ACTA ARITHMETICA
152.3 (2012)

Sommes friables de fonctions multiplicatives aléatoires

par

Joseph Basquin (Nancy)

1. Introduction et description des résultats

1.1. Fonctions multiplicatives aléatoires. L'étude des sommes de fonctions multiplicatives est un domaine central de la théorie analytique des nombres. Ces fonctions possèdent, dans la plupart des cas intéressants, un comportement statistique complexe.

D'où l'idée, mise en pratique par plusieurs auteurs, de considérer des fonctions multiplicatives *aléatoires*, dont les variations, que l'on peut appréhender par les outils de la théorie des probabilités, fournissent un modèle pertinent de la situation arithmétique. Selon les hypothèses effectuées sur les variables aléatoires en cause, de tels modèles peuvent être adaptés aux diverses situations concrètes rencontrées en théorie des nombres.

La voie privilégiée par Wintner dans [14] consiste è considérer, pour chaque nombre premier p, une variable aléatoire de Bernoulli $f(p)$, prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité $1/2$, et à étendre par *multiplicativité* cette fonction f à l'ensemble des entiers sans facteur carré. Ceci donne lieu à la définition suivante.

Définition 1.1. Notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, soient $\{f(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$, et f la fonction multiplicative définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f(n) := \mu(n)^2 \prod_{p\mid n} f(p).$$

Sous ces hypothèses, nous dirons que f est une *fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner*.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N25, 11N37; Secondary 60G42.
Key words and phrases: multiplicative functions, random multiplicative functions, friable integers, martingales, Doob's inequality.

DOI: 10.4064/aa152-3-2

Posons

$$M_f(x) := \sum_{n \le x} f(n) \qquad (x \ge 1).$$

Une mesure de l'indépendance statistique des facteurs premiers des entiers est obtenue en comparant la fonction sommatoire de telles fonctions multiplicatives aléatoires à celle d'un modèle probabiliste, comme par exemple celui d'une somme de variables aléatoires centrées indépendantes relevant du théorème central limite.

Citons un premier résultat de Wintner [14] allant dans cette direction. Nous utilisons dorénavant la mention pspour qualifier une assertion aléatoire valide presque sèrement.

Théorème A. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons*

$$M_f(x) \ll x^{1/2+\varepsilon} \qquad (x \ge 1) \qquad ps.$$

L'enjeu essentiel du problème est de comparer le cas étudié ici au cas sans contrainte arithmétique, c'est-à-dire $f(n) = \pm 1$ avec probabilité $1/2$, pour lequel la loi du logarithme itéré fournit l'estimation ([1])

$$M_f(x) \ll \sqrt{x \log_2 x},$$

et ainsi d'élucider l'influence de la condition arithmétique de multiplicativité.

Dans un travail non publié, Erdős obtient l'existence d'une constante $c_1 > 0$ pour laquelle on a la majoration

$$M_f(x) \ll \sqrt{x}\,(\log x)^{c_1} \qquad \text{ps.}$$

Halász [5] précise cette majoration et établit le résultat suivant.

Théorème B. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que l'on ait*

$$M_f(x) \ll \sqrt{x}\, e^{c_2\sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}} \qquad (x \ge 16) \qquad ps.$$

Dans une version préliminaire [9] (améliorée depuis) d'un récent travail, Lau, Tenenbaum et Wu précisent encore cette majoration et obtiennent, pour une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner f,

$$M_f(x) \ll \sqrt{x}\,(\log_2 x)^{5/2+\varepsilon} \qquad \text{ps.} \tag{1.1}$$

1.2. Entiers friables. Nous utilisons la notation $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) pour le plus grand (resp. petit) facteur premier d'un entier n avec la convention $P^+(1) := 1$ (resp. $P^-(1) := \infty$). Un entier dont le plus grand facteur premier ne dépasse pas y est dit *y-friable*. Nous désignons par $S(x, y)$

([1]) Ici et dans la suite, nous désignons par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

l'ensemble des entiers y-friables inférieurs ou égaux à x et par $\Psi(x, y)$ son cardinal. Pour une fonction arithmétique f, nous posons de plus

$$\Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x,y)} f(n).$$

Nous notons

$$\Psi^*(x, y) := \Psi_{\mu^2}(x, y)$$

le nombre des entiers y-friables, sans facteur carré et n'excédant pas x.

L'étude de la friabilité et de son interaction avec les critères usuels de description utilisés en théorie probabiliste des nombres constitue une branche essentielle de l'arithmétique. Ce sujet fait l'objet d'une importante littérature depuis les années 1950, en particulier ces vingt dernières années.

1.3. Résultats. Nous nous proposons ici d'étudier les sommes friables $\Psi_f(x, y)$ d'une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner f.

Un raisonnement statistique laissant augurer que les termes de la somme se comportent comme des variables aléatoires indépendantes, il est raisonnable d'espérer que la somme se comporte comme la racine carrée du nombre de termes, éventuellement multipliée par un facteur à faible croissance en x et y.

Posons $\vartheta(y) := \sum_{p \leq y} \log p$. Nous pouvons à présent énoncer notre résultat principal.

Théorème 1.2. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes positives c_3, c_4, c_5, c_6 telles que nous ayons presque sûrement*

$$\Psi_f(x, y) \begin{cases} \ll \sqrt{x}\,(\log_2 x)^{2+\varepsilon} & \text{si } x \geq y \geq x^{c_3(\log_3 x)/\log_2 x} \\ & \text{et } x \geq 16, \\ \ll \sqrt{\Psi^*(x, y)}\, e^{c_4 u}(\log x)^{c_5} & \text{si } y < x^{c_3(\log_3 x)/\log_2 x}, \\ & \vartheta(y) > c_6 \log x \text{ et } x \geq 16. \end{cases}$$

Remarques. (i) Dans le cas particulier $y = x$, il est à noter que le théorème précédent fournit une amélioration du résultat (1.1) :

$$M_f(x) \ll \sqrt{x}\,(\log_2 x)^{2+\varepsilon} \quad \text{ps.}$$

(ii) Lorsque $\vartheta(y) \leq \log x$ et $x \geq 2$, nous avons

$$\Psi_f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } 1 - 2^{-\pi(y)}, \\ 2^{\pi(y)} & \text{avec probabilité } 2^{-\pi(y)}. \end{cases}$$

En effet, dans ce domaine, on a

$$\Psi_f(x, y) = \sum_{P^+(n) \leq y} f(n) = \prod_{p \leq y} (1 + f(p)) = 0$$

si et seulement s'il existe $p \leq y$ tel que $f(p) = -1$, ce qui intervient avec probabilité $1 - 2^{-\pi(y)}$.

Le théorème 1.2 implique le résultat suivant.

Corollaire 1.3. *Soient f une fonction multiplicative au sens de Wintner et $\varepsilon > 0$. Il existe une constante positive C_ε telle que, pour $x, y \geq 2$ et $y \geq C_\varepsilon \log x$, nous ayons*

$$\Psi_f(x,y) \ll \Psi^*(x,y)^{1/2+\varepsilon}.$$

2. Lemmes

2.1. Évaluation d'une somme de fonction multiplicative. Nous désignons par $\sum_n^{y,z}$ une sommation dont l'indice entier n est soumis à la condition $p \mid n \Rightarrow y < p \leq z$.

Pour $y \geq 2$, nous posons de plus $L(y) := \exp\{(\log y)^{3/5}/(\log_2 y)^{1/5}\}$.

La majoration suivante, obtenue par Lau, Tenenbaum et Wu ([9]) pour certaines sommes de fonctions multiplicatives, prolonge le lemme 3 de [5].

