [16] G. Hardy, *On a theorem of Mr. G. Pólya*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 19 (1917), 60–63.
- [17] D. Masser, *Sur les fonctions entières à valeurs entières*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291 (1980), A1–A4.
- [18] E. M. Matveev, *Arithmetic properties of the values of generalized binomials*, Mat. Zametki 54 (1993), no. 4, 76–81, 159 (en russe); traduction anglaise : Math. Notes 54 (1993), 1031–1034.
- [19] Y. Nesterenko and M. Waldschmidt, *On the approximation of the values of exponential function and logarithm by algebraic numbers*, dans : Proceedings of Papers Dedicated to the Memory of Prof. N. I. Feldman, Yu. V. Nesterenko (ed.), Centre for Applied Research Mech.-Math. Faculty of MSU, Moscow, 1996, 23–42.
- [20] C. Pisot, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 52 (1942), 95–102.
- [21] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 40 (1915), 1–16.
- [22] —, *Über ganze ganzwertige Funktionen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1920, 1–10.
- [23] L. A. Rubel, *Entire and Meromorphic Functions*, Springer, New York, 1996, with the assistance of J. E. Colliander.

- [24] A. Selberg, *Über einen Satz von A. Gelfond*, Arch. Math. Naturvid. 44 (1941), 159–170.
- [25] M. Waldschmidt, *Pólya's theorem by Schneider's method*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 31 (1978), 21–25.
- [26] —, *Transcendence Methods*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 52, Queen's Univ., Kingston, ON, 1979.
- [27] M. Welter, *On entire functions whose derivatives are integer-valued on geometric progressions*, Manuscripta Math. 103 (2000), 63–74; erratum : ibid. 110 (2003), 409–411.
- [28] —, *Untersuchungen einer neuen Klasse von ganzwertigen ganzen Funktionen*, Dissertation, Universität zu Köln, 2002.
- [29] —, *A new class of integer-valued entire functions*, J. Reine Angew. Math., à paraître.

Mathematisches Institut
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Berlingstraße 1
53115 Bonn, Germany
E-mail: welter@math.uni-bonn.de

*Reçu le 19.4.2004
et révisé le 8.9.2004*

(4753)