ACTA ARITHMETICA
139.4 (2009)

Fonction de Tschakaloff et fonction q-exponentielle

par

Jean-Paul Bézivin (Caen)

1. Introduction et résultats. Soit q un élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant $|q| > 1$. La *fonction q-exponentielle* est la fonction E_q d'une variable complexe z définie par

$$E_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)}$$

avec la convention qu'un produit sur un ensemble vide d'indices est égal à 1. C'est une fonction entière de la variable z, qui vérifie l'équation fonctionnelle $E_q(qz) = (1+z)E_q(z)$. Elle possède un produit infini simple, qui est

$$E_q(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{q^k}\right).$$

D'autre part, on connaît le développement de Taylor de l'inverse de E_q :

$$\frac{1}{E_q(z)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}}{\prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)}\, z^n.$$

La *fonction de Tschakaloff* est la fonction définie par

$$T_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{q^{n(n+1)/2}}.$$

C'est aussi une fonction entière de la variable complexe z, qui vérifie l'équation fonctionnelle $T_q(z) = 1 + zT_q(z)$.

On connaît des résultats d'indépendance linéaire sur $\mathbb{K}$ pour les valeurs prises par ces deux fonctions aux points non nuls de $\mathbb{K}$ (avec quelques conditions techniques) quand $\mathbb{K}$ est le corps des rationnels ou un corps quadratique imaginaire.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11J72.
Key words and phrases: Tschakaloff function, q-exponential function, irrationality, q-function.

La fonction T_q a été étudiée la première fois du point de vue arithmétique par L. Tschakaloff, dans [8], où il démontre sous quelques hypothèses techniques l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de la constante 1 et des valeurs prises par T_q aux rationnels non nuls.

Pour ce qui concerne la fonction q-exponentielle, ses propriétés arithmétiques ont été étudiées pour la première fois par Lototsky [6].

On pourra consulter les articles de P. Bundschuh et T. Töpfer [4] et [7] sur le sujet, pour des références sur les nombreux travaux consacrés aux propriétés arithmétiques de ces deux fonctions.

Pour énoncer nos résultats, nous aurons besoin de quelques notations.

Soit tout d'abord $b_n = \sum_{j=1}^{h} P_j(n)\omega_j^n$ une suite récurrente linéaire d'éléments de $\mathbb{C}$, où les ω_j sont non nuls et distincts, et les P_j sont des polynômes. Nous dirons que les ω_i sont les *fréquences* de la suite b_n. Nous appelons $\mathcal{H}$ les hypothèses suivantes sur la suite b_n :

1) On suppose que b_n est non nul pour tout n.
2) La suite b_n est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.
3) Les ω_j sont des entiers algébriques, aucun d'eux n'étant une racine de l'unité différente de 1.
4) Aucun des rapports ω_i/ω_j avec $i \neq j$ n'est une racine de l'unité.
5) On a $|\omega_1| > |\omega_i| \geq 1$ pour $i \geq 2$ (si $h \geq 2$).
6) Si pour un indice i, on a $|\omega_i| = 1$, alors $\omega_i = 1$.

Nous noterons aussi G le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ engendré par les ω_i, et nous dirons qu'il s'agit du sous-groupe *associé à la suite* b_n.

On note maintenant a_n une suite récurrente d'éléments non nuls de $\mathbb{Q}$.

Pour $\theta \in \mathbb{C}$, non nul, et s entier naturel, on définit les fonctions $g_{\theta,s}$ par les deux égalités :

$$g_{\theta,s}(z) = \sum_{m \geq 0} c_m z^m$$

et

$$\Big(\sum_{m \geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m\Big) E_q(-qz) = \sum_{k \geq 0} \frac{k^s \theta^k}{\prod_{l=1}^{k} a_l}\, z^k.$$

On a alors :

Théorème 1.1. *Soit α rationnel non nul tel que $\alpha \neq -q^l$, $l \geq 1$, et $s \geq 0$. On suppose que la suite récurrente $b_n = a_n(q^n + \alpha)$ vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$. Soient $t \geq 1$, $\theta_1, \ldots, \theta_t$ des rationnels non nuls et distincts. On suppose que si i est différent de j, le quotient θ_i/θ_j n'appartient pas au sous-groupe G associé à b_n, et que si b_n possède la fréquence 1, le coefficient de celle-ci dans b_n n'est pas un polynôme constant de la forme $\zeta\alpha\theta_k$ avec $\zeta \in G$ et $k \in \{1, \ldots, t\}$. Alors les fonctions $g_{\theta,l}(z)$ sont des fonctions entières de la* *variable complexe* z, *et la famille*

$$\{E_q(\alpha), g_{\theta_j,l}(\alpha) : 1 \leq j \leq t,\, 0 \leq l \leq s\}$$

est $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendante.*

Un choix particulier de la suite a_n permet d'obtenir des résultats plus précis :

Théorème 1.2. *Dans ce qui suit, on prend* $a_n = q^n - 1$, *et on note alors* $f_{\theta,s}$ *les fonctions notées* $g_{\theta,s}$ *dans le cas général. Soient* t *un entier naturel non nul,* $\theta_1, \ldots, \theta_t$ *des nombres rationnels non nuls et distincts, et* $s \geq 0$. *On suppose que* $|\theta_1| \leq \cdots \leq |\theta_t|$, *que* $|\theta_t| < |q|^2|\theta_1|$, *et enfin qu'aucun des* θ_j *n'est de la forme* $-q^k$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. *Soit* α *un rationnel non nul tel que* $\alpha \neq -q^l$ *pour tout* l *entier,* $l \geq 1$. *Alors la famille* $\{E_q(\alpha),\, f_{\theta_j,l}(\alpha) : 1 \leq j \leq t,\, 0 \leq l \leq s\}$ *est* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendante.*

Remarque 1.3. On verra dans le lemme 2.5 que l'on a la formule suivante :

$$f_{\theta,0}(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\prod_{l=1}^{k}(q^l + \theta)}{q^{k(k+1)/2}\prod_{l=1}^{k}(q^l - 1)}\, z^k.$$

