ACTA ARITHMETICA
114.2 (2004)

Sur la proximité des nombres puissants

par

JEAN-MARIE DE KONINCK (Québec) et FLORIAN LUCA (Morelia)

1. Introduction. On dit qu'un entier $n > 1$ est un *nombre puissant* si pour chaque nombre premier p qui divise n, on a $p^2 \mid n$. La distribution des nombres puissants a été largement étudiée. En particulier, on sait que si $S(N)$ désigne le nombre de nombres puissants qui n'excèdent pas N, alors

$$S(N) = C_1\sqrt{N} + O(N^{1/3}), \qquad C_1 = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \approx 2.1732, \tag{1}$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann. Des estimations encore plus précises sont connues (voir, par exemple, le théorème 14.4 du livre de Ivić [1]). Comme la constante C_1 apparaissant dans (1) est supérieure à 2, il existe une infinité d'entiers positifs n tels que l'intervalle $]n^2, (n+1)^2[$ admet au moins deux nombres puissants.

Nous démontrons ici que quel que soit l'entier positif k, il existe une infinité d'entiers positifs n tels que l'intervalle $]n^2, (n+1)^2[$ contient au moins k nombres puissants. Nous établissons également que l'ensemble des entiers positifs n, dont l'intervalle $]n^2, (n+1)^2[$ correspondant ne contient aucun nombre puissant, admet une densité, et nous calculons sa valeur.

Dans cet article, nous utilisons les symboles de Landau O et o de même que le symbole de Vinogradov $\ll$ avec leurs significations habituelles.

2. Les principaux résultats

THÉORÈME 1. *Il existe une infinité d'entiers positifs n tels que l'intervalle $]n^2, (n+1)^2[$ contient plus de*

$$\frac{9}{20}\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/3}$$

nombres puissants.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11A51, 11J13.

Travail de J.-M. De Koninck soutenu en partie par une subvention du CRSNG.

Travail de F. Luca soutenu en partie par les projets SEP-CONACYT 37259-E et 37260-E.

Théorème 2. *Si $V(N)$ désigne le nombre d'entiers positifs $n \le N$ tels que l'intervalle $]n^2,(n+1)^2[$ ne contient aucun nombre puissant, alors*

$$V(N) = C_2 N + O\left(\frac{N}{\sqrt{\log\log N}}\right),$$

où

$$C_2 = \prod_{m=2}^{\infty}\left(1 - \frac{\mu^2(m)}{m^{3/2}}\right) \approx 0.275.$$

3. La preuve du théorème 1. Soit k un entier positif grand mais fixe et $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}$ des nombres irrationnels positifs que l'on choisira plus tard. Selon le théorème de Dirichlet relatif aux approximations diophantiennes simultanées, pour tout nombre réel $Q > 1$, il existe un entier positif $q \le Q$ et des entiers $p_1,\ldots,p_{2k}$ tels que les inégalités

$$\left|\alpha_j - \frac{p_j}{q}\right| \le \frac{1}{qQ^{1/2k}} \qquad (j = 1,\ldots,2k) \tag{2}$$

sont satisfaites. Soit par ailleurs $q_1 < \ldots < q_n < \ldots$ la suite infinie d'entiers positifs telle que pour chaque $n \ge 1$, il existe des entiers $p_{n,1},\ldots,p_{n,2k}$ tels que les inégalités

$$\left|\alpha_j - \frac{p_{n,j}}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n^{1+1/2k}} \qquad (j = 1,\ldots,2k) \tag{3}$$

sont satisfaites. Le fait que $(q_n)_{n\ge 1}$ est une suite infinie découle de la construction des inégalités (2) en tenant compte que les nombres α_j, pour $j = 1,\ldots,2k$, sont irrationnels. Supposons maintenant que $c_1 \ge 1$ est une constante telle que les inégalités

$$\left|\alpha_j - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{c_1 q^2} \qquad (j = 1,\ldots,2k) \tag{4}$$

sont satisfaites pour tous les entiers p et q avec $q \ne 0$. Tel est le cas par exemple lorsque les réduites de la fraction continue de chaque α_j sont bornées par $c_1 - 1$.

