ACTA ARITHMETICA
149.1 (2011)

Sur le nombre des entiers représentables comme somme de trois puissances

par

Olivier Robert (Saint-Étienne)

1. Introduction. On considère deux suites finies $\{\ell_j\}_{0\le j\le k}$ et $\{c_j\}_{0\le j\le k}$ d'entiers positifs fixés. Étant donné un entier $n\ge 1$, on considère le nombre

$$r(n)=r(\ell_0,\ell_1,\dots,\ell_k;c_0,c_1,\dots,c_k;n) \tag{1.1}$$

de représentations de n sous la forme

$$n=\sum_{j=0}^{k} c_j n_j^{\ell_j} \qquad (n_0,n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}). \tag{1.2}$$

On s'intéresse à l'ensemble des nombres entiers représentables sous cette forme, et on cherche plus précisément à estimer la quantité

$$V(x):=\operatorname{Card}\{n\le x : r(n)>0\} \qquad (x\ge 1). \tag{1.3}$$

Dans cet article, nous établissons un résultat dans le cas des sommes de trois puissances de la forme

$$n=c_0n_0^2+c_1n_1^{\ell_1}+c_2n_2^{\ell_2} \qquad (n_0,n_1,n_2\in\mathbb{N}), \tag{1.4}$$

plus précisément des entiers représentables sous la forme (1.2) dans le cas suivant :

$$k=2,\qquad \ell_0=2\le\ell_1\le\ell_2,\qquad c_0,c_1,c_2\ge 1. \tag{1.5}$$

De manière classique, la somme $\sum_{n\le x} r(n)^2$ intervient dans la minoration de $V(x)$ (par le biais de l'inégalité de Cauchy–Schwarz). Dans le cas précis (1.5), cette somme compte en fait le nombre de solutions de l'équation

$$c_0m_0^2+c_1m_1^{\ell_1}+c_2m_2^{\ell_2}=c_0n_0^2+c_1n_1^{\ell_1}+c_2n_2^{\ell_2}\le x, \qquad m_j,n_j\in\mathbb{N}\ (j=0,1,2), \tag{1.6}$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N37; Secondary 11P05.
Key words and phrases: arithmetic functions, Hooley function, sums of powers, rational points on projective varieties.

DOI: 10.4064/aa149-1-1

et c'est à partir de cette forme que nous allons obtenir la majeure partie de nos résultats. Introduisons dès maintenant la quantité

$$\gamma(\ell_1,\ell_2) := \frac{1}{2}+\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2} \qquad (2\leq \ell_1\leq \ell_2) \tag{1.7}$$

omniprésente dans cet article.

Dans le cas où les exposants (ℓ_1,ℓ_2) satisfont $2\leq \ell_1\leq \ell_2$ et $\gamma(\ell_1,\ell_2)>1$, on a les résultats suivants concernant $V(x)$:

- Si $\ell_1=\ell_2=2$, le premier résultat historique pour $c_0=c_1=c_2=1$ est dû à Legendre (1798) et Gauss (1801) : tout entier n qui n'est pas de la forme $4^h(8m+7)$ est somme de trois carrés, et ainsi
$$V(x)=\tfrac{5}{6}x+O(\log x).$$
Pour d'autres triplets (c_0,c_1,c_2), voir par exemple Dickson [5], Duke ([6], [7]), ainsi que Duke & Schulze-Pillot [8].
- Si $\ell_1=2$ et ℓ_2 est impair et $c_0=c_1=c_2=1$, alors presque tout entier est de la forme (1.4), i.e. $V(x)\sim x$ $(x\to+\infty)$ (Davenport & Heilbronn, cf. [3]).
- Si $\ell_1=\ell_2=3$ et $c_0=c_1=c_2=1$, alors (Davenport & Heilbronn, cf. [2]) $V(x)\sim x$ $(x\to+\infty)$.
- Pour $(\ell_1,\ell_2)=(3,4)$ et $c_0=c_1=c_2=1$, Roth [17] obtient $V(x)\sim x$ $(x\to+\infty)$.
- Pour $(\ell_1,\ell_2)=(3,5)$ et $c_0=c_1=c_2=1$, Vaughan [23] obtient $V(x)\sim x$ $(x\to+\infty)$.
- La démonstration des quatre derniers points utilise la méthode du cercle, et la preuve se généralise par exemple sans peine au cas où $c_1,c_2\geq 1$ sont des entiers quelconques.

Dans cet article, nous nous intéressons au cas où les exposants ℓ_1,ℓ_2 satisfont

$$2\leq \ell_1\leq \ell_2 \quad \text{et} \quad \gamma(\ell_1,\ell_2)\leq 1. \tag{1.8}$$

Pour traiter le cas critique $\gamma(\ell_1,\ell_2)=1$, nous adaptons la méthode utilisée par Hooley (cf. [14]) dans le cas des entiers somme d'un carré et de deux bicarrés : le point crucial repose sur l'estimation en moyenne de la fonction de Hooley définie par

$$\varDelta(n) := \max_{u\in\mathbb{R}} \mathrm{Card}\{d : d\,|\,n,\ u<\log d\leq u+1\} \qquad (n\geq 1). \tag{1.9}$$

Rappelons ici le résultat de Hooley [14] :

$$S(x) := \sum_{n\leq x}\varDelta(n) \ll x(\log x)^{4/\pi-1} \qquad (x\geq 2). \tag{1.10}$$

Après quelques raffinements ultérieurs de l'exposant $4/\pi-1$ (cf. [10] et [11]), une avancée significative est faite par Tenenbaum [19] qui établit pour une constante $\xi_0 > 0$ non spécifiée la majoration

$$S(x) \ll_{\xi_0} x\exp(\xi_0\sqrt{(\log\log x)(\log\log\log x)}\,) \qquad (x \geq 16), \tag{1.11}$$

montrant ainsi que $S(x)/x$ est une fonction à croissance lente de $\log x$. Les derniers résultats en date (cf. [12] puis [21]) montrent respectivement que, pour tout $\varepsilon > 0$, $2+\varepsilon$ et $\sqrt{2}+\varepsilon$ sont des valeurs admissibles de ξ_0.

C'est une version pondérée de (1.11) que nous utilisons ici. Posons

$$\mathcal{L}(y) := \exp(\sqrt{(\log y)(\log_2 y)}) \qquad (y \geq e). \tag{1.12}$$

L'argument utilisé permet en fait de démontrer le résultat plus général suivant :

Théorème 1.1. *Soit $k \geq 1$. On considère des entiers $\ell_1, \dots, \ell_k, c_0, c_1, \dots, c_k$ tels que $2 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_k$ et $c_0, c_1, \dots, c_k \geq 1$. On considère le nombre*

$$S^{\neq}(x) = S^{\neq}(\ell_1, \dots, \ell_k; c_0, c_1, \dots, c_k; x)$$

de solutions entières $(m_0, m_1, \dots, m_k, n_0, n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{2k+2}$ de l'équation

$$c_0 m_0^2 + \sum_{j=1}^{k} c_j m_j^{\ell_j} = c_0 n_0^2 + \sum_{j=1}^{k} c_j n_j^{\ell_j} \leq x, \qquad m_0 \neq n_0.$$

Alors, sous la condition $\sum_{j=1}^{k} 1/\ell_j = 1/2$ et avec la notation (1.12)*, on a*

$$S^{\neq}(x) \ll_\varepsilon x\mathcal{L}(\log x)^{\sqrt{2}+\varepsilon} \qquad (x \geq 4)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Comme corollaire, on déduit facilement une minoration de $V(x)$ dans le cas critique $\gamma(\ell_1, \ell_2) = 1$ qui correspond aux couples $(\ell_1, \ell_2) = (4, 4)$ et $(\ell_1, \ell_2) = (3, 6)$. Dans le cas des exposants $\ell_1 = \ell_2 = 4$ avec $c_0 = c_1 = c_2 = 1$, on retrouve notamment le résultat de [20].

