ACTA ARITHMETICA
112.2 (2004)

# Fractions rationnelles hyperboliques $p$-adiques

par

JEAN-PAUL BÉZIVIN (Caen)

**Introduction.** Nous allons commencer par donner quelques définitions. Soit $p$ un nombre premier rationnel fixé, et $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique $\Omega_p$ du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres $p$-adique. Pour un polynôme $H$ à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, on note $d(H)$ son degré. Soit $R$ une fraction rationnelle, $R = P/Q$, avec $P$ et $Q$ polynômes premiers entre eux ; on notera alors $d(R)$ la quantité $\max\{d(P), d(Q)\}$, qui sera le *degré* de $R$. On supposera dans toute la suite que $R$ est de *degré* au moins 2.

La fraction rationnelle $R$ définit une application de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ dans lui-même, que nous visualiserons simplement en rajoutant un point à l'infini à $\mathbb{C}_p$. Dans ce cadre, on peut itérer la transformation qui à $x \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ associe $R(x)$ ; nous noterons $R^{[n]}$ les itérées successives de $R$.

On peut définir une distance sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, la *distance sphérique*, de la façon suivante : pour deux points $A = (x, y)$ et $B = (u, v)$, on pose

$$\Delta(A, B) = \frac{|vx - uy|}{\max\{|x|, |y|\} \max\{|u|, |v|\}}.$$

C'est l'analogue de la distance sphérique définie sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par les formules

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}$$

si $z, w \in \mathbb{C}$, et

$$\sigma(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

On pourra voir l'article [BE1] de R. Benedetto pour les propriétés de cette distance dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}_p$, et le livre [BM] de F. Berteloot et V. Mayer dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$.

On définit, de manière analogue au cas où le corps de base est le corps des nombres complexes, l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(R)$ de la fraction rationnelle

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11S99; Secondary 30D05.

$R$ comme étant l'ensemble des points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ où la famille $R^{[n]}$ des itérées de $R$ est équicontinue, c'est-à-dire des points $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ tels qu'il existe un voisinage $V$ de $x$ pour la distance $\Delta$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout couple $(a, b)$ d'éléments de $V$ vérifiant $\Delta(a, b) < \delta$, on ait $\Delta(R^{[n]}(a), R^{[n]}(b)) < \varepsilon$. Il est clair, d'après la définition, que l'ensemble de Fatou de $R$ est un ouvert. Le complémentaire de l'ensemble de Fatou est donc une partie fermée de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ que l'on appelle l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(R)$ de $R$. Les deux ensembles sont complètement stables par $R$, c'est-à-dire stables par image directe et réciproque.

Nous commençons par rappeler la définition de point critique d'une application rationnelle sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.

Nous suivrons la définition de [BM, page 7], donnée dans le cas du corps de base $\mathbb{C}$ :

Définition 1. Soit $R$ une fraction rationnelle de degré au moins deux. On dit que $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ est un *point critique* de $R$ si l'application $R$ n'est injective dans aucun voisinage de $a$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. L'ensemble des points critiques de $R$ est appelé l'*ensemble critique* de $R$, et noté $C_R$.

Tout comme dans le cas de $\mathbb{C}$, en ramenant éventuellement le point à l'infini en un point de $\mathbb{C}_p$ par l'utilisation de l'homographie $\phi(z) = 1/z$, on voit que $z$ est un point critique si et seulement si on a $R'(z) = 0$.

Définition 2. On appelle *valeurs critiques* de la fraction rationnelle $R$ les images des points critiques de $R$ par l'application $R$. L'*ensemble post-critique* de $R$ est la réunion des orbites avant des points de l'ensemble critique de $R$ sous l'action de $R$, et est noté $O_R^+$.

Dans le cas du corps de base $\mathbb{C}$, on dit que la fonction $f$ est *expansive* sur son ensemble de Julia s'il existe $c > 0$ et $\lambda > 1$ tel que, pour tout $z \in \mathcal{J}(R)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|(f^{[n]})'(z)|_\sigma \geq c\lambda^n$$

où pour une application $g$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la dérivée sphérique de $g$ est donnée par

$$|g'(z)|_\sigma = \lim_{w \to z} \frac{\sigma(f(w), f(z))}{\sigma(w, z)}.$$

On a le résultat suivant ([BM, théorème VI.4, page 84]) :

Théorème 1. *Pour une fraction rationnelle $f$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré au moins deux, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a) *$f$ est expansive sur son ensemble de Julia*;

(b) $\overline{O_f^+} \cap \mathcal{J}(f) = \emptyset$.

Dans le cas de la dynamique d'une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$, on dit que la fraction rationnelle $R$ est *hyperbolique* si elle possède la propriété d'être expansive sur son ensemble de Julia. En suivant une définition donnée par R. Benedetto, pour une fraction rationnelle $R$ à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, dont l'ensemble de Julia est non vide, nous dirons que $R$ est *hyperbolique* si les points critiques de $R$ sont dans l'ensemble de Fatou de $R$. Il est alors démontré par R. Benedetto que, si la fraction rationnelle $R$ est hyperbolique, à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, alors elle possède la propriété d'expansivité sur toute partie de la forme $L \cap \mathcal{J}(R)$, où $L$ est une extension finie de $K$, et son ensemble de Fatou ne possède pas de $D$-composantes errantes.

Dans cet article, nous allons étudier les propriétés d'une fraction rationnelle expansive sur son ensemble de Julia tout entier (donc hyperbolique), sans supposer que $R$ est à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Nous allons démontrer pour une telle fraction rationnelle les résultats suivants (pour les définitions, voir la partie I) :

(a) L'ensemble de Fatou de $R$ ne possède pas de $D$-composantes circonférenciées.

(b) L'ensemble de Fatou de $R$ ne possède pas de $D$-composantes errantes (alors que très récemment, R. Benedetto vient de donner un exemple de polynôme dont l'ensemble de Fatou possède des $D$-composantes errantes, voir [BE6]).

(c) Il existe des points périodiques répulsifs (le problème de savoir si une fraction rationnelle de degré au moins deux à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, dont l'ensemble de Julia est non vide, possède des points périodiques répulsifs est un problème ouvert).

(d) On a $\overline{O_R^+} \cap \mathcal{J}(R) = \emptyset$.

Par contre, la réciproque de la propriété (d) n'est pas vraie, ce qui est différent du cas complexe.

Comme nous l'a fait remarquer le Referee, que nous remercions pour de très intéressantes remarques, deux questions naturelles se posent au vu des résultats démontrés.

(1) Tout d'abord, la question de caractériser les fractions rationnelles expansives sur leur ensemble de Julia.

Dans le cas des polynômes de degré au moins deux à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, on sait par les résultats de [B2] que les propriétés (a) et (b) suivantes sont équivalentes, en supposant l'ensemble de Julia non vide :

(a) Le polynôme $R$ est expansif sur $\mathcal{J}(R)$ ;

(b) L'ensemble de Julia $\mathcal{J}(R)$ est compact, et $R$ est hyperbolique.

Il serait très intéressant d'avoir une caractérisation de nature analogue dans le cas général d'une fraction rationnelle.

(2) Le problème de savoir si une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ dont l'ensemble de Julia est non vide possède ou non un point périodique répulsif est un problème ouvert ; mais il serait bien intéressant d'avoir la réponse à cette question dans le cas d'une fraction rationnelle hyperbolique.

Nous terminerons par une dernière partie consacrée à des exemples, en particulier, un exemple de fraction rationnelle $R$ dont l'ensemble de Fatou contient des $D$-composantes périodiques ne contenant aucun point périodique de $R$, ce qui répond à une question posée par R. Benedetto.