Les deux résultats qui suivent sont des corollaires du théorème 1.2. Nous introduisons deux autres fonctions :

$$A(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{q^n z^n}{(q^n - 1)q^{n(n+1)/2}}, \qquad B(z) = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{q^l - 1}\right)\frac{z^n}{q^{n(n+1)/2}}.$$

Corollaire 1.4. *Soit* $\alpha \in \mathbb{Q}$, *non nul, tel que* $\alpha \neq -q^l$ *pour tout entier* $l \geq 1$. *Alors la famille* $\{1, T_q(\alpha), E_q(\alpha), A(\alpha), B(\alpha)\}$ *est* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendante.*

Un corollaire immédiat est :

Corollaire 1.5. *Soit* $\alpha \in \mathbb{Q}$, *non nul, tel que* $\alpha \neq -q^l$ *pour tout entier* $l \geq 1$. *Alors la famille* $\{1, T_q(\alpha), E_q(\alpha)\}$ *est* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendante.*

On a aussi le résultat suivant :

Théorème 1.6. *Pour* $\alpha \in \mathbb{C}$, *on note*

$$F_\alpha(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^k}{\prod_{l=1}^{k}(q^l - 1)} \prod_{l=1}^{k}\left(1 + \frac{z}{q^l}\right).$$

La fonction F_α *est une fonction entière d'une variable complexe.*

Soit $m \in \mathbb{N}$. *Pour* $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$, *et* $z \in \mathbb{Q}$, *non nul, tel que* $z \neq -q^l$, $l \in \mathbb{Z}$, *la famille* $\{1, F_\alpha^{(j)}(z), F_\alpha^{(j)}(qz) : 0 \leq j \leq m\}$ *est* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendante. En particulier, sous ces hypothèses,* $F_\alpha(z)$ *est irrationnel.*

Soit encore a_n une suite récurrente linéaire d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$. On lui associe la série formelle

$$\Lambda(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{q^{k(k+1)/2}(\prod_{l=1}^k a_l)},$$

que nous supposons de rayon de convergence infini, et on note τ l'opérateur zd/dz. On note $h_{\theta,s}(z)$ la fonction (qui est une fonction entière de la variable z)

$$h_{\theta,s}(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{\tau^s(\Lambda)(\theta/q^m)}{\prod_{l=1}^m (q^l - 1)}\, z^m.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 1.7. *Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$, non nul, tel que $\alpha \neq -q^l$ pour tout entier $l \geq 1$, et s un entier naturel. Soit a_n une suite récurrente linéaire et b_n la suite définie par $b_n = a_n(q^n + \alpha)$. On suppose que b_n vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$. Soient $t \geq 1$, $\theta_1, \ldots, \theta_t$ des rationnels non nuls et distincts. On suppose que si i est différent de j, les quotients θ_i/θ_j n'appartient pas au sous-groupe G associé à b_n, et que si b_n a la fréquence 1, le coefficient de celle-ci dans b_n n'est pas un polynôme constant de la forme $\zeta\theta_k$ avec $\zeta \in G$ et $k \in \{1, \ldots, t\}$. Alors la famille*

$$\{E_q(\alpha), h_{\theta_j,l}(\alpha) : 1 \leq j \leq t,\ 0 \leq l \leq s\}$$

est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante.

Remarque 1.8. 1) Dans tous ces résultats, la condition $\alpha \neq -q^l$ est naturelle, puisque sinon $E_q(\alpha) = 0$.

2) Dans le théorème 1.2 et les corollaires qui suivent, on obtient des résultats d'irrationalité en prenant dans la collection de fonctions la fonction $f_{-q,0}$ qui est égale à 1.

3) Ce n'est plus le cas en ce qui concerne le théorème 1.7, où on voit facilement que l'on ne peut obtenir une fonction constante non nulle parmi les $h_{\theta,s}$.

4) Dans le cas le plus simple du théorème 1.7, qui est $a_l = 1$ pour tout l, on voit que $\Lambda(z) = T_q(z)$, et on regarde donc si $s = 0$ les fonctions

$$\sum_{m\geq 0} \frac{T_q(\theta/q^m)}{\prod_{l=1}^m (q^l - 1)}\, z^m.$$

On peut remarquer que les coefficients de Taylor de telles fonctions ne sont pas des nombres rationnels en général.

2. Rappels et lemmes techniques. Nous rappelons tout d'abord le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. *Soient t et m deux entiers naturels, avec t non nul, et $\theta_1, \ldots, \theta_t$ des rationnels non nuls et distincts. Soit b_n une suite récurrente linéaire vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}$, et G le sous-groupe associé à la suite b_n. On suppose que pour $i \neq j$, le quotient θ_i/θ_j n'appartient pas à G, et que si la suite b_n a la fréquence 1, le coefficient associé n'est pas de la forme $\zeta\theta_k$ avec $\zeta \in G$ et $k \in \{1, \ldots, t\}$. Soit f la fonction définie par*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\prod_{l=1}^n b_l},$$

qui est une fonction entière de la variable complexe z. Alors la famille

$$\{1, f^{(j)}(\theta_i) : 0 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq t\}$$

est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante.

Preuve. Voir [3]. ∎

REMARQUE 2.2. Si τ est l'opérateur zd/dz, on voit facilement que la conclusion du théorème précédent est équivalente à ce que la famille

$$\{1, \tau^j(f)(\theta_i) : 0 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq t\}$$

est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante. C'est en fait sous cette forme que nous allons l'utiliser.

