ACTA ARITHMETICA
165.1 (2014)

Théorème des nombres premiers pour les fonctions digitales

par

Bruno Martin (Calais),
Christian Mauduit (Marseille and Rio de Janeiro)
et Joël Rivat (Marseille)

1. Introduction. Dans tout cet article, q désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2. Rappelons que tout entier strictement positif n admet un unique développement q-adique de la forme

$$n=\sum_{j=0}^{\nu} n_j q^j, \qquad 0\le n_j\le q-1,\ n_\nu\ge 1. \tag{1}$$

Pour $n=0$, on convient de poser $\nu=0$ et $n_0=0$. Conformément à l'usage, pour tout $0\le k\le q-1$ on désigne par $|\cdot|_k$ la fonction comptant le nombre d'apparitions du chiffre k dans le développement en base q, soit

$$|n|_k=\#\{0\le j\le\nu \mid n_j=k\}.$$

En particulier la fonction somme des chiffres est définie pour tout nombre entier positif n par

$$\mathrm{s}(n)=\sum_{j=0}^{\nu} n_j=\sum_{0\le k<q} k|n|_k.$$

Dans la suite, la lettre p désigne toujours un nombre premier, nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}(x)=\exp(2i\pi x)$, $\|x\|$ la distance de x à l'entier relatif le plus proche, $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Enfin nous désignons par Λ la *fonction de von Mangoldt* définie pour tout nombre entier positif n par

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & \text{si } n=p^\ell \text{ avec } p \text{ premier et } \ell\ge 1,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

par φ la fonction indicatrice d'Euler et par τ la fonction qui compte le nombre de diviseurs.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 11A41, 11A63, 11L20.
Key words and phrases: prime numbers, exponential sums, digital functions.

DOI: 10.4064/aa165-1-2

Afin de détecter les congruences nous utiliserons la relation d'orthogonalité classique : pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}\Big(\frac{j(a-b)}{m}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv b \bmod m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Même lorsque ce n'est pas mentionné, les constantes implicites dans les $\ll$ et O peuvent dépendre de la base de numération q.

1.1. Fonctions q-additives et fonctions digitales. La notion de fonction q-*additive* a été introduite indépendamment par Bellman et Shapiro [3] et Gelfond [21]. Il s'agit des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui vérifient, pour tout $(a,b,j) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \le b < q^j$,

$$f(aq^j + b) = f(aq^j) + f(b).$$

Une fonction q-additive vérifie donc nécessairement $f(0) = 0$. Lorsque l'on a de plus $f(aq^j) = f(a)$ pour tout $(a,j) \in \mathbb{N}^2$ on dit que la fonction f est *fortement* q-*additive*. La fonction somme de chiffres appartient à la classe des fonctions fortement q-additives à valeurs entières. Si f est fortement q-additive alors on a, pour tout nombre entier positif n vérifiant (1),

$$f\Big(\sum_{0\le j\le \nu} n_j q^j\Big) = \sum_{0\le j\le\nu} f(n_j) = \sum_{1\le k<q} f(k)|n|_k, \tag{3}$$

de sorte que f est complètement déterminée par ses valeurs $f(k)$ pour $1 \le k < q$. Réciproquement, toute fonction de la forme $f(n) = \sum_{1\le k<q} \alpha_k |n|_k$ est fortement q-additive. Par contre on remarquera que la fonction $|\cdot|_0$ n'est pas fortement q-additive.

Bassily et Kátai ont étudié dans [27] et [2] la distribution limite des fonctions q-additives dans l'ensemble des nombres premiers. On en déduit par exemple que lorsque f est fortement q-additive alors

$$\frac{1}{\pi(x)}\#\Big\{p < x \;\Big|\; f(p) \le \mu_f \log_q x + y\sqrt{\sigma_f^2 \log_q x}\Big\} = \Phi(y) + o(1)$$

où $\mu_f = \frac{1}{q}\sum_{0\le k<q} f(k)$, $\sigma_f^2 = \frac{1}{q}\sum_{0\le k<q} f^2(k) - \mu_f^2$ et Φ désigne la distribution normale.

Notation 1. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définies pour tout nombre entier positif n par

$$f(n) = \sum_{0\le k<q} \alpha_k |n|_k, \tag{4}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ sont des nombres réels.

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble d'entiers vérifiant $\mathrm{card}\{n \le x \mid n \in \mathcal{E}\} \gg_\theta x^\theta$ pour tout $\theta < 1$, Copeland et Erdős [12] ont montré en 1946 la normalité du nombre réel dont l'écriture en base q est formée de 0 suivi de la concaténation dans l'ordre croissant des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ écrits en base q. Il découle en particulier de leur théorème que si $f \in \mathcal{F}$ alors

$$\sum_{p \leq x} f(p) = \frac{x}{q \log q} \sum_{0 \leq k < q} \alpha_k + o(x).$$

Drmota et Mauduit ont étudié dans [15] certaines propriétés statistiques de ces fonctions, appelées *fonctions digitales*, et l'objet de ce travail est d'étudier les sommes d'exponentielles le long des nombres premiers associées à ces fonctions.

1.2. Propriétés digitales des nombres premiers. On ne connaît pas d'algorithme simple permettant de savoir si un nombre entier est premier à partir de la donnée de son écriture en base q. Minsky et Papert ont d'ailleurs montré dans [33] que l'ensemble des nombres premiers n'est reconnaissable par aucun q-automate fini (pour cette notion, on pourra consulter [1] ou [17]). Cobham a présenté dans [10] plusieurs preuves alternatives de ce résultat, qui a été généralisé par Hartmanis et Shank dans [25] et Schützenberger dans [35] en montrant qu'aucun ensemble infini de nombres premiers n'est reconnaissable par un q-automate fini (ni même par un automate à pile), par Mauduit dans [29] en montrant que l'ensemble des nombres premiers n'est engendré par aucun morphisme sur un alphabet fini et par Cassaigne et Le Gonidec dans [9] en montrant que l'ensemble des nombres premiers n'est reconnaissable par aucun q-automate infini (voir [30] pour cette dernière notion).

Il existe peu de résultats dans la littérature concernant les propriétés des chiffres des nombres premiers. Le théorème de Lejeune Dirichlet (voir [28, pp. 315–342] ou [14, p. 34]) concernant la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques peut être considéré comme le premier résultat dans ce domaine. Il permet de montrer, comme l'a remarqué Sierpiński, que pour toute suite finie de chiffres $a_1, \ldots, a_m$ et $b_1, \ldots, b_n$ telle que $\mathrm{pgcd}(b_n, q) = 1$, il existe une infinité de nombres premiers dont les m premiers chiffres sont successivement $a_1, \ldots, a_m$ et les n derniers chiffres successivement $b_1, \ldots, b_n$ ([36] contient une preuve de ce théorème dans le cas $q = 10$ et attribue à une remarque de Knapowski le cas général). Harman et Kátai ont étendu dans [24] ce résultat à des nombres premiers qui possèdent certains chiffres librement préassignés, améliorant des résultats antérieurs dus à Kátai, Harman et Wolke [27, 23, 37] : pour tout nombre entier $t > 0$ fixé, pour tous $0 \leq j_1 < \cdots < j_t \leq k$ et pour tout $(b_1, \ldots, b_t) \in \{0, \ldots, q-1\}^t$ vérifiant $(b_1, q) = 1$ si $j_1 = 0$ et $b_t \neq 0$ si $j_t = k$, pour tout $c > 0$ fixé et pour tout nombre entier t vérifiant

$$1 \leq t \leq c\sqrt{k}/\log k, \tag{5}$$

on a, pour $N = q^k$, $k \to \infty$,

$$\operatorname{card}\Big\{p < N \,\Big|\, p = \sum_{j=0}^{k} p_j q^j,\ (p_{j_1}, \ldots, p_{j_t}) = (b_1, \ldots, b_t)\Big\}$$
$$\sim \begin{cases} \dfrac{1}{q^t}\,\dfrac{N}{\log N} & \text{si } j_1 > 0, \\ \dfrac{1}{q^t}\,\dfrac{q}{\varphi(q)}\,\dfrac{N}{\log N} & \text{si } j_1 = 0. \end{cases}$$

Dans un travail récent [6, 7], Bourgain a amélioré lorsque $q = 2$ de manière quasi-optimale ce résultat en montrant qu'il restait valable pour tout nombre entier t vérifiant $1 \le t \le ck$ où c est une constante fixée.

Le théorème suivant démontré par Mauduit et Rivat dans [32] a permis de répondre à une question posée en 1968 par Gelfond dans [21] concernant la somme des chiffres des nombres premiers (voir [19, 18, 13] pour une réponse partielle dans le cas des nombres presque premiers, c'est-à-dire ayant au plus r facteurs premiers, où $r \ge 2$ est un nombre entier fixé).

Théorème A. *Pour $q \ge 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(q-1)\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il existe $\sigma_q(\alpha) > 0$ tel que pour $x \ge 1$, on a*

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(\alpha\, \mathrm{s}(n)) \ll_{q,\alpha} x^{1-\sigma_q(\alpha)}. \tag{6}$$

Un raffinement dans la preuve de [32] permet de s'affranchir de la dépendance implicite en α et de fournir une forme explicite pour l'exposant $\sigma_q(\alpha)$: c'est l'objet du théorème 2.1 de [16], qui permet de choisir $\sigma_q(\alpha) = c\|(q-1)\alpha\|^2$ où c est une constante strictement positive qui ne dépend que de q.

Lorsque $q = 2$, pour toute partie E de $\mathbb{N}$, Bourgain a généralisé dans [4] l'estimation (6) au cas où la fonction s est remplacée par la fonction s_E définie pour tout nombre entier positif n par $s_E(n) = \sum_{i \in E} n_i$ et qui apparaît de manière naturelle dans le cadre de l'étude de la transformation de Fourier–Walsh (voir aussi [22] pour le cas où le cardinal de l'ensemble E est négligeable par rapport à $\sqrt{\log x}$, et [5, 8] pour l'étude de la distribution de ces coefficients de Fourier–Walsh).

2. Résultats. Il est assez naturel de rechercher une estimation similaire à (6) pour une fonction fortement q-additive arbitraire. Nous établissons un tel résultat en traitant plus généralement la somme d'exponentielles

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(f(n) + \beta n) \qquad (x \ge 1,\ \beta \in \mathbb{R}) \tag{7}$$

où f est une fonction digitale.

Pour estimer (7) nous allons distinguer deux cas selon que la suite α_0, α_1, …, α_{q-1} est une progression arithmétique modulo 1 ou non :

Cas 1 : la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{0, \ldots, q-1\}$ on a $\alpha_j = \alpha_0 + j\theta \bmod 1$. Nous verrons que dans ce cas le comportement de la somme d'exponentielles (7) dépend de $(q-1)\theta$:

Si $(q-1)\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors on a

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(f(n) + \beta n) = o(x).$$

Si $(q-1)\theta = \ell \in \mathbb{Z}$ alors, en écrivant

$$\alpha_j = \alpha_0 + j\ell/(q-1) \bmod 1$$

pour $0 \le j < q$, et en notant que $|n|_0 + \cdots + |n|_{q-1} = \lfloor \log_q n \rfloor + 1$, on parvient à l'identité

$$\begin{aligned}\sum_{n \le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(f(n) + \beta n) &= \sum_{n \le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\Big(\alpha_0 \lfloor \log_q n \rfloor + \alpha_0 + \frac{\ell}{q-1}\, \mathrm{s}(n) + \beta n\Big) \\ &= \mathrm{e}(\alpha_0) \sum_{n \le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\Big(\alpha_0 \lfloor \log_q n \rfloor + \frac{\ell n}{q-1} + \beta n\Big),\end{aligned}$$

car $\mathrm{s}(n) \equiv n \bmod (q-1)$ pour tout entier naturel n. En découpant la somme en n suivant des intervalles q-adiques, on se ramène ainsi à l'évaluation de sommes d'exponentielles de la forme

$$\sum_{y \le n < x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(n\theta) \quad (\theta \in \mathbb{R},\ 0 \le y < x),$$

qui peuvent être estimées par des techniques classiques de théorie analytique des nombres.

Cas 2 : la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ n'est pas une progression arithmétique modulo 1. Dans ce cas nous verrons que l'on a toujours

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(f(n) + \beta n) = o(x).$$

Ceci nous conduit à introduire le sous-ensemble suivant de $\mathcal{F}$:

Notation 2. On note $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ pour lesquels la suite des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1.

Remarque 1.

- Lorsque $q = 2$ on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$.
- Pour $q \ge 2$ et $f(n) = \alpha\, \mathrm{s}(n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f \in \mathcal{F}_0$.