**I. Propriétés générales des ensembles de Julia et Fatou.** Pour $\omega \in \mathbb{C}_p$ et $R > 0$, nous noterons $B^+(\omega, R)$ le disque circonférencié $B^+(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}_p\,;|z-\omega| \leq R\}$, et $B^-(\omega, R)$ le disque non circonférencié $B^-(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}_p\,;|z-\omega| < R\}$. Remarquer que si $R$ n'appartient pas au groupe de valeurs $|\mathbb{C}_p^*|$ de $\mathbb{C}_p$, le disque circonférencié et le disque non circonférencié sont le même ensemble. On peut donc considérer un tel disque comme circonférencié ou non. Dans le cas où le rayon $R$ est dans le groupe des valeurs, on dira que le disque est *rationnel*, et *irrationnel* dans le cas contraire. Dans le cas d'un disque rationnel la distinction entre disque circonférencié et non circonférencié a du sens. Nous noterons aussi $B(\omega, R)$ un disque qui pourra être circonférencié ou non. Un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ sera le complémentaire d'un disque $D$ de $\mathbb{C}_p$, et sera circonférencié si $D$ est non circonférencié, et réciproquement.

Définition 3. Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux. Une *$D$-composante* de l'ensemble de Fatou de $R$ est un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ qui est contenu dans l'ensemble de Fatou de $R$, et maximal pour l'inclusion.

L'image d'une $D$-composante de l'ensemble de Fatou de $R$ est inclus dans l'ensemble de Fatou de $R$, mais ce n'est pas toujours une $D$-composante.

On peut définir une action $R^*$ sur les $D$-composantes de l'ensemble de Fatou, en associant à une $D$-composante $U$ de l'ensemble de Fatou la $D$-composante $R^*(U)$ contenant le disque $R(U)$ qui est inclus dans l'ensemble de Fatou. On dira que la $D$-composante $U$ est *périodique* ou *pré-périodique*, vis-à-vis de cette action. On dira aussi que la $D$-composante $U$ est *errante* si elle n'est pas pré-périodique. Pour des compléments sur les $D$-composantes, on pourra consulter [BE4].

Notons que dans le cas d'un polynôme, il existe une $D$-composante du point à l'infini (le point à l'infini est toujours un point de l'ensemble de Fatou dans le cas d'un polynôme), et, si l'ensemble de Julia est non vide, tout autre $D$-composante est soit un disque circonférencié tel que tout disque de rayon strictement plus grand contient des points de l'ensemble de Julia, soit un disque non circonférencié tel que le disque circonférencié correspondant contient des points de l'ensemble de Julia.

Soit $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. On appelle *orbite* de $x$ sous l'action de $R$ l'ensemble $O^+(x) = \{R^{[n]}(x)\,;n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble des pré-images de $x$ est l'orbite arrière de $x$ ; c'est l'ensemble $O^-(x) = \{y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)\,;\exists m \in \mathbb{N},\ R^{[m]}(y) = x\}$. L'ensemble de toutes les pré-images des éléments de l'orbite de $x$ est appelée la *grande orbite* de $x$. Il s'agit donc des $y \in \mathbb{C}_p$, tels qu'il existe des entiers $k$ et $m$ vérifiant $R^{[k]}(y) = R^{[m]}(x)$.

Des points intéressants pour l'étude des ensembles de Fatou et de Julia sont les points fixes et périodiques, et pré-périodiques de $R$. Un point *fixe* de $R$ est un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ vérifiant $R(x) = x$. Un point *périodique* un point $x$ tel qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $R^{[n]}(x) = x$ ; dans ce cas, le plus petit de ces entiers $n$ est la *période* de $x$. Un point *pré-périodique* est une pré-image d'un point périodique de $R$.

Si $x$ est un point périodique de $R$ qui n'est pas le point à l'infini, on définit son *multiplicateur* comme étant $\lambda = (R^{[n]})'(x)$. On vérifie immédiatement qu'en conjuguant $R$ par une homographie, on trouve une nouvelle fraction rationnelle telle que l'image de $x$ soit encore un point périodique de même période, et, si l'image de $x$ n'est pas $\infty$, de même multiplicateur. Ceci permet de définir le multiplicateur de $\infty$ quand celui-ci est un point périodique de $R$, en l'envoyant par une homographie sur un point à distance finie.

On dira que le point périodique $x$ de $R$ est :

(a) un point *attractif* si son multiplicateur $\lambda$ est de module $< 1$ ;

(b) un point *neutre* si son multiplicateur $\lambda$ est de module $1$ ;

(c) un point *répulsif* si son multiplicateur $\lambda$ est de module $> 1$.

Un résultat utile est que, si $d$ est un point périodique de $R$ de période $m$, et si on prend $k \in \mathbb{N}$, le point $R^{[k]}(d)$, qui est l'un des $m$ points dans l'orbite de $d$, admet le même multiplicateur que $d$ (tous les points de l'orbite de $d$ ont même multiplicateur) ; on a

$$(R^{[m]})'(d) = (R^{[m]})'(R^{[k]}d) = R'(d)\ldots R'(R^{[m-1]}(d)).$$

On a la proposition suivante :

Théorème 2. *Soit $R$ une fraction rationnelle et $x$ un point périodique de $R$. Alors* :

(a) *Si $x$ est attractif ou neutre, alors $x$ est dans l'ensemble de Fatou.*

(b) *Si $x$ est répulsif, alors $x$ est dans l'ensemble de Julia.*

*Preuve.* Voir [BE2, Proposition 1.1]. ∎

Contrairement à ce qui se passe en analyse complexe, l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle $R$ peut, en analyse ultramétrique, être vide. Par contre, l'ensemble de Fatou n'est jamais vide :

Théorème 3. *Soit $R$ une fraction rationnelle. Alors $R$ possède au moins un point fixe neutre ou attractif; par suite son ensemble de Fatou n'est jamais vide.*

*Preuve.* Voir [BE2, Corollary 1.3]. ■

Le résultat suivant permet de se placer dans une situation simplifiée :

Proposition 1. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux. Si $\phi$ est une homographie à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, l'ensemble de Julia de la fraction rationnelle $\phi \circ R \circ \phi^{-1}$ est l'image par $\phi$ de l'ensemble de Julia de $R$.*

*Preuve.* Voir [BE1, page 180]. ■

Définition 4. Soit $R$ une fraction rationnelle, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux. Nous dirons que $R$ est *normalisée* si le point à l'infini est un point fixe non répulsif de $R$.

Il est clair que les deux résultats précédents permettent de se placer dans la situation d'une fraction rationnelle normalisée, ce qui simplifie la situation. C'est ce que nous ferons en général.

Un outil très utile est le critère de Hsia, analogue d'un résultat de Montel ([HS2]) :

Critère de Hsia. *Soit $F$ une famille de séries entières convergentes sur un disque $D$ de $\mathbb{C}_p$. On suppose que l'image de $D$ par les éléments $f \in F$ est inclus dans un ensemble $Y$ indépendant de $f$ dont le complémentaire dans $\mathbb{C}_p$ est non vide. Alors la famille $F$ est équicontinue sur $D$.*

*Preuve.* Voir [HS2] ou [B1]. ■

Proposition 2. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, et $m \geq 1$ un entier et $S(x) = R^{[m]}(x)$ l'itérée d'ordre $m$ de $R$. Alors les ensembles de Julia et de Fatou de $S$ sont les mêmes que ceux de $R$.*

*Preuve.* Voir [HS1, Proposition 4.7, page 297]. ■

Proposition 3. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux. Alors si son ensemble de Julia n'est pas vide, aucun point de $\mathcal{J}(R)$ n'est isolé.*

*Preuve.* Voir [HS2, Theorem 2.9, page 694]. ■

On a le résultat suivant en ce qui concerne les orbites arrières des éléments de l'ensemble de Julia :

Proposition 4. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, dont l'ensemble de Julia est non vide. Alors si $\omega \in \mathcal{J}(R)$, l'orbite arrière $O^-(\omega)$ est dense dans l'ensemble de Julia.*

*Preuve.* Voir [HS2, Corollary 2.8, page 693]. ∎

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

Théorème 4. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. L'ensemble de Julia de $R$ est inclus dans l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de $R$.*

*Preuve.* Voir [HS2]. ∎

Nous avons vu la définition de $D$-composantes de l'ensemble de Fatou de $R$. On peut définir un autre type de composantes de l'ensemble de Fatou.