LEMME 2.3. *Soit a_n une suite récurrente linéaire d'éléments non nuls de $\mathbb{Q}$, et α un rationnel non nul. On suppose que la suite $b_n = a_n(q^n + \alpha)$ vérifie les conditions $\mathcal{H}$. Alors la suite $|a_n|$ est minorée par un nombre $c > 0$.*

Preuve. Le fait que la suite $b_n = a_n(q^n + \alpha)$ vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$ implique que les fréquences de la suite a_n sont des entiers algébriques ; en effet, sinon, soit τ_{i_0} une fréquence de a_n qui n'est pas un entier algébrique, et qui soit de module minimal. Comme $\tau_{i_0}^n$ apparaît avec un coefficient non nul dans αa_n, et n'apparaît pas dans b_n par les hypothèses $\mathcal{H}$, c'est qu'il est détruit par un terme de $q^n a_n$, et donc il existe une fréquence τ_{i_1} de a_n telle que $\tau_{i_0} = q\tau_{i_1}$. Alors τ_{i_1} n'est pas un entier algébrique, et est de module plus petit que τ_{i_0}, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. Maintenant, si on a une telle suite récurrente a_n de rationnels non nuls dont toutes les fréquences sont des entiers algébriques, il existe un entier d tel que $da_n \in \mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$, ce qui implique que $|a_n|$ est minorée. ∎

LEMME 2.4. *On se place sous les hypothèses du théorème 1.1. Soit θ un nombre complexe, q un nombre complexe tel que $|q| > 1$. On pose pour $z \neq -q^l$, $l \geq 1$ et $s \in \mathbb{N}$*

$$\Phi_{\theta,s}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{k^s \theta^k z^k}{\prod_{l=1}^k a_l(q^l + z)}.$$

Alors $g_{\theta,s}(z) = \Phi_{\theta,s}(z) E_q(z)$.

Preuve. On laisse le lecteur vérifier que le lemme 2.3 implique que la fonction $\Phi_{\theta,s}(z)$ est méromorphe dans tout $\mathbb{C}$.

On a

$$\prod_{l=1}^{k}(q^l+z)=q^{k(k+1)/2}\prod_{l=1}^{k}\left(1+\frac{z}{q^l}\right),$$

de sorte que

$$\frac{E_q(z)}{\prod_{l=1}^{k}(q^l+z)}=q^{-k(k+1)/2}\prod_{l\geq k+1}\left(1+\frac{z}{q^l}\right)=q^{-k(k+1)/2}E_q\left(\frac{z}{q^k}\right).$$

Donc

$$\Phi_{\theta,s}(z)E_q(z)=\sum_{k\geq 0}\frac{k^s\theta^k z^k}{q^{k(k+1)/2}\prod_{l=1}^{k}a_l}\,E_q\left(\frac{z}{q^k}\right).$$

Le coefficient d_m de z^m dans cette expression est

$$d_m=\sum_{k+j=m}\frac{k^s\theta^k}{q^{k(k+1)/2+jk}(\prod_{l=1}^{k}a_l)\prod_{l=1}^{j}(q^l-1)}.$$

On remarque que $(k+j)(k+j+1)=k(k+1)+2kj+j(j+1)$, de sorte que

$$d_m q^{m(m+1)/2}=\sum_{k+j=m}\frac{k^s\theta^k}{\prod_{l=1}^{k}a_l}\,\frac{q^{j(j+1)/2}}{\prod_{l=1}^{j}(q^l-1)}$$

et donc

$$\sum_{m\geq 0}d_m q^{m(m+1)/2}z^m=\left(\sum_{k\geq 0}\frac{k^s\theta^k z^k}{\prod_{l=1}^{k}a_l}\right)\left(\sum_{j\geq 0}\frac{q^{j(j+1)/2}z^j}{\prod_{l=1}^{j}(q^l-1)}\right).$$

Comme on a l'égalité

$$\frac{1}{E_q(-qz)}=\sum_{j\geq 0}\frac{q^{j(j+1)/2}z^j}{\prod_{l=1}^{j}(q^l-1)},$$

on a $d_m=c_m$ pour tout m, ceci termine la démonstration. ∎

Lemme 2.5. *On suppose que $a_n=q^n-1$ pour $n\geq 1$. On a dans ce cas les égalités suivantes :*

(a) $f_{\theta,0}(z)=\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{\prod_{l=1}^{k}(q^l+\theta)}{q^{k(k+1)/2}\prod_{l=1}^{k}(q^l-1)}\,z^k$;

(b) $f_{-q,0}(z)=1$;

(c) $f_{-q,1}(z)=-\displaystyle\sum_{m\geq 1}\frac{q^m z^m}{(q^m-1)q^{m(m+1)/2}}=-A(z)$;

(d) $f_{-1,0}(z)=T_q(z)$;

(e) $f_{-1,1}(z) = -\sum_{m\geq 1} \frac{\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{q^l-1}}{q^{m(m+1)/2}} z^m = -B(z).$

Preuve. Par le lemme 2.4, on a

$$\sum_{m\geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{k^s \theta^k z^k}{\prod_{l=1}^{k}(q^l-1)}\right)\left(\sum_{j\geq 0} \frac{q^{j(j+1)/2} z^j}{\prod_{l=1}^{j}(q^l-1)}\right).$$

Dans le cas $s = 0$, ceci donne

$$\sum_{m\geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m = \frac{E_q(\theta z)}{E_q(-qz)}.$$

Nous utilisons maintenant une formule de W. Hahn, [5, p. 362] : Pour x, y convenables dans $\mathbb{C}$ (par exemple de module assez petit) on a

$$\frac{E_q(x)}{E_q(y)} = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{l=0}^{n-1}(x - q^l y)}{\prod_{l=1}^{n}(q^l-1)}.$$

On applique cela avec $x = \theta z$, $y = -qz$, ce qui donne

$$\sum_{m\geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m = \frac{E_q(\theta z)}{E_q(-qz)} = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{l=0}^{n-1}(\theta z + q^{l+1} z)}{\prod_{l=1}^{n}(q^l-1)}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{l=1}^{n}(\theta + q^l)}{\prod_{l=1}^{n}(q^l-1)} z^n.$$

On a donc la formule

$$f_{\theta,0}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{l=1}^{n}(\theta + q^l)}{q^{n(n+1)/2}\prod_{l=1}^{n}(q^l-1)} z^n.$$

Comme cas particulier, on a $\theta = 0$, qui donne $f_{0,0}(z) = E_q(z)$, $\theta = -1$, qui donne $f_{-1,0}(z) = T_q(z)$, et enfin $\theta = -q$, qui donne $f_{-q,0}(z) = 1$, le coefficient de Taylor d'ordre n étant nul si $n \geq 1$.