Théorème 1.2. *On suppose que l'hypothèse* (1.5) *est satisfaite, et on suppose en outre que (ℓ_1, ℓ_2) est l'un des deux couples $(4, 4)$ ou $(3, 6)$. Alors, avec les notations* (1.1), (1.3) *et* (1.12)*, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{n \leq x} r(n)^2 \ll_\varepsilon x\mathcal{L}(\log x)^{\sqrt{2}+\varepsilon} \qquad (x \geq 4),$$

$$V(x) \gg_\varepsilon x\mathcal{L}(\log x)^{-\sqrt{2}-\varepsilon} \qquad (x \geq 4).$$

Il reste maintenant à étudier l'équation (1.6) et la représentation d'entiers sous la forme (1.4) dans le cas non critique où $\gamma(\ell_1, \ell_2) < 1$. Afin d'énoncer notre résultat, on pose

$$A_3^*(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = A_3^*(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \beta_0, \beta_1, \beta_2) := \frac{\prod_{j=0}^{2} \Gamma(1 + 1/\alpha_j)\beta_j^{-1/\alpha_j}}{\Gamma(1 + 1/\alpha_0 + 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2)} \tag{1.13}$$

pour tous triplets $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ dans $]0, +\infty[^3$.

Théorème 1.3. *On suppose que l'hypothèse* (1.5) *est satisfaite, et qu'en outre* $\ell_1 < \ell_2$ *et* $\gamma(\ell_1, \ell_2) < 1$. *Alors, avec les notations* (1.1), (1.3) *et* (1.13), *on a, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \le x} r(n)^2 = A_3^* x^{\gamma(\ell_1,\ell_2)}(1 + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-\delta_1(\ell_1,\ell_2)+\varepsilon})) \qquad (x \ge 4),$$

$$V(x) = A_3^* x^{\gamma(\ell_1,\ell_2)}(1 + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-\delta_1(\ell_1,\ell_2)+\varepsilon})) \qquad (x \ge 4),$$

où l'on a posé $\underline{\ell} := (2, \ell_1, \ell_2)$, $\underline{c} := (c_0, c_1, c_2)$,

$$\delta_1(\ell_1, \ell_2) := \min\left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1\ell_2}, \frac{1}{\ell_2}, 1 - \gamma(\ell_1, \ell_2)\right) > 0$$

et $A_3^* = A_3^*(2, \ell_1, \ell_2; c_0, c_1, c_2)$. *De plus, on a*

$$\mathrm{Card}\{n \le x : r(n) = 1\} = V(x)(1 + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-(\ell_2-\ell_1)/\ell_1\ell_2+\varepsilon})) \qquad (x \ge 4).$$

Dans la suite, on pose

$$\Psi(\ell_1; c_1, c_2) := \begin{cases} 1 + \left(\dfrac{\mathrm{pgcd}(c_1, c_2)^2}{c_1c_2}\right)^{1/\ell_1} & \text{si } \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^{1/\ell_1} \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^{1/\ell_1} \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Théorème 1.4. *On suppose que l'hypothèse* (1.5) *est satisfaite, et qu'en outre* $\ell_1 = \ell_2 \ge 5$. *Alors, avec les notations* (1.1), (1.3) *et* (1.13), *on a, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \le x} r(n)^2 = A_3^* \Psi(\ell_1; c_1, c_2) x^{\gamma(\ell_1,\ell_1)}(1 + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-\delta_2(\ell_1)+\varepsilon})) \qquad (x \ge 4),$$

où l'on a posé $\underline{\ell} := (2, \ell_1, \ell_2)$, $\underline{c} := (c_0, c_1, c_2)$,

$$\delta_2(\ell_1) := \min\left(\frac{1}{\ell_1}, \frac{6\sqrt{\ell_1} - 9}{4\ell_1\sqrt{\ell_1}}, 1 - \gamma(\ell_1, \ell_1)\right) > 0 \tag{1.15}$$

et $A_3^* = A_3^*(2, \ell_1, \ell_2; c_0, c_1, c_2)$.

Théorème 1.5. *Sous les hypothèses et notations du théorème* 1.4 *et sous la condition supplémentaire* $c_1 = c_2$, *on a, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$V(x) = \tfrac{1}{2} A_3^* x^{\gamma(\ell_1,\ell_2)}(1 + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-\delta_2(\ell_1)+\varepsilon})) \qquad (x \ge 4).$$

De plus, on a

$$\mathrm{Card}\{n \le x : r(n) = 2\} = V(x)(1 + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-\delta_3(\ell_1)+\varepsilon})) \qquad (x \ge 4)$$

où

$$\delta_3(\ell_1) := \min\left(\frac{1}{\ell_1}, \frac{6\sqrt{\ell_1} - 9}{4\ell_1\sqrt{\ell_1}}\right) > 0. \tag{1.16}$$

Théorème 1.6. *Sous les hypothèses et notations du théorème* 1.4 *et sous la condition supplémentaire* $(c_1/c_2)^{1/\ell_1}\notin\mathbb{Q}$, *on a, pour tout* $\varepsilon>0$,

$$V(x)=A_3^*x^{\gamma(\ell_1,\ell_2)}(1+O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-\delta_2(\ell_1)+\varepsilon}))\qquad(x\geq 4).$$

De plus, avec la notation (1.16), *on a*

$$\mathrm{Card}\{n\leq x : r(n)=1\}=V(x)(1+O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-\delta_3(\ell_1)+\varepsilon}))\qquad(x\geq 4).$$

Dans la situation $\ell_1=\ell_2$, la preuve utilise un résultat dû à Salberger [18, Theorem 7.6] qui permet dans notre cas de compter le nombre de solutions *non spéciales* de l'équation

$$c_1m_0^k+c_2m_1^k=c_1m_2^k+c_2m_3^k\qquad(0\leq m_j\leq B),$$

i.e. telles que $(m_0^k-m_2^k)(c_1m_0^k-c_2m_3^k)\neq 0$. La preuve de Salberger repose sur des techniques de géométrie arithmétique, et l'exposant qui intervient dans l'énoncé de son résultat se retrouve (à une renormalisation près) dans les exposants que nous définissons en (1.15) et (1.16).

2. Notations. Les lettres $a,b,c,d,j,k,\ell,m,n,q,\nu,r$ avec ou sans indice désignent des entiers naturels. La lettre p désigne un nombre premier.

Pour tout entier $n\geq 1$, les quantités $\Omega(n)$, $\omega(n)$ et $\tau(n)$ désignent le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité (resp. sans multiplicité) et le nombre de diviseurs de n. Enfin, $\varphi(n)$ désigne la fonction indicatrice d'Euler.

Pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout nombre premier p, la notation $p^\nu\,\|\,n$ signifie que $p^\nu\mid n$ et que $p^{\nu+1}\nmid n$.

3. Lemmes

3.1. Points entiers dans un domaine elliptique. Pour tout entier $k\geq 0$, pour tous $(k+1)$-uplets de réels $\underline{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\,]0,+\infty[^{k+1}$ et $\underline{\beta}=(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_k)\in\,]0,+\infty[^{k+1}$, et pour tout $x>0$, on pose

$$\mathcal{D}_x(\underline{\alpha},\underline{\beta}):=\Big\{(u_0,\dots,u_k)\in[0,+\infty[^{k+1},\ \sum_{m=0}^k\beta_mu_m^{\alpha_m}\leq x\Big\},\tag{3.1}$$

$$\mathcal{E}_x(\underline{\alpha},\underline{\beta}):=\mathrm{Card}(\mathcal{D}_x(\underline{\alpha},\underline{\beta})\cap\mathbb{N}^{k+1}),\tag{3.2}$$

$$h(\underline{\alpha})=h(\alpha_0,\dots,\alpha_k):=\sum_{m=0}^k\frac{1}{\alpha_m}.\tag{3.3}$$

On pose également

$$A(\underline{\alpha},\underline{\beta}):=\mathrm{Vol}(\mathcal{D}_1(\underline{\alpha},\underline{\beta}))=\prod_{m=0}^k\Big(\frac{1}{\beta_m}\Big)^{1/\alpha_m}\frac{\prod_{m=0}^k\Gamma(1+1/\alpha_m)}{\Gamma(1+h(\underline{\alpha}))}\tag{3.4}$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler.

Lemme 3.1. *Soit $k \geq 0$ fixé. Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in]0, +\infty[^{k+1}$ tel que $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k$ et soit $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) \in]0, +\infty[^{k+1}$. Avec les notations* (3.1) *à* (3.4), *on a*

$$\mathcal{E}_x(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = A(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) x^{h(\underline{\alpha})} + O(x^{h(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})}) \qquad (x \geq 1), \tag{3.5}$$

la constante dépendant au plus de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.