En utilisant (4), on obtient aisément que pour $n \ge 1$, en posant $Q_n = (c_1 q_n)^{4k}$ et en utilisant (2), il existe des entiers $p_1,\ldots,p_{2k},q$ avec $1 \le q \le Q_n$ pour lesquels les inégalités (2) sont vérifiées avec Q_n à la place de Q. On a ainsi établi que les inégalités

$$\left|\alpha_j - \frac{p_j}{q}\right| \le \frac{1}{qQ_n^{1/2k}} \le \frac{1}{Q_n^{1/2k}} = \frac{1}{(c_1 q_n)^2} \le \frac{1}{c_1 q_l^2} < \left|\alpha_j - \frac{p_{l,j}}{q_l}\right|$$

tiennent pour $j = 1,\ldots,2k$ et $l = 1,\ldots,n$, et en particulier que $q \ne q_l$ pour $l = 1,\ldots,n$. Ainsi, $q \ge q_{n+1}$, et on a donc démontré que

$$q_{n+1} \le (c_1 q_n)^{4k} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Pour chaque entier $j \geq 1$, soit m_j le j-ième entier positif tel que m_j^2+1 est libre de carrés, et pour $j=1,\ldots,2k$, posons $d_j = m_j^2+1$. Avec un tel choix des d_j, il est alors clair que les nombres $d_j p_j^2$, $j=1,\ldots,2k$, sont tous distincts. De plus, d'après un résultat de Ricci [3], étant donné un polynôme primitif irréductible $f(x)$ de degré $r \geq 2$ à coefficients entiers, l'ensemble $\{m \geq 1 : p^i \mid f(m) \Rightarrow i < r\}$ est de densité positive. En particulier, l'ensemble $\{m \geq 1 : \mu^2(m^2+1)=1\}$ est de densité positive, et il est facile de voir que cette densité est égale à

$$\prod_{p \equiv 1 \bmod 4}\left(1-\frac{2}{p^2}\right) \approx 0.89 > \frac{1}{2},$$

de sorte que si j est suffisamment grand, $d_j = m_j^2+1 < (2j)^2+1$, auquel cas $d_j < 4j^2$. Il s'ensuit qu'en posant $D := \prod_{j=1}^{2k} d_j$, on a $D < (16k^2)^{2k}$.

Pour chaque $j=1,\ldots,2k$, posons maintenant $\alpha_j = 1/\sqrt{d_j}$. Ainsi choisi, chaque nombre α_j est irrationnel, et son développement en fraction continue est $\alpha_j = [0, m_j, 2m_j, 2m_j, \ldots]$. Cela veut dire que l'on doit prendre c_1 supérieur à $\max\{2m_j : j=1,2,\ldots,2k\}$. Or, comme $m_j < 2j$ pour j suffisamment grand, il s'avère qu'en choisissant $c_1 = 8k$, l'inégalité (4) est satisfaite.

Soit maintenant $q = q_m$ pour un certain m que l'on choisira plus tard, et soit $p_j = p_{m,j}$ pour chaque entier $j=1,\ldots,2k$. Fixons j. L'inégalité

$$\left|\alpha_j - \frac{p_j}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2k}}$$

entraîne que

$$|q - \sqrt{d_j}\,p_j| \leq \sqrt{d_j}\,q^{-1/2k}. \tag{5}$$

Supposons que

$$q > d_j^k. \tag{6}$$

Dans ce cas, l'inégalité (5) implique que $\sqrt{d_j}\,|p_j| < q+1$, et donc que $|q+\sqrt{d_j}\,p_j| < 2q+1 < 3q$, ce qui entraîne que

$$|q^2 - d_j p_j^2| = |q-\sqrt{d_j}\,p_j| \cdot |q+\sqrt{d_j}\,p_j| < 3\sqrt{d_j}\,q^{1-1/2k}. \tag{7}$$

Puisque, pour $j=1,\ldots,2k$, $\sqrt{d_j} < (16k^2+1)^{1/2}$, on a alors les inégalités

$$|(Dq)^2 - d_j D^2 p_j^2| < 3D^2(16k^2+1)^{1/2} q^{1-1/2k} \qquad (j=1,\ldots,2k). \tag{8}$$