On passe au cas où $s = 1$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{k\geq 0} \frac{k\theta^k z^k}{\prod_{l=1}^{k}(q^l-1)} = z\,\frac{d}{dz}(E_q(\theta z)) = \theta z E_q'(\theta z).$$

Si $\theta = -q$, on trouve que

$$\sum_{m\geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m = (-qz)\,\frac{E_q'(-qz)}{E_q(-qz)}.$$

On a l'égalité $E_q'(u)/E_q(u) = \sum_{k\geq 1} 1/(q^k + u)$, de sorte que

$$\sum_{m\geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m = -\sum_{j\geq 0} \frac{z}{q^j - z} = -\sum_{n\geq 1} \frac{(qz)^n}{q^n - 1}.$$

Si on note $L_q(z)=\sum_{n\geq 1} z^n/(q^n-1)$, on a donc obtenu que

$$\sum_{m\geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m = -(qz)\,\frac{E_q'(-qz)}{E_q(-qz)} = -L_q(qz)$$

et par suite

$$c_0=0, \qquad c_m = -\frac{q^m}{(q^m-1)q^{m(m+1)/2}} \qquad \text{pour } m\geq 1.$$

On a donc

$$f_{-q,1}(z) = -\sum_{m\geq 1} \frac{q^m z^m}{(q^m-1)q^{m(m+1)/2}}.$$

Dans le cas $\theta=-1$, on trouve

$$\sum_{m\geq 0} c_m q^{m(m+1)/2} z^m = -z\,\frac{E_q'(-z)}{E_q(-qz)} = -\frac{L_q(z)}{1-z},$$

donc $c_0=0$, et pour $m\geq 1$, on a

$$c_m = -\frac{\sum_{l=1}^m \frac{1}{q^l-1}}{q^{m(m+1)/2}},$$

ce qui donne

$$f_{-1,1}(z) = -\sum_{m\geq 1} \frac{\sum_{l=1}^m \frac{1}{q^l-1}}{q^{m(m+1)/2}}\, z^m. \ \blacksquare$$

Lemme 2.6.

(i) *La fonction F_α vérifie l'équation fonctionnelle*

$$F_\alpha(q^2z)+(\alpha-1)F_\alpha(qz)-\alpha(1+z)F_\alpha(z)=0.$$

(ii) *Soit $m\in\mathbb{N}$. Soient $\alpha, z\in\mathbb{Q}$, non nuls, et $z\neq -q$, $z\neq -q^2$. Alors la famille $\{1, F_\alpha^{(j)}(z), F_\alpha^{(j)}(qz) : 0\leq j\leq m\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante si et seulement si la famille $\{1, F_\alpha^{(j)}(z/q^2), F_\alpha^{(j)}(z/q) : 0\leq j\leq m\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante.*

Preuve. (i) On commence par supposer que $\alpha\neq -q^l$, $l\geq 1$. Dans ce cas, la fonction $F_\alpha(z)$ est égale à

$$f_{z,0}(\alpha) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha^k z^k E_q(\alpha)}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha)},$$

et on vérifie facilement l'assertion. Pour le cas général, on peut remarquer que la fonction qui à $(\alpha,z)\in\mathbb{C}^2$ associe $F_\alpha(z)$ est une fonction entière de deux variables complexes, et donc qu'il en est de même de la fonction $(\alpha,z)\mapsto F_\alpha(q^2z)+(\alpha-1)F_\alpha(qz)-\alpha(1+z)F_\alpha(z)$; comme celle-ci est nulle pour $\alpha\neq -q^l$, $l\geq 1$ et tout z, elle est identiquement nulle.

(ii) On a

$$F_\alpha(z) = (1-\alpha)F_\alpha(z/q) + \alpha(1+z/q^2)F_\alpha(z/q^2)$$

et

$$F_\alpha(qz) = ((1-\alpha)^2 + \alpha(1+z/q))F_\alpha(z/q) + \alpha(1-\alpha)(1+z/q^2)F_\alpha(z/q^2).$$

On dérive j fois, et on trouve les formules

$$F_\alpha^{(j)}(z) = +\frac{\alpha j}{q^{2j}}F_\alpha^{(j-1)}\left(\frac{z}{q^2}\right) + \frac{1-\alpha}{q^j}F_\alpha^{(j)}\left(\frac{z}{q}\right) + \frac{\alpha}{q^{2j}}\left(1+\frac{z}{q^2}\right)F_\alpha^{(j)}\left(\frac{z}{q^2}\right)$$

et

$$F_\alpha^{(j)}(qz) = +\frac{\alpha j}{q^{2j}}F_\alpha^{(j-1)}\left(\frac{z}{q}\right) + \frac{\alpha(1-\alpha)j}{q^{3j}}F_\alpha^{(j-1)}\left(\frac{z}{q^2}\right)$$
$$+\left((1-\alpha)^2 + \alpha\left(1+\frac{z}{q}\right)\right)\frac{1}{q^{2j}}F_\alpha^{(j)}\left(\frac{z}{q}\right) + \alpha(1-\alpha)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\frac{1}{q^{3j}}F_\alpha^{(j)}\left(\frac{z}{q^2}\right).$$

On passe donc de la famille $\{1, F_\alpha^{(j)}(z/q^2), F_\alpha^{(j)}(z/q) : 0 \le j \le m\}$ à la famille $\{1, F_\alpha^{(j)}(z), F_\alpha^{(j)}(qz)\}$ par une transformation linéaire dont la matrice A à coefficients dans $\mathbb{Q}$ a la forme suivante : Elle est constitué pour sa partie supérieure de blocs diagonaux, tous les autres termes de cette partie supérieure étant nuls, le premier bloc étant la matrice à une ligne et une colonne [1], et les autres blocs diagonaux des matrices d'ordre 2, B_j, $0 \le j \le m$, avec

$$B_j = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{q^j} & +\alpha\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\frac{1}{q^{2j}} \\ \left((1-\alpha)^2+\alpha\left(1+\frac{z}{q}\right)\right)\frac{1}{q^{2j}} & +\alpha(1-\alpha)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\frac{1}{q^{3j}} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de B_j est égal à

$$-\frac{\alpha^2}{q^{4j}}\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{z}{q^2}\right),$$

donc le déterminant de A est non nul par les hypothèses faites, d'où le résultat. ∎