Démonstration. Soit $k \geq 1$ fixé. Dans la suite de la preuve, on utilise la notation $\underline{\alpha} := (\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ et $\underline{\beta} := (\beta_0, \ldots, \beta_k)$ introduite ci-dessus, et on pose en outre $\underline{\alpha}^* := (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ et $\underline{\beta}^* := (\beta_0, \ldots, \beta_{k-1})$. On a alors

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{D}_1(\underline{\alpha}, \underline{\beta})) = \mathrm{Vol}(\mathcal{D}_1(\underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*)) \int_0^{\beta_k^{-1/\alpha_k}} (1 - \beta_k u^{\alpha_k})^{h(\underline{\alpha}^*)} \, du,$$

et une récurrence immédiate sur k permet de retrouver (3.4), en utilisant l'identité classique

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} \, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (x, y > 0). \tag{3.6}$$

Pour la preuve de (3.5), on procède également par récurrence sur k. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_x(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) &= \sum_{m \leq x^{1/\alpha_k} \beta_k^{-1/\alpha_k}} \mathcal{E}_{x - \beta_k m^{\alpha_k}}(\underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*) \\
&= \mathrm{Vol}(\mathcal{D}_1(\underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*)) \sum_{m \leq x^{1/\alpha_k} \beta_k^{-1/\alpha_k}} (x - \beta_k m^{\alpha})^{h(\underline{\alpha}^*)} + O(x^{h(\underline{\alpha}^*)}).
\end{aligned}$$

L'estimation

$$\sum_{m \leq x^{1/\alpha} \beta^{-1/\alpha}} (x - \beta m^{\alpha})^h = x^{h + 1/\alpha} \beta^{-1/\alpha} \frac{\Gamma(1 + 1/\alpha)\Gamma(1+h)}{\Gamma(1 + h + 1/\alpha)} + O(x^h),$$

conséquence immédiate de l'interversion de Fubini

$$\begin{aligned}
\sum_{m \leq x^{1/\alpha} \beta^{-1/\alpha}} (x - \beta m^{\alpha})^h &= \sum_{m \leq x^{1/\alpha} \beta^{-\alpha}} \int_0^{x^h} \mathbf{1}_{\{\beta m^{\alpha} + t^{1/h} \leq x\}} \, dt \\
&= \int_0^{x^h} [(x - t^{1/h})^{1/\alpha} \beta^{-1/\alpha}] \, dt,
\end{aligned}$$

permet alors de conclure. ∎

Remarque 3.2. Soit $k \geq 1$ et soient $\underline{\ell} = (\ell_0, \ldots, \ell_k)$ et $\underline{c} = (c_0, \ldots, c_k)$ deux $(k+1)$-uplets d'entiers tels que $1 \leq \ell_0 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_k$ et $c_0, \ldots, c_k \geq 1$.

Avec les notations du lemme 3.1 et la notation (1.1), on a alors immédiatement

$$\sum_{n\le x} r(n) = A(\underline{\ell};\underline{c})x^{h(\underline{\ell})}(1+O_{\underline{\ell},\underline{c}}(x^{-1/\ell_k})). \tag{3.7}$$

3.2. Une inégalité de type van der Corput. Pour tout entier $n \ge 1$, on note $\tau(n)$ le nombre de ses diviseurs, et on note $\Omega(n)$ le nombre de ses facteurs premiers comptés avec multiplicité.

LEMME 3.3. *Soit un entier $k \ge 1$ et soient deux réels $C \ge 1$ et $s > 0$. Alors, avec les notations précédentes,*

$$C^{\Omega(n)}\tau^s(n) \le C^{k^2(k-1)}k^{k(k-1)s} \sum_{\substack{d\mid n\\ d\le n^{1/k}}} C^{2k\Omega(d)}\tau^{ks}(d).$$

Démonstration. Il s'agit d'une généralisation d'un résultat dû à Landreau (Lemma de [16]), qui traite initialement le cas $C = 1$. La preuve s'adapte sans difficulté au cas général. ∎

3.3. Solutions modulo m d'une équation polynomiale. Soit $k \ge 1$ fixé. Pour tous $\underline{\ell} = (\ell_1,\dots,\ell_k)$ et $\underline{c} = (c_1,\dots,c_k)$ dans $\mathbb{N}^k$ tels que $1 \le \ell_1 \le \dots \le \ell_k$ et $c_1,\dots,c_k \ge 1$, et pour tout entier $m \ge 1$, on note

$$N(\underline{\ell};\underline{c};m) = N(\ell_1,\dots,\ell_k;c_1,\dots,c_k;m) \tag{3.8}$$

le nombre de solutions $(m_1,\dots,m_k,n_1,\dots,n_k) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2k}$ de l'équation

$$\sum_{j=1}^{k} c_j m_j^{\ell_j} \equiv \sum_{j=1}^{k} c_j n_j^{\ell_j} \pmod{m}. \tag{3.9}$$

La fonction arithmétique $m \mapsto N(\underline{\ell};\underline{c};m)$ est multiplicative en vertu du théorème des restes chinois. Nous rappelons ci-dessous quelques estimations classiques.

LEMME 3.4. *Soit $k \ge 1$ et soient $\underline{\ell} = (\ell_1,\dots,\ell_k)$ et $\underline{c} = (c_1,\dots,c_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $\ell_1,\dots,\ell_k \ge 2$ et $c_1,\dots,c_k \ge 1$. On suppose de plus que*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\ell_j} = \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Alors, avec les notations précédentes, on a les majorations

$$N(\underline{\ell};\underline{c};p) - p^{2k-1} \ll_{k,\underline{\ell},\underline{c}} p^k \qquad (p \ge 2)$$

et

$$N(\underline{\ell};\underline{c};p^\nu) \ll_{k,\underline{\ell},\underline{c}} \nu p^{(2k-1)\nu} \qquad (p \ge 2,\ \nu \ge 2),$$

les constantes impliquées dans ces deux inégalités dépendant au plus de k, $\underline{\ell}$ et $\underline{c}$.

Démonstration. La première estimation est une conséquence immédiate de [1, Chap. 1, §2, Théorème 3]. En ce qui concerne la seconde, on a de manière classique

$$N(\underline{\ell};\underline{c};p^\nu)=\frac{1}{p^\nu}\sum_{a=0}^{p^\nu-1}\prod_{j=1}^{k}\Big|\sum_{m=0}^{p^\nu-1}e\Big(\frac{ac_jm^{\ell_j}}{p^\nu}\Big)\Big|^2$$

et la majoration

$$\sum_{m=0}^{p^\nu-1}e\Big(\frac{am^\ell}{p^\nu}\Big)\ll_\ell p^{(\ell-1)\nu/\ell}\qquad((a,p)=1)$$

(cf. [15, Chap. 1, Théorème 6]) suffit pour obtenir le résultat annoncé. ∎

Remarque 3.5. En toute généralité, le terme d'erreur dans l'estimation de $N(\underline{\ell};\underline{c};p)$ est optimal : en effet, si l'on considère le cas particulier $k=2$ avec $\ell_1=\ell_2=4$ et $c_1=c_2=1$, alors pour $p\equiv 3 \pmod 4$, on a

$$N(4,4;1,1;p)=p^3+(p-1)p.$$

En effet, si $p\equiv 3\pmod 4$, les puissances quatrièmes modulo p sont exactement les carrés modulo p, et donc $N(4,4;1,1;p)=N(2,2;1,1;p)$. L'estimation annoncée découle alors de l'identité $|G_2(a,q)|=\sqrt{q}$ pour $(a,q)=1$ et $q\equiv 1\pmod 2$ (cf. [15, Chap. 1, §3, Théorème 3] par exemple).

L'estimation $N(\underline{\ell};\underline{c};p)=p^{2k-1}+O(p^k)$ obtenue au lemme précédent est en fait amplement suffisante : nous verrons que la méthode utilisée pour démontrer le théorème 1.1 nécessite essentiellement une estimation du type

$$\sum_{p\le x}\frac{N(\underline{\ell};\underline{c};p)}{p^{2k-1}}=\int_2^x\frac{dt}{\log t}+O(x\exp(-c_0\sqrt{\log x}))$$

qui est clairement satisfaite ici.

