ACTA ARITHMETICA
147.2 (2011)

Approximation algébrique en caractéristique p

par

Laurent Denis (Lille)

1. Résultats et situation. Soit $A = \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans le corps à q éléments $\mathbb{F}_q$ dont on note p la caractéristique et $K = \mathbb{F}_q(T)$ le corps des fractions. L'opposé du degré munit K d'une valuation $v = -\deg$ et on notera $K_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ le complété de K pour cette valuation. Celle-ci, ainsi que le degré, se prolongent de manière unique à la clôture algébrique de K_∞ et à son complété C qui reste un corps algébriquement clos. On notera $|x| = q^{\deg(x)}$ avec la convention $\deg(0) = -\infty$. On désigne aussi par $\bar{K}$ le corps des éléments de C qui sont algébriques sur K et on les appellera plus simplement nombres algébriques.

Définition 1. Le *module de Carlitz* est la donnée du groupe additif G_a et de l'homomorphisme $\mathbb{F}_q$-linéaire d'anneaux $\Phi : A \to \mathrm{End}(G_a)$ défini par $\Phi(T) = T\mathbf{F}^0 + \mathbf{F}$, où $\mathbf{F}$ est l'endomorphisme de Frobenius relatif à q.

Il existe alors une unique fonction exponentielle e_Φ caractérisée par les propriétés :

(1) $e_\Phi(0) = 0$, $\frac{d}{dz}(e_\Phi(z)) = 1$;
(2) pour tout z de C, $e_\Phi(Tz) = Te_\Phi(z) + e_\Phi(z)^q$.

Rappelons (voir [C]) que cette exponentielle est $\mathbb{F}_q$-linéaire, qu'il existe un élément π_q de K_∞ tel que $\mathrm{Ker}\, e_\Phi = A(T - T^q)^{1/(q-1)}\pi_q$ et qu'elle admet une bijection réciproque dans le disque $\deg(z) < q/(q-1)$, notée Log_Φ.

Définition 2. Pour tout entier naturel $h > 0$, on pose $[h] = T^{q^h} - T$ et $[0] = 1$ et on définit par récurrence les suites D_h et L_h par $D_0 = 1 = L_0$ et pour $h > 0$,

$$D_h = [h](D_{h-1})^q \quad \text{et} \quad L_h = [h]L_{h-1}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 11G09, 11J85.
Key words and phrases: Carlitz module, transcendence measures.

DOI: 10.4064/aa147-2-1

L'équation fonctionnelle de l'exponentielle conduit alors à (voir [C]) :

$$e_\Phi(z) = \sum_{h\geq 0} \frac{z^{q^h}}{D_h} \qquad \text{pour tout } z \text{ dans } C,$$

$$\mathrm{Log}_\Phi(z) = \sum_{h\geq 0} \frac{(-1)^h z^{q^h}}{L_h} \qquad \text{pour tout } z \text{ de degré} < q/(q-1).$$

Rappelons enfin que les valeurs de la fonction zêta de Carlitz aux entiers naturels sont pour tout s entier naturel > 0 définis par $\zeta(s) = \sum_{n\in A+} 1/n^s$ (où $A+$ désigne l'ensemble des éléments unitaires de A) et qu'elle vérifie

$$\zeta(s) = \sum_{h\geq 0} \frac{(-1)^{hs}}{L_h^s} \qquad \text{pour } 1 \leq s \leq q \text{ (voir [C]).}$$

Dans [D2] on introduit des fonctions qui prennent en des valeurs rationnelles du paramètre certaines valeurs du logarithme Log_Φ du module de Carlitz et des fonctions zêta de Carlitz afin de prouver l'indépendance algébrique. Ces fonctions satisfont des équations fonctionnelles d'un genre déjà considéré par Mahler. Rappelons la définition de ces applications :

Définition 3. Soit $\alpha(z)$ un élément non nul de $\mathbb{F}_q((1/z))$, a un élément non nul de $\mathbb{F}_q$ et $g(z) = z^{qe} - T$ où e est un entier non nul fixé. Alors pour tout entier naturel $s > 0$, l'expression

$$F(z) := f(a,\alpha,s)(z) = \sum_{h\geq 0} \frac{a^h \alpha(z)^{q^h}}{[g(z)\ldots g(z^{q^{h-1}})]^s},$$

où il est convenu qu'un produit vide vaut 1, définit pour $\deg(\alpha(z)) < seq/(q-1)$ une série entière dans la région $\deg(z) > 1/(qe)$ et vérifie l'équation fonctionnelle $F(z^q) = [g(z)^s/a]\,[F(z) - \alpha(z)]$.

Nous obtenons ici une mesure de transcendance assez générale pour les valeurs de ces fonctions en $z = T^{1/e}$, qui est la valeur intéressante en vue des applications. Pour tout β élément de C algébrique de degré d sur K on désignera sa hauteur par $h(\beta)$ (plus précisément sa hauteur logarithmique absolue égale au quotient du maximum du degré des coefficients d'un polynôme minimal de β sur A divisé par d).