Définition 5. Une partie non vide de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ est appelée *affinoïde connexe* si c'est un disque circonférencié rationnel de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ privé d'un nombre fini de disques non circonférenciés rationnels.

On pourra consulter [FVDP] pour tout ce qui concerne les affinoïdes connexes.

On peut donner une définition de *composantes analytiques* de l'ensemble de Fatou de $R$ :

Définition 6. Soit $R$ une fraction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Soit $x$ dans l'ensemble de Fatou de $R$. La *$A$-composante* ou *composante analytique* de $x$ est la réunion de tous les affinoïdes connexes contenus dans l'ensemble de Fatou de $R$ et contenant $x$.

Les résultats suivants nous seront utiles ([BE4, Prop. 3.1 et 3.2]) :

Proposition 5. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, dont l'ensemble de Julia n'est pas vide. Soit $V$ une composante analytique de $R$. Alors $R(V)$ est une $A$-composante de l'ensemble de Fatou de $R$.*

Il en résulte que, avec des notations déjà introduites, on a toujours $R^*(V) = R(V)$ dans le cas d'une composante analytique, alors que ce n'est pas toujours le cas pour les $D$-composantes.

On a assez souvent l'égalité entre $D$-composantes et composantes analytiques :

Proposition 6. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, dont l'ensemble de Julia n'est pas vide. Si $x \in \mathcal{F}(R)$, et si $U$ est la $D$-composante de $x$, et $V$ la $A$-composante de $x$, alors on a $U \subset V$. Si de plus $U$ n'est pas un disque non circonférencié rationnel, on a $U = V$.*

Il résulte de ce qui précède que si $U$ est une $D$-composante circonférenciée rationnelle de l'ensemble de Fatou de la fraction rationnelle $R$, on a $R^*(U) = R(U)$ et par suite $R(U)$ est une $D$-composante.

**II. Les fractions rationnelles hyperboliques.** Dans cette partie, nous allons introduire les fractions rationnelles hyperboliques, en suivant la définition de R. Benedetto.

Dans le cas du corps de base $\mathbb{C}_p$, nous prendrons comme définition de fraction rationnelle hyperbolique la définition suivante :

Définition 7. Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux. On dit que la fraction rationnelle $R$ est *hyperbolique* si son ensemble critique $C_R$ est inclus dans son ensemble de Fatou.

Remarque. Dans le cas d'une fraction rationnelle normalisée dont l'ensemble de Julia est non vide, dire que $R$ est hyperbolique revient à dire exactement que les points où sa dérivée s'annule sont dans l'ensemble de Fatou, puisque les pôles de $R$ sont dans l'ensemble de Fatou comme préimage du point à l'infini, qui est dans l'ensemble de Fatou puisque $R$ est normalisée.

Dans le cas d'une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, on peut aussi définir une notion de dérivée sphérique ; nous allons nous contenter de la définir sur $\mathbb{C}_p$ (cf. [BE5, Definition 2.4]) :

Définition 8. Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficient dans $\mathbb{C}_p$. En un point $a \in \mathbb{C}_p$, on définit la *dérivée sphérique* de $R$ au point $a$ comme étant la quantité

$$R^{\#}(a) = \begin{cases} \dfrac{|R'(a)|}{\max\{1, |R(a)|^2\}} & \text{si } R(a) \neq \infty, \\ (1/R)^{\#}(a) & \text{si } R(a) = \infty. \end{cases}$$

Soit maintenant $R$ une fraction rationnelle normalisée à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Dans ce cas, son ensemble de Julia est toujours une partie bornée de $\mathbb{C}_p$, éventuellement vide ; on note $\varrho$ un réel $\geq 1$ tel que $|x| \leq \varrho$ si $x \in \mathcal{J}(R)$.

Comme le point à l'infini est dans l'ensemble de Fatou, on $R^{[n]}(a) \neq \infty$ pour tout $n$ et tout $a \in \mathcal{J}(R)$, donc la dérivée sphérique de l'itérée $n$-ième de $R$ en un point $a \in \mathcal{J}(R)$ est donnée par

$$(R^{[n]})^{\#}(a) = \frac{|(R^{[n]})'(a)|}{\max\{1, |R^{[n]}(a)|^2\}}.$$

On a d'autre part, puisque $R^{[n]}(a)$ est dans l'ensemble de Julia de $R$, que $1 \leq \max\{1, |R^{[n]}(a)|^2\} \leq \varrho^2$, ce qui donne

$$\frac{|(R^{[n]})'(a)|}{\varrho^2} \leq (R^{[n]})^{\#}(a) \leq |(R^{[n]})'(a)|.$$

On voit alors immédiatement que le fait que $R$ soit expansif sur son ensemble de Julia pour la distance sphérique est équivalent à la même assertion pour la dérivée ordinaire, ce qui permet de se limiter à l'utilisation de celle-ci.

Dans le cas d'une fraction rationnelle normalisée, nous utiliserons donc que $R$ est expansive sur son ensemble de Julia s'il existe deux constantes $c > 0$, $\lambda > 1$ telles que, pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait $|(R^{[n]})'(x)| \geq c\lambda^n$. On a le résultat suivant, dû à R. Benedetto :

THÉORÈME 5. *Soit $R$ une fraction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans une extension finie $K$ de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que $R$ est normalisée par le fait que le point à l'infini est un point fixe non répulsif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$R$ est une fraction rationnelle hyperbolique.*

(b) *Pour toute extension finie $L$ de $K$, il existe un entier $m$ tel que l'on ait $|(R^{[m]})'(x)| > 1$ sur $\mathcal{J}(R) \cap L$.*

(c) *Pour toute extension finie $L$ de $K$, il existe une constante $c > 1$ et un entier $m$ tel que l'on ait $|(R^{[m]})'(x)| \geq c > 1$ sur $\mathcal{J}(R) \cap L$.*

*Preuve.* Voir [BE2]. ■

Il est à peu près immédiat que, pour toute extension finie $L$ de $K$ fixée, cela implique l'existence de deux constantes $c_1$ et $\lambda_1 > 1$, telles que, pour tout $x \in L \cap \mathcal{J}(R)$, on ait $|(R^{[n]})'(x)| \geq c_1\lambda_1^n$, de sorte que $R$ est expansive sur la partie $L \cap \mathcal{J}(R)$. On notera que ceci donne la justification du fait que l'on appelle hyperbolique dans le cas de $\mathbb{C}_p$ une fraction rationnelle telle que tous ses points critiques soient dans l'ensemble de Fatou.

La partie $\mathcal{J}(R)$ de $\mathbb{C}_p$ en est une partie fermée, donc munie de la distance induite, c'est un espace métrique complet, donc un espace de Baire.

Dans le cas où la fraction rationnelle $R$ à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, la partie $\Omega_p \cap \mathcal{J}(R)$ est en général dans cet espace, une partie d'intérieur vide. En effet, si ce n'est pas le cas, il en résulte (voir [B2]) que l'ensemble de Julia de $R$ est une partie compacte de $\mathbb{C}_p$.