Lemme 1. *La suite* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ *est une progression arithmétique modulo* 1 *si et seulement si*

$$\min_{t\in\mathbb{R}} \sum_{0\le j<i<q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2 = 0.$$

Démonstration. Si la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1 alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{0, \ldots, q-1\}$, $\alpha_j = \alpha_0 + jt \bmod 1$. Par conséquent pour tout $(i,j) \in \{0, \ldots, q-1\}^2$ on a $\|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\| = 0$. Réciproquement, si

$$\min_{t\in\mathbb{R}} \sum_{0\le j<i<q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2 = 0$$

alors il existe un $t \in \mathbb{R}$ qui réalise ce minimum. Pour cette valeur de t tous les termes de la somme sont nuls, donc pour tout $j \in \{0, \ldots, q-1\}$ on a $\|\alpha_j - \alpha_0 - jt\|^2 = 0$, c'est-à-dire $\alpha_j = \alpha_0 + jt \bmod 1$. ∎

Pour tout $f \in \mathcal{F}$ on note

$$\sigma_q(f) = \min_{t\in\mathbb{R}} \sum_{0\le j<i<q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2 \tag{8}$$

et on remarque que

$$f \in \mathcal{F}_0 \;\Leftrightarrow\; \sigma_q(f) = 0.$$

Nous allons démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Pour tout* $q \ge 2$, *il existe* $c_q > 0$ *tel que pour tout* $f \in \mathcal{F}_0$, $x \ge 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(f(n) + \beta n) \ll (\log x)^4 x^{1-c_q\|(q-1)\theta\|^2}, \tag{9}$$

où $\theta = \alpha_1 - \alpha_0$ *et où la constante implicite ne dépend que de* q.

Remarque 2. En appliquant le théorème 1 avec $f(n) = \alpha\, \mathrm{s}(n)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\theta = \alpha$ et on obtient une généralisation de la proposition 2.1 de [16].

Théorème 2. *Pour tout* $q \ge 2$, *il existe* $c_q > 0$ *tel que pour tout* $f \in \mathcal{F}$, $x \ge 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}(f(n) + \beta n) \ll (\log x)^4 x^{1-c_q\sigma_q(f)}, \tag{10}$$

où la constante implicite ne dépend que de q.

Les théorèmes 1 et 2 permettent d'obtenir plusieurs applications de nature arithmétique qui feront l'objet d'un travail ultérieur.

REMARQUE 3. Par la même méthode, on peut obtenir des majorations analogues pour les sommes
$$\sum_{n\le x} \mu(n)\,\mathrm{e}(f(n)+\beta n),$$
où μ est la fonction de Möbius, en utilisant une variante de l'identité de Vaughan adaptée à la fonction μ (voir [26, proposition 13.5]).

La remarque 3 montre le lien entre notre travail et le programme général proposé par Sarnak concernant le principe heuristique connu sous le nom de «Möbius randomness principle» (voir par exemple [34], [26, p. 338], ainsi que les articles [22], [4] et [5] déjà cités dans le paragraphe 1.2).

3. Description de la preuve des théorèmes 1 et 2. L'identité de Vaughan (voir par exemple [26, paragraphe 13.4]) appliquée à la somme (7) conduit à l'estimation de sommes classiquement qualifiées de type I et II, qui font l'objet des paragraphes 6 et 7 respectivement. La pertinence de ces estimations repose sur l'étude de la transformée de Fourier discrète de versions tronquées de la fonction f. Plus précisément, nous fournissons au paragraphe 5 des estimations en moyenne L^1 et en norme infinie de ces transformées de Fourier discrètes, qui semblent présenter un intérêt intrinsèque. La mise en œuvre via l'identité de Vaughan de la fin de la preuve des théorèmes 1 et 2 est effectuée au paragraphe 8.

La fonction somme des chiffres s correspond à un cas très particulier de fonction digitale car $(\mathrm{s}(0),\mathrm{s}(1),\dots,\mathrm{s}(q-1)) = (0,1,\dots,q-1)$ constitue une progression arithmétique. Dans la méthode mise en place dans [32] il est crucial de pouvoir estimer de manière très précise les transformées de Fourier discrètes
$$|F_\lambda(h,\alpha)| = \frac{1}{q^\lambda}\prod_{j=1}^{\lambda}\left|\frac{\sin \pi q(\alpha - h/q^j)}{\sin \pi(\alpha - h/q^j)}\right|.$$
Lorsque f est une fonction digitale quelconque, l'étude des transformées de Fourier discrètes
$$|F_\lambda(h,\alpha)| = \frac{1}{q^\lambda}\prod_{j=1}^{\lambda}\varphi\left(\frac{h}{q^j}\right),$$
où $\varphi(t) = |\sum_{0\le k<q} \mathrm{e}(\alpha_k - kt)|$, est extrêmement délicate. Si $\alpha_0,\dots,\alpha_{q-1}$ constitue une progression arithmétique modulo 1 (c'est-à-dire si $f\in\mathcal{F}_0$), la fonction φ est une somme géométrique et la méthode mise en place dans [32] se généralise et permet d'obtenir le théorème 1. Dans le cas général la stratégie développée dans [32] est inopérante et il est nécessaire d'étudier d'une manière beaucoup plus fine ces transformées de Fourier. C'est l'objet des lemmes 2–7.

4. Lemmes techniques. Nous établissons dans cette section quelques lemmes utiles pour la section 5. Nous commençons par fournir deux lemmes généraux concernant certaines moyennes quadratiques et biquadratiques d'un polynôme trigonométrique.

Lemme 2. *Soit $K \in \mathbb{N}$ et $P(t) = \sum_{k=0}^{K} c_k \, \mathrm{e}(kt)$ $(c_k \in \mathbb{C})$. Alors pour tout nombre entier $N \geq K+1$ on a*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| P\left(t + \frac{n}{N}\right) \right|^2 = \sum_{k=0}^{K} |c_k|^2.$$

Démonstration. En développant le carré du membre de gauche et en intervertissant les sommes on obtient

$$\sum_{k=0}^{K} \sum_{k'=0}^{K} c_k \overline{c_{k'}} \, \mathrm{e}((k-k')t) \; \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}\left((k-k') \frac{n}{N} \right).$$

Pour tout $N \geq K+1$, il y a équivalence entre $k - k' \equiv 0 \bmod N$ et $k - k' = 0$, d'où l'égalité annoncée. ∎

Lemme 3. *Soit $K \in \mathbb{N}$ et $P(t) = \sum_{k=0}^{K} c_k \, \mathrm{e}(kt)$ $(c_k \in \mathbb{C})$. Alors $|P(t)|^2$ est un polynôme trigonométrique de degré K :*

$$|P(t)|^2 = \sum_{|k| \leq K} \Big(\sum_{j} c_{j+k} \, \overline{c_j} \Big) \mathrm{e}(kt),$$

où la somme sur j est restreinte par $\max(0, -k) \leq j \leq \min(K, K-k)$, *et pour tout nombre entier $N \geq 2K+1$ on a*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| P\left(t + \frac{n}{N}\right) \right|^4 = \sum_{k=-K}^{K} \Big| \sum_{j} c_{j+k} \, \overline{c_j} \Big|^2.$$

Démonstration. On écrit

$$|P(t)|^2 = \sum_{i=0}^{K} \sum_{j=0}^{K} c_i \overline{c_j} \, \mathrm{e}((i-j)t)$$

et en posant $i = j+k$ on obtient la première égalité. Pour montrer la seconde égalité, on observe que $|P(t)|^2 = |Q(t)|$ avec

$$Q(t) = \sum_{|k| \leq K} \Big(\sum_{j} c_{j+k} \, \overline{c_j} \Big) \mathrm{e}((k+K)t) = \sum_{0 \leq k' \leq 2K} \Big(\sum_{j} c_{j+k'-K} \, \overline{c_j} \Big) \mathrm{e}(k't),$$

et on applique le lemme 2 à $Q(t)$. ∎

Pour $R \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$, introduisons

$$\tilde{\varphi}_R(u) = \Big| \sum_{0 \leq r < R} \mathrm{e}(ru) \Big|. \tag{11}$$

Lemme 4. *Pour des nombres entiers $L \geq 2$ et $R \geq 2$, on a*

$$\frac{1}{RL}\sum_{|\ell|<L}\Bigl(1-\frac{|\ell|}{L}\Bigr)\tilde{\varphi}_R\Bigl(\frac{\ell}{RL}\Bigr) \leq \frac{1}{4-2\sqrt{2}} < 1. \tag{12}$$

Démonstration. Pour $0 \leq a < 1$ fixé, la fonction $x \mapsto \sin(\pi a x)$ est concave sur $[0;1/2]$, d'où $\sin(\pi a x) \geq 2x\sin(\pi a/2)$. En prenant $a = |\ell|/L$ et $x = 1/R$, on a donc

$$\frac{1}{R}\tilde{\varphi}_R\Bigl(\frac{\ell}{RL}\Bigr) = \frac{\sin\frac{\pi|\ell|}{L}}{R\sin\frac{\pi|\ell|}{LR}} \leq \frac{\sin\frac{\pi|\ell|}{L}}{2\sin\frac{\pi|\ell|}{2L}} = \cos\frac{\pi\ell}{2L}.$$

Le noyau de Fejér d'ordre $L-1$ vaut, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$K_L(t) = \sum_{|\ell|<L}\Bigl(1-\frac{|\ell|}{L}\Bigr)\cos(2\pi\ell t) = \sum_{|\ell|<L}\Bigl(1-\frac{|\ell|}{L}\Bigr)\mathrm{e}(\ell t) = \frac{1}{L}\Bigl(\frac{\sin\pi t L}{\sin\pi t}\Bigr)^2.$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{RL}\sum_{|\ell|<L}\Bigl(1-\frac{|\ell|}{L}\Bigr)\tilde{\varphi}_R\Bigl(\frac{\ell}{RL}\Bigr) &\leq \frac{1}{L}K_L\Bigl(\frac{1}{4L}\Bigr)\\ &= \frac{1}{L^2}\Bigl(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4L}}\Bigr)^2 = \frac{1}{2L^2\sin^2\frac{\pi}{4L}}.\end{aligned}$$

Par concavité de la fonction sinus, pour tout $x \in [0;\pi/8]$ on a la minoration $\sin x \geq \frac{8x}{\pi}\sin\frac{\pi}{8}$, ce qui, appliqué avec $x = \pi/4L \in [0;\pi/8]$, donne

$$\frac{1}{RL}\sum_{|\ell|<L}\Bigl(1-\frac{|\ell|}{L}\Bigr)\tilde{\varphi}_R\Bigl(\frac{\ell}{RL}\Bigr) \leq \frac{1}{8\sin^2\frac{\pi}{8}},$$

d'où la majoration (12) puisque $\sin^2\frac{\pi}{8} = (2-\sqrt{2})/4$. ∎

5. Étude de transformées de Fourier discrètes. Dans cette section nous considérons une fonction $f \in \mathcal{F}$ fixée, ce qui revient à fixer un q-uplet $(\alpha_0,\dots,\alpha_{q-1})$ de nombres réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\dots,q-1\}$, nous introduisons les fonctions $|\cdot|_{\lambda,k}$ définies par

$$|n|_{\lambda,k} = \#\{0 \leq j < \lambda \mid n_j = k\} \qquad \Bigl(n = \sum_{j\geq 0} n_j q^j,\ 0 \leq n_j < q\Bigr), \tag{13}$$

et la fonction f_λ définie par

$$f_\lambda(n) = \sum_{0\leq k<q}\alpha_k|n|_{\lambda,k}. \tag{14}$$

Remarquons que pour $j \in \{0,\dots,q-1\}$, $u, v \in \mathbb{N}$, $v < q$, et $\lambda \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|uq+v|_{\lambda,j} = |u|_{\lambda-1,j} + |v|_j, \tag{15}$$

d'où
$$f_\lambda(uq+v) = f_{\lambda-1}(u) + \sum_{0\le j<q} \alpha_j |v|_j = f_{\lambda-1}(u) + \alpha_v.$$

La fonction $n \mapsto \mathrm{e}\big(f_\lambda(n)\big)$ étant q^λ-périodique, nous pouvons considérer sa transformée de Fourier discrète
$$F_\lambda(h) := \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0\le u<q^\lambda} \mathrm{e}\bigg(f_\lambda(u) - \frac{uh}{q^\lambda}\bigg) \quad (h \in \mathbb{Z}). \tag{16}$$
On a $F_0 = 1$, et pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$, en remplaçant u par $uq+v$ avec $0 \le v < q$ et $0 \le u < q^{\lambda-1}$, nous obtenons
$$\begin{aligned} F_\lambda(h) &= \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0\le v<q} \mathrm{e}\bigg(\alpha_v - \frac{vh}{q^\lambda}\bigg) \sum_{0\le u<q^{\lambda-1}} \mathrm{e}\bigg(f_{\lambda-1}(u) - \frac{uh}{q^{\lambda-1}}\bigg) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{0\le v<q} \mathrm{e}\bigg(\alpha_v - \frac{vh}{q^\lambda}\bigg) F_{\lambda-1}(h). \end{aligned}$$
Par récurrence, on obtient donc
$$|F_\lambda(h)| = \frac{1}{q^\lambda} \prod_{j=1}^{\lambda} \varphi\bigg(\frac{h}{q^j}\bigg) \quad (\lambda \in \mathbb{N},\, h \in \mathbb{Z}), \tag{17}$$
où φ est la fonction 1-périodique définie par
$$\varphi(t) = \bigg| \sum_{0\le k<q} \mathrm{e}(\alpha_k - kt) \bigg| \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{18}$$

Les calculs ultérieurs nécessitent deux types de renseignements spécifiques concernant la fonction F_λ : une majoration en moyenne le long d'une progression arithmétique et une majoration en norme infinie.