Lemme 2.1. *Soient $\gamma, \delta > 0$, $y \geq 2$, $\kappa \geq 1$ et $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $b > a$. Il existe des constantes $c_7, c_8, c_9 > 0$ telles que nous ayons, uniformément pour $\gamma \geq c_8/L(y)^{c_9}$ et $y \geq \{b/(b-a)\}^{1+\delta}$,*

$$\sum_{a<r\leq b}^{y,y^{1+\gamma}} \mu(r)^2 \kappa^{\omega(r)} \leq c_7 \frac{b-a}{\log y} \kappa e^{2\gamma\kappa}.$$

Démonstration. En suivant la méthode employée par Halász dans [5, lemme 3(ii)], il vient

$$A := \sum_{a<r\leq b}^{y,y^{1+\gamma}} \mu(r)^2 \kappa^{\omega(r)} \leq \frac{1}{\log a} \sum_{m\leq b/y}^{y,y^{1+\gamma}} \mu(m)^2 \kappa^{\omega(m)+1} \sum_{a/m<p\leq b/m} \log p.$$

Notons que l'on peut supposer $b > y$, car dans le cas contraire, la somme à estimer est nulle. Observons également que les hypothèses $y \geq \{b/(b-a)\}^{1+\delta}$ et $m \leq b/y$ impliquent

$$\frac{b-a}{m} \geq \frac{b}{my^{1/(1+\delta)}} \geq \left(\frac{b}{m}\right)^{1-1/(1+\delta)} > 1. \tag{2.1}$$

Le théorème de Brun–Titchmarsh (voir [10, théorème I.4.16]) nous permet alors, pour $m \leq b/y$, de majorer la somme en p de la façon suivante :

$$\sum_{a/m<p\leq b/m} \log p \leq \log(b/m) \sum_{a/m<p\leq b/m} 1 \leq cbt \frac{(b-a)\log(b/m)}{m\log((b-a)/m)}.$$

La relation (2.1) implique par ailleurs que

$$\begin{aligned} A &\le c_{10}\frac{(b-a)\kappa\log(b/m)}{(\log a)\log((b-a)/m)}\sum_{m\le b/y}^{y,y^{1+\gamma}}\frac{\mu(m)^2\kappa^{\omega(m)}}{m} \\ &\le c_{10}\frac{(b-a)\kappa}{\log a}\prod_{y<p\le y^{1+\gamma}}\Big(1+\frac{\kappa}{p}\Big). \end{aligned}$$

On conclut en faisant usage de l'estimation suivante, découlant par exemple du lemme 3.6 de [3] :

$$\sum_{y<p\le y^{1+\gamma}}\frac{1}{p}=\log(1+\gamma)+O\Big(\frac{1}{L(y)^{c_9}}\Big)\le 2\gamma,$$

dès lors que $\gamma\ge c_8/L(y)^{c_9}$. ∎

2.2. Espérance de fonctions multiplicatives aléatoires. Le lemme suivant est dû à Bonami [1]. Halász ([5, lemme 2]) en a donné une nouvelle démonstration. La formulation donnée ici est adaptée au cas des fonctions multiplicatives aléatoires.

Lemme 2.2. *Soient f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner, $l\ge 2$ un entier pair, et $\{a_n\}_{n\ge1}$ une suite de nombres complexes. Nous avons*

$$\Big|\mathbb{E}\Big\{\Big(\sum_{n\ge1}a_nf(n)\Big)^l\Big\}\Big|\le\Big(\sum_{n\ge1}\mu(n)^2|a_n|^2(l-1)^{\Omega(n)}\Big)^{l/2}.$$

Cette majoration s'avère cruciale pour évaluer les moments d'ordre pair de fonctions multiplicatives aléatoires.

Remarque. Pour $l=2$ et $\{a_n\}_{n\ge1}$ égale à la fonction indicatrice des entiers y-friables inférieurs à x, la majoration fournie par le lemme précédent est en fait une égalité. Nous avons en effet

$$\mathbb{E}(\Psi_f(x,y)^2)=\Psi^*(x,y)\qquad(x,y\ge2). \tag{2.2}$$

Cela résulte du développement du carré sous la forme

$$\mathbb{E}(\Psi_f(x,y)^2)=\mathbb{E}\Big\{\sum_{m,n\in S(x,y)}f(m)f(n)\Big\}=\sum_{m,n\in S(x,y)}\mathbb{E}(f(m)f(n)).$$

Il suffit ensuite d'observer que, si m et n sont sans facteur carré et $m\ne n$, il existe un nombre premier p tel que $p\parallel mn$ ([2]). Il en découle

$$\mathbb{E}(f(m)f(n))=\mathbb{E}(f(p))\mathbb{E}(f(mn/p))=0.$$

([2]) Ici $p^\nu\parallel a$ signifie : $p^\nu\mid a$ et $p^{\nu+1}\nmid a$.

2.3. Entiers friables sans facteur carré. Le résultat suivant, obtenu par La Bretèche et Tenenbaum [2], fournit une description de la répartition des entiers friables sans facteur carré dans les petits intervalles.

Lemme 2.3. *Soit $\kappa \geq 1$. Nous avons, uniformément sous les conditions $x \geq y \geq 2$ et $\max(1, xy^{-\kappa}) \leq z \leq x$,*

$$\Psi^*(x+z,y) - \Psi^*(x,y) \ll \frac{z}{x}\Psi^*(x,y).$$

Posons à présent $\varphi(s,y) := \sum_{p\leq y} \log(1+1/p^s)$ $(s \geq 0)$ et désignons par $\alpha = \alpha(x,y)$ l'unique solution positive de l'équation

$$-\varphi'(\alpha,y) = \sum_{p\leq y} \frac{\log p}{1+p^\alpha} = \log x. \tag{2.3}$$

Par ailleurs, nous désignons par $\beta := \beta(x,y)$ l'unique solution positive de l'équation

$$\sum_{p\leq y} \frac{\log p}{p^\beta - 1} = \log x.$$

Pour $t > 0$, $t \neq 1$, nous définissons $\xi(t)$ comme l'unique solution réelle non nulle de l'équation

$$e^\xi = 1 + t\xi,$$

et posons $\xi(1) = 0$.

Rappelons que pour $\varepsilon > 0$, $x \geq x_0(\varepsilon)$ et $(\log x)^{1+\varepsilon} < y \leq x$, nous avons les estimations (voir (7.8) de [7] et (2.17) de [2])

$$\left.\begin{matrix}\alpha(x,y)\\ \beta(x,y)\end{matrix}\right\} = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u(\log y)^2}\right), \tag{2.4}$$

où nous avons posé

$$L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}.$$

Le résultat suivant est un analogue du théorème 2.4 de [3], énoncé ici dans le cas des entiers friables sans facteur carré.

Lemme 2.4. *Il existe des constantes absolues positives b_1, b_2, et une fonction $b = b(x,y;d) \in [b_1, b_2]$ telles que, sous les conditions*

$$x \geq y \geq 2, \qquad \vartheta(y) > 2\log x, \qquad 1 \leq d \leq x,$$

nous ayons uniformément

$$\Psi^*\left(\frac{x}{d}, y\right) = \frac{\Psi^*(x,y)}{d^\alpha} e^{-bt^2/u}\left\{1 + O\left(\frac{t}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u_y}\right)\right\}, \tag{2.5}$$

où $t := (\log d)/\log y$, $u_y := u + (\log y)/\log(u+2)$, et $\alpha = \alpha(x,y)$ est défini par (2.3).

Démonstration. Notons que nous pouvons supposer x et y assez grands. En effet, lorsque x est borné, le résultat est acquis sous réserve que les constantes implicites des termes d'erreurs soient choisies suffisamment grandes. Si y est borné, la relation $\vartheta(y) > 2\log x$ implique que x est borné à son tour, d'où le résultat. Nous supposons donc dans toute la suite que x et y sont suffisamment grands.