Il existe des exemples de ce cas de figure, voir l'exemple 1 dans la partie IV de cet article. Mais bien sûr, ce sont des cas très particuliers ; en effet, dans $\mathbb{C}_p$, en général, l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle, même à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, n'est pas compact. Il se posait donc le problème de considérer les propriétés d'une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, pas forcément dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, qui est expansive sur tout son ensemble de Julia, et pas seulement sur la partie de son ensemble de Julia contenue dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On a le premier résultat suivant, qui montre que la situation de l'exemple 1 est la situation générale dans le cas des polynômes :

Proposition 7. *Soit $R$ un polynôme de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Si l'ensemble de Julia de $R$ est non vide, et s'il existe $c > 0$ et $\lambda > 1$ tel que pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$ on ait $|(R^{[n]})'(x)| \geq c\lambda^n$ (ce qui implique que $R$ est hyperbolique), alors l'ensemble de Julia de $R$ est une partie compacte de $\mathbb{C}_p$, et tout point périodique dans $\mathbb{C}_p$ est répulsif.*

*Preuve.* Voir [B2]. ∎

De plus, pour ce qui concerne les $D$-composantes errantes, R. Benedetto démontre le résultat suivant (voir [BE2]) :

Théorème 6. *Soit $R$ une fraction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans une extension finie $K$ de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que $R$ est normalisée par le fait que le point à l'infini est un point fixe non répulsif. On suppose de plus que $R$ est une fraction rationnelle hyperbolique. Alors l'ensemble de Fatou de $R$ ne possède pas de $D$-composante errante.*

Nous aurons aussi besoin de lemmes techniques valides dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}_p$, déjà démontrés par R. Benedetto dans le cas où la fraction rationnelle hyperbolique $R$ est à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ :

Proposition 8. *Soit $R$ une fraction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. On suppose que son ensemble de Julia est non vide, et que $R$ est normalisée. Si $R$ est hyperbolique, alors :*

(a) *Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$, on ait $|R'(x)| \geq \alpha > 0$.*

(b) *Il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$ et tout $y \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x - y| \leq \beta$, on ait*

$$|R(x) - R(y)| = |R'(x)|\,|x - y|.$$

*Preuve.* (a) Puisque le point à l'infini est dans l'ensemble de Fatou, les pôles de $R$ le sont également. Puisque $R$ est hyperbolique, il existe donc une famille finie $F$ de disques, centrés en les pôles et les points critiques de $R$, tels que l'ensemble de Julia de $R$ est inclus dans le complémentaire de la réunion $E$ de ces disques. D'autre part, l'ensemble de Julia est inclus dans un disque $B^+(0, \varrho)$, puisque $R$ est normalisée. Posons $R' = A/B$, avec $A$ et $B$ polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, premiers entre eux. Comme $A$ n'a pas de zéros dans le complémentaire de $E$, $A$ est minoré par une constante strictement positive sur $E$. D'autre part, $B$ est majoré sur $B^+(0, \varrho)$, ce qui démontre le résultat.

(b) Notons tout d'abord que la fraction rationnelle $R$ est majorée sur l'ensemble $E$ intervenant dans la proposition précédente, disons par $M$. On peut clairement supposer que $M > 1$ ; de même, on peut supposer sans perte de généralité que le minorant $\alpha$ donné dans les hypothèses est tel que $0 < \alpha < 1$.

Soit $\beta_1$ strictement inférieur au minimum des rayons des disques intervenant dans la réunion $F$ des disques donnés dans la proposition précédente. Pour $x \in \mathcal{J}(R)$, le disque $B^+(x, \beta_1)$ est alors disjoint de $E$. La fraction rationnelle $R$ n'y a donc pas de pôles, et on peut la développer en série entière :

$$R(y) = R(x) + R'(x)(y - x) + \ldots + \frac{R^{(k)}(x)}{k!}(y - x)^k + \ldots$$

Prenons le maximum de $R(y) - R(x)$ sur le disque $B^+(x, \beta_1)$, il vient :

$$\max\left\{|R'(x)|\beta_1, \left|\frac{R^{(k)}(x)}{k!}\right|\beta_1^k\,; k \geq 2\right\} \leq M.$$

Il en résulte que $|R^{(k)}(x)/k!| \leq M\beta_1^{-k}$ pour tout $k \geq 2$.

Soit maintenant $\beta$ strictement positif et inférieur à $\beta_1$, et tel que $\beta < \alpha(\beta_1)^2/M$. On a alors, pour $k \geq 2$, l'inégalité

$$|R'(x)| > \left|\frac{R^{(k)}(x)}{k!}\right|\beta^{k-1}.$$

En effet, si $R^{(k)}(x)/k!$ est nul, il n'y a rien à montrer, et sinon :

$$\begin{aligned}\left|\frac{R^{(k)}(x)}{k!}\right|\beta^{k-1} &< \left|\frac{R^{(k)}(x)}{k!}\right|\beta_1^{2k-2}\,\frac{\alpha^{k-1}}{M^{k-1}} \\ &\leq \beta_1^{k-2}\,\frac{\alpha^{k-1}}{M^{k-2}} \leq \alpha^{k-1} \leq \alpha \leq |R'(x)|\end{aligned}$$

d'où l'assertion.

Il en résulte que si $y \in B^+(x, \beta)$, il vient

$$|R(y)-R(x)| = |y-x|\left|R'(x)+\ldots+\frac{R^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^{k-1}+\ldots\right| = |R'(x)|\,|y-x|$$

ce qui termine la démonstration. ■

La proposition suivante est déduite d'un résultat de R. Benedetto :

Proposition 9. *Soit $R$ une fraction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. On suppose que son ensemble de Julia est non vide, et que $R$ est normalisée. Si $R$ est hyperbolique, alors pour tout $a \in \mathcal{J}(R)$, la suite $(R^{[n]})'(a)$ est non bornée.*

*Preuve.* Elle suit de très près la démonstration donnée dans [BE2]. On raisonne par l'absurde, on suppose que pour $a \in \mathcal{J}(R)$, la suite $(R^{[n]})'(a)$ est bornée, disons par $\varrho$. Soit $\beta$ comme dans la proposition précédente. L'image du disque $B^+(a, \beta/\varrho)$ est incluse dans le disque $B^+(R(a), \beta)$, d'après la proposition précédente, puisque pour $y$ dans ce disque, on a

$$|R(y) - R(a)| = |R'(a)|\,|y - a| \leq \varrho\,\frac{\beta}{\varrho} = \beta.$$

Raisonnons par récurrence, pour montrer que $R^{[n]}(B^+(a,\beta/\varrho))$ est incluse dans le disque $B^+(R^{[n]}(a),\beta)$. C'est vrai si $n=1$, par ce qui précède. Si le résultat est vrai pour $n$, il en résulte que, sur chacun des disques $R^{[j]}(B^+(a,\beta/\varrho))$, qui sont inclus dans $B^+(R^{[j]}(a),\beta)$, $R$ agit en dilatant les distances par une facteur constant, égal à $|R'(R^{[j]}(a))|$. Il en résulte qu'il en est de même sur $R^{[n]}(B^+(a,\beta/\varrho))$. Mais alors le facteur constant est $|(R^{[n]})'(a)| \leq \varrho$, ce qui montre que l'image $R^{[n+1]}(B^+(a,\beta/\varrho))$ est incluse dans $B^+(R^{[n+1]}(a),\beta)$.

Mais alors, par le critère de Hsia, le disque $B^+(a,\beta/\varrho)$ est inclus dans l'ensemble de Fatou de $R$, ce qui est contradictoire avec le fait que $a \in \mathcal{J}(R)$, et ceci termine la démonstration. ∎

Il résulte de la proposition précédente que si $R$ est une fraction rationnelle de degré au moins deux à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, normalisée et hyperbolique, et si $x \in \mathcal{J}(R)$, on peut trouver un entier $m$ tel que $|(R^{[m]})'(x)| > 1$. En général, une telle valeur $m$ dépend de $x$, comme on le verra sur des exemples, et on ne peut trouver une valeur $m$ qui soit convenable pour tous les $x$ dans $\mathcal{J}(R)$. D'autre part, le résultat de R. Benedetto signalé plus haut donne que dans le cas où $R$ est à coefficients dans une extension finie $K$ de $\mathbb{Q}_p$ et hyperbolique, alors pour toute extension finie $L$ de $\mathbb{Q}_p$ contenant $K$, il existe un entier $m$ tel que pour tout $x \in L \cap \mathcal{J}(R)$, on ait $|(R^{[m]})'(x)| > 1$.

**III. Fractions rationnelles expansives sur leur ensemble de Julia.** Nous allons démontrer un certain nombre de propriétés sur ces fractions rationnelles.