5.1. Estimations en moyenne. L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir une estimation fine du comportement en moyenne de F_λ le long d'une progression arithmétique. Dans le cas de la fonction somme des chiffres et lorsque $q \ge 3$, cela repose essentiellement sur l'étude de la fonction de transfert
$$\Phi_1(t) = \frac{1}{q} \sum_{0\le r<q} \varphi\bigg(t + \frac{r}{q}\bigg),$$
où φ est définie par (18) avec $\alpha_k = k\alpha$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans le lemme 16 de [32] (la fonction de transfert y est notée Ψ_q), il était possible d'obtenir pour Φ_1 une borne uniforme meilleure que la racine carrée de la borne triviale. Une telle majoration n'est pas disponible dans le cas plus général traité ici. Dans le cas où $q = 2$, pour la fonction somme des chiffres, le lemme 18 de [32]

repose sur l'étude de la fonction de transfert d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\Phi_2(t) &= \frac{1}{q}\sum_{0\le r<q}\varphi\Big(\frac{t+r}{q}\Big)\Phi_1\Big(\frac{t+r}{q}\Big)\\ &= \frac{1}{q^2}\sum_{0\le r<q}\varphi\Big(\frac{t+r}{q}\Big)\sum_{0\le s<q}\varphi\Big(\frac{t+r}{q^2}+\frac{s}{q}\Big).\end{aligned}$$

Pour des raisons techniques qui apparaîtront clairement dans la preuve de la proposition 1 *infra*, résultat principal de ce paragraphe, nous avons besoin d'introduire une généralisation de la fonction Φ_2. Posons, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $(R,S)\in\mathbb{N}^{*2}$,

$$\Psi(t,R,S) = \frac{1}{q^2}\sum_{r<R}\varphi\Big(\frac{t+r}{R}\Big)\sum_{s<S}\varphi\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{s}{S}\Big), \tag{19}$$

où φ est définie par (18). Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a la majoration triviale $\Psi(t,R,S)\le RS$. Un majorant pour $\Psi(t,R,S)$ de la forme $(RS)^{\eta_q}$ avec $\eta_q<1/2$ est fourni au lemme 7 *infra*, dont la preuve repose sur les lemmes 5 et 6 qui suivent.

Lemme 5. *Pour $R\,|\,q$ et $S\,|\,q$ on a*

$$\Psi(t,R,S)^2 \le \frac{S^2}{q}\sum_{|\ell|<q/S}\Big(1-\frac{S|\ell|}{q}\Big)\tilde\varphi_R\Big(\frac{\ell S}{qR}\Big), \tag{20}$$

où $\tilde\varphi_R$ est définie en (11).

Démonstration. Commençons par remarquer que d'après le lemme 2 appliqué à la fonction φ, pour tout nombre entier $N\ge q$ on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi^2\Big(t+\frac{n}{N}\Big) = q. \tag{21}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz à la somme sur r dans l'expression (19) de $\Psi(t,R,S)$, et en observant à l'aide de (21) que

$$\begin{aligned}\frac{1}{q^2}\sum_{0\le r<R}\varphi^2\Big(\frac{t+r}{R}\Big) &= \frac{1}{q^2}\sum_{0\le r<R}\varphi^2\Big(\frac{t}{R}+\frac{rq/R}{q}\Big)\\ &\le \frac{1}{q^2}\sum_{0\le r'<q}\varphi^2\Big(\frac{t}{R}+\frac{r'}{q}\Big) = 1,\end{aligned} \tag{22}$$

on voit qu'il suffit de majorer par le membre de droite de (20) l'expression

$$\frac{S}{q^2}\sum_{0\le r<R}\sum_{0\le s<S}\varphi^2\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{s}{S}\Big).$$

Maintenant on peut écrire

$$\sum_{0\le s<S} \varphi^2\Big(u+\frac{s}{S}\Big) = \sum_{0\le i<q}\sum_{0\le j<q} \mathrm{e}(\alpha_i-\alpha_j-(i-j)u) \sum_{0\le s<S} \mathrm{e}\Big(-(i-j)\frac{s}{S}\Big),$$

ce qui entraîne, d'après (2),

$$\sum_{0\le s<S} \varphi^2\Big(u+\frac{s}{S}\Big) = S\sum_{0\le i<q}\sum_{\substack{0\le j<q\\ j\equiv i \bmod S}} \mathrm{e}(\alpha_i-\alpha_j-(i-j)u).$$

Il suffit donc de majorer par le membre de droite de (20) l'expression

$$\frac{S^2}{q^2}\sum_{0\le r<R}\sum_{0\le i<q}\sum_{\substack{0\le j<q\\ j\equiv i \bmod S}} \mathrm{e}\Big(\alpha_i-\alpha_j-(i-j)\frac{t+r}{qR}\Big).$$

En intervertissant les sommes et en majorant trivialement, il suffit finalement de montrer que le membre de droite de (20) est égal à l'expression

$$\frac{S^2}{q^2}\sum_{0\le i<q}\sum_{\substack{0\le j<q\\ j\equiv i \bmod S}} \Big|\sum_{0\le r<R} \mathrm{e}\Big(-(i-j)\frac{r}{qR}\Big)\Big|.$$

En découpant par tranches de longueur S on obtient

$$\frac{S^2}{q^2}\sum_{0\le i<S}\sum_{0\le k<q/S}\sum_{\substack{0\le j<q\\ j\equiv i \bmod S}} \tilde{\varphi}_R\Big(\frac{-(i+kS-j)}{qR}\Big),$$

c'est-à-dire, en posant $j=i+k'S$,

$$\frac{S^2}{q^2}\sum_{0\le i<S}\sum_{0\le k<q/S}\sum_{0\le k'<q/S} \tilde{\varphi}_R\Big(\frac{-(kS-k'S)}{qR}\Big),$$

ce qui, en comptant le nombre de représentations de $\ell=k'-k$, donne

$$\frac{S^3}{q^2}\sum_{|\ell|<q/S}\Big(\frac{q}{S}-|\ell|\Big)\tilde{\varphi}_R\Big(\frac{\ell S}{qR}\Big),$$

c'est-à-dire le membre de droite de (20). ∎

Lorsque $S<q$, le membre de droite de (20) est strictement inférieur à RS car dans ce cas il existe des valeurs de ℓ telles que $1\le|\ell|<q/S$, et pour ces valeurs de ℓ on a $\tilde{\varphi}_R(\ell S/qR)<R$. En revanche, lorsque $S=q$, le majorant dans (20) vaut Rq et la majoration est donc triviale. Il est donc nécessaire d'obtenir une majoration plus précise dans ce cas. C'est l'objet du résultat suivant.

LEMME 6. *Pour tout nombre entier $R \geq 2$ tel que $R \mid q$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a*

$$\Psi^2(t,R,q) \leq Rq(1-\Theta(f)) \tag{23}$$

où

$$\Theta(f) = \Big(1-\frac{1}{q}\Big)\bigg\{1-\bigg(1-\frac{2}{q^2(q-1)}\sum_{k=1}^{q-1}\Big|\sum_{j=0}^{q-1-k}\mathrm{e}(\alpha_j-\alpha_{j+k})\Big|^2\bigg)^{1/2}\bigg\}$$

vérifie

$$\Theta_q := \min_{f\in\mathcal{F}}\Theta(f) \geq \Big(1-\frac{1}{q}\Big)\bigg\{1-\Big(1-\frac{2}{q^2(q-1)}\Big)^{1/2}\bigg\} > \frac{1}{q^3} > 0. \tag{24}$$

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz à la somme en r dans l'expression (19) de $\Psi(t,R,S)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi^2(t,R,q) &\leq \frac{1}{q^4}\sum_{r<R}\varphi\Big(\frac{t+r}{R}\Big)^2\sum_{r<R}\Big(\sum_{s<q}\varphi\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{s}{q}\Big)\Big)^2\\ &\leq \frac{1}{q^2}\sum_{r<R}\Big(\sum_{s<q}\varphi\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{s}{q}\Big)\Big)^2,\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de (22). Cela donne, vu que φ est périodique de période 1,

$$\Psi^2(t,R,q) \leq \frac{1}{q^2}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{q-1}\varphi\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}\Big)\varphi\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}+\frac{\ell}{q}\Big).$$

La contribution du terme $\ell = 0$ est, d'après (21),

$$\frac{1}{q^2}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{q-1}\varphi^2\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}\Big) = R.$$

On isole ce terme $\ell = 0$ dans la majoration de $\Psi^2(t,R,q)$ ci-dessus et on applique l'inégalité de Cauchy–Schwarz à la triple somme en r, k et ℓ :

$$\Psi^2(t,R,q) \leq R + \frac{1}{q^2}\big(Rq(q-1)\Upsilon(t,R,q)\big)^{1/2} \tag{25}$$

avec

$$\Upsilon(t,R,q) = \sum_{r=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{\ell=1}^{q-1}\varphi^2\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}\Big)\varphi^2\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}+\frac{\ell}{q}\Big).$$

La quantité $\Upsilon(t,R,q)$ vaut

$$\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{q-1}\varphi^2\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}\Big)\varphi^2\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}+\frac{\ell}{q}\Big) - \sum_{r=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{q-1}\varphi^4\Big(\frac{t+r}{qR}+\frac{k}{q}\Big),$$

c'est-à-dire, d'après (21),

$$\Upsilon(t,R,q) = Rq^4 - \sum_{\ell=0}^{qR-1} \varphi^4\Big(\frac{t+\ell}{qR}\Big).$$

Or d'après le lemme 3 appliqué à la fonction φ, $\varphi^2(t)$ est un polynôme trigonométrique de degré $q-1$ qui vérifie, pour tout nombre entier $N \geq 2q-1$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varphi^4\Big(t+\frac{n}{N}\Big) = \sum_{|k|\leq q-1} \Big|\sum_j \mathrm{e}(\alpha_j - \alpha_{j+k})\Big|^2. \tag{26}$$

Donc, comme $qR \geq 2q-1$ (car $R \geq 2$), il en résulte que

$$\Upsilon(t,R,q) = Rq^4 - Rq \sum_{|k|\leq q-1} \Big|\sum_j \mathrm{e}(\alpha_j - \alpha_{j+k})\Big|^2,$$

ou encore, en isolant le terme $k = 0$ et en exploitant la symétrie entre $-k$ et k,

$$\Upsilon(t,R,q) = Rq^4 - Rq^3 - 2\,Rq \sum_{k=1}^{q-1} \Big|\sum_{j=0}^{q-1-k} \mathrm{e}(\alpha_j - \alpha_{j+k})\Big|^2,$$

ce qui, en mettant $Rq^3(q-1)$ en facteur et en reportant dans (25), donne

$$\Psi^2(t,R,q) \leq R + R(q-1)\Big(1 - \frac{2}{q^2(q-1)}\sum_{k=1}^{q-1}\Big|\sum_{j=0}^{q-1-k} \mathrm{e}(\alpha_j - \alpha_{j+k})\Big|^2\Big)^{1/2}$$

et fournit bien (23).