Pour tout entier $k\ge 1$ et pour tous $\underline{\ell}=(\ell_1,\dots,\ell_k)$ et $\underline{c}=(c_1,\dots,c_k)\in\mathbb{N}^k$ tels que $2\le\ell_1\le\dots\le\ell_k$ et $c_1,\dots,c_k\ge 1$, pour tout $m\in\mathbb{Z}$ et tout réel $x\ge 1$, on note

$$R(\underline{\ell};\underline{c};m;x)\tag{3.11}$$

le nombre de solutions $(m_1,\dots,m_k,n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{N}^{2k}$ de l'équation

$$\sum_{j=1}^{k}c_j(n_j^{\ell_j}-m_j^{\ell_j})=m,\qquad 0\le m_j,n_j\le (x/c_j)^{1/\ell_j},\ 1\le j\le k.\tag{3.12}$$

Lemme 3.6. *Soit $C>0$ un réel fixé, soient $c_1,\dots,c_k$ et $2\le\ell_1\le\dots\le\ell_k$ fixés satisfaisant* (3.10). *On a*

$$\sum_{1\le m\le y}C^{\Omega(m)}\tau(m)R(\underline{\ell};\underline{c};m;x)\ll_{C,\underline{\ell},\underline{c}}x(y/x)^{1/\ell_k}(\log y)^{2^{\ell_k}C^{2\ell_k}}$$

uniformément pour $2\le y\le x$.

Démonstration. On pose $L := \ell_k = \max_{1\le j\le k}\ell_j$. Le lemme 3.3 permet d'écrire

$$\begin{aligned}T(x,y) &:= \sum_{1\le m\le y} C^{\Omega(m)}\tau(m)R(\underline{\ell};\underline{c};m;x)\\ &\ll_C \sum_{d\le y^{1/L}} C^{2L\Omega(d)}\tau^L(d) \sum_{\substack{m\le y\\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} R(\underline{\ell};\underline{c};m;x).\end{aligned}$$

Pour tout d fixé, la somme en m compte le nombre de solutions entières de la congruence

$$\sum_{j=1}^k c_j m_j^{\ell_j} \equiv \sum_{j=1}^k c_j n_j^{\ell_j} \pmod d$$

sous les contraintes

$$1 \le \sum_{j=1}^k c_j(m_j^{\ell_j} - n_j^{\ell_j}) \le y, \quad 0\le m_j, n_j \le (x/c_j)^{1/\ell_j} \qquad (1\le j\le k).$$

La contribution de cette somme en m est donc

$$\ll_{\underline{\ell},\underline{c}} \prod_{j=1}^{k-1}\Big(1+\frac{x^{1/\ell_j}}{d}\Big)^2\Big(1+\frac{x^{1/L}}{d}\Big)\Big(1+\frac{y^{1/L}}{d}\Big)N(\underline{\ell};\underline{c};d),$$

et ainsi, on obtient

$$T(x,y) \ll_{C,\underline{\ell}} x(y/x)^{1/L}\sum_{d\le y^{1/L}} f(d),$$

où l'on a posé

$$f(d) := C^{2L\Omega(d)}\tau^L(d)\frac{N(\underline{\ell};\underline{c};d)}{d^{2k}} \qquad (d\ge 1).$$

En utilisant la multiplicativité de $f(d)$ et le lemme 3.4, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{d\le y^{1/L}} f(d) &\ll \prod_{p\le y^{1/L}}\Big(1+\sum_{\nu\ge 1} f(p^\nu)\Big) \ll \prod_{p\le y^{1/L}}\Big(1+\frac{2^L C^{2L}}{p}+O\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big)\\ &\ll \exp\Big(2^L C^{2L}\sum_{p\le y^{1/L}}\frac1p\Big),\end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat voulu en utilisant par exemple la formule de Mertens sous la forme faible

$$\sum_{p\le x}\frac1p = \log\log x + O(1) \qquad (x\ge 3)$$

(cf. [22, Théorème I.1.10]). ∎

3.4. Un résultat de crible. Soient $k \geq 1$, $\underline{\ell} \in \mathbb{N}^k$ et $\underline{c} \in \mathbb{N}^k$ tels que $2 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_k$ et $c_1, \ldots, c_k \geq 1$. Soient x, y deux réels tels que $2 \leq y \leq x$ et soient $a, b \geq 1$ deux entiers tels que

$$P^+(a) \leq y, \qquad P^-(b) > y.$$

On cherche à majorer la somme suivante :

$$K_{\underline{\ell},\underline{c}}(x, y, a, b) := \sum_{\substack{1 \leq |m| \leq x \\ m \equiv 0\,[ab] \\ (m, Q(a;y)) = 1}} R(\underline{\ell}; \underline{c}; m; x) \tag{3.13}$$

où l'on a posé

$$Q(a; y) := \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid a}} p. \tag{3.14}$$

Lemme 3.7. *Avec les notations ci-dessus et sous l'hypothèse* (3.10)*, on a, uniformément pour tous réels x, y tels que $x \geq x_0$, $y \geq y_0$, tous entiers $a, b \geq 1$ tels que $P^+(a) \leq y$, $P^-(b) > y$ et*

$$y^{4 \log\log x} ab \ll x^{3\delta/4}, \qquad \delta := \min_{1 \leq j \leq k} 1/\ell_j,$$

l'inégalité de crible

$$K_{\underline{\ell},\underline{c}}(x, y, a, b) \ll x \frac{N(\underline{\ell}; \underline{c}; ab)}{(ab)^{2k}} \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid a}} \left(1 - \frac{N(\underline{\ell}; \underline{c}; p)}{p^{2k}}\right) \ll \frac{x N(\underline{\ell}; \underline{c}; ab)}{a^{2k-1} b^{2k} \varphi(a) \log y},$$

les constantes impliquées dépendant au plus de k, des ℓ_j et c_j.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $d \,|\, Q(a; y)$ tel que $\omega(d) \leq 4 \log\log x$, on a à la fois $(d, ab) = 1$ et $dab \leq y^{\omega(d)} ab \ll x^{3\delta/4}$. Ainsi, en posant plus simplement $N(m) = N(\underline{\ell}; \underline{c}; m)$, on a pour de tels d la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq |m| \leq x \\ m \equiv 0\,[ab] \\ m \equiv 0\,[d]}} R(\underline{\ell}; \underline{c}; m; x) - x \frac{N(ab) N(d)}{(dab)^{2k}} &\ll x^{1-\delta} \frac{N(ab) N(d)}{(dab)^{2k-1}} \\ &\ll x^{1-\delta} \frac{N(ab)}{(ab)^{2k-1}} C^{\omega(d)} \end{aligned}$$

où $C := \sup_p N(p)/p^{2k-1}$. En utilisant [9, Theorem], on obtient pour tout entier h l'inégalité de crible

$$K_{\underline{\ell},\underline{c}}(x, y, a, b) \leq x \frac{N(ab)}{(ab)^{2k}} \mathcal{W} \exp(\mathcal{E}_h) + \mathcal{R}_h$$

où l'on a posé

$$\mathcal{W} := \prod_{\substack{p\leq y\\ p\nmid a}}\Big(1-\frac{N(p)}{p^{2k}}\Big), \qquad T := \max(2, 1/\mathcal{W}),$$

$$\mathcal{E}_h := \frac{T^{2h+1}e^T}{(2h+1)!}, \qquad \mathcal{R}_h := \frac{N(ab)}{(ab)^{2k-1}}\sum_{\substack{d\mid Q(a;y)\\ \omega(d)\leq 2h+1}} C^{\omega(d)}.$$

Fixons $h := [2T]$. Le lemme 3.4, la formule de Mertens et l'hypothèse faite sur y permettent d'écrire

$$\frac{1}{\mathcal{W}} \asymp \frac{\varphi(a)\log y}{a} \ll \frac{\log x}{\log_2 x}.$$

On en déduit que $h \leq 2\log_2 x$ pour x suffisamment grand, et ainsi

$$\mathcal{R}_h \ll x^{1-\delta}\frac{N(ab)}{(ab)^{2k-1}}(Cy)^{2h} \ll x^{1-\delta}\frac{N(ab)}{(ab)^{2k}}(Cy)^{4\log_2 x}ab \ll x\frac{N(ab)}{(ab)^{2k}}\,\mathcal{W}$$

par hypothèse sur y, a et b.