PROPOSITION 10. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, normalisée, dont l'ensemble de Julia est non vide, et qui est expansive sur son ensemble de Julia. Alors l'ensemble de Fatou de $R$ ne contient aucune $D$-composante périodique circonférenciée.*

*Preuve.* On va raisonner par l'absurde. On suppose d'abord que la $D$-composante circonférenciée périodique n'est pas la $D$-composante de l'infini. On la note $U = B^+(\omega, r)$, avec donc $r$ dans le groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p$ ; quitte à remplacer $U$ par une de ses itérées, on peut supposer que $U$ admet un rayon maximal parmi les itérées de $U$ (qui sont des $D$-composantes, puisqu'une telle $D$-composante est une composante analytique, de sorte que $R^*(U) = R(U)$).

Comme $R$ est expansive sur son ensemble de Julia, il existe $m \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ et $c > 1$ tel que l'on ait $|(R^{[m]})'(x)| \geq c > 1$ pour tout $x$ dans l'ensemble de Julia de $R$.

Comme $R^{[m]}$ applique $U$ sur l'une des itérés de $U$ qui ne contient pas le point à l'infini, la fraction rationnelle $R^{[m]}$ ne possède pas de pôles dans $U$. Il en résulte qu'il existe $\varrho_0 > r$ tel que $R^{[m]}$ ne possède pas non plus de pôles dans $B^+(\omega,\varrho_0)$. Soit $\varrho$ tel que $r<\varrho<\varrho_0$. Le disque $B^+(\omega,\varrho)$ contient un point de l'ensemble de Julia de $R$, par suite il existe $x$ dans ce disque tel que $|(R^{[m]})'(x)|\geq c$.

Soit $f$ une fonction analytique sur un disque $B^+(\omega,R)$. On rappelle que l'on note $|f|_\omega(r)=\max\{|f(x)|\,;x\leq r\}$, et que l'on définit ainsi une fonction continue de $r\leq R$ qui est monômiale par morceaux. On déduit donc de ce qui précède que $|(R^{[m]})'|_\omega(\varrho)\geq c$, et par continuité de la fonction $t\mapsto|(R^{[m]})'|_\omega(t)$ au point $r$, que $|(R^{[m]})'|_\omega(r)\geq c>1$. En particulier, il existe $\theta$ dans $U$ tel que $|(R^{[m]})'(\theta)|\geq c>1$. On considère le développement de Taylor de $R$ au voisinage de $\theta$, qui s'écrit

$$R^{[m]}(x)=R^{[m]}(\theta)+(R^{[m]})'(\theta)(x-\theta)+\ldots+a_k(x-\theta)^k+\ldots$$

On a la formule suivante pour le rayon $s$ du disque $R^{[m]}(U)$ :

$$s=\max\{|(R^{[m]})'(\theta)|r,|a_k|r^k\,;k\geq 2\}$$

ce qui donne $s\geq|(R^{[m]})'(\theta)|r>r$, en contradiction avec le choix fait pour $U$, et cette contradiction termine la démonstration dans ce premier cas.

Supposons maintenant que la $D$-composante considérée est la $D$-composante du point à l'infini. C'est donc le complémentaire d'un disque ouvert $B^-(a,r)$ de $\mathbb{C}_p$. On a $r$ dans le groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p$, et on peut donc supposer que $a=0$, et $r=1$ pour simplifier. On va suivre le même schéma de preuve. Il existe $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 1$, tel que, pour tout $x\in\mathcal{J}(R)\subset B^-(0,1)$, on ait $|(R^{[m]})'(x)|\geq c>1$. Comme le complémentaire de $B^-(0,1)$ est une $D$-composante, il existe une suite $x_n$ de points de $\mathcal{J}(R)$ telle que $|x_n|\to 1$. Il en résulte que, pour $n$ assez grand, si on écrit

$$R^{[m]}(x)=\frac{A_m(x)}{B_m(x)},$$

ni $A_m$, ni $B_m$ n'a de zéros sur le cercle $|x|=|x_n|=r_n$, et par suite $|A_m|(r_n)=|A_m(x_n)|$ et de même $|B_m|(r_n)=|B_m(x_n)|$. La dérivée $(R^{[m]})'(x)$ est égale à $(A'_m(x)B_m(x)-A_m(x)B'_m(x))/B_m(x)^2$. On a $|A'_m|(r_n)\leq|A_m|(r_n)/r_n$ et de même $|B'_m|(r_n)\leq|B_m|(r_n)/r_n$. Il en résulte que

$$1<c\leq|(R^{[m]})'(x_n)|\leq\frac{|A_m|(r_n)}{r_n|B_m|(r_n)}$$

pour tout $n$ assez grand, et en faisant tendre $n$ vers l'infini, il en résulte que $|A_m|(1)/|B_m|(1)\geq c>1$.

Le fait que $|R^{[m]}(x)|\geq 1$ si $|x|\geq 1$ (puisque la $D$-composante du point à l'infini est stable par $R$) montre que le polynôme $A_m$ n'a pas de zéros de module $\geq 1$. Par suite, il existe $r<1$ tel que, pour $|x|\geq r$, on ait $|A_m(x)|=c_1|x|^d$, où $d$ est le degré de $A_m$, et on a $c_1=|A_m|(1)$. Si $1>|x|\geq r$, on a $|B_m(x)|\leq|B_m|(|x|)$, et par suite

$$|R^{[m]}(x)| \geq \frac{c_1|x|^d}{|B_m|(|x|)}.$$

Cette dernière quantité prend pour $|x| = 1$ une valeur $\geq c > 1$, comme on l'a vu plus haut.

Il existe donc $r^*$ assez proche de 1, strictement inférieur à 1, tel que pour tout $x$ vérifiant $|x| \geq r^*$, on ait $|R^{[m]}(x)| > 1$. Ceci veut dire que la couronne $\{x\,; 1 > |x| \geq r^*\}$ est incluse dans l'ensemble de Fatou de $R$, puisque son image par $R^{[m]}$ l'est. Mais cette couronne contient des points de l'ensemble de Julia de $R$, contradiction, ce qui termine cette démonstration. ∎

Proposition 11. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, normalisée, dont l'ensemble de Julia est non vide, et qui est expansive sur son ensemble de Julia. Alors l'ensemble de Fatou de $R$ ne contient aucune $D$-composante circonférenciée.*

*Preuve.* Comme nous avons réglé le cas des éventuelles composantes circonférenciées périodiques dans la proposition précédente, il suffit de voir le cas de $D$-composantes circonférenciées pré-périodiques et errantes. Supposons d'abord que la $D$-composante circonférenciée $U$ est pré-périodique. On sait alors que $U$ est une $A$-composante, et que par suite $R(U)$ est également une $A$-composante. Comme image d'un disque circonférencié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, $R(U)$ est également un disque circonférencié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, donc une $D$-composante. Ce ne peut donc être la $D$-composante du point à l'infini, qui est un disque non circonférencié. Donc c'est un disque circonférencié inclus dans $\mathbb{C}_p$. En itérant un certain nombre de fois, on trouve une $D$-composante circonférenciée périodique, ce qui est en contradiction avec le résultat de la proposition qui précède.

Supposons maintenant que la $D$-composante $U$ circonférenciée est errante ; comme $R$ est expansive sur son ensemble de Julia, quitte à remplacer $R$ par une de ses itérées, on peut supposer que sur l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(R)$, on a $|R'(x)| \geq c > 1$. Le début de la démonstration précédente s'applique, et montre que les itérées de $U = B^+(\omega, r)$ sont des disques circonférenciés distincts, que l'on note $U_n = B^+(\omega_n, r_n)$, où on a noté $\omega_n = R^{[n]}(\omega)$. Il est clair qu'aucun d'entre eux ne contient de pôles de $R$. A partir d'un certain rang, disons $N$, aucun d'entre eux ne contient de point critique de $R$, on a donc que $R'(x) \neq 0$ pour tout $x \in U_n$, $n \geq N$. Alors il existe un disque de centre $\omega_n$, et de rayon strictement plus grand que le rayon de $U_n$, tel que $R$ n'y ait non plus pas de pôle ni de zéro. Alors on a $|R'(\omega_n)| = |R'(x)|$ pour tout $x$ dans ce dernier disque, qui contient des points de l'ensemble de Julia, puisque $U_n$ est une $D$-composante. On a donc $|R'(\omega_n)| \geq c > 1$ pour tout $n \geq N$.