La minoration (24) s'obtient en ne conservant dans la définition de $\Theta(f)$ que le terme $k = q-1$ dans la sommation sur k. ■

Introduisons la quantité

$$\eta_q = \max\Big(\frac{1}{2} - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{4\log q - 2\log 2}, \frac{1}{2} + \frac{\log(1-\Theta_q)}{4\log q}\Big). \tag{27}$$

En remarquant que $0 < \Theta_q < 1$, on a

$$\frac{1}{2} + \frac{\log(1-\Theta_q)}{4\log q} < \frac{1}{2}$$

et

$$0.38577665 < \frac{1}{2} - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{2\log 2} \leq \frac{1}{2} - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{4\log q - 2\log 2} < \frac{1}{2},$$

d'où

$$0.38577665 < \eta_q < \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant.

Lemme 7. *Pour $t \in \mathbb{R}$, $R \mid q$, $S \mid q$ et $R, S \geq 2$, on a*

$$\Psi(t,R,S) \leq (RS)^{\eta_q}. \tag{29}$$

Démonstration. Lorsque $S < q$, nous employons le lemme 5 :

$$\Psi^2(t,R,q) \leq \frac{S^2}{q} \sum_{|\ell|<q/S} \left(1 - \frac{S|\ell|}{q}\right) \tilde{\varphi}_R\left(\frac{\ell S}{qR}\right).$$

En appliquant le lemme 4 avec $L = q/S$, on obtient, pour $R \geq 2$, $S \mid q$, $S < q$ (et donc $S \leq q/2$ et $L \geq 2$),

$$\Psi(t,R,S)^2 \leq (RS)^{1-\frac{\log(4-2\sqrt{2})}{\log RS}},$$

et, comme $RS \leq q^2/2$, on a

$$\Psi(t,R,S) \leq (RS)^{\frac{1}{2}-\frac{\log(4-2\sqrt{2})}{4\log q - 2\log 2}} \qquad (S < q). \tag{30}$$

Lorsque $S = q$, on emploie (23) et (24), ce qui entraîne

$$\Psi^2(t,R,q) \leq Rq\,(1-\Theta_q) = (Rq)^{1+\frac{\log(1-\Theta_q)}{\log(Rq)}}$$

et, comme $R \leq q$ et $\log(1-\Theta_q) < 0$, on a

$$\Psi(t,R,q) \leq (Rq)^{\frac{1}{2}+\frac{\log(1-\Theta_q)}{4\log q}} \tag{31}$$

Les deux inégalités (30) et (31) entraînent bien (29). ∎

La proposition suivante généralise les lemmes 17 et 18 de [32].

Proposition 1. *Pour $\lambda \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \delta \leq \lambda$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k \mid q^{\lambda-\delta}$, $q \nmid k$, on a*

$$\sum_{\substack{0 \leq h < q^\lambda \\ h \equiv a \bmod kq^\delta}} |F_\lambda(h)| \leq k^{-\eta_q} q^{\eta_q(\lambda-\delta)+1} |F_\delta(a)|. \tag{32}$$

En particulier, pour $k = 1$, $\delta = 0$, on a

$$\sum_{0 \leq h < q^\lambda} |F_\lambda(h)| \leq q^{\eta_q \lambda + 1}. \tag{33}$$

Démonstration. Si $\lambda = \delta$, la condition $k \mid q^{\lambda-\delta}$ entraîne $k = 1$ et le membre de gauche de (32) qui vaut $|F_\delta(a)|$ est bien inférieur au membre de droite qui vaut lui $q|F_\delta(a)|$. Lorsque $\lambda > \delta$ nous reprenons les notations introduites dans la preuve du lemme 17 de [32] : on pose pour $\delta \leq \theta \leq \lambda$, $d_\theta = \operatorname{pgcd}(q^\theta, kq^\delta)$, $u_\theta = q^\theta/d_\theta$, et pour $\delta < \theta \leq \lambda$, $\rho_\theta = d_\theta/d_{\theta-1} \in \mathbb{N}$. Rappelons que l'on a alors

$$\rho_\theta \mid q \quad \text{et} \quad \rho_\theta < q, \tag{34}$$

et que par ailleurs

$$\operatorname{pgcd}(\rho_\theta, u_{\theta-1}) = 1 \qquad (\delta < \theta \le \lambda). \tag{35}$$

Enfin nous posons

$$G_\theta(a, d_\theta) = \sum_{\substack{0 \le h < q^\theta \\ h \equiv a \bmod d_\theta}} |F_\theta(h)| = \sum_{0 \le u < u_\theta} |F_\theta(a + u d_\theta)| \qquad (\delta \le \theta \le \lambda). \tag{36}$$

En écrivant $u = s u_{\theta-1} + v$ avec $0 \le s < q/\rho_\theta$ et $0 \le v < u_{\theta-1}$, on a, pour $\delta < \theta \le \lambda$,

$$\begin{aligned} G_\theta(a, d_\theta) &= \sum_{0 \le v < u_{\theta-1}} \sum_{0 \le s < q/\rho_\theta} |F_\theta(a + v d_\theta + s q^{\theta-1} \rho_\theta)| \\ &= \sum_{0 \le v < u_{\theta-1}} \sum_{0 \le s < q/\rho_\theta} |F_\theta(a + v \rho_\theta d_{\theta-1} + s q^{\theta-1} \rho_\theta)|. \end{aligned} \tag{37}$$

En employant l'écriture (17) de $|F_\theta|$ sous forme de produit, il vient

$$G_\theta(a, d_\theta) = \frac{1}{q} \sum_{0 \le v < u_{\theta-1}} |F_{\theta-1}(a + v\rho_\theta d_{\theta-1})| \sum_{0 \le s < q/\rho_\theta} \varphi\left(\frac{a + v\rho_\theta d_{\theta-1} + s q^{\theta-1} \rho_\theta}{q^\theta} \right).$$

La majoration triviale $\varphi(t) \le q$ fournit donc la majoration

$$G_\theta(a, d_\theta) \le \frac{q}{\rho_\theta} \sum_{0 \le v < u_{\theta-1}} |F_{\theta-1}(a + v \rho_\theta d_{\theta-1})|.$$

D'après (35), $v\rho_\theta$ parcourt bijectivement l'ensemble des classes modulo $u_{\theta-1}$ lorsque v varie entre 0 et $u_{\theta-1}$. Et comme la fonction $h \mapsto F_{\theta-1}(a + h d_{\theta-1})$ est $u_{\theta-1}$-périodique, il s'ensuit

$$G_\theta(a, d_\theta) \le \frac{q}{\rho_\theta} G_{\theta-1}(a, d_{\theta-1}). \tag{38}$$

Nous effectuons à présent une seconde itération à partir de (37) : pour $\delta + 1 < \theta \le \lambda$, en posant $v = r u_{\theta-2} + u$ avec $0 \le u < u_{\theta-2}$, $0 \le r < q/\rho_{\theta-1}$, on a

$$G_\theta(a, d_\theta) = \sum_{0 \le u < u_{\theta-2}} \sum_{s < q/\rho_\theta} \sum_{r < q/\rho_{\theta-1}} |F_\theta(a + u\rho_{\theta-1} d_{\theta-2} + r q^{\theta-2} \rho_{\theta-1} + s q^{\theta-1} \rho_\theta)|.$$

En employant l'écriture de $|F_\theta|$ sous forme de produit, on obtient, en posant $R_\theta = q/\rho_\theta$ et $t_\theta = R_{\theta-1}(a + u\rho_{\theta-1} d_{\theta-2})/q^{\theta-1}$,

$$\begin{aligned} &G_\theta(a, d_\theta) \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{0 \le u < u_{\theta-2}} |F_\theta(a + u\rho_{\theta-1} d_{\theta-2})| \sum_{r < R_{\theta-1}} \sum_{s < R_\theta} \varphi\left(\frac{t_\theta + r}{R_{\theta-1}} \right) \varphi\left(\frac{t_\theta + r}{q R_{\theta-1}} + \frac{s}{R_\theta} \right) \\ &\le \max_{t \in \mathbb{R}} |\Psi(t, R_{\theta-1}, R_\theta)| \sum_{0 \le u < u_{\theta-2}} |F_{\theta-2}(a + u \rho_{\theta-1} d_{\theta-2})|, \end{aligned}$$

ce qui, comme $\mathrm{pgcd}(\rho_{\theta-1}, u_{\theta-2}) = 1$, entraîne

$$G_\theta(a, d_\theta) \le \max_{t\in\mathbb{R}} |\Psi(t, R_{\theta-1}, R_\theta)| G_{\theta-2}(a, d_{\theta-2}).$$

Notons que d'après (34), on a $R_\theta \mid q$ et $R_\theta \ge 2$ pour $\delta < \theta \le \lambda$. Par conséquent, d'après le lemme 7 appliqué avec $R = R_{\theta-1}$ et $S = R_\theta$, on a

$$G_\theta(a, d_\theta) \le \left(\frac{q^2}{\rho_\theta \rho_{\theta-1}}\right)^{\eta_q} G_{\theta-2}(a, d_{\theta-2}) \quad (\delta + 1 < \theta \le \lambda). \tag{39}$$

En appliquant l'inégalité (39) $\lfloor(\lambda - \delta)/2\rfloor$ fois, puis éventuellement une fois l'inégalité (38), il vient

$$\sum_{\substack{0\le h<q^\lambda \\ h\equiv a \bmod kq^\delta}} |F_\lambda(h)| = G_\lambda(a, d_\lambda) \le (\rho_\lambda \ldots \rho_{\delta+1})^{\eta_q} q^{2\lfloor(\lambda-\delta)/2\rfloor\eta_q+1} G_\delta(a, d_\delta).$$

Compte tenu des identités

$$\rho_\lambda \ldots \rho_{\delta+1} = \frac{d_\lambda}{d_\delta} = \frac{kq^\delta}{q^\delta} = k \quad \text{et} \quad G_\delta(a, d_\delta) = G_\delta(a, q^\delta) = |F_\delta(a)|,$$

nous obtenons bien la majoration (32). ∎

5.2. Estimation en norme infinie. Posons

$$q^{\gamma_q(f)} = \max_{t\in\mathbb{R}} \sqrt{\varphi(t)\varphi(qt)}. \tag{40}$$

Notons qu'avec cette définition on a

$$\max_{h\in\mathbb{Z}} |F_\lambda(h)| \le q^{\lambda(\gamma_q(f)-1)+1}. \tag{41}$$

En effet, cela résulte directement de l'expression (17) de F_λ sous forme de produit et de la suite d'inégalités

$$\prod_{j=1}^{\lambda} \varphi(tq^{-j}) \le q \prod_{0\le j\le\lfloor\lambda/2\rfloor} \varphi(tq^{-2j})\varphi(tq^{-2j-1}) \le q^{2\gamma_q(f)\lfloor\lambda/2\rfloor+1} \le q^{\lambda\gamma_q(f)+1},$$

valables pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mauduit et Rivat ont obtenu dans [32, Lemme 20] et [31, Lemme 7] des majorations de $\gamma_q(f)$ dans le cas particulier où $f(n) = \alpha\, \mathrm{s}(n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous commençons dans ce paragraphe par fournir une majoration générale de $\gamma_q(f)$ pour $f \in \mathcal{F}$ qui est, compte tenu du lemme 1, non triviale dès que $f \notin \mathcal{F}_0$. Nous rappelons la définition de $\sigma_q(f)$ en (8).