Théorème 1. *Soit $\alpha(z)$ un élément non nul de $\mathbb{F}_q(z)$ de degré négatif par rapport à z, et β un élément de C algébrique de degré d sur K et de hauteur $h(\beta)$. Alors il existe un réel C_0 (effectivement calculable en fonction de q, e, s) tel que*

$$\deg(F(T^{1/e}) - \beta) > -C_0 d^2 h(\alpha) \max[d^2(h(\alpha)+1), dh(\beta), 1].$$

Remarque 1. Si on veut exprimer cette estimation via la taille de β (définie par $\tau(\beta) = h(\beta) + d$) on trouve, par les résultats de l'appendice,

$\deg(F(T^{1/e})-\beta) > -C_0(\alpha)\tau(\beta)^4$. Ceci est du même ordre de grandeur que les résultats obtenus en caractéristique nulle par Becker dans [B] (P. G. Becker a été le premier à prouver des mesures de transcendance pour les valeurs de certaines fonctions satisfaisant des équations fonctionnelles "à la Mahler" dans le cadre de la caractéristique finie). Dans [B] l'auteur obtient des estimations meilleures en la dépendance en d, en caractéristique p, mais les séries qu'il considère sont toutes à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, ce qui nous interdit ici d'appliquer directement sa méthode. Le cheminement de la preuve sera donc plus proche de celui de Miller (voir [M]).

Si on se limite aux valeurs liées aux logarithmes du module de Carlitz et à la fonction zêta on obtient une constante entièrement explicite C_0 :

Théorème 2. *Soit β un élément de degré d sur K. Alors:*

(a) *Pour tout entier $1 \le s \le q-1$,*

$$\deg(\zeta(s)-\beta) > -16sq(1+200q)d^2\max[236sq^2d^2, dh(\beta), 1].$$

(b) *Si π_q est une période fondamentale du module de Carlitz,*

$$\deg(\pi_q-\beta) > -16q^2(1+200q)d^2\max[236q^3d^2, d(h(\beta)+2), 1].$$

(c) *Pour tout α dans $\mathbb{F}_q(T^{1/e})$ de degré négatif,*

$$\deg(\mathrm{Log}_{\Phi}(\alpha)-\beta) > -70e^3q^2d^2(h(\alpha)+1)\max[236e^4q^2d^2(h(\alpha)+1), dh(\beta), 1].$$

Remarque 2. Ces résultats sont optimaux vis à vis de la dépendance en la hauteur de β (comme le montre le principe de Dirichlet) et améliorent en cela d'une exponentielle les estimations obtenues par P. Bundschuh dans [Bu] ou B. de Mathan dans [DM], notamment pour π_q. Notons que pour les valeurs du logarithme de Carlitz on ne gagne qu'un facteur $\log(h(\beta))$ par rapport au résultat (plus général) de V. Bosser sur les formes linéaires de logarithmes [Bo], mais on perd quant à la dépendance en le degré.

En caractéristique nulle un théorème de transfert classique (voir par exemple [L]) explique pourquoi une mesure d'approximation par des nombres algébriques équivaut à une mesure de transcendance. Nous montrerons en appendice comment les résultats précédents fournissent une mesure de qualité comparable quitte à perdre un facteur d à cause d'un phénomène d'inséparabilité.

2. Un lemme de multiplicités. On commence par établir un lemme de multiplicités lié à l'élévation à la puissance d et valable sur un corps quelconque, inspiré de [B] mais totalement effectif.

Si K est un corps commutatif et Q une fraction rationnelle à coefficients dans K alors l'écriture $Q(X) = U(X)/V(X)$ où U et V sont premiers entre eux dans $K[X]$ permet de définir la *hauteur* de Q notée $h(Q)$ comme étant le maximum des degrés de U et V. De même si Q est une fraction rationnelle de $K(X,Y)$ sa hauteur partielle en X notée $h_X(Q)$ est la hauteur de Q vue comme élément de $K(Y)(X)$.

Théorème 3. *Soit K un corps commutatif, et $f(z) \in K((z))$ transcendante sur $K(z)$. On suppose l'existence d'une fraction $Q \in K(X,Y)$ dont la hauteur partielle en Y vérifie $h_Y(Q) < d$ (où d est un entier > 1) tel que*

$$f(z^d) = Q(z, f(z)).$$

Alors pour tout couple d'entiers (M,N) et tout polynôme P appartenant à $K[X,Y] - \{0\}$ dont les degrés partiels vérifient

$$\deg_X(P) \le M \quad \textit{et} \quad 1 \le \deg_Y(P) \le N,$$

on a la majoration de l'ordre en zéro :

$$\mathrm{ord}_0(P(z, f(z))) \le N[2Md + Nh_X(Q)].$$

Preuve. Par hypothèse, P n'est pas constant en Y. Écrivons une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles sur l'anneau $K(X)[Y]$: $P(X,Y) = \prod_{1\le i\le u} P_i(X,Y)$, où $P_i(X,Y)$ est dans $K[X,Y]$. On a donc $d_i = \deg_Y(P_i) > 0$ et $n_i = \mathrm{ord}_0(P_i(z,f(z)))$. Il vient $d_1 + \cdots + d_u \le N$ et on pose $n = n_1 + \cdots + n_u$. Par sommation, on ne peut donc pas avoir pour tout i $(1 \le i \le N)$ l'inégalité $n_i/n < d_i/N$; sans perte de généralité on supposera donc