Par ailleurs, par choix de h, la formule de Stirling fournit alors

$$\mathcal{E}_h \ll \exp(-(4\ln 4-5)T) \ll 1,$$

ce qui donne la majoration souhaitée. ■

3.5. Un résultat sur la fonction de Hooley

Lemme 3.8. *Soit f une fonction multiplicative positive telle que*

$$\sum_{p\leq x} f(p) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x\exp(-c_0\sqrt{\log x}))$$

et

$$f(p^\nu) \ll \nu^{\alpha_0} \qquad (p\geq 2,\ \nu\geq 1), \tag{3.15}$$

où α_0 et c_0 sont deux constantes positives dépendant au plus de f. Alors, on a, pour tout $t\geq 1$,

$$\sum_{n\leq x}\Delta(n)^t\frac{f(n)}{n} \ll (\log x)^{2^t-t}\mathcal{L}(\log x)^{\sqrt{2t}+o(1)} \qquad (x\to+\infty),$$

où $\Delta(n)$ est la fonction de Hooley définie en (1.9).

Démonstration. Ce lemme est quasiment identique au lemme 2.2 de [21], établi initialement sous la condition $f(p^\nu) \ll 1$: nous nous contentons d'adapter la démonstration à l'unique endroit où la nouvelle hypothèse (3.15) intervient.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des entiers m tels que $p \mid m \Rightarrow p^2 \mid m$. De même que dans [21], on utilise l'inégalité

$$\Delta(mq) \leq \tau(m)\Delta(q) \qquad (m, q \geq 1)$$

et l'on obtient

$$\sum_{n\leq x} \Delta(n)\frac{f(n)}{n} \ll \sum_{n\in\mathcal{S}} \Delta(n)\frac{f(n)}{n} \sum_{q\leq x} |\mu(q)|\Delta(q)\frac{f(q)}{q}.$$

Sous l'hypothèse $f(p^\nu) \ll \nu^{\alpha_0}$, la somme sur $\mathcal{S}$ est convergente et le reste de la preuve du lemme 2.2 de [21] peut être utilisé sans changement. ■

3.6. Points rationnels sur une surface projective. Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface projective définie sur $\mathbb{Q}$. On note X' l'ouvert de X obtenu en retirant toutes les courbes de X irréductibles sur $\mathbb{Q}$ qui se décomposent en une union de droites sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Pour $\underline{x} = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$, on pose $H(\underline{x}) := \max(|x_0|, |x_1|, |x_2|, |x_3|)$, où $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^4$ désigne un représentant de $\underline{x}$ tel que $(x_0, x_1, x_2, x_3) = 1$. Pour tout $B > 0$, on définit

$$\mathcal{N}(X', B) := \mathrm{Card}\{\underline{x} \in X' : H(\underline{x}) \leq B\}. \tag{3.16}$$

Théorème 3.9 ([18, Theorem 7.6]). *Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface projective sur $\mathbb{Q}$, géométriquement intègre, de degré $d \geq 4$. Alors*

$$\mathcal{N}(X', B) \ll_{d,\varepsilon} B^{\xi(d)+\varepsilon} \qquad (B \geq 1),$$

où

$$\xi(d) := \max\left(1, \frac{1}{2} + \frac{9}{4\sqrt{d}}\right) \qquad (d \geq 4). \ ■ \tag{3.17}$$

Remarque. Une surface projective $X \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ est dite *géométriquement intègre* si le schéma $X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}})$ est intègre (pour plus de détails, voir [13, II, §3]. En particulier, dans le cas d'une surface X définie par une équation $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, cette hypothèse est satisfaite dès que le polynôme $F \in \mathbb{Q}[z_0, z_1, z_2, z_3]$ est irréductible sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Le lemme suivant est une version généralisée du Corollary 0.2 de [18] :

Lemme 3.10. *Soit $c_1, c_2 \geq 1$ deux entiers, $d \geq 4$ un entier et $B \geq 1$ un réel. Soit $\varepsilon > 0$. Le nombre $\mathcal{N}_1(B)$ de solutions $(m_0, m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^4$ de*

$$c_1 m_0^d + c_2 m_1^d = c_1 m_2^d + c_2 m_3^d, \qquad \max_{0\leq j\leq 3} m_j \leq B,$$

telles que $(m_0 - m_2)(c_1 m_0^d - c_2 m_3^d) \neq 0$ vérifie

$$\mathcal{N}_1(B) \ll_{d,\varepsilon} B^{\xi(d)+\varepsilon} \qquad (B \geq 1),$$

où $\xi(d)$ a été défini en (3.17).

Démonstration. Il suffit de remarquer que la surface projective non singulière $X \subset \mathbb{P}^3$ définie par

$$c_1 x_0^d + c_2 x_1^d = c_1 x_2^d + c_2 x_3^d$$

contient $3d^2$ droites dont l'union est déterminée par l'équation supplémentaire

$$(c_1 x_0^d + c_2 x_1^d)(x_0^d - x_2^d)(c_1 x_0^d - c_2 x_3^d) = 0.$$

Dans le cas où $c_1 = c_2 = 1$, il s'agit de [4] (Exercise 2.5.3). Le cas général où $c_1, c_2 \geq 1$ sont quelconques découle immédiatement du précédent en utilisant l'application $(y_0, y_1, y_2, y_3) \mapsto (c_1^{1/d} y_0, c_2^{1/d} y_1, c_1^{1/d} y_2, c_2^{1/d} y_3)$.

Par conséquent, avec les notations du théorème 3.9, tout point réel (x_0, x_1, x_2, x_3) à coordonnées positives tel que $(x_0 - x_2)(c_1 x_0^d - c_2 x_3^d) \neq 0$ doit appartenir à X'. On en déduit alors que

$$\mathcal{N}_1(B) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{N}(X', B/k) \ll_{d,\varepsilon} B^{\xi(d)+\varepsilon}$$

en appliquant le théorème 3.9. ∎

3.7. Entiers sommes de deux puissances. Soient $\underline{\ell} = (\ell_1, \ell_2)$, $\underline{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{N}^2$ fixés tels que $2 \leq \ell_1 \leq \ell_2$ et $c_1, c_2 \geq 1$. Posons

$$D := \frac{c_1 c_2}{\mathrm{pgcd}(c_1, c_2)}. \tag{3.18}$$

Afin de simplifier les notations dans la suite, et conformément à la notation (1.1), on note plus simplement les nombres de représentations

$$\widetilde{r}(n) := r(\ell_1, \ell_2; c_1, c_2; n) \tag{3.19}$$

et

$$\widetilde{r}_D(n) := r(\ell_1, \ell_2; D, D; n) \tag{3.20}$$

de l'entier n sous les formes respectives $c_1 n_1^{\ell_1} + c_2 n_2^{\ell_2}$ et $D n_1^{\ell_1} + D n_2^{\ell_2}$.

On pose également

$$\kappa(\underline{\ell}; \underline{c}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \ell_1 < \ell_2 \text{ ou } (c_1/c_2)^{1/\ell_1} \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } \ell_1 = \ell_2 \text{ et } (c_1/c_2)^{1/\ell_1} \in \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\eta(\underline{\ell}) := \begin{cases} 2/\ell_2 & \text{si } \ell_1 < \ell_2, \\ \max(1/\ell_1, 1/2\ell_1 + 9/4\ell_1\sqrt{\ell_1}) & \text{si } \ell_1 = \ell_2. \end{cases} \tag{3.22}$$

Lemme 3.11. *On suppose que* $2 \leq \ell_1 \leq \ell_2$, $1/\ell_1 + 1/\ell_2 \leq 1/2$ *et* $c_1, c_2 \geq 1$. *Alors avec les notations* (3.18) *à* (3.22), *on a, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \leq x} \widetilde{r}(n)^2 = \sum_{n \leq x} \widetilde{r}(n) + \kappa(\underline{\ell}) \sum_{n \leq x} \widetilde{r}_D(n) + O_{\underline{\ell}, \underline{c}, \varepsilon}(x^{\eta(\underline{\ell})+\varepsilon}) \qquad (x \geq 1).$$

Démonstration. La somme $\widetilde{S}(x) := \sum_{n\le x}\widetilde{r}(n)^2$ compte le nombre de solutions $(m_1,m_2,n_1,n_2)\in\mathbb{N}^4$ telles que

$$c_1m_1^{\ell_1}+c_2m_2^{\ell_2}=c_1n_1^{\ell_1}+c_2n_2^{\ell_2}\le x. \tag{3.23}$$