Lemme 8. *Pour $f \in \mathcal{F}$, on a*

$$\varphi(t) \le q \exp\left(-\frac{8}{q}\|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2\right) \quad (0 \le i, j < q,\ t \in \mathbb{R}), \tag{42}$$

et

$$\gamma_q(f) \le 1 - \frac{16}{q^2(q-1)\log q}\sigma_q(f). \tag{43}$$

Démonstration. Lorsque $i = j$, l'inégalité (42) est triviale. Lorsque $i \neq j$, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \Big| \mathrm{e}(\alpha_i - it) + \mathrm{e}(\alpha_j - jt) + \sum_{\substack{0 \le k < q \\ k \notin \{i,j\}}} \mathrm{e}(\alpha_k - kt) \Big| \\ &\le |\,\mathrm{e}(\alpha_i - it) + \mathrm{e}(\alpha_j - jt)| + q - 2 \\ &= |1 + \mathrm{e}(\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t)| + q - 2.\end{aligned}$$

Or d'après le lemme 12 de [11], nous disposons de l'inégalité

$$|1 + \mathrm{e}(\beta)| \le 2(1 - 4\|\beta\|^2) \qquad (\beta \in \mathbb{R}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\le 2(1 - 4\|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2) + q - 2 \\ &= q\bigg(1 - \frac{8}{q}\|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2\bigg),\end{aligned}$$

et compte tenu de l'inégalité de convexité $1 - x \le \exp(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$, nous obtenons bien (42). Par ailleurs, en employant l'inégalité (42) pour chaque couple (i, j) avec $0 \le j < i < q$ nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(t)^{q(q-1)/2} &\le q^{q(q-1)/2} \exp\bigg(-\frac{8}{q} \sum_{0 \le j < i < q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2\bigg) \\ &\le q^{q(q-1)/2} \exp\bigg(-\frac{8}{q}\sigma_q(f)\bigg).\end{aligned}$$

Cela fournit bien la majoration (43). ∎

La preuve du Théorème 1 nécessite une majoration spécifique de $\gamma_q(f)$ lorsque $f \in \mathcal{F}_0$. Pour ce faire, nous établissons en premier lieu un lemme technique. Nous introduisons la fonction $g_{q,\theta}$ définie pour $q \ge 2$, $\theta \in \mathbb{R}$ par

$$g_{q,\theta}(t) = \|\theta + t\|^2 + \|\theta + qt\|^2 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Lemme 9. *Pour $q \ge 2$, $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\min_{t \in \mathbb{R}} g_{q,\theta}(t) \ge \frac{\|(q-1)\theta\|^2}{(q + \sqrt{2} - 1)^2}.$$

Démonstration. Dans ce qui suit on désigne par $\mathrm{d}(x, A)$ la distance, au sens de la valeur absolue, entre un nombre réel x et une partie A de $\mathbb{R}$. Posons $\delta_0 = \mathrm{d}\big((q-1)\theta, \mathbb{Z}\big)$ de sorte que

$$\mathrm{d}\bigg(\theta, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\bigg) = \frac{\delta_0}{q-1},$$

et introduisons un paramètre $\delta \in [0; \delta_0]$ à fixer ultérieurement.

Si $\|(q-1)t\| \geq \delta$, alors en employant l'inégalité $\|u\|^2 + \|u+v\|^2 \geq \frac{1}{2}\|v\|^2$, valable pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ (cf. inégalité (3.2) de [20]), on obtient

$$g_{q,\theta}(t) \geq \frac{1}{2}\delta^2.$$

Si $\|(q-1)t\| < \delta$, cela signifie que $\mathrm{d}((q-1)t, \mathbb{Z}) < \delta$, soit

$$\mathrm{d}\left(t, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) < \frac{\delta}{q-1}.$$

On a alors

$$\mathrm{d}\left(t+\theta, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) \geq \mathrm{d}\left(\theta, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) - \mathrm{d}\left(t, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) \geq \frac{\delta_0 - \delta}{q-1}.$$

Il suit

$$\mathrm{d}(t+\theta, \mathbb{Z}) \geq \frac{\delta_0 - \delta}{q-1},$$

puis

$$g_{q,\theta}(t) \geq \frac{(\delta-\delta_0)^2}{(q-1)^2}.$$

Finalement

$$g_{q,\theta}(t) \geq \min\left(\frac{1}{2}\delta^2, \frac{(\delta-\delta_0)^2}{(q-1)^2}\right) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

et en effectuant le choix $\delta = \frac{\delta_0\sqrt{2}}{q+\sqrt{2}-1}$, on parvient à la conclusion souhaitée. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'établir une majoration de $\gamma_q(f)$, non triviale dès qu'il existe $(i,j) \in \{0,\ldots,q-1\}^2$ tel que $(q-1)(\alpha_i - \alpha_j) \notin \mathbb{Z}$.

Lemme 10. *Pour $f \in \mathcal{F}$ et pour tout $(i,j) \in \{0,\ldots,q-1\}^2$, on a*

$$\gamma_q(f) \leq 1 - \frac{4\|(q-1)(\alpha_i - \alpha_j)\|^2}{q(q+\sqrt{2}-1)^2 \log q}.$$

Démonstration. D'après la majoration (42) nous avons

$$\varphi(t)\varphi(qt) \leq q^2 \exp\left(-\frac{8}{q}\, g_{q,\alpha_i-\alpha_j}((j-i)t)\right).$$

L'emploi du lemme 9 fournit alors directement la conclusion souhaitée. ■

On en déduit immédiatement lorsque $f \in \mathcal{F}_0$:

Lemme 11. *Pour $f \in \mathcal{F}_0$, on a*

$$\gamma_q(f) \leq 1 - \frac{4\|(q-1)\theta\|^2}{q(q+\sqrt{2}-1)^2 \log q} \tag{44}$$

avec $\theta = \alpha_1 - \alpha_0$.

6. Sommes de type I. La majoration des sommes de type I constitue la partie facile de la preuve des théorèmes 1 et 2. La proposition 2 fournit une majoration des sommes de type I associées à la somme d'exponentielles (7) et généralise ainsi la proposition 2 de [32] : la preuve en est d'ailleurs essentiellement identique, au moins une fois le lemme technique 12 établi. Nous la restituons sommairement dans le seul but de montrer comment le terme additionnel βn dans l'exponentielle peut être traité grâce à un argument de périodicité.

Pour $f \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, nous introduisons la fonction

$$\Phi_\lambda(t) = \sum_{0 \le \ell < q^\lambda} \mathrm{e}(f_\lambda(\ell) + \ell t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Lemme 12. *Pour $t \in \mathbb{R}$, $N \ge 1$, on a*

$$\Big| \sum_{0<n<N} \mathrm{e}(f(n) + nt) \Big| \le 2(q-1) \sum_{\lambda \le \frac{\log N}{\log q}} |\Phi_\lambda(t)|.$$

Démonstration. Nous reprenons les notations de la partie 2 de [15] :

$$S_N(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \sum_{0<n<N} x_0^{|n|_0} x_1^{|n|_1} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}} y^n,$$

et

$$T_{\nu,N}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \sum_{0 \le n<N} x_0^{|n|_{\nu,0}} x_1^{|n|_{\nu,1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{\nu,q-1}} y^n \quad (N \ge 1,\ \nu \in \mathbb{N}),$$

où les fonctions $|\cdot|_{\nu,j}$ sont définies en (13), et nous posons

$$S_N = S_N(\mathrm{e}(\alpha_0), \mathrm{e}(\alpha_1), \dots, \mathrm{e}(\alpha_{q-1}), \mathrm{e}(t)),$$
$$T_{\nu,N} = T_{\nu,N}(\mathrm{e}(\alpha_0), \mathrm{e}(\alpha_1), \dots, \mathrm{e}(\alpha_{q-1}), \mathrm{e}(t)),$$

de sorte que

$$S_N = \sum_{0<n<N} \mathrm{e}(f(n) + nt)$$

et

$$T_{\nu,q^\nu} = \Phi_\nu(t). \tag{45}$$

Nous pouvons écrire $N = \ell q^\nu + N'$ avec $\nu = \lfloor \log N / \log q \rfloor$, $N' < q^\nu$, $1 \le \ell < q$. Il résulte alors des formules fournies au lemme 2.1 de [15] que

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{0<n<N} \mathrm{e}(f(n) + nt) \Big| &= |S_{\ell q^\nu + N'}| \le |S_{\ell q^\nu}| + |T_{\nu,N'}| \\ &\le |S_{q^\nu}| + (\ell-1)|T_{\nu,q^\nu}| + |T_{\nu,N'}| \\ &\le (q-1) \sum_{0 \le j < \nu} |T_{j,q^j}| + (\ell-1)|T_{\nu,q^\nu}| + |T_{\nu,N'}| \\ &\le (q-1) \sum_{0 \le j \le \nu} |T_{j,q^j}| + |T_{\nu,N'}|. \end{aligned} \tag{46}$$

En posant $N' = mq^i + N''$ avec $i = \lfloor \log N'/\log q \rfloor$, $N'' < q^i$, $1 \le m < q$, on a

$$|T_{\nu,N'}| \le |T_{\nu,mq^i}| + |T_{i,N''}| \le (q-1)|T_{i,q^i}| + |T_{i,N''}|.$$

En itérant le procédé, on aboutit à

$$|T_{\nu,N'}| \le (q-1) \sum_{0\le\lambda\le i} |T_{\lambda,q^\lambda}|. \tag{47}$$

En insérant (47) dans (46) nous obtenons

$$\Big| \sum_{0<n<N} \mathrm{e}\big(f(n)+nt\big)\Big| \le 2(q-1) \sum_{\lambda\le\lfloor \log N/\log q\rfloor} |T_{\lambda,q^\lambda}|,$$

ce qui, compte tenu de (45), correspond bien à la conclusion attendue. ■

Proposition 2. *Pour $f \in \mathcal{F}$, $x \ge 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le M \le x^{1/3}$, on a*

$$\sum_{M<m\le 2M} \max_{t\le x/m} \Big| \sum_{n\le t} \mathrm{e}(f(mn)+\beta mn)\Big| \ll x^{1-\kappa_q(f)} \log x,$$

la constante implicite ne dépendant que de q, avec

$$\kappa_q(f) := \min\Big(\frac{1}{6}, \frac{1-\gamma_q(f)}{3}\Big).$$

Démonstration. Nous posons

$$T := \sum_{M<m\le 2M} \max_{t\le x/m} \Big| \sum_{0\le n\le t} \mathrm{e}(f(mn)+\beta mn)\Big|.$$

Pour $M < m \le 2M$, on a

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{0\le n\le t} \mathrm{e}(f(mn)+\beta mn)\Big| &= \Big| \frac{1}{m} \sum_{0\le k<m} \sum_{0\le \ell\le mt} \mathrm{e}\Big(f(\ell)+\ell\Big(\beta+\frac{k}{m}\Big)\Big)\Big| \\ &\le 2 + \frac{1}{M} \sum_{0\le k<m} \Big| \sum_{0<\ell<mt} \mathrm{e}\Big(f(\ell)+\ell\Big(\beta+\frac{k}{m}\Big)\Big)\Big|.\end{aligned}$$

En employant le lemme 12 on obtient pour $mt \le x$,

$$\Big| \sum_{0<\ell<mt} \mathrm{e}\Big(f(\ell)+\ell\Big(\beta+\frac{k}{m}\Big)\Big)\Big| \le 2(q-1) \sum_{\lambda\le\frac{\log x}{\log q}} \Big| \varPhi_\lambda\Big(\beta+\frac{k}{m}\Big)\Big|.$$

de sorte que

$$T \ll M + \frac{1}{M} \sum_{\lambda\le\frac{\log x}{\log q}} S(M,q,\lambda)$$

avec

$$S(M,q,\lambda) := \sum_{M<m\le 2M} \sum_{0\le k<m} \Big| \varPhi_\lambda\Big(\beta+\frac{k}{m}\Big)\Big|. \tag{48}$$

En organisant la somme du membre de gauche de (48) selon la valeur de $d = \mathrm{pgcd}(k,m)$, on a

$$S(M,q,\lambda)=\sum_{1\le d\le 2M}\ \sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{\substack{0\le k<m\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=d}}\left|\varPhi_\lambda\left(\beta+\frac{k}{m}\right)\right|.$$

Tout comme la fonction F_λ, la fonction $\varPhi_\lambda$ admet une écriture sous forme de produit : $|\varPhi_\lambda(t)|=\prod_{0\le j<\lambda}\varphi(-q^j t)$ (on aura remarqué que $\varPhi_\lambda(t)=q^\lambda F_\lambda(-q^\lambda t)$). En introduisant pour chaque d fixé un paramètre $\lambda_1\le\lambda$, on a donc, d'après la définition de $\gamma_q(f)$ en (40),

$$|\varPhi_\lambda(t)|\le|\varPhi_{\lambda_1}(t)|q^{\gamma_q(f)(\lambda-\lambda_1)+1}.$$

Comme de plus les nombres réels k/m sont d^2/M^2 bien espacés, on peut appliquer l'inégalité de Sobolev–Gallagher à la fonction $t\mapsto\varPhi_{\lambda_1}(\beta+t)$ et aux nombres k/m, et on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{\substack{0\le k<m\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=d}}&\left|\varPhi_\lambda\left(\beta+\frac{k}{m}\right)\right|\\ &\ll q^{\gamma_q(f)(\lambda-\lambda_1)}\sum_{M/2<m\le M}\ \sum_{\substack{0\le k<m\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=d}}\left|\varPhi_{\lambda_1}\left(\beta+\frac{k}{m}\right)\right|\\ &\ll q^{\gamma_q(f)(\lambda-\lambda_1)}\left(\frac{M^2}{d^2}\int_0^1|\varPhi_{\lambda_1}(\beta+t)|\,dt+\frac12\int_0^1|\varPhi'_{\lambda_1}(\beta+t)|\,dt\right).\end{aligned}$$