$$(*) \qquad n_1/n \ge d_1/N.$$

Écrivons $Q(X,Y) = Q_1(X,Y)/Q_2(X,Y)$ fraction irréductible dans $K[X,Y]$. Posons

$$R_0(X,Y) = P_1(X,Y) \quad \text{et} \quad R_1(X,Y) = P_1(X^d, Q(X,Y))Q_2(X,Y)^{d_1} ;$$

ce sont des polynômes de $K[X,Y]$. Comme R_0 est irréductible, il existe un entier naturel r tel que R_0 et $R_1R_0^{-r}$ soient premiers entre eux dans $K(X)[Y]$. Si D est le coefficient dominant de R_0^u par rapport à la variable Y alors $R_2(X,Y) = D(X)R_0^{-r}(X,Y)P_1(X^d, Q(X,Y))Q_2(X,Y)^{d_1}$ est dans $K[X,Y]$.

On a $\deg_Y(R_1) \le d_1h_Y(Q)$ et $\deg_X(R_1) \le Md + d_1h_X(Q)$, d'où

$$(**) \qquad \begin{aligned} \deg_Y(R_2) &\le d_1h_Y(Q) - rd_1 < d_1(d-r), \\ \deg_X(R_2) &\le Md + d_1h_X(Q) + rM. \end{aligned}$$

Le résultant en Y de R_0 et R_2 est alors un polynôme non nul R de $K[X]$. Comme R est une combinaison linéaire de R_0 et R_2, on a

$$\min\{\mathrm{ord}_0(R_0(X, f(X))), \mathrm{ord}_0(R_2(X, f(X)))\} \le \mathrm{ord}_0(R(X)) \le \deg R(X).$$

La majoration du résultant

$$\deg R \le \deg_X(R_0)\deg_Y(R_2) + \deg_X(R_2)\deg_Y(R_0)$$

montre que

$$\deg R \leq Md_1(d-r) + d_1(Md + d_1h_X(Q) + rM) \leq d_1(2Md + d_1h_X(Q)).$$

Or grâce à l'équation fonctionnelle vérifiée par f on a

$$\mathrm{ord}_0(R_2(X, f(X))) \geq \mathrm{ord}_0(R_1(X, f(X))) - r\,\mathrm{ord}_0(R_0(X, f(X))) \geq (d-r)n_1.$$

Comme d'après $(**)$ $d > r$, il s'ensuit $n_1 \leq d_1(2Md + d_1h_X(Q))$ et l'hypothèse $(*)$ fournit bien la conclusion $n \leq N(2Md + Nh_X(Q))$.

Remarque. Nous n'utiliserons ici que le cas où la hauteur partielle de Q en Y vaut 1. Dans ce cas, l'inégalité $(**)$ devient $\deg_Y(R_2) \leq d_1h_Y(Q) - rd_1 < d_1(1-r)$ et par conséquent $r = 0$. Ceci permet de s'affranchir de l'introduction du polynôme R_2 dans la preuve du théorème mais ne semble toutefois pas permettre de modifier les constantes de l'estimation finale.

3. Lemmes de transcendance. Nous utiliserons la version suivante du lemme de Siegel (voir par exemple [ADR]) :

Lemme 1. *Soit pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ des éléments $a_{i,j}$ de A et H un majorant de leur degré. Si $m < n$, alors il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans A non tous nuls tels que*

$$\sum_{1\leq j\leq n} a_{i,j}x_j = 0 \qquad (1 \leq i \leq m),$$

$$\deg(x_j) \leq \frac{m}{n-m}H + 1 \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Établissons ensuite les propriétés arithmétiques des fonctions qui entrent en jeu.

Lemme 2. *Soit $\alpha(z)$ un élément non nul de $\mathbb{F}_q((1/z))$, a un élément de $\mathbb{F}_q - \{0\}$ et $g(z) = z^{qe} - T$ où e est un entier non nul fixé. Alors pour tout entier naturel $s > 0$, l'expression*

$$F(z) := f(a, \alpha, s)(z) = \sum_{h\geq 0} \frac{a^h \alpha(z)^{q^h}}{[g(z)\ldots g(z^{q^{h-1}})]^s}$$

(avec la convention usuelle qu'un produit vide vaut 1), définit pour $\deg_z(\alpha(z)) < seq/(q-1)$ une série entière dans la région $\deg(z) > 1/(qe)$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(z^q) = (g(z)/a)(F(z) - \alpha(z)).$$

Cette fonction est transcendante sur $K(z)$. De plus si on écrit son développement en $1/z$, $F(z) = \sum_{h\geq -n_0} c_h/z^h$, alors les coefficients c_h sont des éléments de A vérifiants $\deg(c_h) \leq h/(qe)$.