Plaçons-nous tout d'abord dans le domaine

$$y > (\log x)^3, \qquad x \geq x_0. \tag{2.6}$$

Nous pouvons faire appel aux résultats de [3] concernant le comportement local de $\Psi(x,y)$. Au vu de l'estimation (2.4), nous avons $\beta \geq 3/5$, dès que y est assez grand. Les quantités $\zeta(2\beta, y)$ et $\prod_{p\leq y}(1+p^{-2\beta})$ étant bornées, le corollaire 2.6 de [3] nous permet alors d'écrire

$$\Psi^*(x,y) = \frac{\Psi(x,y)}{\zeta(2\beta,y)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u_y}\Big)\Big\},$$

où nous avons posé, pour $y \geq 2$,

$$\zeta(s,y) := \sum_{P^+(n)\leq y}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\leq y}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}.$$

Nous avons d'une part

$$\zeta(2\beta,y) = \zeta(2\beta) + O(1/u_y),$$

et d'autre part

$$\sum_{p\leq y}\frac{(\beta-\alpha)(\log p)^2}{p^\beta - 1} \ll \sum_{p\leq y}\frac{(p^\beta - p^\alpha)\log p}{(p^\alpha+1)(p^\beta-1)} = \sum_{p\leq y}\frac{2\log p}{(p^\alpha+1)(p^\beta-1)} \ll 1,$$

ce qui implique encore

$$\beta - \alpha \ll 1/(u(\log y)^2).$$

Le théorème 2.4 de [3] implique alors

$$\Psi^*\Big(\frac{x}{d},y\Big) = \frac{\Psi^*(x,y)}{d^\alpha}\exp\Big\{\frac{-bt^2}{u} + (\alpha-\beta)\log d\Big\}\Big\{1+O\Big(\frac{t}{u}+\frac{1}{u_y}\Big)\Big\},$$

sous la condition (2.6), ce qui fournit bien la formule (2.5) dans ce domaine. De plus, on peut y remplacer $t/\sqrt{u}$ par t/u dans le terme d'erreur.

Il reste à examiner le cas

$$x \geq x_0, \qquad 2\log x < \vartheta(y) \leq (\log x)^3.$$

Nous pouvons nous limiter à prouver le résultat lorsque $t \leq u-1$, i.e. $d \leq x/y$. En effet, si nous supposons le résultat établi dans ce sous-domaine, nous avons, lorsque $x/y < d \le x$,

$$\Psi^*\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \asymp \frac{x}{d} = \frac{x}{dy} y \ll \frac{x}{dy}\, \frac{\Psi^*(x,y)}{(x/y)^\alpha} \sqrt{u}\, e^{-b(u-1)^2/u}$$
$$\ll \frac{\Psi^*(x,y)}{d^\alpha} e^{-bu/2} \ll \frac{\Psi^*(x,y)}{d^\alpha} e^{-bt^2/2u},$$

car $\alpha < 1$ d'après le lemme 2.8 de [2] sous la forme

$$\alpha = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} \frac{\log(1+z)}{\log y},$$

où $z := z(x,y) > 0$ est implicitement défini par $\vartheta(y) = (2+z)\log y$.

Notons que dans le domaine considéré, nous avons $u \gg u_y$ et le théorème 2.1 de [2] fournit, pour $1 \le d \le x/y$,

$$\Psi^*\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = e^{h(u-t)} \Big\{1 + O\Big(\frac{t+1}{u}\Big)\Big\},$$

où nous avons posé

$$h(v) := \alpha_v v \log y + \varphi(\alpha, y) + g(\alpha\sqrt{\sigma_2}), \qquad \alpha_v := \alpha(y^v, y) \qquad (v \ge 1),$$
$$g(z) := \log\Big\{\frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2}\, dt\Big\}, \qquad \sigma_2 := \frac{d^2\varphi}{ds^2}(\alpha, y).$$

Il est établi en (2.35) de [2] que

$$h'(v) = \alpha_v \log y + O\Big(\frac{1}{\sqrt{v} + v\log(1+z)} + \frac{1}{v}\Big) \qquad (v \ge 1). \tag{2.7}$$

Il vient alors, pour $t \le u-1$,

$$h(u-t) = h(u) - \alpha_u t \log y - I + R,$$

avec $R \ll \int_{u-t}^u dv/\sqrt{v} \ll t/\sqrt{u}$ et

$$I := (\log y) \int_{u-t}^u \{\alpha_v - \alpha_u\}\, dv \asymp \int_{u-t}^u \int_v^u \frac{dw\, dv}{w} = -(u-t)\log\Big(\frac{u}{u-t}\Big) + t,$$

grâce à l'estimation $\alpha_v' \asymp -1/(v\log y)$ $(v \ge 1)$ obtenue dans [2]. Il vient ainsi

$$I \asymp t^2/u,$$

ce qui fournit le résultat car $-I + R \asymp -t^2/u + O(1)$ lorsque $t > \sqrt{u}$.

Notons cependant que l'on peut estimer R plus précisément lorsque $t \gg \sqrt{u}\log u$:

$$R \ll \int_1^u \frac{\log(2u/v)\,dv}{\sqrt{v}+v\log(2u/v-1)} \asymp \int_1^{2u-1} \frac{u\log(w+1)\,dw}{w\sqrt{wu}+uw\log w}$$
$$\ll \int_1^{1+1/\sqrt{u}} \sqrt{u} + \int_{1+1/\sqrt{u}}^{2u-1} \frac{\log(w+1)\,dw}{w\log w} \ll \log u. \ \blacksquare$$

Remarque. La démonstration précédente montre également que l'on peut remplacer $t/\sqrt{u}$ par t/u dans le terme d'erreur de (2.5), dans tout domaine du type

$$x \ge y \ge 2, \qquad \vartheta(y) \ge (2+\varepsilon)\log x,$$

puisque dans ce cas, (2.7) fournit $R \ll \int_{u-t}^u dv/v \ll \log(u/(u-t)) \ll t/u$ pour $t \le u/2$.

Le lemme suivant s'avère utile pour évaluer certaines sommes portant sur les nombres premiers.

Lemme 2.5. *Nous avons, uniformément pour $x \ge y \ge 2$ et $2\log x < \vartheta(y)$,*

$$\sum_{p\le y} \frac{1}{p^\alpha} = \log_2 y + \frac{uw}{w-1}\left(1+O\left(\frac{1}{\log y}+\frac{1}{\log 2u}\right)\right), \tag{2.8}$$

où $w := \vartheta(y)/\log x$ et $\alpha = \alpha(x,y)$ est défini par (2.3).

Démonstration. Le lemme 3.6 de [3] fournit, pour $y \ge 2$,

$$\sum_{p\le y} \frac{1}{p^\alpha} = \log_2 y + \left\{1+O\left(\frac{1-\alpha}{L(y)^{c_{11}}}\right)\right\}\int_1^{v_\alpha} t\xi'(t)\,dt + O(1),$$

où nous avons posé

$$v_\alpha := \frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log y}.$$

Il découle du lemme 2.7 de [2] que

$$\log x = \frac{y^{1-\alpha}-1}{(1+y^{-\alpha})(1-\alpha)}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} + O(1)$$

et des formules (2.17) et (2.18) de [2] que

$$1+y^{-\alpha} = \frac{w}{w-1}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} \qquad (x \ge y \ge 2,\ 2\log x < \vartheta(y)).$$

Nous obtenons alors l'estimation

$$v_\alpha = \frac{uw}{w-1}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\},$$

et la relation

$$\xi'(t) = \frac{1}{t}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log 2t}\right)\right\} \qquad (t \geq 1)$$

permet de conclure. ∎

3. Comportement local de $\Psi_f(x,y)$

3.1. Martingale $y \mapsto \Psi_f(x,y)$ et inégalité maximale. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires et $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ une filtration, i.e. une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

Nous rappelons que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est dite une *$\mathcal{F}$-martingale* (resp. une *$\mathcal{F}$-sous-martingale*) si, pour tout entier $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} \quad (\text{resp.} \geq X_{n-1}) \quad \text{ps.}$$

Rappelons l'inégalité de Doob pour les sous-martingales positives (voir par exemple [13, §14.6, Theorem]).

Lemme 3.1. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une $\mathcal{F}$-sous-martingale positive. Pour tous $t > 0$ et $n \geq 0$, nous avons*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{k\leq n} X_k \geq t\Big) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{t}.$$

Rappelons également l'assertion suivante (voir [13, §14.6, Lemma]).

Lemme 3.2. *Si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}$-martingale, l est un nombre entier ≥ 1, et $\mathbb{E}\,|X_n^l| < \infty$ $(n \geq 0)$, alors $\{X_n^l\}_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}$-sous-martingale.*

Considérant une fonction aléatoire au sens de Wintner f, nous désignons à présent par $\mathcal{F}_y := \sigma\{f(p) : p \leq y\}$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{f(p)\}_{p\leq y}$, et par $\mathcal{F}$ la filtration $\{\mathcal{F}_y\}_{y\geq 2}$.