Comme la fonction $\varPhi_{\lambda_1}$ est 1-périodique, on a

$$\begin{aligned}\sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{\substack{0\le k<m\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=d}}&\left|\varPhi_\lambda\left(\beta+\frac{k}{m}\right)\right|\\ &\ll q^{\gamma_q(f)(\lambda-\lambda_1)}\left(\frac{M^2}{d^2}\int_0^1|\varPhi_{\lambda_1}(t)|\,dt+\frac12\int_0^1|\varPhi'_{\lambda_1}(t)|\,dt\right).\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis l'égalité de Parseval, on obtient, pour $\lambda\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^1|\varPhi_\lambda(t)|\,dt\le\left(\int_0^1|\varPhi_\lambda(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=q^{\lambda/2}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}|\varPhi'_\lambda(t)|&\ll\sum_{0\le j<\lambda}q^j\prod_{\substack{0\le i<\lambda\\ i\ne j}}\varphi(-q^i t)\\ &\ll\sum_{0\le j<\lambda}q^j q^{\lambda-j}\prod_{0\le i<j}\varphi(-q^i t)=q^\lambda\sum_{0\le j<\lambda}\varPhi_j(t).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{\substack{0\le k<m\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=d}} \left|\Phi_\lambda\Big(\beta+\frac{k}{m}\Big)\right|$$

$$\ll q^{\gamma_q(f)(\lambda-\lambda_1)}\bigg(\frac{M^2q^{\lambda_1/2}}{d^2}+q^{\lambda_1}\sum_{0\le j<\lambda_1} q^{j/2}\bigg)$$

$$\ll q^{\gamma_q(f)(\lambda-\lambda_1)}\bigg(\frac{M^2q^{\lambda_1/2}}{d^2}+q^{3\lambda_1/2}\bigg).$$

On choisit alors

$$\lambda_1=\min\bigg(\lambda,\Big\lfloor\frac{2\log(M/d)}{\log q}\Big\rfloor\bigg).$$

En observant que $q^{\lambda_1}\le\min(q^\lambda,M^2/d^2)$ et $q^{-\lambda_1}\le\max(q^{-\lambda},qd^2/M^2)$, on obtient

$$\sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{\substack{0\le k<m\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=d}} \left|\Phi_\lambda\Big(\beta+\frac{k}{m}\Big)\right| \ll \frac{M^2}{d^2}q^{\gamma_q(f)(\lambda-\lambda_1)+\lambda_1/2}$$

$$\ll \frac{M^2}{d^2}q^{\lambda/2}+\frac{M^{3-2\gamma_q(f)}}{d^{3-2\gamma_q(f)}}q^{\gamma_q(f)\lambda}\ll\frac{M^2}{d^2}q^{\lambda/2}+\frac{M^{3-2\gamma_q(f)}}{d}q^{\gamma_q(f)\lambda},$$

la dernière inégalité résultant du fait que $\gamma_q(f)\le 1$. Il suit

$$S(M,q,\lambda)\ll M^2q^{\lambda/2}+M^{3-2\gamma_q(f)}\log(2M)q^{\gamma_q(f)\lambda},$$

puis

$$T\ll x^{1/2}M+x^{\gamma_q(f)}M^{2-2\gamma_q(f)}\log(2M).$$

Comme $1\le M\le x^{1/3}$, on obtient bien la conclusion souhaitée. ∎

7. Sommes de type II

PROPOSITION 3. *Pour tout $f\in\mathcal{F}$, toutes suites de nombres complexes a_m et b_n avec $|a_m|\le 1$, $|b_n|\le 1$, $x\ge 2$, $0<\varepsilon\le 1/2$, $x^\varepsilon\le M,N\le x$, $MN\le x$, on a*

$$\sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ mn\le x}} a_mb_n\,\mathrm{e}\,(f(mn)+\beta mn)\ll x^{1-\xi_{q,\varepsilon}(f)}\log x, \tag{49}$$

la constante implicite ne dépendant que de q, avec

$$\xi_{q,\varepsilon}(f)=\min\Big(\frac{\varepsilon}{6},\frac{1}{20}\Big)\cdot\min\bigg(\Big(\frac12-\eta_q\Big)\frac{\log 2}{\log q},2(1-\gamma_q(f))\bigg). \tag{50}$$

Démonstration. Quitte à intervertir les rôles de m et n, on peut supposer que $M\le N$. Comme les constantes implicites sont autorisées à dépendre de q, la majoration (49) est vraie lorsque $N \leq (16q)^2$. Nous supposons donc dans la suite que $N > (16q)^2$. Nous posons

$$S := \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ mn\leq x}} a_m b_n \,\mathrm{e}(f(mn)+\beta mn) \qquad (|a_m|, |b_n| \leq 1,\ M \leq N).$$

Notons tout d'abord que d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$S^2 \ll M \sum_{M<m\leq 2M} \Big| \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ mn\leq x}} b_n \,\mathrm{e}(f(mn)+\beta mn)\Big|^2.$$

Rappelons l'inégalité de van der Corput (cf. par exemple lemme 4 de [32]) : pour tous nombres complexes $z_1, \dots, z_N$ et $R' \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Big|\sum_{j=1}^{N} z_j\Big|^2 \leq \frac{N+R'-1}{R'} \Big\{ \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2 + 2 \sum_{r=1}^{R'-1} \Big(1-\frac{r}{R'}\Big) \sum_{j=1}^{N-r} \Re(z_{j+r}\overline{z_j}) \Big\} \tag{51}$$

où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

Considérons R un nombre réel tel que

$$4 \leq R \leq 4N^{1/4}, \tag{52}$$

et que nous fixerons ultérieurement. L'inégalité (51) appliquée aux nombres complexes

$$z_j = b_{N+j}\,\mathrm{e}(f(m(N+j)) + \beta m(N+j))\mathbb{1}_{m(N+j)\leq x},$$

de modules inférieurs à 1, et à $R' = \lceil R \rceil$ (le plus petit entier $\geq R$), fournit la majoration

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ mn\leq x}} b_n \,\mathrm{e}(f(mn)+\beta mn)\Big|^2 \\ &\quad \leq \frac{N+R'-1}{R'} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ mn\leq x}} 1 + 2\frac{N+R'-1}{R'} \sum_{1\leq r<R'} \Big(1-\frac{r}{R'}\Big) \\ &\qquad\qquad \times \sum_{\substack{N<n\leq 2N-r\\ m(n+r)\leq x}} \Re\big(b_{n+r}\overline{b_n}\,\mathrm{e}\big(f(m(n+r)) - f(mn) + \beta mr\big)\big). \end{aligned} \tag{53}$$

En sommant sur m l'inégalité (53), puis en intervertissant les sommations, et enfin en observant que $\frac{N+R'-1}{R'} \leq \frac{N+R}{R}$ pour $R \leq N$ et que la condition $r < R' = \lceil R \rceil$ équivaut à la condition $r < R$ pour r entier, nous obtenons la majoration

$$(54)\qquad S^2 \ll \frac{N^2M^2}{R} + MN \max_{1\le r<R} \sum_{N<n\le 2N} \Big| \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m(n+r)\le x}} \mathrm{e}\big(f(m(n+r)) - f(mn) + mr\beta\big)\Big|.$$

Le paramètre R ayant vocation à être choisi relativement petit par rapport à M et N, la quantité mr est petite devant mn et l'addition de mr ne va donc pas changer les chiffres de mn de poids supérieurs à un certain paramètre λ, sauf dans certains cas relativement rares. De sorte que l'on peut espérer remplacer dans (54) la fonction f par la fonction tronquée f_λ définie en (14), au prix d'une erreur dont la contribution à S^2 est $o((MN)^2)$. Cet argument a été développé et explicitement mis en forme dans le lemme 5 de [32] puis dans le lemme 3.4 de [16] et nous en présentons ici une variante plus directe.

Désormais nous désignons par λ l'unique nombre entier tel que $q^{\lambda-1} \le MR^2 < q^\lambda$. Notons que cela entraîne que $q^\lambda \le qMR^2 \le 16qMN^{1/2} \le MN$. Lorsque $k, b \in \mathbb{N}^*$ et $kq^\lambda \le b < (k+1)q^\lambda$, on a

$$|b|_j = |k|_j + |b|_{\lambda,j} \qquad (0 \le j < q).$$

Par conséquent, sous la condition $kq^\lambda \le mn < m(n+r) < (k+1)q^\lambda$, ce qui revient à dire que les chiffres de mn et $m(n+r)$ de poids supérieur à λ sont les mêmes, nous avons

$$f(m(n+r)) - f(mn) = f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn).$$

Notons $E(M,N,r,\lambda)$ le nombre des couples (m,n) avec $M < m \le 2M$, $N < n \le 2N$ pour lesquels il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(55)\qquad mn < kq^\lambda \le m(n+r).$$

On a

$$\sum_{N<n\le 2N} \Big| \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m(n+r)\le x}} \mathrm{e}\big(f(m(n+r)) - f(mn) + mr\beta\big)\Big|$$
$$= \sum_{N<n\le 2N} \Big| \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m(n+r)\le x}} \mathrm{e}\big(f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn) + mr\beta\big)\Big| + O(E(M,N,r,\lambda)).$$

Comme

$$\begin{aligned} E(M,N,r,\lambda) &\le \sum_{M<m\le 2M} \sum_{mN/q^\lambda < k \le (2mN+mr)/q^\lambda} \sum_{0<\ell\le mr} \mathbb{1}_{kq^\lambda - \ell \equiv 0 \bmod m} \\ &\le \sum_{M<m\le 2M} \sum_{mN/q^\lambda < k \le (2mN+mr)/q^\lambda} \left(\frac{mr}{m} + 1\right) \\ &\ll \frac{M^2NR}{q^\lambda} \ll \frac{MN}{R}, \end{aligned}$$

on obtient

$$S^2 \ll \frac{N^2M^2}{R} + MN \max_{1\le r\le R} S_2(r,M,N,\lambda), \tag{56}$$

avec

$$S_2(r,M,N,\lambda) := \sum_{N<n\le 2N} \Big| \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m(n+r)\le x}} \mathrm{e}\big(f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn) + mr\beta\big)\Big|.$$

Rappelant la définition de F_λ en (16), d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète nous avons

$$\mathrm{e}(f_\lambda(n)) = \sum_{0\le h<q^\lambda} F_\lambda(h)\,\mathrm{e}(nh/q^\lambda).$$

Nous en déduisons l'identité

$$\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m(n+r)\le x}} \mathrm{e}\big(f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn) + mr\beta\big) \tag{57}$$
$$= \sum_{0\le h,k<q^\lambda} F_\lambda(h)\overline{F_\lambda(-k)} \sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m(n+r)\le x}} \mathrm{e}\bigg(\frac{m((h+k)n+hr)}{q^\lambda} + mr\beta\bigg).$$

En insérant (57) dans (7) puis en effectuant la somme géométrique sur m nous obtenons

$$S_2 \le \sum_{0\le h,k<q^\lambda} |F_\lambda(h)|\,|F_\lambda(-k)| \sum_{N<n\le 2N} \min\bigg(M, \frac{1}{\big|\sin\pi\frac{(h+k)n+hr+r\beta q^\lambda}{q^\lambda}\big|}\bigg).$$

Nous employons alors le lemme suivant qui découle directement du lemme 6 de [32].