Preuve. Seule la dernière assertion n'est pas établie dans le lemme 2.1 de [D2]. Pour celle-ci, remarquons d'abord que le développement en $1/z$ de $\alpha(z)$ n'admet comme coefficients que des termes nuls ou de degré 0. Ensuite si on note

$$\mathbb{T} = \Big\{\sum_{h\geq 0} \frac{d_h}{z^h} : \text{chaque } d_h \text{ est dans } A \text{ et } \deg(d_h) \leq h/(qe)\Big\},$$

alors cet ensemble est stable par somme et produit fini. Enfin pour tout entier $j \geq 1$, $1/(z^{eq^j} - 1)$ est bien dans $\mathbb{T}$.

Ces deux lemmes vont nous permettre d'obtenir un polynôme auxiliaire dans le lemme qui suit.

Lemme 3. *On note $f(z) = F(1/z)$ où F est la fonction du lemme* 2 *et dans laquelle on suppose de plus* $\deg_z(\alpha(z)) \leq 0$. *Soit M, N, c trois entiers non nuls tels que $2 \leq c \leq N$. Il existe un polynôme $P \in A[X,Y]$ où $0 \leq \deg_X(P) \leq M$, $1 \leq \deg_Y(P) \leq N$, et*

$$0 \leq \deg_T(P) \leq (M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1,$$

vérifiant

$$\mathrm{ord}_0(P(z, f(z))) \geq (N+1)(M+1)/c.$$

Preuve. Écrivons $P(X,Y) = \sum_{0\leq i\leq M,\, 0\leq j\leq N} a_{i,j} X^i Y^j$ où les $a_{i,j}$ sont des inconnues appartenant à A, et grâce à l'hypothèse sur $\alpha(z)$, $f(z) = \sum_{h\geq 0} c_h z^h$ où les c_h sont dans A. Alors,

$$\begin{aligned} P(z, f(z)) &= \sum_{0\leq i\leq M,\, 0\leq j\leq N} a_{i,j} z^i \Big(\sum_{h\geq 0} c_h z^h\Big)^j \\ &= \sum_{0\leq i\leq M,\, 0\leq j\leq N} a_{i,j} z^i \Big(\sum_{h\geq 0} c_h^{(j)} z^h\Big) = \sum_{u\geq 0} b_u z^u \end{aligned}$$

avec $b_u = \sum_{0\leq i\leq M,\, 0\leq j\leq N} \sum_{i+h=u} a_{i,j} c_h^{(j)}$. On veut donc que $b_u = 0$ pour $0 \leq u < (M+1)(N+1)/c$. Nous allons donc appliquer le lemme 1 avec

$$m = [(M+1)(N+1)/c] + 1 \quad \text{et} \quad n = (M+1)(N+1).$$

Pour majorer le degré des coefficients du système linéaire, rappelons que l'ensemble $\mathbb{T}$ de la preuve du lemme 2 est stable par produit et donc que $\deg c_h^{(j)} \leq h/(qe) \leq (M+1)(N+1)/(cqe)$. On vérifie alors qu'on ne peut avoir $\deg_Y(P) = 0$.

Remarque. Les polynômes obtenus dans ce lemme dépendent en fait de c, M, N ; pour alléger les notations on les désignera simplement par P.

On va en déduire une estimation de $P(z, f(z))$ évalué en une puissance assez grande de z :

LEMME 4. *Soit $\alpha(z)$ un élément non nul de $\mathbb{F}_q(z)$ de degré négatif, $P(X,Y)$ un polynôme construit au lemme 3 et w un entier tel que*

$$q^w > (-1/\deg(z))[2(M+1)(N+1) + N^2(s + h(\alpha)/(qe)) + 2].$$

Alors pour tout z de degré strictement inférieur à $-1/(qe)$ on a

$$q^w \deg(z) N[2Mq + N(seq + h(\alpha))] < \deg(P(z^{q^w}, f(z^{q^w})) < q^w \deg(z)(M+1)N/c.$$

Preuve. On a $P(z', f(z')) = \sum_{u \geq u_0} b_u (z')^u$ où u_0 est l'ordre d'annulation en 0 de l'application considérée (c'est un entier puisque f est transcendante). Comme la valeur absolue est ultramétrique on va avoir $|P(z', f(z'))| = |b_{u_0}(z')^{u_0}|$ dès que pour tout entier $u > u_0$, $|b_{u_0}(z')^{u_0}| > |b_u(z')^u|$. Comme les b_u sont dans A, il suffit donc d'avoir $1 > |b_u(z')^{u-u_0}|$; en particulier si $z' = z^{q^w}$ il suffit que $0 > \deg(b_u) + q^w \deg(z)(u - u_0)$ pour avoir l'égalité désirée. Le degré d'un coefficient b_u se majore alors à l'aide du résultat du lemme 3 et de l'expression de b_u trouvée dans ce même lemme par $(M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1 + u/(qe)$. Par conséquent pour avoir notre égalité il suffit que

$$0 > (M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1 + u/(qe) + q^w \deg(z)(u - u_0)\,;$$

on choisit alors $q^w > -1/(qe \deg(z))$ pour n'avoir à vérifier l'inégalité qu'en $u = u_0 + 1$:

$$0 > (M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1 + (u_0+1)/(qe) + q^w \deg(z).$$