Posons maintenant $n = Dq$ et choisissons k de telle manière que

$$3D^2(16k^2+1)^{1/2} q^{1-1/2k} < 2(n-1)+1 = 2Dq-1. \tag{9}$$

Ainsi, afin que (9) tienne, il suffit de choisir q de telle sorte que

$$3D(16k^2+1)^{1/2} q^{1-1/2k} < q,$$

ce qui revient à écrire

$$q > (3(16k^2+1)^{1/2}D)^{2k}. \tag{10}$$

Observons que (10) entraîne (6).

Puisque les nombres $d_jD^2p_j^2$, $j = 1,\ldots,2k$, sont tous distincts (ceci découlant du fait que les $d_jp_j^2$ sont distincts), il découle des inégalités (8) et (9) qu'au moins k des nombres $d_jD^2p_j^2$ appartiennent soit à l'intervalle $](n-1)^2, n^2[$, soit à l'intervalle $]n^2,(n+1)^2[$, et il est clair par ailleurs qu'ils sont tous des nombres puissants. Ainsi, il suffit maintenant de choisir $q = q_m$ comme étant le plus petit nombre satisfaisant l'inégalité (10). Un tel nombre va aussi satisfaire les inégalités

$$\begin{aligned} q &< (c_1(3(16k^2+1)^{1/2}D)^{2k})^{4k} < \exp\{4k\log(c_1(3\sqrt{16k^2+1}\,(16k^2)^{2k})^{2k})\} \\ &\le \exp\{8k^2\cdot 2k\cdot(1+o(1))\cdot\log(16k^2)\} = \exp\{32(1+o(1))k^3\log k\}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $(16k^2+1)^{1/2} < c_1 = 8k$.

Comme $qD = n$ et comme

$$D < (16k^2)^{2k} = \exp\{2k\log(16k^2)\} = \exp\{4k(1+o(1))\log k\},$$

on a

$$n = qD < \exp\{32(1+o(1))k^3\log k\}.$$

On obtient ainsi

$$32(1+o(1))k^3\log k \ge \log n,$$

de sorte que

$$\frac{32}{3}\,k^3\log(k^3) \ge (1+o(1))\log n,$$

ce qui montre que

$$k \ge \left(\frac{3}{32}\right)^{1/3}(1+o(1))\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/3},$$

laquelle inégalité entraîne certainement que

$$k \ge \frac{9}{20}\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/3},$$

pour n suffisamment grand, puisque $(3/32)^{1/3} > 9/20$. Voilà qui complète la preuve du théorème 1.

4. La preuve du théorème 2. Soit N un grand nombre réel positif. Soit $n \le N$ et supposons que l'intervalle $]n^2,(n+1)^2[$ contient effectivement un nombre puissant. On peut alors écrire ce nombre puissant de manière unique sous la forme m^3l^2, où m est un nombre libre de carrés. Il est clair qu'on a alors

$$n = \lfloor m\sqrt{m}\cdot l\rfloor, \tag{11}$$

alors que réciproquement si (11) est satisfaite pour un certain nombre libre de carrés m et un certain entier positif l, le nombre puissant correspondant m^3l^2 est situé dans l'intervalle $]n^2,(n+1)^2[$. C'est pourquoi il suffit de compter le nombre de nombres $n \le N$ satisfaisant (11) pour un certain nombre m libre de carrés et un certain entier positif l.

Pour chaque nombre m libre de carrés, posons

$$\mathcal{A}_m = \{\lfloor m\sqrt{m}\cdot l\rfloor \le N : l \ge 1\}.$$

Il nous faut estimer la cardinalité de l'ensemble

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\substack{m\ge 1\\ \mu(m)\neq 0}} \mathcal{A}_m. \tag{12}$$