Lemme 13. *Soient $a,m\in\mathbb{Z}$ avec $m\ge 1$ et $d=\mathrm{pgcd}(a,m)$. Soit $b\in\mathbb{R}$. Pour tout réel $M>0$, on a*

$$\sum_{0\le n\le m-1} \min\bigg(M, \frac{1}{\big|\sin\pi\frac{an+b}{m}\big|}\bigg) \ll d\min\bigg(M, \frac{1}{\sin\pi\frac{d}{m}\big\|\frac{b}{d}\big\|}\bigg) + m\log m.$$

Nous découpons ainsi l'intervalle $]N;2N]$ en un nombre $\ll 1+N/q^\lambda$ d'intervalles de longueur q^λ, et nous organisons les sommes en h et k suivant les valeurs de $\mathrm{pgcd}(h+k,q^\lambda)$ de sorte que

$$S_2 \ll \bigg(1+\frac{N}{q^\lambda}\bigg)(S_3^{(1)}+S_3^{(2)})$$

avec

$$S_3^{(1)} := \sum_{d\mid q^\lambda} d \sum_{\substack{0\le h,k<q^\lambda\\ \mathrm{pgcd}(h+k,q^\lambda)=d}} |F_\lambda(h)|\,|F_\lambda(-k)| \min\bigg(M, \frac{1}{\sin\pi\frac{d}{q^\lambda}\big\|\frac{hr+q^\lambda\beta r}{d}\big\|}\bigg)$$

et

$$S_3^{(2)} := q^\lambda \log q^\lambda \sum_{0\le h,k<q^\lambda} |F_\lambda(h)|\,|F_\lambda(-k)|.$$

Pour estimer $S_3^{(2)}$, nous employons l'inégalité (33) :

$$S_3^{(2)} \ll (\log N) q^\lambda \Big(\sum_{0\le h<q^\lambda} |F_\lambda(h)|\Big)^2 \ll (\log x) q^{(1+2\eta_q)\lambda}. \tag{58}$$

Pour estimer $S_3^{(1)}$, remplaçons la condition $\mathrm{pgcd}(h+k, q^\lambda) = d$ par la condition plus faible ($h \equiv a \bmod d$ et $k \equiv -a \bmod d$) avec a parcourant l'ensemble des classes résiduelles modulo d. Nous obtenons ainsi

$$S_3^{(1)} \le \sum_{d|q^\lambda} d \sum_{0\le a<d} \min\Big(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{q^\lambda}\big\|\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\big\|}\Big)\Big(\sum_{\substack{0\le h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod d}} |F_\lambda(h)|\Big)^2.$$

Si $d\,|\,q^\lambda$, on note $v_q(d)$ le plus grand entier m tel que $q^m\,|\,d$. En employant la proposition 1 sous la forme

$$\sum_{\substack{0\le h<q^\lambda\\ h\equiv a \bmod d}} |F_\lambda(h)| \ll \Big(\frac{q^\lambda}{d}\Big)^{\eta_q} |F_{v_q(d)}(a)| \qquad (d\,|\,q^\lambda),$$

il suit

$$S_3^{(1)} \ll q^{2\eta_q\lambda} \sum_{d|q^\lambda} d^{1-2\eta_q} \sum_{0\le a<d} |F_{v_q(d)}(a)|^2 \min\Big(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{q^\lambda}\big\|\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\big\|}\Big).$$

D'après l'inégalité (41), on a

$$S_3^{(1)} \ll q^{2\eta_q\lambda} \sum_{d|q^\lambda} d^{1-2\eta_q} q^{(-2+2\gamma_q(f))v_q(d)} \sum_{0\le a<d} \min\Big(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{q^\lambda}\big\|\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\big\|}\Big).$$

La fonction sinus étant concave sur $[0;\pi]$, on a

$$\sin\Big(\pi\frac{d}{q^\lambda}\Big\|\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\Big\|\Big) \ge \frac{d}{q^\lambda}\sin\Big(\pi\Big\|\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\Big\|\Big) = \frac{d}{q^\lambda}\Big|\sin\pi\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\Big|.$$

Ainsi

$$S_3^{(1)} \ll q^{(1+2\eta_q)\lambda} \sum_{d|q^\lambda} d^{-2\eta_q} q^{(-2+2\gamma_q(f))v_q(d)} \sum_{0\le a<d} \min\Big(\frac{dM}{q^\lambda}, \frac{1}{\big|\sin\pi\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\big|}\Big).$$

Nous pouvons alors employer une nouvelle fois le lemme 13 :

$$\sum_{0\le a<d} \min\Big(\frac{dM}{q^\lambda}, \frac{1}{\big|\sin\pi\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\big|}\Big) \ll (r,d)\min\Big(\frac{dM}{q^\lambda}, \frac{1}{\sin\pi\frac{\mathrm{pgcd}(r,d)}{d}\big\|\frac{q^\lambda r\beta}{\mathrm{pgcd}(r,d)}\big\|}\Big) + d\log d.$$

Il suffit maintenant de majorer trivialement le minimum par $\frac{dM}{q^\lambda}$ pour obtenir une majoration indépendante de β :

$$\sum_{0\le a<d}\min\left(\frac{dM}{q^\lambda},\frac{1}{\left|\sin\pi\frac{ar+q^\lambda\beta r}{d}\right|}\right)\ll\frac{rdM}{q^\lambda}+d\log d\ll d\log d,$$

la dernière inégalité résultant du fait que $r\le R$ et $q^\lambda\asymp MR^2$. Ainsi nous avons

$$S_3^{(1)}\ll(\log N)q^{(1+2\eta_q)\lambda}\sum_{d|q^\lambda}d^{1-2\eta_q}q^{(-2+2\gamma_q(f))v_q(d)}.$$

Nous décomposons à présent d sous la forme $d=kq^\delta$ avec $0\le\delta\le\lambda$, $q\nmid k$, et donc $v_q(d)=\delta$, ce qui entraîne

$$S_3^{(1)}\ll(\log x)q^{(1+2\eta_q)\lambda}\sum_{0\le\delta\le\lambda}q^{\delta(-1+2\gamma_q(f)-2\eta_q)}\sum_{\substack{k|q^{\lambda-\delta}\\ q\nmid k}}k^{1-2\eta_q}.$$

Posons

$$0<w_q=\left(\frac{1}{2}-\eta_q\right)\frac{\log 2}{\log q}\le\frac{1}{2}-\eta_q\le\frac{1}{4}\tag{59}$$

(d'après (28)). Comme pgcd(k,q) est un diviseur strict de q, il en résulte que $(k,q)\le q/2$ et nous en déduisons $k=\operatorname{pgcd}(k,q^{\lambda-\delta})\le(k,q)^{\lambda-\delta}\le(q/2)^{\lambda-\delta}$. Nous avons donc, en employant la majoration $\tau(n)\ll n^{\omega_q}$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k|q^{\lambda-\delta}\\ q\nmid k}}k^{1-2\eta_q}&\le\tau(q^{\lambda-\delta})\big(q/2\big)^{(1-2\eta_q)(\lambda-\delta)}\\&\ll q^{\omega_q(\lambda-\delta)+(1-2\eta_q)(\lambda-\delta)-(1-2\eta_q)\frac{\log 2}{\log q}(\lambda-\delta)}\\&=q^{-\omega_q(\lambda-\delta)+(1-2\eta_q)(\lambda-\delta)},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}S_3^{(1)}&\ll(\log x)q^{(2-\omega_q)\lambda}\sum_{0\le\delta\le\lambda}q^{\delta(2\gamma_q(f)-2+\omega_q)}\\&\ll(\log x)q^{(2-\omega_q)\lambda}(1+q^{\lambda(2\gamma_q(f)-2+\omega_q)}).\end{aligned}$$

Finalement,

$$S_3^{(1)}\ll(\log x)(q^{(2-\omega_q)\lambda}+q^{2\gamma_q(f)\lambda}).\tag{60}$$

Ainsi, en regroupant les estimations (58) et (60) nous obtenons

$$S_2\ll(\log x)\left(1+\frac{N}{q^\lambda}\right)(q^{(2-\omega_q)\lambda}+q^{2\gamma_q(f)\lambda}+q^{(1+2\eta_q)\lambda}).$$

Posons

$$\mu_q(f)=\min\big(\omega_q,1-2\eta_q,2(1-\gamma_q(f))\big)=\min\big(\omega_q,2(1-\gamma_q(f))\big).$$

Remarquons que, d'après (59),

$$0 < \mu_q(f) < 1/4. \tag{61}$$

On a ainsi

$$S_2 \ll (\log x)\Big(1+\frac{N}{q^\lambda}\Big)q^{(2-\mu_q(f))\lambda},$$

d'où, d'après (56),

$$S^2 \ll (\log x)(N^2M^2R^{-1} + NMq^{(2-\mu_q(f))\lambda} + N^2Mq^{(1-\mu_q(f))\lambda}).$$

Comme $q^\lambda \asymp MR^2$, il suit

$$S^2 \ll (\log x)NM(NMR^{-1} + M^{2-\mu_q(f)}R^{4-2\mu_q(f)} + NM^{1-\mu_q(f)}R^{2-2\mu_q(f)}). \tag{62}$$

Il nous faut à présent déterminer R de manière optimale suivant les tailles respectives de M et N. Lorsque

$$M \le N^{1-2\mu_q(f)/3}, \tag{63}$$

nous posons $R = 4M^{\frac{\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}}$; cette égalité entraîne que les premier et troisième termes de la somme figurant au membre de droite de (62) sont de même ordre de grandeur. On peut vérifier que pour ce choix, la condition (52) est bien satisfaite. En effet, on a

$$4 \le 4M^{\frac{\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}} \le 4N^{1/10} \le 4N^{1/4}.$$

Nous obtenons alors

$$S^2 \ll (\log x)NM\big(NM^{1-\frac{\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}} + M^{2-\mu_q(f)+\frac{(4-2\mu_q(f))\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}}\big). \tag{64}$$

La condition (63) est précisément équivalente au fait que le deuxième terme de la somme figurant dans (64) n'excède pas le premier. Par conséquent,

$$S^2 \ll (\log x)N^2M^{2-2c_1} \qquad (M \le N^{1-2\mu_q(f)/3}), \tag{65}$$

avec

$$c_1 = c_1(q,f) = \frac{\mu_q(f)}{6-4\mu_q(f)}.$$

Lorsque

$$N^{1-2\mu_q(f)/3} \le M \le N, \tag{66}$$

nous posons $R = 4N^{\frac{1}{5-2\mu_q(f)}}M^{-\frac{1-\mu_q(f)}{5-2\mu_q(f)}}$; là encore il est facile de constater que la condition (52) est remplie. Ce choix de R entraîne cette fois que les premier et deuxième termes de la somme figurant dans (62) sont de même ordre de grandeur. Sous la condition (66), les premier et troisième termes de la somme figurant dans (62) n'excèdent pas le deuxième. Ainsi

$$S^2 \ll (\log x)N^{2-2c_2}M^{2+2c_2-2c_3} \qquad (N^{1-2\mu_q(f)/3} \le M \le N),$$

avec

$$c_2 = c_2(q,f) = \frac{1}{10-4\mu_q(f)} \quad \text{et} \quad c_3 = c_3(q,f) = \frac{\mu_q(f)}{10-4\mu_q(f)}.$$

Notons bien que pour $j = 1, 2, 3$ nous avons $0 < c_j < 1$, et que par ailleurs $c_3 < c_2$. Nous obtenons donc la majoration uniforme

$$S \ll (NM^{1-c_1} + N^{1-c_2}M^{1+c_2-c_3}) \log x. \tag{67}$$

Sous les conditions $M \le N \le x$, $MN \le x$ et $M \ge x^{\varepsilon}$, qui entraînent d'ailleurs $M \le \sqrt{x}$, on a donc

$$\begin{aligned} S &\ll (xM^{-c_1} + (MN)^{1-c_2}M^{2c_2-c_3}) \log x \\ &\ll (xM^{-c_1} + x^{1-c_2}(\sqrt{x})^{2c_2-c_3}) \log x \\ &\ll (x^{1-\varepsilon c_1} + x^{1-c_3/2}) \log x \ll x^{1-c_4} \log x, \end{aligned}$$

avec $c_4 = \min(\varepsilon c_1, c_3/2)$. Or $c_1 \ge \mu_q(f)/6$ et $c_3 \ge \mu_q(f)/10$, ce qui implique la majoration

$$S \ll x^{1-c_5\mu_q(f)} \log x,$$

avec $c_5 = \min(\varepsilon/6, 1/20)$. Compte tenu de la définition de $\mu_q(f)$, nous obtenons bien la conclusion souhaitée. ∎

8. Preuve des théorèmes 1 et 2. Rappelons l'identité de Vaughan pour la fonction de von Mangoldt (cf. la proposition 13.4 de [26] par exemple) : pour $u \ge 1$ et $n \ge 1$, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(n) = \Lambda(n)\mathbb{1}_{n\le u}(n) &+ \sum_{\substack{mk=n \\ k\le u}} \log(m)\mu(k) \\ &- \sum_{\substack{mk\ell=n \\ k,\ell\le u}} \mu(k)\Lambda(\ell) + \sum_{\substack{mk\ell=n \\ k,\ell> u}} \mu(k)\Lambda(\ell). \end{aligned} \tag{68}$$

Posons à présent $u = x^{3/10}$ de sorte que $u \le x^{1/3}$. Nous déduisons de (68) la décomposition

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n)\,\mathrm{e}(f(n) + \beta n) = S_0 + S_1 - S_2 + S_3,$$

avec

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{n\le u} \Lambda(n)\,\mathrm{e}(f(n) + \beta n), \\ S_1 &= \sum_{\substack{m\le u \\ mn\le x}} \mu(m)\log(n)\,\mathrm{e}(f(mn) + \beta mn), \end{aligned}$$

$$S_2 = \sum_{\substack{m_1 \le u \\ m_2 \le u \\ m_1 m_2 n \le x}} \mu(m_1) \Lambda(m_2)\, \mathrm{e}(f(m_1 m_2 n) + \beta m_1 m_2 n),$$

$$S_3 = \sum_{\substack{u<m<x \\ u<n_1<x \\ m n_1 n_2 \le x}} \mu(m) \Lambda(n_1)\, \mathrm{e}(f(m n_1 n_2) + \beta m n_1 n_2).$$