Montrons que le résultat va suivre de la majoration de u_0 obtenue au théorème 3. En effet, on a $F(z^q) = (g(z)^s/a)(F(z) - \alpha(z))$ donc $f(z^q) = [(1/z^{qe} - T)^s/a](f(z) - \alpha(1/z))$ du type $Q(z, f(z))$ où $h_X(Q) \leq sqe + h(\alpha)$. Donc le théorème 3 entraîne que $u_0 \leq N[2Mq + N(sqe + h(\alpha))]$. Il suffit donc que

$$0 > (M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1 + (N[2Mq + N(sqe + h(\alpha))] + 1)/(qe) + q^w \deg(z),$$

ce qui est bien réalisé sous la condition énoncée.

Sous cette condition $|P(z^{q^w}, f(z^{q^w}))| = |b_{u_0} z^{q^w u_0}|$ et les encadrements de u_0 obtenus au lemme 3 et théorème 3 donnent le résultat.

À partir de l'équation fonctionnelle $f(z^q) = (g(1/z)^s/a)(f(z) - \alpha(1/z))$ une récurrence nous montre que pour tout entier $k > 0$,

$$f(z^{q^k}) = \Big(f(z) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} A^{(i)}(z)\alpha(1/z^{q^i})\Big)/A^{(k)}(z)$$

où $A^{(i)}(z) = (a/g(1/z)^s)(a/g(1/z^q)^s)\dots(a/g(1/z^{q^{i-1}})^s)$. Pour β dans C on définit alors $\beta_k = (\beta - \sum_{0 \leq i \leq k-1} A^{(i)}(z)\alpha(1/z^{q^i}))/A^{(k)}(z)$, de manière à avoir l'identité

$$\text{(E)} \qquad f(z^{q^k}) - \beta_k = (f(z) - \beta)/A^{(k)}(z).$$

On établit ensuite un lemme d'approximation où on conserve les notations et hypothèses du lemme 4 :

LEMME 5. *Pour tout z dans C de degré strictement inférieur à $-1/(qe)$ on a*

$$\begin{aligned}\deg(P(z^{q^k}, \beta_k) - P(z^{q^k}, f(z^{q^k})))&\\ < \deg(\beta - f(z)) + (M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1&\\ + N\max(0, \deg(\beta) - s(q^k-1)/(q-1)).&\end{aligned}$$

Preuve. Notons que le degré de $A^{(k)}(z)$ est $-sqe\deg(z)(q^k-1)/(q-1)$. Alors, en écrivant $P(X,Y) = \sum_{0\le i\le M,\,0\le j\le N} a_{i,j}X^iY^j$ on a

$$\deg(P(z^{q^k}, \beta_k) - P(z^{q^k}, f(z^{q^k}))) \le \max_{\substack{0\le i\le M\\ 1\le j\le N}} \deg(a_{i,j}(\beta_k^j - f(z^{q^k})^j)).$$

Et la conclusion vient de la majoration

$$\deg(\beta_k^j - f(z^{q^k})^j) \le \deg(\beta_k - f(z^{q^k})) + N\max(0, \deg(\beta_k), \deg(f(z^{q^k}))).$$

Le lemme 2 nous indique (puisque $\deg(z) < -1/(qe)$) que $\deg(f(z^{q^k})) \le 0$, donc (E) implique aussi $\deg(\beta_k) \le \deg(\beta) - s(q^k-1)/(q-1)$. Le résultat découle alors directement des estimations du lemme 3.

L'inégalité de Liouville suivante est classique, une référence en caractéristique p est le lemme 4 de [M] :

LEMME 6. *Soit P un polynôme en n variables à coefficients dans A et $v_1, \ldots, v_n$ des éléments de C contenus dans une extension de K de degré au plus d avec v_i de degré d_i sur K. Alors si $P(v_1, \ldots, v_n)$ n'est pas nul on a*

$$\deg P(v_1, \ldots, v_n) \ge -d\Big(\sum_{1\le i\le n} \deg_{X_i}(P)h(v_i)/d_i + \deg_T(P)\Big).$$

Nous allons l'appliquer aux valeurs $P(z^{q^k}, \beta_k)$ du lemme 5 pour obtenir :

LEMME 7. *Sous les hypothèses des lemmes* 3 *et* 5 *on suppose de plus que β est algébrique de degré d sur K et que $z = T^{-1/e}$. Alors si $P(z^{q^k}, \beta_k)$ n'est pas nul, on a la minoration*

$$\begin{aligned}&\deg(P(z^{q^k}, \beta_k))\\ &\quad\ge -dMq^k - e^2N[h(\beta) + ((q^k-1)/(q-1))(h(\alpha) + sq^2/(q-1))]\\ &\qquad - de(M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1.\end{aligned}$$