Proposition 3.3. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $x \geq 1$, la suite de variables aléatoires $\{\Psi_f(x,y)\}_{y\geq 2}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.*

Démonstration. Notons d'emblée que $\Psi_f(x,y)$ est $\mathcal{F}_y$-mesurable pour $y \geq 2$. Par ailleurs, pour tout $y \geq 2$ premier nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Psi_f(x,y) \,|\, \mathcal{F}_{y-1}) &= \mathbb{E}(\Psi_f(x,y-1) \,|\, \mathcal{F}_{y-1}) + \mathbb{E}(f(y)\Psi_f(x/y,y-1) \,|\, \mathcal{F}_{y-1}) \\ &= \Psi_f(x,y-1) + \Psi_f(x/y,y-1)\mathbb{E}(f(y)) = \Psi_f(x,y-1),\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(f(y)) = 0$.

Pour y non premier, la relation précédente est bien encore vérifiée car $\Psi_f(x,y) = \Psi_f(x,y-1)$. ∎

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 2.1 de [12].

LEMME 3.4. *Soient $\{u_n\}_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs et $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Supposons qu'il existe une constante $c_{12}>0$ telle que pour tout $n\geq 0$ et $t>0$, nous ayons*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{k\leq n}|X_k|\geq t\Big)\leq \frac{c_{12}}{t}\sum_{k\leq n}u_k.$$

Alors il existe une constante $c_{13}>0$ telle que pour toute suite croissante de réels positifs $\{v_n\}_{n\geq 0}$, nous ayons, pour tout $n\geq 0$ et $t>0$,

$$\mathbb{P}\bigg(\sup_{k\leq n}\frac{|X_k|}{v_k}\geq t\bigg)\leq \frac{c_{13}}{t}\sum_{k\leq n}\frac{u_k}{v_k}.$$

Nous pouvons en déduire l'estimation suivante.

LEMME 3.5. *Soit*

$$N_j:=\int_1^X \frac{\Psi_f(v,z_j)^2}{v^2}\,dv. \tag{3.1}$$

Nous avons, pour tout $t>0$,

$$\mathbb{P}\bigg(\sup_{j\leq J}\frac{N_j}{\log z_j}>t\bigg)\ll\frac{\log h}{t},$$

avec $X\geq 2$, $z_0\geq 2$, $h:=(\log X)/\log z_0$, $\gamma>0$, $z_j:={z_0}^{(1+\gamma)^j}$ $(j\geq 1)$, $J:=\min\{j\geq 1: z_j\geq X\}$.

Démonstration. La relation (2.2) et l'estimation du théorème III.5.1 de [10],

$$\Psi(x,y)\ll xe^{-u/2}\qquad (x\geq y\geq 2), \tag{3.2}$$

impliquent, pour $v\geq 2$,

$$\mathbb{E}(\Psi_f(v,z_j)^2)=\Psi^*(v,z_j)\leq\Psi(v,z_j)\ll ve^{-(\log v)/(2\log z_j)}.$$

Par conséquent, pour tout $j\leq J$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\;N_j=\int_1^X\frac{\mathbb{E}(\Psi_f(v,z_j)^2)}{v^2}\,dv\ll\int_1^X\frac{e^{-(\log v)/(2\log z_j)}}{v}\,dv\ll\log z_j.$$

La proposition 3.3 nous assure que $\{\Psi_f(v,z_j)\}_{j\leq J}$ est une $\{\mathcal{F}_{z_j}\}_{j\leq J}$-martingale et donc que la suite $\{N_j/\log z_0\}_{j\leq J}$ est une $\{\mathcal{F}_{z_j}\}_{j\leq J}$-sous-martingale. Nous avons ainsi, par l'inégalité de Doob pour les sous-martingales positives, pour tout $t>0$ et tout $j\leq J$,

$$\mathbb{P}\bigg(\sup_{k\leq j}\frac{N_k}{\log z_0}>t\bigg)\leq\frac{\mathbb{E}\,N_j}{t\log z_0}\leq c_{14}\frac{(1+\gamma)^j}{t}\leq c_{14}\frac{\sum_{k\leq j}u_k}{t},$$

où nous avons posé $u_0:=1$ et $u_k:=\gamma(1+\gamma)^k$ $(k\geq 1)$. En effet, nous avons $\sum_{k\leq j}u_k=(1+\gamma)^{j+1}-\gamma\geq(1+\gamma)^j$ pour tout $j\leq J$.

Appliquons le lemme 3.4 avec la suite croissante $v_k := (1+\gamma)^k$ $(k \geq 0)$, et il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{j\leq J}\frac{N_j}{\log z_j} > t\Big) &= \mathbb{P}\Big(\sup_{j\leq J}\frac{N_j}{v_j(\log z_0)} > t\Big)\\ &\leq c_{15}\frac{\sum_{j\leq J} u_j/v_j}{t} \ll \frac{1+\gamma J}{t},\end{aligned}$$

d'où le résultat, puisque $J \asymp (\log h)/\gamma$. ∎

Remarque. La majoration triviale donnant

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{j\leq J}\frac{N_j}{\log z_j} > t\Big) \leq \sum_{j\leq J}\mathbb{P}\Big(\frac{N_j}{\log z_j} > t\Big) \ll \frac{J}{t} \asymp \frac{\log h}{\gamma t},$$

le lemme précédent permet de gagner un facteur $1/\gamma$.

3.2. Étude des variations de $\Psi_f(x,y)$. Nous ferons usage des notations additionnelles suivantes. Étant donnée une suite strictement croissante d'entiers $\{x_k\}_{k\geq 1}$, nous posons, pour tout $j,k \geq 1$,

$$y_{k,j} := x_k^{1/j},$$

et désignons l'ensemble de tous les intervalles dyadiques inclus dans $]x_{k-1}, x_k]$ par

$$\mathcal{D}_k := \{x_{k-1} +](s-1)2^m, s2^m] : s \geq 1,\ m \geq 0,\ s2^m \leq x_k - x_{k-1}\}. \tag{3.3}$$

En vue d'obtenir une majoration des quantités $|\Psi_f(x,y) - \Psi_f(x_k,y)|$, pour $x_{k-1} < x \leq x_k$ et $y \leq x_k$, nous établissons le lemme suivant, analogue du lemme 1 de [5]. La différence réside ici dans la prise en compte d'un paramètre de friabilité. Nous faisons ici pleinement usage de la martingale $y \mapsto \Psi_f(x,y)$, afin d'obtenir des majorations uniformes sur de larges plages du paramètre y.

Lemme 3.6. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Il existe des constantes $c_{16} \in\,]0,1[$ et $c_{17} > 0$ telles que, posant* (3)

$$x_k := [\exp\{k^{c_{16}}\}], \qquad J_k := \max\{j \geq 1 : 2\log x_k < \vartheta(y_{k,j})\} \qquad (k \geq 1),$$

nous ayons

$$\max_{\substack{]a,b]\in\mathcal{D}_k\\ y\leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y)| \ll \frac{\sqrt{\Psi^*(x_k,y_{k,j})}\, e^{c_{17}j}}{\log x_k} \qquad (k\geq 1,\ j\leq J_k) \qquad \textit{ps.}$$

(3) Nous désignons par $[x]$ la partie entière d'un nombre réel x.