L'image du disque $U_n$ par $R$ est $U_{n+1}$. Si on note $R(x) = \omega_{n+1} + a_1(x - \omega_n) + \ldots + a_k(x - \omega_n)^k + \ldots$ le développement de Taylor de $R$ en $\omega_n$, il vient $r_{n+1} = \max\{|a_k| r_n^k\}$. En particulier, on a $r_{n+1} \geq |a_1| r_n =$

$|R'(\omega_n)|r_n \geq cr_n$ pour tout $n \geq N$. On en déduit immédiatement que $r_{N+m} \geq c^m r_N$ pour tout $m \geq 0$, ce qui montre que $r_n \to \infty$, ce qui est absurde, et ceci termine la démonstration. ■

On regarde maintenant les $D$-composantes errantes ; nous aurons besoin du lemme suivant (cf. J. Rivera-Letelier, [RL, Lemme 4.13, page 73]) :

LEMME 1. *Soit $R$ une fraction rationnelle de degré au moins deux à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, que l'on suppose normalisée. On suppose que $U$ est une $D$-composante errante pour $R$, et on note $r_n$ le rayon du disque $U_n = R^{[n]}(U)$. Alors on a $\delta = \liminf(r_n) = 0$.*

*Preuve.* Soit $\varrho > 0$ tel que le disque $B^+(0, \varrho)$ contienne tous les $U_n$. On raisonne par l'absurde. On suppose $\delta = \liminf(r_n) > 0$. Soit $\varepsilon < \delta$. Il existe $N$ tel que si $n \geq N$, on ait $r_n > \varepsilon$. Soit $V$ le domaine obtenu en enlevant de $B^+(0, \varrho)$ les $D$-composantes des pôles de $R$ situés dans $B^+(0, \varrho)$. On note $\|\cdot\|_\varrho$ la norme de la convergence uniforme sur $V$. On notera que tous les $U_n$ sont contenus dans $V$.

On choisit maintenant $Q \in \Omega_p(x)$, de façon que $\|R - Q\|_\varrho < \varepsilon$, et que si on note $\widetilde{U}_n = Q^{[n]}(U)$, on ait $\widetilde{U}_N = U_N$, ce qui est possible en approchant les coefficients de $R$ par des éléments de $\Omega_p$. Nous allons montrer par récurrence que $\widetilde{U}_n \subset U_n$ pour $n \geq N$. Supposons que ceci est vrai pour $n$. Soit $x \in \widetilde{U}_n$, alors $x \in U_n$, et donc $R(x) \in U_{n+1}$. Comme $|R(x) - Q(x)| \leq \|R - Q\|_\varrho < \varepsilon$, le point $Q(x)$ est dans le disque de centre $R(x)$, rayon $\varepsilon$, qui est inclus dans $U_{n+1}$ puisque $r_{n+1} > \varepsilon$. On a donc $\widetilde{U}_{n+1} \subset U_{n+1}$, ce qui démontre l'assertion.

Soit maintenant $L$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ qui contienne un point de $U_N$ et tous les coefficients de $Q$. Il est alors clair que $\widetilde{U}_n$ contient des points de $L$ pour tout $n \geq N$, ce qui implique que ceci est aussi vrai pour $U_n$. Soit $\varrho_n$ le rayon du disque $U_n \cap L$ de $L$. Alors $\varrho_n \geq |\pi| r_n$, où $\pi$ est une uniformisante de $L$. Comme les disques $U_n \cap L$ sont des disques disjoints deux à deux de $B^+(0, \varrho) \cap L$ qui est compact, leur rayon $\varrho_n$ tend vers 0, et par suite aussi $r_n$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse faite, et démontre l'assertion. ■

Nous revenons maintenant à l'étude des fractions rationnelles expansives sur leur ensemble de Julia :

PROPOSITION 12. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, normalisée, dont l'ensemble de Julia est non vide, et qui est expansive sur son ensemble de Julia. Alors l'ensemble de Fatou de $R$ ne contient aucune $D$-composante errante.*

*Preuve.* On peut supposer, quitte à remplacer $R$ par une de ses itérées, que $|R'(x)| \geq c > 1$ pour tout $x$ dans l'ensemble de Julia de $R$. Soit $U$ une $D$-composante errante de l'ensemble de Fatou de $R$. C'est un disque non circonférencié $B^-(\omega, r)$, dont les itérés sont des disques disjoints que nous notons $U_n = B^-(\omega_n, r_n)$. Il existe $N$ tel que $R'(x)$ ne s'annule pas sur les disques $U_n$ avec $n \geq N$. Soit d'autre part $\varrho$ un réel strictement positif qui est inférieur aux rayons des $D$-composantes de l'ensemble de Fatou de $R$ contenant un pôle de $R$ (qui sont disjointes de tous les $U_n$).

Tout d'abord, nous notons $\widetilde{U}_n = B^+(\omega_n, r_n)$ le disque circonférencié de centre $\omega_n$ et de rayon $r_n$. Soit $E$ l'ensemble des indices $n$ tels que $\widetilde{U}_{n-1}$ contienne un pôle de $R$, et que $\widetilde{U}_n$ n'en contienne pas. Nous allons montrer tout d'abord que $E$ est un ensemble infini.

On raisonne par l'absurde, on suppose que $E$ est fini, on peut supposer que si $n \geq N$, alors $n \notin E$. Pour $n \geq N-1$, on va montrer que $r_n \geq \min\{\varrho, r_{N-1}\}$. On procède par récurrence sur $n$. C'est clairement vrai pour $n = N-1$. Supposons que cette propriété soit vraie pour $n-1 \geq N$, nous allons alors montrer qu'elle est vraie pour $n$.

Supposons que le disque $B^+(\omega_{n-1}, r_{n-1})$ contienne un pôle de $R$. Comme $n \notin E$, le disque $\widetilde{U}_n$ contient aussi un pôle $c$ de $R$. Alors comme le disque $U_n$ et la $D$-composante de $c$ sont disjointes, le rayon $r_n$ de $U_n$ est supérieur ou égal au rayon de la $D$-composante de $c$, donc à $\varrho$, et par suite à $\min\{\varrho, r_{N-1}\}$.

Supposons maintenant que le disque $B^+(\omega_{n-1}, r_{n-1})$ ne contient pas de pôles de $R$. On sait qu'il contient un point de l'ensemble de Julia, puisque $U_{n-1}$ est une $D$-composante. Pour un tel point $x$, on a $|R'(x)| \geq c > 1$. Comme $R'$ n'a pas de zéros dans $U_{n-1}$, sa valeur absolue est constante sur $U_{n-1}$, et la valeur de cette constante est égale au maximum de $|R'(x)|$ sur $B^+(\omega_{n-1}, r_{n-1})$. Par suite elle est supérieure ou égale à $|R'(x)|$, donc à $c$. On a donc $|R'(\omega_{n-1})| \geq c$. Le rayon $r_n$ de $U_n$ vérifie alors $r_n \geq |R'(\omega_{n-1})| r_{n-1} \geq c r_{n-1} \geq \min\{\varrho, r_{N-1}\}$, ce qui termine la preuve de cette assertion.

De l'inégalité $r_n \geq \min\{\varrho, r_{N-1}\}$ pour $n \geq N-1$, on déduit que la limite inférieure de $r_n$ n'est pas nulle, mais ceci est en contradiction avec le résultat du lemme précédent, et cette contradiction montre que $E$ est infini.

On range désormais les éléments de $E$ en une suite $n_k$, strictement croissante. Soit $k$ un entier et $n$ dans l'intervalle $]n_k, n_{k+1}[$. Nous allons montrer que $r_n \geq \min\{\varrho, r_{n_k}\}$. On commence par $n = n_k + 1$ ; par définition de $E$, $\widetilde{U}_{n_k}$ ne contient pas de pôle de $R$. Un raisonnement analogue à celui fait précédemment montre qu'alors $r_{n_k+1} \geq c r_{n_k} > r_{n_k}$.