Preuve. z^{q^k} et β_k sont dans une extension de K de degré au plus ed. L'élément $P(z^{q^k}, \beta_k)$ est un polynôme de degré au plus Mq^k en z et N en β_k. Le lemme 6 fournit donc

$$\deg(P(z^{q^k}, \beta_k)) \geq -de(Mq^k h(z) + Nh(\beta_k)/d(\beta_k) + \deg_T(P)).$$

Or $h(z) = 1/e$ et le degré de P (qui est aussi sa hauteur) est majoré au lemme 3, reste donc à estimer la hauteur de β_k. Si λ et μ sont deux nombres algébriques, $h(\lambda + \mu) \leq h(\lambda) + h(\mu)$ et $h(\lambda\mu) \leq h(\lambda) + h(\mu)$ (voir par exemple [D1]) ; l'expression $\beta_k = (\beta - \sum_{0\leq i\leq k-1} A^{(i)}(z)\alpha(1/z^{q^i}))/A^{(k)}(z)$ implique alors que

$$h(\beta_k) \leq h(A^{(k)}(z)) + h(\beta) + \sum_{0\leq i\leq k-1} h(A^{(i)}(z)\alpha(1/z^{q^i})),$$

d'où

$$h(\beta_k) \leq \frac{q^k - 1}{q-1}\left(h(\alpha) + s\frac{q^2}{q-1}\right) + h(\beta).$$

On remarque par ailleurs que β_k est de la forme $b\beta + c$ où b est non nul dans K et c est dans $K(T^{1/e})$; par conséquent le degré $d(\beta_k)$ de β_k sur K est au moins d/e. Un calcul donne alors le résultat énoncé.

L'estimation suivante est la dernière étape pour prouver le théorème 1 :

Lemme 8. *On suppose que β est algébrique de degré d sur K et que $z = T^{-1/e}$. Alors si les entiers M, N et k vérifient*

$$M > 8e^3\left(h(\alpha) + s\frac{q^2}{q-1}\right), \qquad N > 4de,$$

$$q^k > \max(e[2(M+1)(N+1) + N^2(s + h(\alpha)/(qe)) + 2], 4de, (q-1)dh(\beta)),$$

on a

$$\deg(\beta - f(z)) \geq -(N+1)[2qM + N(sqe + h(\alpha))](q^k/e + 1).$$

Preuve. On suppose les conditions du lemme 8 réalisées mais que

$$\deg(\beta - f(z)) < -(N+1)[2qM + N(sqe + h(\alpha))](q^k/e + 1).$$

D'après les lemmes 4 et 5, l'inégalité ultramétrique implique (puisque $dh(\beta) \geq \deg(\beta)$)

$$\begin{aligned}&\deg(P(z^{q^k}, \beta_k))\\ &\leq \max\left(\deg(\beta - f(z)) + (M+1)(N+1)/(qec(c-1)) + 1, -\frac{q^k}{ec}N(M+1)\right).\end{aligned}$$

On choisit alors $c = 2$ et l'inégalité précédente se résume à $\deg(P(z^{q^k}, \beta_k)) \leq -\frac{q^k}{2e}N(M+1)$; si $\deg(P(z^{q^k}, \beta_k))$ n'était pas nul, le lemme 7 entraînerait alors

$$\frac{q^k}{2e}N(M+1) \leq dMq^k + e^2N\left(h(\beta) + \frac{q^k-1}{q-1}\left[h(\alpha) + s\frac{q^2}{q-1}\right]\right) + \frac{d}{2q}(M+1)(N+1)+1$$

et on vérifie que cette inégalité est incompatible avec le choix de nos paramètres (notons qu'un choix plus grand de la constante c entraîne à cet endroit une condition plus forte sur la grandeur de N et de M). Alors $P(z^{q^k}, \beta_k) = 0$ et la minoration du lemme 4 jointe au lemme 5 nous donne

$$\begin{aligned}\frac{-q^k}{2e}N(2qM + N(seq + h(\alpha))) &\leq \deg(0 - P(z^{q^k}, f(z^{q^k})) \\ &\leq \frac{-q^k}{2e}(N+1)(2qM + N(seq + h(\alpha))),\end{aligned}$$

qui est la contradiction souhaitée.

Fin de la preuve du théorème 1. En regroupant les conditions imposées à M, N, k (sans oublier qu'il s'agit d'entiers) obtenues au lemme 8 on obtient

$$\begin{aligned}&\deg(\beta - f(z)) \\ &\geq (-4de+2)\left[2q\left(8e^3\left(h(\alpha)+s\frac{q^2}{q-1}\right)+1\right)+(4de+1)(sqe+h(\alpha))\right] \\ &\geq \max\left(\left[2q\left(8e^3\left(h(\alpha)+s\frac{q^2}{q-1}\right)+2\right)(4de+2)+(4de+1)^2(qs+h(\alpha)/e+2q)\right],\right. \\ &\qquad\qquad \left. 4dq, qdh(\beta)/e\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat du théorème 1.