Démonstration. Utilisant le lemme 2.2, nous avons, pour tous entiers $b > a \geq 2$ et $y \geq 2$,

$$\mathbb{E}\{(\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y))^4\} \leq \Big\{ \sum_{\substack{a<n\leq b\\ P^+(n)\leq y}} \mu(n)^2 3^{\omega(n)} \Big\}^2 =: E^y_{a,b}.$$

Étant donnés $k \geq 1$, $1 \leq j \leq J_k$ et $R_{k,j} \geq 1$, un paramètre qui sera fixé ultérieurement, nous considérons l'événement

$$A_{k,j} := \Big\{ \max_{\substack{]a,b]\in\mathcal{D}_k\\ y\leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y)| \geq R_{k,j} \Big\}.$$

Une application de l'inégalité de Doob à la sous-martingale positive (cf. proposition 3.3 et lemme 3.2) $\{(\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y))^4\}_{y\geq 2}$ fournit

$$\mathbb{P}\Big(\max_{y\leq y_{k,j}} \big|\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y)\big| \geq R_{k,j} \Big) \leq \frac{1}{R^4_{k,j}} E^{y_{k,j}}_{a,b}.$$

Il vient alors, par sommation,

$$\mathbb{P}(A_{k,j}) \leq \frac{1}{R^4_{k,j}} \sum_{]a,b]\in\mathcal{D}_k} E^{y_{k,j}}_{a,b}.$$

Utilisons à présent le fait que $E^y_{a,b} + E^y_{b,c} \leq E^y_{a,c}$ pour tous entiers $c > b > a \geq 2$ et $y \geq 2$, pour obtenir la majoration

$$\begin{aligned}\sum_{]a,b]\in\mathcal{D}_k} E^{y_{k,j}}_{a,b} &= \sum_{2^m\leq x_k-x_{k-1}} \sum_{s\leq (x_k-x_{k-1})/2^m} E^{y_{k,j}}_{x_{k-1}+(s-1)2^m,x_{k-1}+s2^m}\\ &\leq \sum_{2^m\leq x_k-x_{k-1}} E^{y_{k,j}}_{x_{k-1},x_k} \ll (\log x_k) E^{y_{k,j}}_{x_{k-1},x_k}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A_{k,j}) \ll \frac{\log x_k}{R^4_{k,j}} E^{y_{k,j}}_{x_{k-1},x_k}. \tag{3.4}$$

Nous avons, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}E^{y_{k,j}}_{x_{k-1},x_k} &= \Big\{ \sum_{\substack{x_{k-1}<n\leq x_k\\ P^+(n)\leq y_{k,j}}} \mu(n)^2 3^{\omega(n)} \Big\}^2\\ &\leq \{\Psi^*(x_k,y_{k,j}) - \Psi^*(x_{k-1},y_{k,j})\}^{4/3} \Big\{ \sum_{n\in S(x_k,y_{k,j})} \mu(n)^2 3^{3\omega(n)} \Big\}^{2/3}.\end{aligned}$$

Ensuite, pour $x, y \geq 2$ et $\vartheta(y) > 2\log x$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)^2 3^{3\omega(n)} &\leq \sum_{d\in S(x,y)} \mu(d)^2 26^{\omega(d)} \Psi^*\Big(\frac{x}{d}, y\Big)\\ &\leq \Psi^*(x,y) \sum_{P^+(d)\leq y} \frac{\mu(d)^2 26^{\omega(d)}}{d^\alpha}\\ &\leq \Psi^*(x,y) \prod_{p\leq y}\left(1+\frac{26}{p^\alpha}\right) \leq \Psi^*(x,y)(\log y)^{26}\exp\{c_{17}u\},\end{aligned}$$

où nous avons fait appel à (2.5) et (2.8). En appliquant de plus le lemme 2.3, valable sous réserve de l'existence d'une constante positive K telle que

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \geq \frac{1}{x_k^{K/j}}, \tag{3.5}$$

nous obtenons enfin, pour tout $j \leq J_k$,

$$E_{x_{k-1},x_k}^{y_{k,j}} \ll \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}}\right)^{4/3} \Psi^*(x_k, y_{k,j})^2 (\log x_k)^{52/3} e^{c_{17}j}.$$

Considérons l'événement

$$A_k := \bigcup_{j\leq J_k} A_{k,j}$$

et posons

$$R_{k,j} := \frac{\sqrt{\Psi^*(x_k, y_{k,j})}\, e^{c_{17}j}}{\log x_k} \qquad (k \geq 1,\ 1 \leq j \leq J_k).$$

Nous avons, compte tenu de (3.4),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{j\leq J_k} \mathbb{P}(A_{k,j}) &\ll \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}}\right)^{4/3} (\log x_k)^{67/3} \sum_{j\leq J_k} e^{-3c_{17}j}\\ &\ll \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}}\right)^{4/3} (\log x_k)^{67/3}.\end{aligned}$$

Soit $0 < c_{16} < 1$. Posons $x_k = [\exp\{k^{c_{16}}\}]$. L'estimation

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \sim \frac{c_{16}}{k^{1-c_{16}}} \tag{3.6}$$

assure tout d'abord que la condition (3.5) est bien vérifiée. En effet, le fait que $2\log x_k \leq \vartheta(y_{k,j})$ implique qu'il existe une constante $c_{18} > 0$ telle que $x_k^{c_{18}/j} \geq \log x_k$. D'autre part, la relation (3.6) fournit

$$\mathbb{P}(A_k) \ll \frac{1}{k^{5/4}},$$

en choisissant par exemple $c_{16} = 1/356$.

Le lemme de Borel–Cantelli permet alors d'obtenir

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{k\geq 1} A_k\Big) = 0$$

puisque $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(A_k) < \infty$. Ainsi, presque sûrement, il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, et pour tout $j \leq J_k$,

$$\max_{\substack{]a,b]\in\mathcal{D}_k\\ y\leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y)| \leq R_{k,j}. \ \blacksquare$$

Corollaire 3.7. *Sous les mêmes hypothèses, nous avons, pour $k \geq 1$ et $j \leq J_k$,*

$$\max_{\substack{x_{k-1}\leq x\leq x_k\\ y\leq y_{k,j}}} |\Psi_f(x,y) - \Psi_f(x_k,y)| \ll \sqrt{\Psi^*(x_k,y_{k,j})}\, e^{c_{17}j} \qquad ps.$$

Démonstration. Soit $K \geq 0$. Tout entier positif $n \leq 2^{K+1} - 1$ peut s'écrire

$$n = \sum_{j\leq K} a_j(n)2^j \qquad (a_j(n) \in \{0,1\},\ \forall j \in [0,K]). \tag{3.7}$$

Pour tout $k \geq 2$, le choix $K = \log(x_k - x_{k-1} + 1)/\log 2 - 1$ est donc suffisant pour pouvoir écrire tout entier $n \leq x_k - x_{k-1}$ sous la forme (3.7). Cela implique, pour $x_{k-1} < x \leq x_k$, que tout intervalle $]x_{k-1}, x]$ peut s'écrire comme la réunion disjointe d'au plus $O(\log x_k)$ intervalles dyadiques de $\mathcal{D}_k$, où $\mathcal{D}_k$ a été défini en (3.3).

Désignons alors par $\mathcal{D}(]x_{k-1},x])$ l'ensemble des intervalles dyadiques apparaissant dans la décomposition de $]x_{k-1},x]$ dont le nombre de termes est minimal.

Nous avons alors, pour tout $x_{k-1} < x \leq x_k$,

$$\begin{aligned}|\Psi_f(x,y) - \Psi_f(x_{k-1},y)| &\leq \sum_{]a,b]\in\mathcal{D}(]x_{k-1},x])} |\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y)|\\ &\ll (\log x_k) \max_{\substack{]a,b]\in\mathcal{D}_k\\ y\leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b,y) - \Psi_f(a,y)|.\end{aligned}$$

On conclut par le lemme précédent. $\blacksquare$

3.3. Moyenne de $\Psi_f(x,y)$ autour de points-tests. Nous pouvons à présent démontrer le résultat suivant.

Lemme 3.8. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Soit $\{x_k\}_{k\geq 1}$ définie comme au lemme 3.6. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_{19} > 0$ telle que, uniformément pour*

$$\exp\left\{c_{19}\frac{\log x_k}{\log_2 x_k}\right\} \leq y \leq x_k, \qquad k \geq k_0,$$

nous ayons

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x,y)\,dx \ll \sqrt{x_k}\,(\log_2 x_k)^{2+\varepsilon} \qquad ps.$$

Démonstration. Il est nécessaire d'introduire tout d'abord un certain nombre de paramètres qui seront fixés ultérieurement. Soient donc $\gamma > 0$, $X \geq 2$ et $z_0 \geq 2$. Posons de plus

$$k_X := \{k \geq 1 : \sqrt{X} < x_k \leq X\}, \qquad h := \frac{\log X}{\log z_0}, \tag{3.8}$$

en notant d'emblée que $|k_X| \leq (\log X)^{1/c_{16}}$. Enfin, soit $\{z_j\}_{j\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs définie de telle sorte que $z_j := z_{j-1}^{1+\gamma} = z_0{}^{(1+\gamma)^j}$ $(j \geq 1)$.