La contribution des solutions telles que $m_1=n_1$ est égale à

$$\mathrm{Card}\{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}^2 : c_1m_1^{\ell_1}+c_2m_2^{\ell_2}\le x\}=\sum_{n\le x}\widetilde{r}(n).$$

(1) Commençons par traiter le cas où $\ell_1=\ell_2$. D'après le lemme 3.10 appliqué avec $d=\ell_1$ et $B=x^{1/\ell_1}$, la contribution des solutions de (3.23) telles que

$$(m_1-n_1)(c_1m_1^{\ell_1}-c_2n_2^{\ell_1})\ne 0$$

est $\ll_{\underline{\ell},\underline{c},\varepsilon} x^{\vartheta(\ell_1)+\varepsilon}$, où l'on a posé

$$\vartheta(\ell_1):=\max\left(\frac{1}{\ell_1},\frac{1}{2\ell_1}+\frac{9}{4\ell_1\sqrt{\ell_1}}\right)\qquad(\ell_1\ge 1). \tag{3.24}$$

• Si $(c_1/c_2)^{1/\ell_1}\notin\mathbb{Q}$, alors on a toujours $c_1m_1^{\ell_1}-c_2n_2^{\ell_1}\ne 0$, et par conséquent

$$\sum_{n\le x}\widetilde{r}(n)^2=\sum_{n\le x}\widetilde{r}(n)+O_{\underline{\ell},\underline{c},\varepsilon}(x^{\vartheta(\ell_1)+\varepsilon})\qquad(x\ge 1).$$

• Si $(c_1/c_2)^{1/\ell_1}\in\mathbb{Q}$, alors il existe $a_1,a_2\ge 1$ tels que $(a_1,a_2)=1$ et tels que $c_j=\lambda a_j^{\ell_1}$ où l'on a posé $\lambda:=\mathrm{pgcd}(c_1,c_2)$. Par conséquent, si $c_1m_1^{\ell_1}-c_2n_2^{\ell_1}=0$, alors $a_j\,|\,m_j$, et la contribution de telles solutions est donc

$$\mathrm{Card}\{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{N}^2 : \lambda(a_1a_2)^{\ell_1}(\nu_1^{\ell_1}+\nu_2^{\ell_1})\le x\}=\sum_{n\le x}\widetilde{r}_D(n).$$

Enfin, la contribution des solutions telles que $m_1=n_1$ et $c_1m_1^{\ell_1}-c_2n_2^{\ell_1}=0$ simultanément n'excède pas $O(x^{1/\ell_1})$, donc

$$\sum_{n\le x}\widetilde{r}(n)^2=\sum_{n\le x}\widetilde{r}(n)+\sum_{n\le x}\widetilde{r}_D(n)+O_{\underline{\ell},\underline{c},\varepsilon}(x^{\eta(\underline{\ell})+\varepsilon})\qquad(x\ge 1).$$

(2) Si $\ell_1<\ell_2$, alors la preuve est plus élémentaire et immédiate. La contribution des solutions telles que $m_1\ne n_1$ est majorée par $2E_2$, où

$$E_2:=\sum_{1\le m\le x}R(\ell_1;c_1;m;x)R(\ell_2;c_2;m;x).$$

On rappelle que conformément à la notation (3.11), la quantité $R(\ell_j;c_j;m;x)$ désigne le nombre de solutions de

$$c_j(n_j^{\ell_j}-m_j^{\ell_j})=m,\qquad 0\le m_j,n_j\le x^{1/\ell_j},\ 1\le j\le r.$$

En remarquant que $R(\ell_1; c_1; m; x) \le \tau(m) \ll x^\varepsilon$ pour $1 \le m \ll x$ et que

$$\sum_{1\le m\ll x} R(\ell_2; c_2; m; x) \ll x^{2/\ell_2},$$

on obtient alors le résultat voulu

$$\sum_{n\le x} \widetilde{r}(n)^2 = \sum_{n\le x} \widetilde{r}(n) + O_{\underline{\ell},\underline{c},\varepsilon}(x^{2/\ell_2+\varepsilon}) \qquad (x \ge 1). \blacksquare$$

4. Démonstrations des théorèmes 1.3–1.6. La preuve de ces théorèmes relève des mêmes techniques que celle du lemme 3.11. La somme $S(x) := \sum_{n\le x} r(n)^2$ compte le nombre de solutions de (1.6).

De même que pour le lemme 3.11, la contribution à (1.6) des solutions telles que $m_0 \ne n_0$ est $\ll E$ où

$$E := \sum_{1\le m\ll x} R(2; c_0; m; x) R(\underline{\ell}; \underline{c}; m; x).$$

On conclut comme précédemment en remarquant que $R(2; c_0; m; x) \le \tau(m) \ll x^\varepsilon$ pour $1 \le m \ll x$ et que

$$\sum_{1\le m\ll x} R(\underline{\ell}; \underline{c}; m; x) \ll x^{2/\ell_1+2/\ell_2}.$$

La contribution à (1.6) des solutions telles que $m_0 = n_0$ est

$$\sum_{a\le\sqrt{x/c_0}} \sum_{m\le x-c_0a^2} \widetilde{r}(m)^2 \tag{4.1}$$

où $\widetilde{r}(m)$ a été défini en (3.19).

En utilisant le lemme 3.11 et les notations (3.18) à (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{a\le\sqrt{x/c_0}} \sum_{m\le x-c_0a^2} \widetilde{r}(m)^2 &= \sum_{a\le\sqrt{x/c_0}} \sum_{m\le x-c_0a^2} \widetilde{r}(m) \\ &\quad + \kappa(\underline{\ell}; \underline{c}) \sum_{a\le\sqrt{x/c_0}} \sum_{m\le x-c_0a^2} \widetilde{r}_D(m) + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{1/2+\eta(\underline{\ell})+\varepsilon}) \\ &= \sum_{n\le x} r(n) + \kappa(\underline{\ell}; \underline{c}) \sum_{n\le x} r_D(n) + O_{\varepsilon,\underline{\ell},\underline{c}}(x^{1/2+\eta(\underline{\ell})+\varepsilon})\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$r_D(n) := \mathrm{Card}\{(n_0, n_1, n_2) \in \mathbb{N}^3 : n = c_0 n_0^2 + D n_1^{\ell_1} + D n_2^{\ell_2}\} \qquad (n \ge 1).$$

En appliquant (3.7) à chacune des sommes $\sum_{n\le x} r(n)$ et $\sum_{n\le x} r_D(n)$, on obtient alors respectivement

$$\sum_{n\le x} r(n) = A(2,\ell_1,\ell_2;c_0,c_1,c_2)x^{\gamma(\ell_1,\ell_2)}(1+O_{\ell_j}(x^{-1/\ell_2})),$$
$$\sum_{n\le x} r_D(n) = A(2,\ell_1,\ell_2;c_0,D,D)x^{\gamma(\ell_1,\ell_2)}(1+O_{\ell_j}(x^{-1/\ell_2}))$$

où $A(\underline{\alpha},\underline{\beta}) = A(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2;\beta_0,\beta_1,\beta_2)$ a été défini en (3.4). Avec les notations (1.13) et (1.14), on obtient en particulier

$$A(2,\ell_1,\ell_2;c_0,c_1,c_2) = A_3^*, \qquad A(2,\ell_1,\ell_2;c_0,D,D) = \left(\frac{\mathrm{pgcd}(c_1,c_2)^2}{c_1c_2}\right)^{1/\ell_1} A_3^*.$$

En reportant dans toutes ces estimations dans (4.1) et en explicitant $\eta(\underline{\ell})$ et $\kappa(\underline{\ell};\underline{c})$, on obtient toutes les estimations annoncées pour $\sum_{n\le x} r(n)^2$ dans les théorèmes 1.3 et 1.4 en remarquant que

$$\max\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\ell_1},\ \frac{1}{2}+\eta(\underline{\ell}),\ \frac{2}{\ell_1}+\frac{2}{\ell_2}\right) = \begin{cases}\gamma(\ell_1,\ell_2)-\delta_1(\ell_1,\ell_2) & \text{si } \ell_1<\ell_2,\\ \gamma(\ell_1,\ell_2)-\delta_2(\ell_1) & \text{si } \ell_1=\ell_2.\end{cases}$$

Il reste à démontrer les estimations annoncées relatives à $V(x)$ et $\mathrm{Card}\{n\le x : r(n)=j\}$ $(j=1,2)$.