Passons maintenant à la conclusion du théorème 2.

(a) On a ici $e = 1$, $g(z) = z^q - T$ et pour $1 \leq s \leq p-1$, on considère $F(z) = f((-1)^s, 1, s)(z)$. Alors comme $h(1) = 0$ et $f(T^{-1}) = \zeta(s)$, les estimations ci-dessus donnent le résultat.

(b) Pour $s = q-1$, $\zeta(q-1) = \pi_q^{q-1}/b$ où b est dans K (voir [C]). Comme le degré de $\zeta(q-1)$ est nul on a $\deg(b) = (q-1)\deg(\pi_q) = 0$. Il suffit alors de factoriser $\pi_q^{q-1} - \beta^{q-1}$ en remarquant que si $\deg(\pi_q^{q-1} - \beta^{q-1}) < 0$ alors pour tout ξ dans $\mathbb{F}_q - \{0\}$, $\deg(\pi_q - \xi\beta) = 0$.

(c) Ici on laisse $g(z) = z^{qe} - T$. Si α est un élément de $\mathbb{F}_q(T^{1/e})$, on note $\alpha(z)$ l'élément de $\mathbb{F}_q(z)$ obtenu en remplaçant formellement $T^{1/e}$ par z dans l'expression de α. Notons que si le degré dans C de α est négatif, le degré en z de $\alpha(z)$ l'est aussi et sa hauteur est $eh(\alpha)$. Avec $F(z) = f(-1, \alpha(z), 1)(z)$, l'expression du logarithme donnée au paragraphe 1 fournit alors $f(T^{-1/e}) = \mathrm{Log}_{\Phi}(\alpha)$.

4. Appendice. Nous expliquons ici comment passer de l'approximation à la mesure de transcendance dans C. La preuve s'inspire fortement de celle donnée en caractéristique nulle dans [L] et n'est modifiée que par des questions d'inséparabilité.

On rappelle que si $P \in A[X]$, sa hauteur (logarithmique), notée $h(P)$, est le maximum des degrés de ses coefficients.

LEMME 9. *Soit* $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ *dans* $A[X]$ *où* $d = \deg(P) \geq 0$ *est le degré du polynôme* P, *et* $P(X) = a_d \prod_{1\leq i\leq d}(X - \alpha_i)$ *sa décomposition en facteurs irréductibles dans* $C[X]$. *Alors*

$$h(P) = \deg(a_d) + \sum_{1\leq i\leq d} \max(0, \deg(\alpha_i)).$$

Si Q *et* R *sont dans* $A[X]$ *on a donc* $h(QR) = h(Q) + h(R)$.

Preuve. Vient du caractère ultramétrique du degré (voir lemme 1, chapitre 6 de [L].

L'estimation suivante est une version du lemme 4 (chapitre 6 de [L]) dans notre situation :

LEMME 10. *Soit* $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in A[X]$ *de degré* $d \geq 0$ *et de hauteur* $h(P)$ *n'ayant que des racines simples* $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. *Alors pour tout élément* z *de* C *on a*

$$\min_{1\leq i\leq d} \deg(z - \alpha_i) \leq \deg(P(z)) + (3d - 2)h(P).$$

Preuve. Sans perte de généralité supposons que $\min_{1\leq i\leq d}(\deg(z-\alpha_i)) = \deg(z - \alpha_1)$. Pour $i \geq 2$, $z - \alpha_i = z - \alpha_1 + \alpha_1 - \alpha_i$, d'où par ultramétricité $\deg(\alpha_1-\alpha_i) \leq \deg(z-\alpha_i)$ et donc $\deg(P(z)) \geq \deg(z-\alpha_1)+\deg(P'(\alpha_1))$ (où P' est le polynôme dérivé de P). Le résultant $R(P, P')$ de P et de P' peut s'exprimer (par combinaison des lignes) comme le déterminant d'une matrice carrée de taille $2d - 1$ dont la dernière ligne est $(X^{d-2}P', \ldots, X^iP', \ldots, P', X^{d-1}P, \ldots, X^iP, \ldots, P)$ les $d - 1$ premières lignes ne contenant que des coefficients de P et les suivantes que des coefficients de P' (voir si besoin [L, paragraphe 2 du chapitre 5]). Comme le résultant est un élément non nul de A on a, en développant par rapport à la dernière ligne évaluée en z,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \deg(R(P, P')) \\ &\leq (d - 1)\max(0, \deg(z)) + \max(\deg(P(z)), \deg(P'(z))) + (2d - 1)h(P) \end{aligned}$$

(notons en effet que $h(P') \leq h(P)$). En appliquant cette relation en $z = \alpha_1$ et remarquant que $\deg(\alpha_1) \leq h(P)$ on obtient le résultat annoncé.