Nous pouvons, lorsque $2 \leq x \leq X$ et $y > z_0$, décomposer la somme $\Psi_f(x,y)$ selon la taille de $P^+(n)$ de la façon suivante :

$$\Psi_f(x,y) = \Psi_f(x,z_0) + \sum_{j\leq J_0(y)-1} \sum_{\substack{n\leq x\\ P^+(n)\in\,]z_j,z_{j+1}]}} f(n) + \sum_{\substack{n\leq x\\ P^+(n)\in\,]z_{J_0},y]}} f(n),$$

où l'on a posé $J_0 = J_0(y) := \max\{j : z_j \leq y\}$ en observant que $J_0(y) \leq J := \min\{j : z_j \geq X\}$. Cela implique

$$\begin{aligned}\Psi_f(x,y) = \Psi_f(x,z_0) &+ \sum_{j\leq J_0(y)-1} \sum_{1<r\leq x}^{z_j,z_{j+1}} f(r)\Psi_f\Big(\frac{x}{r}, z_j\Big)\\ &+ \sum_{1<r\leq x}^{z_{J_0},y} f(r)\Psi_f\Big(\frac{x}{r}, z_{J_0}\Big).\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent écrire, pour la suite $\{x_k\}_{k\geq 1}$ définie au lemme 3.6,

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \Big| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x,y)\,dx \Big| \leq V_k + \sum_{j\leq J} W_{k,j}^* \tag{3.9}$$

avec

$$\begin{aligned} V_k &:= \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \Big| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x,z_0)\,dx \Big|,\\ W_{k,j}(z) &:= \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \sum_{1<r\leq x_k}^{z_j,z} f(r) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f\Big(\frac{x}{r}, z_j\Big)\,dx,\\ W_{k,j}^* &:= \max_{z_j<z\leq z_{j+1}} |W_{k,j}(z)|,\\ Z_{k,j} &:= W_{k,j}(z_{j+1}).\end{aligned}$$

Soit R un paramètre réel positif qui sera fixé ultérieurement (voir (3.17)), et considérons les événements

$$A := \bigcup_{k\in k_X} \Big\{ \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \max_{z_0<y\le x_k} \Big| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x,y)\,dx \Big| \ge 3\sqrt{x_k}\,R \Big\},$$

$$B := \bigcup_{k\in k_X} \{V_k \ge \sqrt{x_k}\,R\},$$

$$C_j := \bigcup_{k\in k_X} \{W^*_{k,j} \ge \sqrt{x_k}\,R/J\}, \qquad C := \bigcup_{j\le J} C_j.$$

La relation (3.9) implique directement

$$A \subset B \cup C. \tag{3.10}$$

Voyons comment majorer $\mathbb{P}(B)$. Il vient, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\mathbb{E}(V_k^2) \le \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \mathbb{E}(\Psi_f(x,z_0)^2)\,dx \le \Psi(x_k, z_0),$$

car, d'après la relation (2.2),

$$\mathbb{E}(\Psi_f(x,z_0)^2) = \Psi^*(x_k, z_0) \le \Psi(x_k, z_0).$$

L'inégalité de Markov et la majoration (3.2) pour $\Psi(x,y)$ impliquent

$$\mathbb{P}(V_k \ge \sqrt{x_k}\,R) \le \frac{\Psi^*(x_k,z_0)}{x_k R^2} \ll \frac{e^{-\log x_k/(2\log z_0)}}{R^2}$$

et

$$\mathbb{P}(B) \ll (\log X)^{1/cxk}\frac{e^{-h/4}}{R^2}. \tag{3.11}$$

Il nous reste donc à majorer $\mathbb{P}(C)$. Donnons-nous un entier pair $l \ge 2$ et introduisons la quantité

$$D_{k,j} := \frac{1}{x_k} \sum_{1<r\le x_k}^{z_j, z_{j+1}} \mu(r)^2 (l-1)^{\Omega(r)} \Big\{ \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f\Big(\frac{x}{r}, z_j\Big)\,dx \Big\}^2.$$

Nous avons, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, pour tout $k \in k_X$,

$$\begin{aligned}
D_{k,j} &\le \frac{1}{x_k} \sum_{1<r\le x_k}^{z_j,z_{j+1}} \mu(r)^2(l-1)^{\Omega(r)}\bigg\{\frac{1}{x_k-x_{k-1}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f\Big(\frac{x}{r}, z_j\Big)^2\,dx\bigg\}\\
&\le \sum_{1<r\le x_k}^{z_j,z_{j+1}} \mu(r)^2(l-1)^{\Omega(r)}\bigg\{\frac{r/x_k}{x_k-x_{k-1}} \int\limits_{x_{k-1}/r}^{x_k/r} \Psi_f(v,z_j)^2\,dv\bigg\}\\
&\le \int\limits_{1}^{x_k/z_j} \frac{\Psi_f(v,z_j)^2}{v}\bigg\{\frac{1}{x_k-x_{k-1}} \sum_{x_{k-1}/v<r\le x_k/v}^{z_j,z_{j+1}} \mu(r)^2(l-1)^{\Omega(r)}\bigg\}\,dv\\
&\le \frac{c_{20}le^{2\gamma l}}{\log z_j} \int\limits_{1}^{x_k/z_j} \frac{\Psi_f(v,z_j)^2}{v^2}\,dv \le \frac{c_{20}le^{2\gamma l}}{\log z_j} N_j,
\end{aligned}$$

où l'on utilise la notation N_j définie en (3.1), et où la dernière somme en r a été estimée par le lemme 2.1, pourvu que l'on ait, pour $\delta > 0$ convenablement fixé,

$$z_0 > \Big(\frac{x_k}{x_k - x_{k-1}}\Big)^{1+\delta}, \tag{3.12}$$

$$\gamma \ge \frac{c_{21}}{L(z_0)^{c_9}}. \tag{3.13}$$

Notons que la condition (3.12) est impliquée par l'inégalité

$$h \le c_{22}\frac{\log X}{\log_2 X}, \tag{3.14}$$

où h a été défini en (3.8). Les assertions (3.14) et (3.13) seront respectivement vérifiées en (3.16) et (3.18) lors du choix des paramètres h et γ.

Soit à présent R' un paramètre réel positif fixé ultérieurement. Posons

$$F_j := \{N_j \le R' \log z_j\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer $\mathbb{P}(C)$. Nous avons

$$C_j = (C_j \cap F_j) \cup (C_j \cap \overline{F_j}),$$

d'où

$$C = \bigcup_{j\le J} C_j = \bigcup_{j\le J}(C_j\cap F_j) \cup \bigcup_{j\le J}(C_j\cap \overline{F_j}) \subset \bigcup_{j\le J}(C_j\cap F_j) \cup \bigcup_{j\le J}\overline{F_j}. \tag{3.15}$$

Grâce à l'inégalité de Doob appliquée à la sous-martingale $\{W_{k,j}(z)^l\}_{z>z_j}$ nous pouvons écrire, puisque $F_j \in \mathcal{F}_{z_j}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_j\cap F_j) &\le \sum_{k\in k_X} \mathbb{P}(\{W^*_{k,j} \ge \sqrt{x_k}\,R/J\}\cap F_j)\\
&\le \sum_{k\in k_X} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{F_j} Z^l_{k,j})}{x_k^{l/2}(R/J)^l} \le \sum_{k\in k_X} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{F_j}\mathbb{E}(Z^l_{k,j}\mid \mathcal{F}_{z_j}))}{x_k^{l/2}(R/J)^l}.
\end{aligned}$$

Une simple application du lemme 2.2 fournit l'évaluation de l'espérance conditionnelle précédente sous la forme

$$\mathbb{E}(Z_{k,j}^l \mid \mathcal{F}_{z_j}) \leq (x_k D_{k,j})^{l/2}.$$

Il en résulte alors

$$\mathbb{P}(C_j \cap F_j) \leq \sum_{k \in k_X} \mathbb{E}\bigg(\mathbf{1}_{F_j} \frac{{D_{k,j}}^{l/2}}{(R/J)^l}\bigg) \leq (\log X)^{1/c_{16}} e^{\gamma l^2} \bigg(\frac{c_{20} l R' J^2}{R^2}\bigg)^{l/2}.$$

D'autre part, le lemme 3.5 fournit

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j \leq J} \overline{F_j}\Big) = \mathbb{P}\Big(\max_{j \leq J} \frac{N_j}{\log z_j} > R'\Big) \ll \frac{\log h}{R'}.$$