LEMME 2.7. *Soit $m \in \mathbb{N}$ non nul, $\alpha = -q^m$ et $\beta = -q^{-m}$. On a la relation*

$$F_\alpha(z) = (-1)^m z^m q^{-m} F_\beta(z).$$

Preuve. Nous allons noter $\Gamma_{\theta,s}(z)$ l'expression

$$\sum_{k\ge 0} \frac{k^s \theta^k z^k}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)\prod_{l=1}^k (q^l+z)}$$

qui est l'analogue de $\Phi_{\theta,s}(z)$ dans le cas où l'on prend $a_l = q^l - 1$ pour tout l.

On considère tout d'abord la formule donnant

$$\Gamma_{\theta,0}(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\theta^k z^k}{\prod_{l=1}^k (q^l - 1) \prod_{l=1}^k (q^l + z)}.$$

On sait que si l'on multiplie par $E_q(z)$ cette expression, on trouve que l'on a l'égalité de fonctions méromorphes $\Gamma_{\theta,0}(z)E_q(z) = f_{\theta,0}(z)$. On a

$$\begin{aligned} f_{\theta,0}(z) = & \sum_{m-1\geq k\geq 0} \frac{\theta^k z^k E_q(z)}{\prod_{l=1}^k (q^l - 1) \prod_{l=1}^k (q^l + z)} \\ & + \sum_{k\geq m} \frac{\theta^k z^k E_q(z)}{\prod_{l=1}^k (q^l - 1) \prod_{l=1}^k (q^l + z)}. \end{aligned}$$

La première somme est une somme finie, dont tous les termes ont pour limite 0 si $z \to -q^m$, et donc elle converge vers 0 si $z \to -q^m$. La seconde somme est égale à

$$\sum_{k\geq m} \frac{\theta^k z^k}{q^{k(k+1)/2} \prod_{l=1}^k (q^l - 1)} \prod_{l\geq k+1}^{\infty} (1 + z/q^l)\,;$$

c'est la somme d'une série de fonctions entières en la variable z qui converge uniformément sur tout compact. Par suite, la limite quand z converge vers $-q^m$ de $f_{\theta,0}(z)$ est égale à

$$\sum_{k\geq m} \frac{\theta^k (-q^m)^k}{q^{k(k+1)/2} \prod_{l=1}^k (q^l - 1)} \prod_{l\geq k+1}^{\infty} (1 - q^{m-l}).$$

Le produit infini $\prod_{l\geq k+1}(1 - q^{m-l})$ est égal à

$$\frac{E_q(-1) q^{(k-m)(k-m+1)/2}}{\prod_{j=1}^{k-m} (q^j - 1)},$$

de sorte que finalement on a

$$f_{\theta,0}(-q^m) = \sum_{k\geq m} \frac{\theta^k (-q^m)^k}{q^{k(k+1)/2} \prod_{l=1}^k (q^l - 1)} \frac{E_q(-1) q^{(k-m)(k-m+1)/2}}{\prod_{j=1}^{k-m} (q^j - 1)}$$

et après quelques calculs,

$$f_{\theta,0}(-q^m) = q^{m(m-1)/2} E_q(-1) \sum_{k\geq m} \frac{\theta^k (-1)^k}{\prod_{l=1}^k (q^l - 1) \prod_{j=1}^{k-m} (q^j - 1)}.$$

Une nouvelle expression est obtenue en posant $k = m + h$,

$$f_{\theta,0}(-q^m) = \frac{(-1)^m \theta^m q^{m(m-1)/2} E_q(-1)}{\prod_{l=1}^m (q^l - 1)} \sum_{h\geq 0} \frac{\theta^h (-1)^h}{\prod_{l=m+1}^{h+m} (q^l - 1) \prod_{l=1}^h (q^l - 1)},$$

soit encore

$$f_{\theta,0}(-q^m) = \frac{(-1)^m \theta^m q^{m(m-1)/2} E_q(-1)}{\prod_{l=1}^m (q^l - 1)} \sum_{h\geq 0} \frac{\theta^h q^{-mh}(-1)^h}{\prod_{l=1}^h (q^l - q^{-m}) \prod_{l=1}^h (q^l - 1)},$$

et le terme dans la somme infinie est la valeur de $\Gamma_{\theta,0}(z)$ pour $z = -q^{-m}$.

On remplace z par $-q^{-m}$ dans la formule $\Gamma_{\theta,0}(z)E_q(z) = f_{\theta,0}(z)$, et après quelques calculs il vient que

$$f_{\theta,0}(-q^m) = (-\theta q^{-1})^m f_{\theta,0}(-q^{-m}),$$

ou encore $F_{-q^m}(z) = (-zq^{-1})^m F_{-q^{-m}}(z)$, ce qui termine la démonstration du lemme. ∎

3. Preuve du théorème 1.1. Tout d'abord on voit facilement que la fonction $g_{\theta,s}$ est une fonction entière de la variable complexe z. (Ce sera aussi le cas pour les fonctions $f_{\theta,s}$ et $h_{\theta,s}$ qui interviennent dans les théorèmes 1.2 et 1.6.)