Le résultat qui suit permet de se ramener aux polynômes irréductibles :

LEMME 11. *Soit* f *un entier naturel et* z *un élément de* C. *On suppose qu'il existe un réel* $C_0 > 0$ *tel que pour tout polynôme* P *irréductible appar-*

tenant à $A[X]-\{0\}$*, de hauteur inférieure à* h *et de degré inférieur à* d*, on ait* $\deg(P(z)) \geq -C_0 d^f(h+d)$*. Alors pour tout polynôme* P *appartenant à* $A[X]-\{0\}$ *(non nécessairement irréductible), de hauteur inférieure à* h *et de degré inférieur à* d*, on a* $\deg(P(z)) \geq -C_0' d^f(h+d)$*.*

Preuve. Soit $P \in A[X]-\{0\}$; écrivons une décomposition de P en produit d'irréductibles de $A[X]$: $P(X)=\prod_{1\leq i\leq s} P_i(X)$. Par hypothèse, en notant h_i (respectivement d_i) la hauteur (respectivement le degré) de P_i on a $\deg(P_i(z)) \geq -C_0 d_i^f(h_i+d_i)$. D'où $\deg(P(z)) \geq -C_0 \sum_{1\leq i\leq s} d_i^f(h_i+d_i)$ et le résultat suit de $\deg P=\sum_{1\leq i\leq s} d_i$ et $h(P)=\sum_{1\leq i\leq s} h_i$.

On peut enfin expliquer comment passer d'une mesure d'approximation par des algébriques à une mesure de transcendance sur K :

LEMME 12. *Soit* d, h *deux réels positifs,* z *un élément de* C*, et* f *un entier naturel fixé non nul. On suppose qu'il existe un réel* $C_1>0$ *tel que pour tout élément* β *de* C *algébrique sur* K *de degré inférieur à* d *et de hauteur inférieure à* h *on ait* $\deg(z-\beta) \geq -C_1 d^f(h+d)$*. Alors il existe un réel* $C_2>0$ *tel que pour tout polynôme* P *de* $A[X]-\{0\}$ *de degré inférieur à* d *et de hauteur inférieure à* h *on a* $\deg(P(z)) \geq -C_2 d^{f+1}(h+d)$*.*

Preuve. D'après le lemme 11 on peut supposer que P est irréductible. Soit s le plus grand entier naturel tel que $P(X) \in A[X^{p^s}]$; on peut donc écrire $P(X)=Q(X^{p^s})$ et Q est irréductible dans $A[X]$. Maintenant Q n'a que des racines simples dans C (par minimalité de s), son degré est inférieur à d/p^s et sa hauteur est celle de P. La conclusion du lemme 10 appliquée à Q fournit donc $\min_{1\leq i\leq d/p^s}(\deg(z-\alpha_i)) \leq \deg(Q(z))+(3d/p^s-2)h$, les α_i étant les racines de Q, d'où $\min_{1\leq i\leq d/p^s}(\deg(z^{p^s}-\alpha_i)) \leq \deg(P(z))+(3d/p^s-2)h$. On applique alors l'hypothèse à $\beta=\alpha^{1/p^s}$ (où α est une racine de Q réalisant le minimum de la quantité à gauche dans la dernière inégalité) ; c'est un nombre algébrique de degré inférieur à d et de hauteur $h(\beta)=h(\alpha)/p^s$, soit $\deg(z-\alpha^{1/p^s}) \geq -C_1 d^f(h(\alpha)/p^s+d)$. Par élévation à la puissance p^s on obtient ainsi $\deg(P(z))+(3d/p^s-2)h \geq -C_1 d^f(h(\alpha)+dp^s)$, et comme $h(\alpha) \leq h/(d/p^s)$ (la hauteur d'un nombre algébrique est celle de son polynôme minimal divisée par le degré de celui-ci), on a le résultat.

Remerciements. L'auteur tient à remercier vivement l'arbitre pour ses observations judicieuses lui ayant permis d'améliorer divers passages de ce texte.

Références

[ADR] M. Ably, L. Denis et F. Recher, *Transcendance de l'invariant modulaire en caractéristique finie*, Math. Z. 231 (1999), 75–89.

[B] P. G. Becker, *Algebraic independence of the values of certain series by Mahler's method*, Monatsh. Math. 114 (1992), 183–198.

[Bo] V. Bosser, *Minorations de formes linéaires de logarithmes pour les modules de Drinfeld*, J. Number Theory 75 (1999), 279–323.

[Bu] P. Bundschuh, *Transzendensmasse in Körper Laurentreihen*, J. Reine Angew. Math. 299–300 (1978), 411–432.

[C] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. 1 (1935), 137–168.

[DM] B. de Mathan, *Irrationality measures and transcendence in positice characteristic*, J. Number Theory 54 (1995), 93–112.

[D1] L. Denis, *Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld*, Math. Ann. 294 (1992), 213–223.

[D2] —, *Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique p*, Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006), 461–470.

[L] S. Lang, *Introduction to Transcendental Numbers*, Addison-Wesley, 1966.

[M] W. Miller, *Transcendence measures by a method of Mahler*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 32 (1992), 68–78.

Laurent Denis
UFR de Mathématiques
Université des Sciences et Technique de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: Laurent.Denis@math.univ-lille1.fr

Reçu le 16.12.2008
et révisé le 10.4.2010 (5962)