• En ce qui concerne les théorèmes 1.3 et 1.5, il suffit d'établir

$$V(x) = \sum_{n\le x} r(n) + O(x^{1/2+\eta(\underline{\ell})+\varepsilon})$$

où $\eta(\underline{\ell})$ est défini en (3.22). L'estimation

$$\sum_{n\le x} r(n)^2 = \sum_{n\le x} r(n) + O(x^{1/2+\eta(\underline{\ell})+\varepsilon}) \tag{4.2}$$

et l'inégalité

$$\Big(\sum_{n\le x} r(n)\Big)^2 \le V(x)\sum_{n\le x} r(n)^2 \tag{4.3}$$

fournissent la minoration

$$V(x) \ge \sum_{n\le x} r(n) + O(x^{1/2+\eta(\underline{\ell})+\varepsilon}),$$

et la majoration triviale $V(x)\le \sum_{n\le x} r(n)$ suffit pour conclure.

Quant à l'estimation annoncée pour $\mathrm{Card}\{n\le x : r(n)=1\}$, celle-ci découle immédiatement de la majoration

$$\mathrm{Card}\{n\le x : r(n)\ge 2\} \le \frac{1}{2}\sum_{n\le x} r(n)(r(n)-1)$$

et de (4.2).

• Il reste à traiter le cas où $\ell_1 = \ell_2$ et $c_1 = c_2$. Il suffit à nouveau d'établir

$$V(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\le x} r(n) + O(x^{1/2+\eta(\underline{\ell})+\varepsilon}).$$

On remarque tout d'abord que les entiers tels que $r(n) = 1$ sont nécessairement de la forme $n_0^2 + 2c_1 n_1^{\ell_1}$ et par conséquent, leur contribution dans $V(x)$ n'excède pas $\ll x^{1/2+1/\ell_1}$. Ainsi

$$V(x) \le \frac{1}{2}\sum_{n\le x} r(n) + O(x^{1/2+1/\ell_1}).$$

En ce qui concerne la minoration de $V(x)$, on utilise à nouveau l'inégalité de (4.3), et on utilise l'estimation

$$\sum_{n\le x} r(n)^2 = \Psi(\ell_1; c_1, c_2)\sum_{n\le x} r(n) + O(x^{1/2+\vartheta(\ell_1)+\varepsilon})$$

en remarquant que $\Psi(\ell_1; c_1, c_2) = 2$ pour $c_1 = c_2$.

Enfin, l'estimation annoncée pour $\mathrm{Card}\{n \le x : r(n) = 2\}$ est conséquence immédiate de la majoration

$$\mathrm{Card}\{n \le x : r(n) \ge 3\} \le \frac{1}{3}\sum_{n\le x} r(n)(r(n) - 2) + O(x^{1/2+1/\ell_1}),$$

le terme reste du membre de droite comptant les n tels que $r(n) = 1$. ■

5. Démonstration du théorème 1.1. Dans toute la démonstration, on fixe $c_0, \dots, c_k \ge 1$ et $3 \le \ell_1 \le \ell_2 \le \dots \le \ell_k$ satisfaisant (3.10). On pose

$$L := \max_{1\le j\le k} \ell_j, \qquad \delta := \frac{1}{L}, \qquad \alpha = \alpha(L) := 2^L L, \qquad t := x(\log x)^{-\alpha} \quad (x \ge 2).$$

On pose également

$$\eta = \eta(L) := \frac{1}{2^{L+2}e^{2L}L}, \qquad y := \exp\left(\eta\frac{\log x}{\log\log x}\right) \quad (x \ge 3).$$

Pour tout entier $m \ge 1$, on pose

$$a_y(m) := \prod_{\substack{p^\nu \| m\\ p\le y}} p^\nu, \qquad b_y(m) := \prod_{\substack{p^\nu \| m\\ p> y}} p^\nu. \tag{5.1}$$

Les entiers $a_y(m)$ et $b_y(m)$ représentent donc respectivement la partie y-friable et la partie y-criblée de l'entier m.

On note $\mathcal{M}(x)$ l'ensemble des solutions $(m_0, \dots, m_r, n_0, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^{2r+2}$ telles que

$$c_0 m_0^2 + \sum_{j=1}^{k} c_j m_j^{\ell_j} = c_0 n_0^2 + \sum_{j=1}^{k} c_j n_j^{\ell_j} \le x, \qquad m_0 > n_0. \tag{5.2}$$

On a clairement $S^{\ne}(x) = 2\,\mathrm{Card}\,\mathcal{M}(x)$. On écrit

$$\operatorname{Card}\mathcal{M}(x) = E_1(x) + E_2(x) + E_3(x)$$

où pour $j = 1, 2, 3$, $E_j(x)$ désigne le nombre de solutions comptées de $\mathcal{M}(x)$ satisfaisant la condition supplémentaire (H_j), avec

(H_1) $(m_0 + n_0) \le (x/c_0)^{1/2}(\log x)^{-\alpha}$,

(H_2) $(m_0 + n_0) > (x/c_0)^{1/2}(\log x)^{-\alpha}$ et $a_y(c_0m_0^2 - c_0n_0^2) > x^{1/4L}$,

(H_3) $(m_0 + n_0) > (x/c_0)^{1/2}(\log x)^{-\alpha}$ et $a_y(c_0m_0^2 - c_0n_0^2) \le x^{1/4L}$.

Enfin, on note $R_2^+(m;x)$ (resp. $R_2^-(m;x)$) le nombre de solutions (m_0, n_0) de l'équation

$$c_0m_0^2 - c_0n_0^2 = m, \qquad 0 \le m_0, n_0 \le (x/c_0)^{1/2},$$

vérifiant la condition supplémentaire $(m_0 + n_0) > (x/c_0)^{1/2}(\log x)^{-\alpha}$ (resp. $(m_0 + n_0) \le (x/c_0)^{1/2}(\log x)^{-\alpha}$).

La quantité $E_3(x)$ correspond à la partie cruciale de la méthode. Pour la somme restante, nous allons établir la majoration $E_1(x) + E_2(x) \ll x$ suffisante ici pour démontrer le résultat voulu, mais une légère modification des paramètres α et η permettrait sans effort d'obtenir la majoration $E_1(x)+E_2(x) \ll x/\log x$ par exemple.

Pour la majoration de $E_1(x)$, on a

$$E_1(x) \le \sum_{1\le m\le x} R_2^-(m;x)R(\underline{\ell};\underline{c};m;x).$$

Or $R_2^-(m;x) \le \tau(m)$, et $R_2^-(m;x) = 0$ dès que $m > t := x(\log x)^{-\alpha}$, donc

$$E_1(x) \le \sum_{1\le m\le t} \tau(m)R(\underline{\ell};\underline{c};m;x) \ll x(t/x)^{1/L}(\log t)^{2^L} \ll x$$

en utilisant le lemme 3.6 avec $C = 1$.

Pour la majoration de $E_2(x)$, on a

$$E_2(x) \le \sum_{\substack{1\le m\le x\\ a_y(m)>x^{1/4L}}} R_2^+(m;x)R(\underline{\ell};\underline{c};m;x).$$

On a $R_2^+(m;x) \le \tau(m)$, et l'inégalité $a_y(m) > x^{1/4L}$ implique

$$\Omega(m) > 2^Le^{2L}\log\log x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E_2(x) &\le \sum_{\substack{1\le m\le x\\ \Omega(m)>2^Le^{2L}\log\log x}} \tau(m)R(\underline{\ell};\underline{c};m;x)\\ &\le \frac{1}{(\log x)^{2^Le^{2L}}} \sum_{m\le x} \tau(m)e^{\Omega(m)}R(\underline{\ell};\underline{c};m;x) \ll x \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 3.6 avec $C = e$.