Supposons que la famille

$$\{E_q(\alpha), g_{\theta_j,l}(\alpha) : 1 \leq j \leq t,\ 0 \leq l \leq s\}$$

est $\mathbb{Q}$-linéairement dépendante. Par division par $E_q(\alpha)$ qui est non nul par hypothèse, on en déduit en utilisant le lemme 2.4 que la famille $\{1, \Phi_{\theta_j,l}(\alpha) : 1 \leq j \leq t,\ 0 \leq l \leq s\}$ est aussi $\mathbb{Q}$-linéairement dépendante. Introduisons la fonction

$$g(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\prod_{l=1}^k a_l(q^l + \alpha)}.$$

Par les hypothèses faites, la fonction g est une fonction entière d'une variable complexe. (On rappelle que τ est l'opérateur zd/dz.) En utilisant g, on trouve alors que la famille $\{1, \tau^l(g)(\theta_j\alpha) : 1 \leq j \leq t,\ 0 \leq l \leq s\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement dépendante. Mais les $\theta_j^* = \theta_j\alpha$ vérifient que leurs quotients pour des indices distincts n'appartiennent pas au sous-groupe G associé à la suite $b_n = a_n(q^n + \alpha)$ par hypothèse, et si cette suite possède comme fréquence le nombre 1, le coefficient de celle-ci n'est pas de la forme $\zeta\alpha\theta_k$, donc pas de la forme $\zeta\theta_k^*$ avec $\zeta \in G$. Par suite les hypothèses du théorème 2.1 étant vérifiées, et compte tenu de la remarque qui suit, on a une contradiction qui démontre le résultat.

4. Preuve du théorème 1.2 et des corollaires 1.4, 1.5

4.1. *Preuve du théorème 1.2.* On ne peut plus utiliser directement le théorème 2.1, car les hypothèses de ce théorème sur les quotients des θ_i par θ_j avec $i \neq j$ n'est plus satisfaite ; ceci est valide également pour le théorème 1 et le corollaire 1 de [2], cependant la méthode de démonstration de ce dernier théorème va permettre de démontrer le résultat. La première partie de la démonstration est identique à celle de la démonstration du théorème 1 de [2], seule la dernière partie diffère un peu ; nous redonnons les détails pour être complet.

On va raisonner par l'absurde, et supposer que la famille est $\mathbb{Q}$-linéairement dépendante. Dans ce cas, comme $E_q(\alpha)$ est non nul, il en résulte par division par $E_q(\alpha)$, en utilisant le lemme 2.4, que la famille $\{1, \Gamma_{\theta_j,l}(\alpha) : 1 \leq j \leq t,\ 0 \leq l \leq s\}$ est aussi $\mathbb{Q}$-linéairement dépendante. On se donne une relation de liaison $\mu + \sum \lambda_{j,l}\Gamma_{\theta_j,l}(\alpha) = 0$ où les rationnels $\mu, \lambda_{j,l}$ ne sont pas tous nuls.

Ceci s'écrit sous la forme

$$\sum_{k\geq 0} \frac{u_k}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha)} = 0,$$

où on a posé $u_0 = \mu + \sum \lambda_{j,l}$ et pour $k \geq 1$, $u_k = \sum \lambda_{j,l} k^l (\theta_j \alpha)^k$.

Soit

$$g(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{u_k z^k}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha)}.$$

Il est facile de voir que g est une fonction entière de la variable z, et on a $g(1) = 0$. On pose $G(z) = g(z)/(1-z)$, et on définit la suite v_n par

$$G(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{v_k z^k}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha)}.$$

Avec les conventions faites, on a $u_0 = v_0$, et pour $k \geq 1$,

$$\frac{v_k}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha)} = \frac{v_{k-1}}{\prod_{l=1}^{k-1} (q^l-1)(q^l+\alpha)} + \frac{u_k}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha)}.$$

On déduit tout d'abord de ce qui précède que

$$\frac{v_k}{\prod_{l=1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha)} = \sum_{j=0}^k \frac{u_j}{\prod_{l=1}^j (q^l-1)(q^l+\alpha)},$$

soit encore

$$v_k = \sum_{j=0}^k u_j \prod_{l=j+1}^k (q^l-1)(q^l+\alpha).$$

Il existe un nombre rationnel d tel que $d\alpha \in \mathbb{Z}$ et $d^{k+1}u_k \in \mathbb{Z}$ pour tout k. Il en résulte immédiatement que $d^{k+1}v_k \in \mathbb{Z}$ pour tout k.

Comme $g(1) = 0$, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{\prod_{l=1}^j (q^l-1)(q^l+\alpha)} = 0$$

et on en déduit que

$$\frac{v_k}{\prod_{l=1}^{k}(q^l-1)(q^l+\alpha)} = -\sum_{j\geq k+1}\frac{u_j}{\prod_{l=1}^{j}(q^l-1)(q^l+\alpha)}.$$

Donc

$$v_k = -\sum_{j\geq k+1}\frac{u_j}{\prod_{l=k+1}^{j}(q^l-1)(q^l+\alpha)}.$$

On en déduit alors facilement l'existence de constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $|v_k| \leq c_1 c_2^k$, de sorte que le rayon de convergence de la série $h(z) = \sum_{k\geq 0} v_k z^k$ est non nul.

D'autre part, la relation

$$\frac{v_k}{\prod_{l=1}^{k}(q^l-1)(q^l+\alpha)} = \frac{v_{k-1}}{\prod_{l=1}^{k-1}(q^l-1)(q^l+\alpha)} + \frac{u_k}{\prod_{l=1}^{k}(q^l-1)(q^l+\alpha)}$$

donne que

$$v_k = (q^k-1)(q^k+\alpha)v_{k-1} + u_k = (q^{2k} + (\alpha-1)q^k - \alpha)v_{k-1} + u_k.$$

On multiplie les deux membres par z^k et on somme, ce qui donne

$$h(z)(1+\alpha z) = q^2 z h(q^2 z) + (\alpha-1)qzh(qz) + \sum_{k\geq 0} u_k z^k.$$

On remarque que $\sum_{k\geq 0} u_k z^k$ est une fraction rationnelle. Soit R le rayon de méromorphie de h, qui est non nul, car le rayon de convergence de cette série entière est non nul. S'il est fini, le premier membre de l'égalité précédente a un rayon de méromorphie R, et le second membre un rayon de méromorphie $R/|q|^2$, d'où une contradiction.

Donc le rayon de méromorphie de h est infini ; il en est de même de la série $dh(dz) = \sum_{k\geq 0} d^{k+1} v_k z^k$, qui est à coefficients entiers. D'après un théorème de Borel, la série h est une fraction rationnelle, et donc v_n est égale à une suite récurrente linéaire pour tout n assez grand.