On poursuit ainsi, jusqu'à rencontrer un indice $m$ tel que $\widetilde{U}_{m-1}$ contienne un pôle de $R$. Si $m = n_{k+1}$, on a terminé, sinon $\widetilde{U}_m$ contient un pôle de $R$, et on a $r_m \geq \varrho$. On a en fait que les $U_j$ à partir de ce moment contiennent tous un pôle de $R$, avec donc $r_j \geq \varrho$, jusqu'à la valeur $m = n_{k+1} - 1$, ce qui démontre l'assertion. Soit $q$ un entier plus grand que $N$, et $k_q$ tel que $n_{k_q} \leq q < n_{k_{q+1}}$. Il résulte de ce qui précède que $\inf\{r_j \,;\, j \geq q\} \geq \inf\{\varrho, r_{n_l} \,;\, l \geq k_q\}$. Par suite, la limite inférieure de la suite $r_{n_k}$ est nulle.

On peut donc trouver une sous-suite $r_{n_{k_m}}$ de cette suite qui tend vers 0. Comme $r_{n_{k_m}-1} \geq \varrho$ par définition de $E$, il vient l'inégalité

$$\varrho |R'(\omega_{n_{k_m}-1})| \leq r_{n_{k_m}-1} |R'(\omega_{n_{k_m}-1})| \leq r_{n_{k_m}}$$

ce qui montre que $R'(\omega_{n_{k_m}-1})$ tend vers 0 si $m \to \infty$. Mais alors, il existe un point critique de $R$, qui donc appartient à l'ensemble de Fatou, tel que sa $D$-composante contienne une infinité de points $\omega_n$, ce qui contredit le fait que la $D$-composante $U$ soit errante, et termine la démonstration. ∎

On regarde maintenant les $D$-composantes périodiques de l'ensemble de Julia de $R$ :

PROPOSITION 13. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, normalisée, dont l'ensemble de Julia est non vide, et qui est expansive sur son ensemble de Julia. On peut supposer qu'il existe $c > 1$ tel que $|R'(x)| \geq c > 1$ pour tout $x$ dans l'ensemble de Julia. Soit $U$ une $D$-composante périodique de l'ensemble de Fatou de $R$, que l'on suppose différente de la $D$-composante du point à l'infini de $R$, et telle qu'aucune de ses itérées ne contienne de point critique de $R$. On note $\varrho$ un réel strictement positif, inférieur ou égal au minimum des rayons des $D$-composantes de $R$ contenant un pôle de $R$. Soit aussi $\delta > 0$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{C}_p\,;\, |R'(x)| < \delta\}$ soit inclus dans la réunion des $D$-composantes des points critiques de $R$.*

*Alors le rayon de $U$ est supérieur ou égal à $\delta\varrho$. En conséquence, le rayon des $D$-composantes périodiques différentes de la $D$-composante du point à l'infini est minoré par une constante strictement positive.*

*Preuve.* On note $U_0 = U = B^-(\omega, r)$ et $U_k = B^-(\omega_k, r)$, $k = 0, \ldots, q$, les itérées de $U$ (ce sont donc les $D$-composantes contenant les images de $U$ par les itérées de $R$, mais elles peuvent contenir strictement ces images). On note aussi $\widetilde{U}_k = B^+(\omega_k, r_k)$. Supposons que les disques $\widetilde{U}_k$ ne contiennent aucun pôle de $R$. Alors on voit immédiatement que ces disques sont inclus dans l'ensemble de Fatou de $R$, ce qui est une contradiction avec le fait que les $U_k$ sont des $D$-composantes. Donc il existe une de ces $D$-composantes, disons $U_m$, telle que $\widetilde{U}_m$ contienne un pôle de $R$. Quitte à changer la numérotation on peut supposer que c'est $\widetilde{U} = \widetilde{U}_0$, et il nous faut alors montrer que l'on a l'inégalité pour toutes les autres itérées de $U$.

On a alors que $r_0 \geq \varrho$, donc l'assertion est vraie pour $k = 0$. On procède ensuite par récurrence sur $k$. Supposons que $r_k \geq \delta\varrho$. Si $\widetilde{U}_k$ ne contient pas de pôles de $R$, alors l'image de $U_k$ par $R$ est un disque de rayon au moins $cr_k > r_k$, par le même raisonnement fait dans la démonstration de la proposition précédente. Donc $r_{k+1} \geq \delta\varrho$. Si $\widetilde{U}_k$ contient un pôle de $R$, le rayon $r_k$ de $U_k$ est en fait $\geq \varrho$. Par le raisonnement fait dans la démonstration de la question précédente, le rayon de $U_{k+1}$ est supérieur ou égal à $|R'(\omega_k)| r_k \geq \delta\varrho$, puisque

$|R'(\omega_k)| \geq \delta$, car sinon, $U_k$ serait une $D$-composante d'un point critique de $R$. Ceci prouve la première assertion.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de $D$-composantes périodiques dont une itérée contient un point critique de $R$, la dernière assertion est immédiate. ∎

On peut alors montrer l'existence de points périodiques non répulsifs :

Proposition 14. *Soit $R$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, normalisée, dont l'ensemble de Julia est non vide, et qui est expansive sur son ensemble de Julia. Alors $R$ possède des points périodiques répulsifs.*

*Preuve.* Soit $x \in \mathcal{J}(R)$. D'après un théorème de Hsia, il existe une suite de points périodiques de $R$ de limite $x$. Si $x$ est égal à l'un d'eux, c'est un point périodique dans l'ensemble de Julia, donc répulsif. Sinon, on sait d'après la proposition précédente qu'il existe $\alpha > 0$ tel que le rayon de toute $D$-composante périodique soit au moins $\alpha$.

Soit $\omega$ un point périodique tel que $|x - \omega| < \alpha$. Supposons que $\omega$ soit périodique non répulsif. Alors c'est un élément de $\mathcal{F}(R)$, et sa $D$-composante est également périodique. Comme cette $D$-composante ne contient pas $x$, son rayon est $< \alpha$, ce qui contredit le fait que toute $D$-composante périodique a un rayon au moins égal à $\alpha$ ; donc $\omega$ est répulsif. Il est alors clair que cet ensemble de points périodiques répulsifs est infini et dense dans l'ensemble de Julia, ce qui termine la démonstration. ∎

On a maintenant le résultat suivant :

Proposition 15. *Soit $R$ une fraction rationnelle, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux, normalisée, dont l'ensemble de Julia est non vide. Si $R$ est expansive sur son ensemble de Julia, on a $\overline{O_R^+} \cap \mathcal{J}(R) = \emptyset$.*

*Preuve.* Si l'on note $W = B^+(a,r)^{\mathrm{c}}$ la $D$-composante du point à l'infini, il est clair que si un point $y$ de l'orbite avant d'un point critique lui appartient, et si $x \in \mathcal{J}(R)$, on a $|y - x| > r$ (ceci inclus le cas éventuel de $y$ égal au point à l'infini). Il suffit donc de démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour un point $y$ de l'ensemble $\overline{O_R^+}$ n'appartenant pas à $W$, et un point $x$ de l'ensemble de Julia, on a $|y - x| \geq \alpha$, pour avoir la conclusion désirée (et même une propriété légèrement plus forte).

Soient $c_1, \ldots, c_s$ les points critiques de $R$, qui sont donc dans l'ensemble de Fatou. Les $D$-composantes de ces points sont pré-périodiques, puisqu'il n'existe pas de $D$-composantes errantes. Si on considère l'ensemble des itérées de ces $D$-composantes non incluses dans $W$, on a donc un ensemble fini de disques de $\mathbb{C}_p$, dont la réunion forme donc un ensemble fermé $E$.