Il découle de (3.10), (3.11), (3.15), et du fait que $J \asymp \log h/\gamma$, que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\ll (\log X)^{1/cxk} \bigg\{ J^{l+1} \bigg(\frac{c_{20} l R'}{R^2}\bigg)^{l/2} e^{\gamma l^2} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \bigg\} + \frac{\log h}{R'} \\ &\leq (\log X)^{1/c_{16}} \bigg\{ \frac{(\log h)^{l+1}}{\gamma^{l+1}} \bigg(\frac{c_{20} l R'}{R^2}\bigg)^{l/2} e^{\gamma l^2} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \bigg\} + \frac{\log h}{R'}.\end{aligned}$$

Prenons $\gamma := 1/l$. Il vient

$$\mathbb{P}(A) \leq (\log X)^{c_{23}} \bigg\{ \bigg(\frac{\sqrt{R'} \log h}{R}\bigg)^l (c_{24} l)^{3l/2+1} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \bigg\} + \frac{\log h}{R'}.$$

Le choix

$$l = 2\bigg[\frac{1}{2}\bigg(\frac{R}{(\sqrt{R'} \log h)}\bigg)^{2/3}\bigg]$$

conduit à l'estimation

$$\mathbb{P}(A) \ll (\log X)^{c_{23}} \bigg\{ \exp\bigg\{ -\frac{c_{25} R^{2/3}}{R'^{1/3} (\log h)^{2/3}} \bigg\} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \bigg\} + \frac{\log h}{R'}.$$

Remarquons qu'en fixant

$$h = c_{26} \log_2 X, \tag{3.16}$$

nous avons

$$\mathbb{P}(A) \ll (\log X)^{c_{23}} \exp\bigg\{ -\frac{c_{25} R^{2/3}}{(R'^{1/3} (\log_3 X)^{2/3})} \bigg\} + \frac{1}{R^2} + \frac{\log_3 X}{R'},$$

et que la condition (3.14) est bien remplie, comme annoncé précédemment. Le choix $R' = c_{27} (\log_2 X)^{1+\varepsilon}$ fournit enfin

$$\mathbb{P}(A) \ll (\log X)^{c_{23}} \exp\bigg\{ -\frac{c_{25} R^{2/3}}{(\log_2 X)^{1/3+\varepsilon}} \bigg\} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\log_2 X)^{1+\varepsilon/2}}.$$

Nous pouvons ainsi fixer

$$R = (\log_2 X)^{2+\varepsilon}, \tag{3.17}$$

en notant que dans ce cas, la condition (3.13) est bien vérifiée puisque

$$\gamma \gg \left(\frac{\sqrt{R'}\log h}{R}\right)^{2/3} \gg \frac{1}{\sqrt{\log X}} \gg \frac{1}{L(z_0)^{c_9}}. \tag{3.18}$$

Posant $X = X_s := \exp\{2^s\}$, nous avons clairement

$$\mathbb{P}(A_{X_s}) \le \frac{1}{s^{1+\varepsilon}}.$$

Le lemme de Borel–Cantelli permet alors d'établir, puisque la série $\sum_{s\ge1}\mathbb{P}(A_{X_s})$ est convergente, que

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{s\ge1} A_{X_s}\Big) = 0.$$

Il existe ainsi, presque sûrement, un entier k_1 tel que pour $k \ge k_1$,

$$\max_{z_0<y\le x_k} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x,y)\,dx \le 3\sqrt{x_k}\,R. \ \blacksquare$$

4. Preuve du théorème 1.2. Pour x fixé, nous définissons k_1 comme l'unique entier tel que

$$x_{k_1-1} < x \le x_{k_1}. \tag{4.1}$$

Nous scindons la démonstration du théorème 1.2 en plusieurs cas, selon la taille relative de y par rapport à x.

Premier cas. Supposons $x \ge y \ge \exp\{c_{19}(\log x)/\log_2 x\}$. Nous avons, dans ce domaine,

$$\begin{aligned}|\Psi_f(x,y)| &\le \min_{x_{k_1-1}<x'\le x_{k_1}} |\Psi_f(x',y)| + \max_{x_{k_1-1}<x'\le x_{k_1}} |\Psi_f(x_{k_1},y) - \Psi_f(x',y)| \\ &\le \frac{1}{x_{k_1} - x_{k_1-1}} \int_{x_{k_1-1}}^{x_{k_1}} \Psi_f(x',y)\,dx' \\ &\qquad + \max_{x_{k_1-1}<x'\le x_{k_1}} |\Psi_f(x_{k_1},y) - \Psi_f(x',y)|.\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\Psi_f(x,y) \ll \sqrt{x_{k_1}}\,(\log_2 x_{k_1})^{2+\varepsilon} + x_k \ll \sqrt{x}\,(\log_2 x)^{2+\varepsilon}, \tag{4.2}$$

en appliquant respectivement le corollaire 3.7 et le lemme 3.8.

Deuxième cas. Nous supposons ici que l'on a $\vartheta(y) > 2\log x$. Posons à présent

$$j_k := \max\left\{1, \left[\frac{\log x_k}{\log y}\right]\right\}, \qquad y_k := x_k^{1/j_k} \qquad (k \le k_1).$$

Le corollaire 3.7 fournit directement

$$|\Psi_f(x_k,y)-\Psi_f(x_{k-1},y)| \le \sqrt{\Psi^*(x_k,y_k)}\, e^{c_{17}j_k} \qquad (k\le k_1),$$
$$|\Psi_f(x_{k_1},y)-\Psi_f(x,y)| \le \sqrt{\Psi^*(x_{k_1},y_{k_1})}\, e^{c_{17}j_{k_1}}.$$

Notons que, pour tout $k\le k_1$,

$$\begin{aligned} j_k &\le \max\Big\{1,\frac{\log x_k}{\log y}\Big\} \le \frac{\log x_{k_1}}{\log y} \le \frac{\log x_{k_1-1}}{\log y} + \frac{\log(x_{k_1}/x_{k_1-1})}{\log y} \\ &\le u + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big), \end{aligned}$$

en vertu de la relation (4.1). Supposant provisoirement l'estimation

$$M_1 := \sup_{k\le k_1} \frac{\Psi^*(x_k,y_k)}{\Psi^*(x,y)} = \exp\Big\{O\Big(\frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \log(u+1)\Big)\Big\} \tag{4.3}$$

acquise, nous pouvons en déduire la majoration

$$\begin{aligned} |\Psi_f(x,y)| &\le \sum_{k\le k_1} |\Psi_f(x_k,y)-\Psi_f(x_{k-1},y)| + |\Psi_f(x,y)-\Psi_f(x_{k_1},y)| \\ &\ll k_1\sqrt{M_1}\sqrt{\Psi^*(x,y)}\, e^{c_{17}u} \ll \sqrt{\Psi^*(x,y)}\, e^{c_{28}u}(\log x)^{c_{29}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où l'on a utilisé le fait que $k_1 \ll (\log x)^{1/c_{16}}$.

Établissons à présent la relation (4.3). Lorsque x est suffisamment grand et $(\log x)^3 < y \le x$, nous avons $\beta(x,y)\ge 3/5$. En appliquant le corollaire 2.6 de [3] et le théorème III.5.21 de [10], il vient

$$\begin{aligned} M_1 &\asymp \sup_{k\le k_1} \frac{\Psi(x_k,y_k)}{\Psi(x,y)} \\ &\le \sup_{k\le k_1} \frac{x_k}{x}\,\frac{\rho(\log x_k/\log y-1)}{\rho(u)} \exp\Big\{O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Faisant usage de la croissance de la fonction $x\mapsto x\rho(\log x/\log y-1)$ pour x suffisamment grand et $y\le x\le \exp\{y^{1/3}\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_1 &\le \frac{x_{k_1}}{x}\,\frac{\rho(\log x_{k_1}/\log y-1)}{\rho(u)} \exp\Big\{O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u}\Big)\Big\} \\ &= \exp\Big\{O\Big(\frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \log(u+1)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Plaçons-nous à présent dans le domaine

$$2\log x < \vartheta(y) \le (\log x)^3.$$

Puisque $j_k \ge \log x_k/\log y - 1$, nous avons $y\le y_k\le y+y^{3/4}$ si l'on suppose de plus que