Pour k assez grand on pose $v_k = \sum_{j=1}^{h} Q_j(k)\omega_j^k$, où les ω_j sont distincts et non nuls, et les Q_j des polynômes non nuls.

Supposons tout d'abord qu'il existe un des ω_j qui est de la forme $-q^l\alpha$ avec $l \in \mathbb{N}$, et soit l_0 le plus grand entier avec cette propriété que $-q^{l_0}\alpha \in \{\omega_1, \ldots, \omega_h\}$ (on a donc $l_0 \geq 0$) ; on note $-q^{l_0}\alpha = \omega_{j_0}$. Le terme $(q^2\omega_{j_0})^k$, qui apparaît avec le coefficient $-Q_{j_0}(k-1)(\omega_{j_0})^{-1}$ dans l'expression $v_k - (q^{2k} + (\alpha-1)q^k - \alpha)v_{k-1} = u_k$ subsiste dans le premier terme ; en effet, il est différent des autres termes $(q^2\omega_j)^k$, $j \neq j_0$, puisque les ω_j sont distincts, et différent des ω_l^k et $(q\omega_l)^k$ par la propriété de maximalité de l_0. Donc il apparaît dans u_k, il existe donc l tel que $q^2\omega_{j_0} = \theta_l\alpha$, et par suite $\theta_l = -q^{l_0+2}$, en contradiction avec l'hypothèse faite qu'aucun θ_l n'est de la forme $-q^k$ avec $k \geq 2$.

Par suite, aucun des ω_j n'est de la forme $-q^l\alpha$, $l \in \mathbb{N}$, en particulier les ω_j sont tous différents de $-\alpha$.

Supposons maintenant que ω_1, par exemple, est de module minimal parmi $\{\omega_1, \dots, \omega_h\}$. Le terme ω_1^k apparaît dans $v_k + \alpha v_{k-1}$ avec le coefficient $Q_1(k) + \alpha\omega_1^{-1}Q_1(k-1)$, qui est non nul car α est différent de $-\omega_1$, et Q_1 est non nul. Ce terme n'apparaît pas dans les deux termes $q^{2k}v_{k-1}$ et $q^k v_{k-1}$ par la propriété de minimalité de ω_1. Donc il subsiste dans le premier membre, et donc il apparaît dans le second membre u_k, et c'est l'un des termes de plus petit module dans cette expression ; comme on a supposé que l'on a $|\theta_1| \le \cdots \le |\theta_t|$, on peut donc supposer quitte à réindexer que $\omega_1 = \theta_1\alpha$.

Supposons maintenant que ω_h soit l'un des éléments de module maximal parmi les ω_j. Alors $(q^2\omega_h)^k$ apparaît avec un coefficient non nul dans le premier membre de l'égalité $v_k - (q^{2k} + (\alpha - 1)q^k - \alpha)v_{k-1} = u_k$, et par suite est égal, à une réindexation près, à $(\theta_t\alpha)^k$. On a donc $q^2\omega_h = \theta_t\alpha$. On en déduit que $|\theta_t| \ge |q|^2|\theta_1|$, contrairement aux hypothèses faites. Cette contradiction montre que l'hypothèse de dépendance linéaire est fausse, et ceci termine la démonstration.

4.2. *Preuve du corollaire 1.4.* On applique le résultat précédent. La famille des θ_j considérée sera $\{-1, -q\}$. On vérifie immédiatement toutes les conditions imposées à ces nombres dans le théorème 1.2, d'où le fait que la famille $\{E_q(\alpha), f_{-q,0}(\alpha), f_{-1,0}(\alpha), f_{-q,1}(\alpha), f_{-1,1}(\alpha)\}$ est une famille $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante. La formulation faite résulte alors immédiatement du lemme 2.5.

4.3. *Preuve du corollaire 1.5.* Elle est immédiate.

5. Preuve du théorème 1.6. On va considérer deux cas.

5.1. *Cas où $\alpha \ne -q^m$, $m \ge 1$.* On va appliquer le théorème 1.2. Soit $\theta \in \mathbb{Q}$, θ non nul, et différent des $-q^l$, $l \in \mathbb{Z}$. On prend comme famille pour les valeurs des θ_j la famille $\{-q, \theta, q\theta\}$; comme θ non nul est différent des $-q^l$, $l \in \mathbb{Z}$, ces trois nombres sont distincts.

On a en plus à imposer que si θ_1 est le plus petit de ces nombres en valeur absolue, et θ_3 le plus grand, on a $|\theta_3| < |q|^2|\theta_1|$. En examinant les différents cas possibles, on voit que la condition à imposer sur θ est que $|q|^{-1} < |\theta| < |q|^2$. Sous donc ces conditions, on obtient en appliquant le théorème 1.2 (en négligeant le terme $E_q(\alpha)$) que la famille $\{f_{-q,0}(\alpha), f_{\theta,j}(\alpha), f_{q\theta,j}(\alpha) : 0 \le j \le m\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante, donc (avec la notation $\tau = \theta\partial/\partial\theta$)) que $\{1, \tau^j(F_\alpha)(\theta), \tau^j(F_\alpha)(q\theta) : 0 \le j \le m\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante. Par la remarque 2.2 ceci équivaut à dire que la famille $\{1, F_\alpha^{(j)}(\theta), F_\alpha^{(j)}(q\theta) : 0 \le j \le m\}$ est $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendante. Notons E l'ensemble des $z \in \mathbb{Q}$, non nuls, tels que $z \ne -q^l$, $l \in \mathbb{Z}$, et que la famille

$\{1, F_\alpha^{(j)}(z), F_\alpha^{(j)}(qz) : 0 \leq j \leq m\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante. Par ce qui précède, l'ensemble $\{z \in \mathbb{Q} : z \neq 0,\, z \neq -q^l,\, l \in \mathbb{Z},\, |q|^{-1} < |z| < |q|^2\}$ est inclus dans la partie E. D'autre part, le lemme 2.6 montre que la partie E est stable par l'application $z \mapsto q^2 z$, ainsi que par sa fonction réciproque. Il en résulte immédiatement que $E = \{z \in \mathbb{Q} : z \neq 0,\, z \neq -q^l,\, l \in \mathbb{Z}\}$, ce qui termine la démonstration dans le cas $\alpha \neq -q^l$, $l \geq 1$.