Nous avons classiquement

$$S_0 \ll u.$$

La somme S_1 peut être traitée comme une somme de type I :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{m \le u} \mu(m) \sum_{n \le x/m} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn) \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{m \le u} \mu(m) \int_1^x \sum_{t<n \le x/m} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn)\, \frac{dt}{t} \\ &\ll (\log x) \sum_{m \le u} \max_{t \le x/m} \Big| \sum_{t<n \le x/m} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn) \Big| \\ &\ll (\log x) \sum_{m \le u} \max_{t \le x/m} \Big| \sum_{n<t} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn) \Big|. \end{aligned}$$

En découpant la sommation en m suivant des intervalles dyadiques, et en employant la proposition 2, nous obtenons la majoration

$$S_1 \ll x^{1-\kappa_q(f)} (\log x)^3.$$

Pour traiter S_2, nous posons $m = m_1 m_2$ de sorte que

$$S_2 = \sum_{m \le u^2} \Big(\sum_{\substack{m_1 m_2 = m \\ m_1 \le u \\ m_2 \le u}} \mu(m_1) \Lambda(m_2) \Big) \sum_{mn \le x} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn).$$

De la majoration

$$\sum_{\substack{m_1 m_2 = m \\ m_1 \le u \\ m_2 \le u}} \mu(m_1) \Lambda(m_2) \le \sum_{m_2 | m} \Lambda(m_2) = \log m,$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} S_2 &\ll (\log u) \sum_{m \le u^2} \Big| \sum_{n \le x/m} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn) \Big| \\ &\ll (S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}} + u^3) \log x, \end{aligned}$$

avec

$$S_{\mathrm{I}} = \sum_{m \le u} \Big| \sum_{n \le x/m} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn) \Big|$$

$$S_{\mathrm{II}} = \sum_{u < m \le u^2} \Big| \sum_{u < n \le x/m} \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn) \Big|.$$

Nous traitons S_{I} comme une somme de type I en découpant la sommation sur m suivant des intervalles dyadiques et en appliquant la proposition 2 :

$$S_{\mathrm{I}} \ll x^{1-\kappa_q(f)} (\log x)^2.$$

Nous traitons S_{II} comme une somme de type II : en découpant les sommations sur m et n suivant des intervalles dyadiques il vient

$$S_{\mathrm{II}} \ll (\log x)^2 \sup \Big| \sum_{M < m \le 2M} a_m \sum_{\substack{N < n \le 2N \\ mn \le x}} b_n \, \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn) \Big|$$

où le supremum est pris sous les contraintes $|a_m| \le 1$, $|b_n| \le 1$ pour tous entiers m et n, $M \ge u$, $N \ge u$, $MN \le x$. En appliquant la proposition 3 avec $\varepsilon = 3/10$, nous avons donc

$$S_{\mathrm{II}} \ll (\log x)^3 x^{1-\xi_{q,3/10}(f)}.$$

Ainsi

$$S_2 \ll (\log x)^3 (x^{1-\kappa_q(f)} + x^{1-\xi_{q,3/10}(f)} + x^{9/10}).$$

Traitons enfin la somme S_3 :

$$S_3 = (\log x) \sum_{u < m \le x/u} \mu(m) \sum_{u < n \le x/m} \Bigg(\frac{1}{\log x} \sum_{\substack{u < n_1 \le x \\ n_1 n_2 = n}} \Lambda(n_1) \Bigg) \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn)$$

Nous remarquons que

$$\sum_{\substack{u < n_1 \le x \\ n_1 n_2 = n}} \Lambda(n_1) \le \log n,$$

de sorte que l'on peut réécrire S_3 sous la forme

$$S_3 = (\log x) \sum_{u < m \le x/u} a_m \sum_{u < n \le x/m} b_n \, \mathrm{e}(f(mn) + \beta mn)$$

avec $|a_m| \le 1$, $|b_n| \le 1$ pour tous entiers m et n. En procédant comme pour S_{II}, nous obtenons donc

$$S_3 \ll (\log x)^4 x^{1-\xi_{q,3/10}(f)}.$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \Lambda(n) \, \mathrm{e}(f(n) + \beta n) &\ll (\log x)^4 (x^{1-\kappa_q(f)} + x^{1-\xi_{q,3/10}(f)} + x^{1-9/10}) \\ &\ll (\log x)^4 x^{1-\tau_q(f)}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\tau_q(f) &= \min\Big(\kappa_q(f), \xi_{q,3/10}(f), \frac{1}{10}\Big)\\ &= \min\Big(\frac{1}{20}\Big(\frac{1}{2}-\eta_q\Big)\frac{\log 2}{\log q}, \frac{1-\gamma_q(f)}{10}, \frac{1-\gamma_q(f)}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{6}\Big)\\ &= \min\Big(\frac{1}{20}\Big(\frac{1}{2}-\eta_q\Big)\frac{\log 2}{\log q}, \frac{1-\gamma_q(f)}{10}\Big).\end{aligned}$$

D'après la majoration (43), pour tout $f \in \mathcal{F}$ on a

$$\tau_q(f) \geq \min\Big(\frac{1}{20}\Big(\frac{1}{2}-\eta_q\Big)\frac{\log 2}{\log q}, \frac{8\sigma_q(f)}{5q^2(q-1)\log q}\Big).$$

Comme $\sigma_q(f) \leq q(q-1)/8$, nous aboutissons à

$$\tau_q(f) \geq c_q \sigma_q(f)$$

avec

$$c_q = \frac{1}{q(q-1)} \min\Big(\frac{2(1/2-\eta_q)\log 2}{5\log q}, \frac{8}{5q\log q}\Big) > 0,$$

ce qui fournit l'énoncé du théorème 2.

De la même manière, lorsque $f \in \mathcal{F}_0$, nous obtenons, grâce à la majoration (44) et en tenant du compte du fait que $\|(q-1)\theta\|^2 \leq 1/4$,

$$\tau_q(f) \geq c_q \|(q-1)\theta\|^2$$

avec

$$c_q = \min\Big(\frac{(1/2-\eta_q)\log 2}{5\log q}, \frac{2}{5q(q+\sqrt{2}-1)^2\log q}\Big) > 0,$$

ce qui fournit l'énoncé du théorème 1.

Remerciements. Nous remercions Guy Barat pour ses remarques pertinentes concernant ce travail.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence « ANR-10-BLAN 0103 » MUNUM. Bruno Martin a également bénéficié d'un financement de l'Austrian Science Foundation FWF dans le cadre du projet S9605, faisant partie de l'Austrian National Research Network "Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory".

Références

[1] J.-P. Allouche and J. Shallit, *Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[2] N. L. Bassily and I. Kátai, *Distribution of the values of q-additive functions on polynomial sequences*, Acta Math. Hungar. 68 (1995), 353–361.

[3] R. Bellman and H. N. Shapiro, *On a problem in additive number theory*, Ann. of Math. (2) 49 (1948), 333–340.

[4] J. Bourgain, *Möbius–Walsh correlation bounds and an estimate of Mauduit and Rivat*, J. Anal. Math. 119 (2013), 147–163.
[5] J. Bourgain, *On the Fourier–Walsh spectrum of the Moebius function*, Israel J. Math. 197 (2013), 215–235.
[6] J. Bourgain, *Prescribing the binary digits of primes*, Israel J. Math. 194 (2013), 935–955.
[7] J. Bourgain, *Prescribing the binary digits of primes II*, arXiv:1307.0398.
[8] J. Bourgain, *On the Fourier–Walsh spectrum of the Moebius function II*, J. Anal. Math., to appear.
[9] J. Cassaigne et M. Le Gonidec, *Propriétés et limites de la reconnaissance d'ensembles d'entiers par automates dénombrables*, J. Théor. Nombres Bordeaux 22 (2010), 307–338.
[10] A. Cobham, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory 6 (1972), 164–192.
[11] S. Col, *Diviseurs des nombres ellipséphiques*, Period. Math. Hungar. 58 (2009), 1–23.
[12] A. H. Copeland and P. Erdős, *Note on normal numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 857–860.
[13] C. Dartyge et G. Tenenbaum, *Sommes des chiffres de multiples d'entiers*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), 2423–2474.
[14] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 3ème éd., Grad. Texts in Math. 74, Springer, New York, 2000.
[15] M. Drmota and C. Mauduit, *Weyl sums over integers with affine digit restrictions*, J. Number Theory 130 (2010), 2404–2427.
[16] M. Drmota, C. Mauduit and J. Rivat, *Primes with an average sum of digits*, Compos. Math. 145 (2009), 271–292.
[17] S. Eilenberg, *Automata, Languages, and Machines. Vol. A*, Pure Appl. Math. 58, Academic Press, New York, 1974.
[18] E. Fouvry et C. Mauduit, *Méthodes de crible et fonctions sommes des chiffres*, Acta Arith. 77 (1996), 339–351.
[19] E. Fouvry et C. Mauduit, *Sommes des chiffres et nombres presques premiers*, Math. Ann. 305 (1996), 571–599.
[20] E. Fouvry et C. Mauduit, *Sur les entiers dont la somme des chiffres est moyenne*, J. Number Theory 114 (2005), 135–152.
[21] A. O. Gelfond, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*, Acta Arith. 13 (1967/1968), 259–265.
[22] B. Green, *On (not) computing the Möbius function using bounded depth circuits*, Combin. Probab. Comput. 21 (2012), 942–951.
[23] G. Harman, *Primes with preassigned digits*, Acta Arith. 125 (2006), 179–185.
[24] G. Harman and I. Kátai, *Primes with preassigned digits. II*, Acta Arith. 133 (2008), 171–184.
[25] J. Hartmanis and H. Shank, *On the recognition of primes by automata*, J. Assoc. Comput. Mach. 15 (1968), 382–389.
[26] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
[27] I. Kátai, *Distribution of digits of primes in q-ary canonical form*, Acta Math. Hungar. 47 (1986), 341–359.
[28] G. Lejeune Dirichlet, *Mathematische Werke. Bände I, II*, Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker, Chelsea, Bronx, NY, 1969.
[29] C. Mauduit, *Propriétés arithmétiques des substitutions*, dans : Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1989–90, Progr. Math. 102, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992, 177–190.

[30] C. Mauduit, *Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), 2525–2549.

[31] C. Mauduit et J. Rivat, *La somme des chiffres des carrés*, Acta Math. 203 (2009), 107–148.

[32] C. Mauduit et J. Rivat, *Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers*, Ann. of Math. 171 (2010), 1591–1646.

[33] M. Minsky and S. Papert, *Unrecognizable sets of numbers*, J. Assoc. Comput. Mach. 13 (1966), 281–286.

[34] P. Sarnak, *Möbius randomness and dynamics*, http://www.math.princeton.edu/sarnak/, 2010.

[35] M.-P. Schützenberger, *A remark on acceptable sets of numbers*, J. Assoc. Comput. Mach. 15 (1968), 300–303.

[36] W. Sierpiński, *Sur les nombres premiers ayant des chiffres initiaux et finals donnés*, Acta Arith. 5 (1959), 265–266.

[37] D. Wolke, *Primes with preassigned digits*, Acta Arith. 119 (2005), 201–209.

Bruno Martin
Laboratoire de Mathématiques
Pures et Appliquées Joseph Liouville
Centre Universitaire de la Mi-Voix
Maison de la Recherche Blaise Pascal
50 rue F. Buisson, B.P. 699
62228 Calais Cedex, France
E-mail: martin@lmpa.univ-littoral.fr

Joël Rivat
Institut de Mathématiques de Marseille
UMR 7373 CNRS
Université d'Aix-Marseille
163 avenue de Luminy, Case 907
13288 Marseille Cedex 9, France
E-mail: rivat@iml.univ-mrs.fr

Christian Mauduit
Institut de Mathématiques de Marseille
UMR 7373 CNRS
Université d'Aix-Marseille
163 avenue de Luminy, Case 907
13288 Marseille Cedex 9, France
and
IMPA–CNRS, UMI 2924
Instituto de Matemática
Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina 110
22460-320 Rio de Janeiro, Brasil
E-mail: mauduit@iml.univ-mrs.fr

Reçu le 10.5.2013
et révisé le 8.4.2014 (7439)