Soit Y un paramètre réel qui tend vers l'infini avec N, d'une manière que l'on indiquera plus tard. Observons que

$$\#\mathcal{A}_m \ll \frac{N}{m^{3/2}},$$

et ainsi que

$$\# \bigcup_{m>Y} \mathcal{A}_m \le \sum_{m>Y} \#\mathcal{A}_m \ll N \sum_{m>Y} \frac{1}{m^{3/2}} \ll N \int_Y^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} \ll \frac{N}{Y^{1/2}}. \tag{13}$$

Pour $m \le Y$, en utilisant le principe d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$\# \bigcup_{\substack{1<m\le Y\\ \mu(m)\neq 0}} \mathcal{A}_m = \sum_{j\ge 1} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{1<m_1<\ldots<m_j\le Y\\ \mu(m_i)\neq 0,\, i=1,\ldots,j}} \# \bigcap_{i=1}^{j} \mathcal{A}_{m_i}. \tag{14}$$

Fixons j et soit $1 < m_1 < \ldots < m_j \le Y$ des nombres libres de carrés. Posons $\alpha_i = m_i^{3/2}$ et $\beta_i = 1/\alpha_i$ pour $i = 1,\ldots,j$. Soit $n \in \bigcap_{i=1}^{j} \mathcal{A}_{m_i}$. Il s'ensuit qu'il existe des entiers l_i, pour $i = 1,\ldots,j$, tels que les inégalités $n < \alpha_i l_i < n+1$ sont satisfaites pour chaque $i = 1,\ldots,j$. Or, ces dernières inégalités sont équivalentes au fait que les inégalités $n\beta_i < l_i < n\beta_i + \beta_i$ tiennent aussi pour $i = 1,\ldots,j$. Il s'ensuit que $\{n\beta_i\} \in I_i$ pour $i = 1,\ldots,j$, où pour chaque nombre i, l'expression I_i désigne l'intervalle $(1-\beta_i, 1)$. Ici, $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. Observons que la longueur de I_i est $|I_i| = \beta_i$ pour chaque $i = 1,\ldots,j$.

Il est clair que les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_j$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En fait, les nombres 1 et $m^{-3/2}$, pour chaque entier $m > 1$ libre de carrés, sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et, en réalité, forment une base pour le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{p} : p \text{ premier}]$, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Pour chaque entier positif $n \le N$, posons $\mathbf{x}_n := (\{n\beta_1\}, \ldots, \{n\beta_j\})$. Il découle de la théorie de la distribution uniforme des suites multidimensionnelles modulo 1 (voir le chapitre 2 de Kuipers et Niederreiter [2]) que

$$\bigcap_{i=1}^{j} \mathcal{A}_{m_i} = N \prod_{i=1}^{j} \beta_i + o(N), \tag{15}$$

où le terme d'erreur dans (15) est

$$\leq N D_{\beta_1,\dots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N), \tag{16}$$

la quantité $D_{\beta_1,\dots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)$ désignant la discrépance de nos suites (de dimensions j) $(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)$. Cette discrépance satisfait l'inégalité

$$\begin{aligned}(17)\quad & D_{\beta_1,\dots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N) \\ &\leq 2j^2 3^{j+1}\left(\frac{1}{M} + \sum_{0<\|\mathbf{h}\|\leq M} \frac{1}{r(\mathbf{h})}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\langle \mathbf{h},\mathbf{x}_n\rangle}\right|\right).\end{aligned}$$

Dans cette dernière inégalité, les notations sont celles utilisées dans le livre de Kuipers et Niederreiter [2], et comme tel, $\mathbf{h} = (h_1,\dots,h_j)$ est un point à coordonnées entières dans $\mathbb{R}^j$, $\|\mathbf{h}\| = \max\{|h_i| : i = 1,\dots,j\}$,

$$r(\mathbf{h}) = \prod_{i=1}^{j} \max\{|h_i|, 1\},$$

et $\langle \mathbf{h},\mathbf{x}_n\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^j$. Dans l'inégalité (17), M est un entier positif arbitraire, lequel est habituellement choisi de telle manière qu'il minimise la borne supérieure donnée par le membre de droite de (17) sur $D_{\beta_1,\dots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)$.