5.2. *Cas où $\alpha = -q^m$, $m \geq 1$.* Dans ce cas, le lemme 2.7 permet de se ramener au cas où $\alpha = -q^{-m}$; on peut alors appliquer le cas précédent, et ceci termine la démonstration du théorème.

6. Preuve du théorème 1.7. On laisse au lecteur la vérification que le fait que la suite $b_n = a_n(q^n + \alpha)$ vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$ implique que la série entière $\Lambda(z)$ a un rayon de convergence infini.

On introduit une nouvelle fonction

$$\Psi_{\theta,s}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{k^s \theta^k}{\prod_{l=1}^k a_l(q^l + z)}$$

(la différence avec les $\Phi_{\theta,s}$ est que l'on a supprimé le terme z^k).

Alors on a $h_{\theta,s}(z) = \Psi_{\theta,s}(z) E_q(z)$. En effet, comme dans la preuve du lemme 2.4,

$$\Psi_{\theta,s}(z) E_q(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{k^s \theta^k}{q^{k(k+1)/2} (\prod_{l=1}^k a_l)}\, E_q\left(\frac{z}{q^k}\right).$$

Le coefficient c_j de z^j dans cette expression est

$$\begin{aligned}\sum_{k \geq 0} \frac{k^s \theta^k}{(\prod_{l=1}^k a_l) q^{k(k+1)/2 + jk} \prod_{l=1}^j (q^l - 1)} &= \frac{\sum_{k \geq 0} \frac{k^s \theta^k q^{-kj}}{q^{k(k+1)/2} \prod_{l=1}^k a_l}}{\prod_{l=1}^j (q^j - 1)} \\ &= \frac{\tau^l(\Lambda)(\theta q^{-j})}{\prod_{l=1}^j (q^j - 1)},\end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion. La suite de la démonstration se déroule comme pour la preuve du théorème 1.1, il n'y a pas de difficultés.

7. Quelques commentaires

7.1. Tout d'abord, dans le corollaire 1.4, nous nous sommes limités au cas où la puissance s de k intervenant dans $k^s \theta^k$ est 0 ou 1. On peut bien sûr faire des calculs pour les cas où $s \geq 2$, mais les expressions des fonctions $f_{\theta,s}(z)$ (avec $\theta = -1$ ou $-q$) deviennent très compliquées.

7.2. Du fait de l'utilisation du théorème 2.1, la méthode ne permet pas d'obtenir des mesures d'irrationalité.

7.3. Nous avons utilisé comme outil que les valeurs prises par des expressions de la forme

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\theta^k z^k}{\prod_{l=1}^{k} a_l(q^l+z)}$$

étaient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes, sous des hypothèses convenables. Des cas plus généraux que ce genre d'expression, en ce qui concerne le terme q^l+z, sont intervenus dans [1, par exemple page 333, Theorem 5] : il s'agissait d'étudier des fonctions de la forme

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{-sn(n-1)/2} P_i(q^{-n}z)(\alpha_i z^s)^{n-1}}{\prod_{l=1}^{n} P(q^{-l}z)}$$

où $s \geq 1$, P est un polynôme tel que $P(0) \neq 0$ et de degré $\leq s$, les P_i sont des polynômes, les α_i vérifient la condition $\alpha_i \alpha_j^{-1} \neq q^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et on a $P(q^{-n}\alpha)$ non nul pour tout n.

Une généralisation possible des résultats du présent article serait de considérer un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(0) = 1$, de degré $s \geq 2$, et la fonction entière $F(z)$ définie par

$$F(z) = \prod_{k\geq 1} P\left(\frac{z}{q^k}\right) = \sum_{j\geq 0} \gamma_j z^j$$

(le cas de polynôme de plusieurs variables est aussi envisageable, en remplaçant $P(z/q^k)$ par $P(z_1/q^k, \ldots, z_m/q^k)$), et des expressions de la forme

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\theta^k z^k}{\prod_{l=1}^{k} a_l P(z/q^l)}.$$

Il semble cependant que ces différentes possibilités ne conduisent pas à des énoncés d'irrationalités pour les valeurs prises par les produits infinis correspondants, mais simplement à des énoncés d'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des valeurs prises en des points rationnels de ces produits infinis et de fonctions difficiles à expliciter.

L'auteur remercie vivement le Referee pour une lecture minutieuse du texte.

Références

[1] M. Amou and K. Väänänen, *Linear independence of the values of q-hypergeometric series and related functions*, Ramanujan J. 9 (2005), 317–339.

[2] J.-P. Bézivin, *Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles*, Manuscripta Math. 6 (1988), 103–129.

[3] —, *Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles II*, Acta Arith. 55 (1990), 233–240.

[4] P. Bundschuh, *Arithmetical properties of the solutions of certain functional equations*, in: Number Theory (Turku, 1999), de Gruyter, Berlin, 2001, 25–42.
[5] W. Hahn, *Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen*, Math. Nachr. 2 (1949), 340–379.
[6] A. V. Lototsky, *Sur l'irrationalité d'un produit infini*, Mat. Sb. 12 (1943), 262–272.
[7] T. Töpfer, *Arithmetical properties of functions satisfying q-difference equations*, Analysis 15 (1995), 25–49.
[8] L. Tschakaloff, *Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\nu(\nu+1)/2}$, *I*, Math. Ann. 80 (1921), 62–74; *II*, ibid. 84 (1921), 100–114.

Département de Mathématiques et Mécanique
Université de Caen
Laboratoire N. Oresme
Campus II, Boulevard du Maréchal Juin
BP 5186, 14032 Caen Cedex, France
E-mail: bezivin@math.unicaen.fr
http://www.math.unicaen.fr/∼bezivin

Reçu le 7.11.2008
et révisé le 13.3.2009 (5852)