Il reste à établir la majoration de $E_3(x)$: on a

$$E_3(x) \ll \sum_{\substack{a\le x^{1/4L}\\ P^+(a)\le y}} \sum_{\substack{b\le x/a\\ P^+(b)>y}} R_2^+(ab;x)R(\underline{\ell};\underline{c};ab;x)$$
$$\ll (\log\log x) \sum_{\substack{a\le x^{1/4L}\\ P^+(a)\le y}} \sum_{\substack{b\le x/a\\ P^-(b)>y}} \varDelta(a)\tau(b)R(\underline{\ell};\underline{c};ab;x)$$

en utilisant le fait que

$$R_2^+(ab;x) \ll \sum_{\substack{d|ab\\ x^{1/2}(\log x)^{-\alpha}<d\le x^{1/2}}} 1 \ll (\log\log x)\varDelta(ab)$$

et

$$\varDelta(ab) \le \varDelta(a)\tau(b) \qquad ((a,b)=1).$$

En utilisant le lemme 3.3 avec $C=1$ et $s=1$, on obtient

$$\tau(b) \ll \sum_{\substack{b_1|b\\ b_1\le b^{1/4L}}} \tau(b_1)^{4L},$$

et ainsi

$$E_3(x) \ll (\log\log x) \sum_{\substack{a\le x^{1/4L}\\ P^+(a)\le y}} \varDelta(a) \sum_{\substack{b\le x/a\\ P^-(b)>y}} \Big(\sum_{\substack{b_1|b\\ b_1\le b^{1/4L}}} \tau(b_1)^{4L}\Big) R(\underline{\ell};\underline{c};ab;x)$$
$$\ll (\log\log x) \sum_{\substack{a\le x^{1/4L}\\ P^+(a)\le y}} \varDelta(a) \sum_{\substack{b_1\le x^{1/4L}\\ P^-(b_1)>y}} \tau(b_1)^{4L} \sum_{\substack{b\le x/a\\ b\equiv 0\,[b_1]\\ P^-(b)>y}} R(\underline{\ell};\underline{c};ab;x)$$
$$\ll (\log\log x) \sum_{\substack{a\le x^{1/4L}\\ P^+(a)\le y}} \varDelta(a) \sum_{\substack{b_1\le x^{1/4L}\\ P^-(b_1)>y}} \tau(b_1)^{4L} \sum_{\substack{r\le x\\ r\equiv 0\,[ab_1]\\ (r,Q(a;y))=1}} R(\underline{\ell};\underline{c};r;x).$$

Pour tous a et b_1 dans la somme précédente, et par choix du paramètre y, on a bien $\max(a,b_1,y^{4\log\log x}) \le x^{1/4L}$, ce qui est suffisant pour appliquer le lemme 3.7 à la somme en r : on obtient alors

$$E_3(x) \ll (\log\log x) \sum_{\substack{a\le x^{1/4L}\\ P^+(a)\le y}} \varDelta(a) \sum_{\substack{b_1\le x^{1/4L}\\ P^-(b_1)>y}} \tau(b_1)^{4L} \frac{xN(\underline{\ell};\underline{c};ab_1)}{a^{2k-1}b_1^{2k}\varphi(a)\log y}$$
$$\ll \frac{x\log\log x}{\log y} \sum_{\substack{a\le x^{1/4L}\\ P^+(a)\le y}} \varDelta(a)\frac{N(\underline{\ell};\underline{c};a)}{a^{2k-1}\varphi(a)} \sum_{\substack{b_1\le x^{1/4L}\\ P^-(b_1)>y}} \tau(b_1)^{4L}\frac{N(\underline{\ell};\underline{c};b_1)}{b_1^{2k}}.$$

La somme intérieure en b_1 est

$$\ll \prod_{y<p\le x}\Big(1+\sum_{\nu\ge 1}(\nu+1)^{4L}\frac{N(\underline{\ell};\underline{c};p^\nu)}{p^{2k\nu}}\Big)$$

$$\ll \prod_{y<p\le x}\Big(1+\frac{2^{4L}}{p}\Big)\ll\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big)^{2^{4L}}\ll(\log\log x)^{2^{4L}}$$

et ainsi

$$E_3(x)\ll\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{2+2^{4L}}\sum_{\substack{m\le x^{1/4L}\\ P^+(m)\le y}}\varDelta(m)\frac{N(\underline{\ell};\underline{c};m)}{m^{2k-1}\varphi(m)}.$$

On conclut alors en appliquant à cette dernière somme le lemme 3.8 avec la fonction

$$f(m):=\frac{N(\underline{\ell};\underline{c};m)}{m^{2k-2}\varphi(m)}.\ \blacksquare$$

6. Démonstration du théorème 1.2. En utilisant à nouveau la notation (3.19), on a

$$\sum_{n\le x}r(n)^2=\sum_{a\le\sqrt{x}}\sum_{n\le x-a^2}\widetilde{r}(n)^2+S^{\neq}(x).$$

D'après le théorème 1.1, on a

$$S^{\neq}(x)\ll_\varepsilon x\mathcal{L}(\log x)^{\sqrt{2}+\varepsilon}\qquad(x\ge 4)$$

pour tout $\varepsilon>0$, et en utilisant le lemme 3.11, on a en particulier

$$\sum_{a\le\sqrt{x}}\sum_{n\le x-a^2}\widetilde{r}(n)^2\ll x.$$

De manière classique, la minoration de $V(x)$ est encore donnée par (4.3). $\blacksquare$

Remerciements. L'auteur souhaite ici remercier chaleureusement Régis de la Bretèche et Gérald Tenenbaum pour leurs remarques et suggestions lors de l'élaboration de cet article. L'auteur tient aussi à exprimer sa reconnaissance au referee pour ses observations et conseils.

Durant la réalisation de ce travail, l'auteur a bénéficié du support financier du projet PEPR, ANR-08-BLAN-0257.

Références

[1] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[2] H. Davenport and H. Heilbronn, *On Waring's problem: two cubes and one square*, Proc. London Math. Soc. (2) 43 (1937), 73–104.

[3] H. Davenport and H. Heilbronn, *Note on a result in the additive theory of numbers*, ibid., 142–151.
[4] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Springer, New York, 2001.
[5] L. E. Dickson, *Integers represented by positive ternary quadratic forms*, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), 63–70.
[6] W. Duke, *Some old problems and new results about quadratic forms*, Notices Amer. Math. Soc. 44 (1997), 190–196.
[7] —, *On ternary quadratic forms*, J. Number Theory 110 (2005), 37–43.
[8] W. Duke and R. Schulze-Pillot, *Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids*, Invent. Math. 99 (1990), 49–57.
[9] K. Ford and H. Halberstam, *The Brun–Hooley sieve*, J. Number Theory 81 (2000), 335–350.
[10] R. R. Hall and G. Tenenbaum, *On the average and normal orders of Hooley's Δ-function*, J. London Math. Soc (2) 25 (1982), 392–406.
[11] —, —, *The average orders of Hooley's Δ_r-functions*, Mathematika 31 (1984), 98–109.
[12] —, —, *The average orders of Hooley's Δ_r-functions II*, Compos. Math. 60 (1986), 163–186.
[13] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1977.
[14] C. Hooley, *On a new technique and its applications to the theory of numbers*, Proc. London Math. Soc. (3) 38 (1979), 115–151.
[15] N. M. Korobov, *Exponential Sums and Their Applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.) 80, Kluwer, Dordrecht, 1992; original russe : Nauka, Moscou, 1989.
[16] B. Landreau, *A new proof of a theorem of van der Corput*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 366–368.
[17] K. F. Roth, *Proof that almost all positive integers are sums of a square, a positive cube and a fourth power*, J. London Math. Soc. 24 (1949), 4–13.
[18] P. Salberger, *Rational points of bounded height on projective surfaces*, Math. Z. 258 (2008), 805–826.
[19] G. Tenenbaum, *Sur la concentration moyenne des diviseurs*, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 411–428.
[20] —, *Fonctions Δ de Hooley et applications*, dans : Séminaire de théorie des nombres, Paris 1984–85, Progr. Math. 63, Birkhäuser, Boston, 1986, 225–239.
[21] —, *Sur une question d'Erdős et Schinzel II*, Invent. Math. 99 (1990), 215–224.
[22] —, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ème éd., Belin, Paris, 2008.
[23] R. C. Vaughan, *A ternary additive problem*, Proc. London Math. Soc. 41 (1980), 516–532.

Olivier Robert
Université de Lyon & Université de Saint-Étienne
LaMUSE (EA 3989)
23, rue du Dr P. Michelon
F-42023 Saint-Étienne, France
E-mail: olivier.robert@univ-st-etienne.fr

Reçu le 1.3.2010
et révisé le 4.12.2010 (6320)