En faisant appel à (13), (14) et (16), on obtient alors

$$\begin{aligned}(18)\quad V(N) &= N - \#\bigcup \mathcal{A}_m \\ &= N - N\sum_{j\geq 1}\sum_{\substack{1<m_1<\dots<m_j\leq Y \\ \mu(m_i)\neq 0,\, i=1,\dots,j}} (-1)^{j-1}\prod_{i=1}^{j} m_i^{-3/2} + O\left(\frac{N}{Y^{1/2}}\right) \\ &\quad + O\Big(\sum_{j\geq 1}\sum_{\substack{1<m_1<\dots<m_j\leq Y \\ \mu(m_i)\neq 0,\, i=1,\dots,j}} N D_{\beta_1,\dots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)\Big) \\ &= C_2 N + O\Big(\sum_{j\geq 1}\sum_{\substack{1<m_1<\dots<m_j,\, m_j>Y \\ \mu(m_i)\neq 0,\, i=1,\dots,j}} \prod_{i=1}^{j} m_i^{-3/2}\Big) + O\left(\frac{N}{Y^{1/2}}\right) \\ &\quad + O\Big(\sum_{j\geq 1}\sum_{\substack{1<m_1<\dots<m_j\leq Y \\ \mu(m_i)\neq 0,\, i=1,\dots,j}} N D_{\beta_1,\dots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)\Big).\end{aligned}$$

Du fait que le produit infini

$$P = \prod_{m\geq 1}\left(1 + \frac{\mu^2(m)}{m^{3/2}}\right)$$

converge, on voit aisément que

$$\sum_{j\ge 1}\ \sum_{\substack{1<m_1<\ldots<m_j,\, m_j>Y\\ \mu(m_i)\ne 0,\, i=1,\ldots,j}}\ \prod_{i=1}^{j} m_i^{3/2} \le P\sum_{m\ge Y} m^{-3/2} \ll \int_Y^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} \ll \frac{1}{Y^{1/2}}, \tag{19}$$

de sorte qu'en comparant (19) avec (18), on obtient

$$\begin{aligned} N-\#\bigcup \mathcal{A}_m &= C_2N + O\Big(\frac{N}{Y^{1/2}}\Big) \\ &\quad + O\Big(\sum_{j\ge 1}\ \sum_{\substack{1<m_1<\ldots<m_j\le Y\\ \mu(m_i)\ne 0,\, i=1,\ldots,j}} ND_{\beta_1,\ldots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N)\Big). \end{aligned} \tag{20}$$

Nous estimons maintenant les discrépances $D_{\beta_1,\ldots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N)$. Soit $\mathbb{K}_Y = \mathbb{Q}[\sqrt{p} : p\le Y,$ premier$]$. Le degré $[\mathbb{K}_Y:\mathbb{Q}]$ est $2^{\pi(Y)} < 2^{Y-2}$. Soit $D=\prod_{p<Y} p^3 < e^{4Y}/2$. Comme

$$D\sum_{1<m_i\le Y} \beta_i \le D(\zeta(3/2)-1) < 2D < e^{4Y},$$

et comme chacun des nombres $D\beta_i$ est un entier algébrique, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} r(\mathbf{h})^{2^Y-2}\langle h_1\beta_1+\ldots+h_j\beta_j\rangle &\ge r(\mathbf{h})^{[\mathbb{K}_Y:\mathbb{Q}]-1}\langle h_1\beta_1+\ldots+h_j\beta_j\rangle \\ &\ge (2D)^{-[\mathbb{K}_Y:\mathbb{Q}]} \ge e^{-Y2^Y}. \end{aligned}$$