$$x_k \ge \exp\{y^{1/4}(\log y)^2\}. \tag{4.5}$$

En remarquant que nous avons trivialement

$$\Psi^*(x_k, y_k) \leq x_k \leq \exp\Big\{O\Big(\frac{u}{L_\varepsilon(y)}\Big)\Big\}$$

pour tous les entiers k ne vérifiant pas (4.5), et que $x_k \leq ex$ $(k \leq k_1)$, il vient

$$\begin{aligned} M_1 &\ll \frac{\Psi^*(x, y+y^{3/4})}{\Psi^*(x,y)} = 1 + \sum_{\substack{d>1 \\ P^-(d)>y,\, P^+(d)\leq y+y^{3/4}}} \mu(d)^2 \frac{\Psi^*(x/d, y)}{\Psi^*(x,y)} \\ &\ll 1 + \sum_{\substack{d>1 \\ P^-(d)>y,\, P^+(d)\leq y+y^{3/4}}} \frac{\mu(d)^2}{d^\alpha} \ll \exp\Big\{\sum_{y<p\leq y+y^{3/4}} \frac{1}{p^\alpha}\Big\}, \end{aligned}$$

où α a été défini en (2.3). En posant

$$w(t) = w(t; x, y) := \frac{t^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha)\log t} \qquad (t \geq 2),$$

le lemme 3.6 de [3] fournit, pour $y \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{y<p\leq y+y^{3/4}} \frac{1}{p^\alpha} &= \log\Big(\frac{\log(y+y^{3/4})}{\log y}\Big) + \int_{w(y)}^{w(y+y^{3/4})} t\xi'(t)\,dt + O\Big(\frac{y^{1-\alpha}}{L(y)^{c_{30}}}\Big) \\ &\ll w(y+y^{3/4}) - w(y) + \frac{y^{1-\alpha}}{L(y)^{c_{30}}} \ll \frac{y^{3/4}}{y^\alpha \log y} + \frac{y^{1-\alpha}}{L(y)^{c_{30}}} \\ &\ll \frac{u}{L_\varepsilon(y)}, \end{aligned}$$

car $y^{1-\alpha} \asymp \log x$ dans le domaine considéré. Cela achève la démonstration de l'estimation (4.3) et donc de (4.4).

Un calcul simple permet enfin d'observer que l'estimation (4.4) est meilleure que celle résultant de (4.2) si

$$x \geq 16, \qquad y \leq \exp\Big\{c_{31}\frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x}\Big\}$$

où c_{31} est une constante positive convenable.

Troisième cas. Il s'agit à présent d'évaluer le domaine dans lequel la majoration triviale

$$|\Psi_f(x,y)| \leq \Psi^*(x,y) \tag{4.6}$$

est meilleure que l'estimation (4.4). Nous supposons ici que $\vartheta(y) > 2\log x$.

D'une part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$v := \log(\vartheta(y)/\log x - 1) \leq \varepsilon \log y \tag{4.7}$$

lorsque $y \leq (\log x)^{1+\delta}$. Aussi, sous cette dernière hypothèse, le corollaire 2.3 de [2] fournit la minoration

$$\Psi^*(x,y) \geq \exp\{(1-\varepsilon)\pi(y)v/(e^v+1)\} \geq \exp\{(1-\varepsilon')vu\}, \tag{4.8}$$

d'où

$$\Psi^*(x,y) \gg \sqrt{\Psi^*(x,y)}\, e^{c_4 u}(\log x)^{c_5}$$

lorsque v est suffisamment grand.

D'autre part, lorsque $y \geq (\log x)^{1+\delta}$, il découle de l'estimation de $\Psi(x,y)$ par Hildebrand et Tenenbaum (théorème III.5.21 de [10]) que

$$\sqrt{\Psi^*(x,y)} \asymp \sqrt{\Psi(x,y)} \gg e^{c_4 u}(\log x)^{c_5}$$

et donc que l'estimation (4.4) est toujours de qualité supérieure à la majoration triviale (4.6) lorsque $y \geq (\log x)^{1+\delta}$ et x est suffisamment grand.

Au vu des observations précédentes, la majoration fournie par (4.4) est meilleure que la majoration triviale (4.6) lorsque $\vartheta(y) \geq c_{32} \log x$, où c_{32} est une constante positive. ∎

5. Preuve du corollaire 1.3. Déterminons dans quel domaine les majorations apportées par le théorème 1.2 fournissent une estimation du type $\Psi_f(x,y) \ll_\varepsilon \Psi^*(x,y)^{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Tout d'abord, il apparaît clairement (en utilisant par exemple la formule asymptotique issue du corollaire III.5.19 de [10]) que l'on a

$$\sqrt{x}\,(\log_2 x)^{2+\varepsilon'} \ll \Psi(x,y)^{1/2+\varepsilon} \asymp \Psi^*(x,y)^{1/2+\varepsilon}$$

lorsque $x \geq y \geq x^{c_3(\log_3 x)/\log_2 x}$ et x suffisamment grand.

Par ailleurs, pour $(\log x)^{1+\delta} \leq y \leq x^{c_3(\log_3 x)/\log_2 x}$ et x suffisamment grand, le théorème III.5.21 de [10] nous assure que

$$\Psi^*(x,y)\ e^{c_4 u}(\log x)^{c_5} \ll \Psi^*(x,y)^{1/2+\varepsilon}$$

puisque l'on a alors

$$\Psi^*(x,y)^\varepsilon \asymp \Psi(x,y)^\varepsilon \gg e^{c_4 u}(\log x)^{c_5}.$$

Enfin, la minoration (4.8), valable dans le domaine $y \leq (\log x)^{1+\delta}$, $\vartheta(y) > 2\log x$, nous assure que

$$\Psi^*(x,y)^\varepsilon \gg e^{c_4 u}(\log x)^{c_5}$$

lorsque εv est suffisamment grand (rappelons que v est défini en (4.7)), c'est-à-dire lorsque $y \geq C_\varepsilon \log x$. Ceci implique directement la majoration

$$\Psi^*(x,y)\ e^{c_4 u}(\log x)^{c_5} \ll \Psi^*(x,y)^{1/2+\varepsilon}.\ ∎$$

Remerciements. L'auteur remercie Gérald Tenenbaum pour l'aide qu'il lui a apportée au cours de l'élaboration de ce travail, et tient également à exprimer sa gratitude à l'arbitre pour ses remarques éclairantes.

Bibliographie

[1] A. Bonami, *Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20 (1970), 335–402.

[2] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, *Sur les lois locales de la répartition du k-ième diviseur d'un entier*, Proc. London Math. Soc. (3) 84 (2002), 289–323.

[3] —, —, *Propriétés statistiques des entiers friables*, Ramanujan J. 9 (2005), 139–202.

[4] P. Erdős, *Some unsolved problems*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 6 (1961), 221–254.

[5] G. Halász, *On random multiplicative functions*, dans : Hubert Delange Colloquium (Orsay, 1982), Publ. Math. Orsay 83-4, Univ. Paris XI, 1983, 74–96.

[6] A. J. Harper, *On the limit distributions of some sums of a random multiplicative function*, à paraître.

[7] A. Hildebrand and G. Tenenbaum, *On integers free of large prime factors*, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 265–290.

[8] —, —, *Integers without large prime factors*, J. Théor. Nombres Bordeaux 5 (1993), 411–484.

[9] Y.-K. Lau, G. Tenenbaum and J. Wu, *On mean values of random multiplicative functions*, prépublication, sept. 2010; version finale : Proc. Amer. Math. Soc., à paraître.

[10] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, $3^{\text{ème}}$ éd., Belin, 2008.

[11] G. Tenenbaum et J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables*, J. Reine Angew. Math. 564 (2003), 119–166.

[12] T. Tómács and Zs. Líbor, *A Hájek–Rényi type inequality and its applications*, Ann. Math. Inform. 33 (2006), 141–149.

[13] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[14] A. Wintner, *Random factorizations and Riemann's hypothesis*, Duke Math. J. 11 (1944), 267–275.

Joseph Basquin
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré – Nancy 1
BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France
E-mail: joseph.basquin@iecn.u-nancy.fr

Reçu le 6.12.2010
et révisé le 9.8.2011 (6566)