Il découle alors immédiatement que pour un point à coordonnées entières $\mathbf{n}$ dans $\mathbb{R}^j$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{h}\ne 0\\ |h_i|\le n_i}} \langle h_1\beta_1+\ldots+h_j\beta_j\rangle^{-1} &\le e^{Y2^Y}\prod_{i=1}^{j}\Big(\sum_{|h|\le n_i}\max\{|h|^{2^Y-2},1\}\Big) \\ &\le e^{Y2^Y}\cdot 2^j\cdot\prod_{i=1}^{j} n_i^{2^Y-1} < e^{Y2^{Y+1}} r(\mathbf{n})^{2^Y-1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned} &\sum_{0<\|\mathbf{h}\|\le M} \frac{1}{r(\mathbf{h})}\bigg|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\langle \mathbf{h},\mathbf{x}_n\rangle}\bigg| \\ &\quad\ll \frac{1}{N}\sum_{0<\|\mathbf{h}\|<M} r^{-1}(\mathbf{h})\langle h_1\beta_1+\ldots+h_j\beta_j\rangle^{-1} \\ &\quad\ll \frac{1}{N}\sum_{n_1,\ldots,n_j=1}^{M} f(n_1,\ldots,n_j) \sum_{\substack{\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_j)\\ |h_i|\le n_i}} \langle h_1\beta_1+\ldots+h_j\beta_j\rangle^{-1} \\ &\quad\ll e^{Y2^{Y+1}} M^{2^Y-1}, \end{aligned} \tag{21}$$

où pour chaque entier $n \le M$, on a posé $f(n_1,\dots,n_j)=\prod_{i=1}^{j} g(n_i)$, avec

$$g(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(n+1)} & \text{si } n<M,\\ \dfrac{1}{M} & \text{si } n=M\end{cases}$$

(voir à cet effet l'exercice #3.15 de Kuipers et Niederreiter [2]). En additonnant les inégalités (21) pour tous les j et $1<m_1<\ldots<m_j\le Y$, avec m_i libres de carrés, et en faisant appel à l'inégalité (17), on obtient

$$\sum_{j\ge1}\sum_{\substack{1<m_1<\ldots<m_j\le Y\\ \mu(m_i)\ne0,\, i=1,\ldots,j}} ND_{\beta_1,\ldots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N)$$
$$\ll 2^{\pi(Y)}\cdot 2Y^2\cdot 3^{Y+1}(N/M+e^{Y2^{Y+1}}M^{2^Y-1})\ll e^{Y2^{Y+2}}(N/M+M^{2^Y-1}).$$

En posant maintenant $M=\lfloor N^{1/2^Y}\rfloor$, on peut alors écrire que

$$\sum_{j\ge1}\sum_{\substack{1<m_1<\ldots<m_j\le Y\\ \mu(m_i)\ne0,\, i=1,\ldots,j}} ND_{\beta_1,\ldots,\beta_j,N}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N)\ll e^{Y2^{Y+2}}N^{1-1/2^Y}. \tag{22}$$

En substituant (22) dans (20), on conclut que

$$V(N)=C_2N+O\left(\frac{N}{Y^{1/2}}+e^{Y2^{Y+2}}\frac{N}{N^{1/2^Y}}\right). \tag{23}$$

Nous pouvons maintenant choisir Y en le définissant implicitement par l'équation

$$\frac{N}{Y^{1/2}}=e^{Y2^{Y+2}}\frac{N}{N^{1/2^Y}},$$

laquelle est équivalente à

$$N^{1/2^Y}=e^{Y2^{Y+2}}Y^{1/2},$$

ou encore

$$\frac{\log N}{2^Y}=Y2^{Y+2}+\frac12\log Y,$$

ce qui entraîne que

$$4Y4^Y(1+o(1))=\log N,$$

auquel cas

$$Y(1+o(1))\log 4=\log\log N,$$

de sorte que $Y=C_3(1+o(1))\log\log N$ avec $C_3=(\log 4)^{-1}$. En substituant cette valeur de Y dans (23), le théorème est démontré.

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier Igor Shparlinski pour une observation fort précieuse qui a permis de compléter la preuve du théorème 1.

Références

[1] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications*, Dover, Mineola, NY, 2003.
[2] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York, 1974.
[3] G. Ricci, *Ricerche aritmetiche sui polinomi*, Rend. Circ. Mat. Palermo 57 (1933), 433–475.

Département de mathématiques
Université Laval
Québec G1K 7P4, Canada
E-mail: jmdk@mat.ulaval.ca

Mathematical Institute
UNAM
Ap. Postal 61-3 (Xangari), CP 58 089
Morelia, Michoacán, Mexico
E-mail: fluca@matmor.unam.mx

Reçu le 29.9.2003 (4634)