Il résulte de ce qui précède que $\overline{O_R^+} \subset E \cup W = F$, qui est un ensemble fermé. Soit $\alpha > 0$, et inférieur à $r$ et au minimum des rayons des disques composantes de $E$. Soit $x \in \mathcal{J}(R)$, et $y \in \overline{O_R^+}$. Si $y \in W$, on a déjà vu que $|y - x| > r > \alpha$. Si $y \in E$, la distance de $y$ à $x$ est au moins égale au rayon de la $D$-composante à laquelle appartient $y$, donc est $> \alpha$, ce qui termine la démonstration. ∎

Nous allons faire une hypothèse de nature un peu différente, plus faible pour la fraction rationnelle $R$ que le fait d'être expansif sur son ensemble de Julia ; il est clair que dans le cas de $\mathbb{C}$, les deux hypothèses sont en fait équivalentes :

Proposition 16. *Soit $R$ une fraction rationnelle normalisée, de degré $d \geq 2$, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. On suppose que l'ensemble de Julia de $R$ est non vide, et qu'il existe une partie finie non vide $A$ de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$, il existe $m \in A$ tel que $|(R^{[m]})'(x)| > 1$. Alors :*

(a) *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on ait $|(R^{[n]})'(x)| \geq c$.*

(b) *Il existe un nombre fini de $D$-composantes périodiques circonférenciées, chacune étant telle qu'elle possède une itérée contenant un point critique de $R$.*

*Preuve.* On note dans la suite $m_1 < \ldots < m_s$ les éléments de $A$ rangés par ordre croissant.

(a) Remarquons tout d'abord que comme $R$ est hyperbolique, chaque point critique est dans un disque contenu dans l'ensemble de Fatou, ainsi que les pôles de $R$. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $z \in \mathcal{J}(R)$, le disque de centre $z$ et rayon $\alpha$ ne contienne pas de pôle de $R$, et la fonction $R'$ ne s'y annule pas. Il en résulte qu'il existe $c_1 > 0$, que l'on peut prendre $\leq 1$, telle que si $z \in \mathcal{J}(R)$, on a $|R'(z)| \geq c_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{J}(R)$. On définit une suite $n_k$ d'entiers non nuls, chacun appartenant à $A$, de la façon suivante : $n_0 = 0$ ; $n_1$ est un entier, pris dans $A$, tel que $|(R^{[n_1]})'(x)| > 1$ ; $n_2$ est un entier, pris dans $A$, tel que $|(R^{[n_2]})'(R^{[n_0+n_1]}(x))| > 1$, et de manière plus générale, si $n_{k-1}$ est connu, l'entier $n_k$ est l'un des entiers de $A$ tels que $|(R^{[n_k]})'(R^{[n_0+\ldots+n_{k-1}]}(x))| > 1$. On note $q_k = n_0+\ldots+n_{k-1}$ pour $k \geq 1$. La suite $q_k$ est une suite strictement croissante d'entiers.

Soit maintenant $n$ un entier quelconque. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que l'on ait $q_k \leq n < q_{k+1}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}|(R^{[n]})'(x)| = |(R^{[n_1]})'(R^{[q_0]}(x))|\,|(R^{[n_2]})'(R^{[q_1]}(x))| \ldots \\ \times |(R^{[n_{k-1}]})'(R^{[q_{k-2}]}(x))|\,|(R^{[n-q_{k-1}]})'(R^{[q_{k-1}]}(x))|.\end{aligned}$$

À l'exception du dernier terme, tous les termes du deuxième produit sont $> 1$, et on a $n - q_{k-1} < n_k \leq m_s$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}|(R^{[n]})'(x)| &> |(R^{[n-q_{k-1}]})'(R^{[q_{k-1}]}(x))| \\ &= |R'(R^{[q_{k-1}]}(x))| \ldots |R'(R^{[n-1]}(x))| \geq c_1^{m_s-1} = c\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de l'assertion (a).

(b) Il existe un nombre fini, éventuellement vide, de $D$-composantes périodiques circonférenciées, $U_1, \ldots, U_m$, dont l'une des itérées contient un des points critiques de $R$. Comme il s'agit de $D$-composantes circonférenciées, chacune d'entre elles contient un point périodique de $R$ qui est non répulsif.

Soit $B$ une $D$-composante périodique, de période $q$, circonférenciée, qui ne soit pas parmi les $U_k$, $k = 1, \ldots, m$. Par suite, sur $B = B_0$ et ses itérées $B_k$, $k = 1, \ldots, q-1$, $R'$ ne s'annule pas, et $R$ n'y a aucun pôle. Il en résulte que, pour tout $k = 1, \ldots, m$, et pour tout $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 1$, la fonction $R^{[h]}$ n'a aucun pôle dans $B_k$, et la dérivée de $R^{[h]}$ ne s'y annule pas ; en effet, sinon, il existe $j$ tel que $R'(R^{[j]}(x)) = 0$, et $R^{[j]}(x)$ serait un point critique de $R$ appartenant à l'un des $B_j$.

On considère maintenant l'indice $j \in \{0, \ldots, q-1\}$ tel que le rayon de $B_j$ soit le plus grand parmi les rayons des $B_k$. Il existe un disque de rayon $\varrho_j > r_j$ sur lequel aucun des $|(R^{[m]})'(x)|$, pour $m \in A$, ne s'annule ; ceci provient du fait que les disques $B_k$ sont circonférenciés. Par suite, on a $|(R^{[m]})'(\omega_j)| = |(R^{[m]})'(x)|$ pour tout $x \in B^+(\omega_j, \varrho_j)$ ; on sait qu'il existe un élément de l'ensemble de Julia dans ce disque $B^+(\omega_j, \varrho_j)$, et pour un tel élément, il existe $m \in A$ tel que $|(R^{[m]})'(x)| > 1$. On a donc pour un tel indice $m$ l'inégalité $|(R^{[m]})'(\omega_j)| > 1$.

L'image par $R^{[m]}$ du disque $B^+(\omega_j, r_j)$ est l'un des disques $B_k$, disons $B_h$. Son rayon est donné par $r_h = |R^{[m]} - R^{[m]}(\omega_j)|(r_j) \geq |(R^{[m]})'(\omega_j)| r_j > r_j$, ce qui est contradictoire avec le fait que $B^+(\omega_j, r_j)$ est de rayon maximal, et cette contradiction montre qu'une telle $D$-composante périodique circonférenciée n'existe pas, ce qui achève la démonstration. ∎

Remarque. La différence entre les hypothèses de la proposition 10 et celles de la proposition 16 tient au fait que dans la proposition 10, on supposait qu'il existait un entier $m \geq 1$ et un réel $c > 1$ tels que $|(R^{[m]})'(x)| \geq c > 1$ pour tout $x$ dans l'ensemble de Julia (expansivité), tandis que dans la proposition 16, par exemple dans le cas le plus simple où l'ensemble $A$ est réduit à un élément, on suppose qu'il existe $m \geq 1$ tel que $|(R^{[m]})'(x)| > 1$ pour tout $x$ dans l'ensemble de Julia. Bien sûr, dans le cas où le corps de base est le corps des nombres complexes, comme l'ensemble de Julia est compact, les deux hypothèses sont en fait les mêmes.

L'exemple 3 montre que ce n'est plus le cas quand le corps de base est $\mathbb{C}_p$.

Corollaire 1. *Soit $R$ un polynôme de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, dont l'ensemble de Julia est non vide. S'il existe une partie finie $A$ de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$, il existe $m \in A$ tel que $|(R^{[m]})'(x)| > 1$, alors $R$ possède des points périodiques répulsifs.*

*Preuve.* En effet, d'après la proposition précédente, il existe un nombre fini de $D$-composantes périodiques circonférenciées. Mais dans le cas d'un polynôme, toutes les $D$-composantes périodiques sont circonférenciées, de sorte que ceci implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de $D$-composantes périodiques.

Soit alors $\alpha > 0$ qui soit inférieur strictement au plus petit rayon d'une $D$-composante périodique. Soit $x \in \mathcal{J}(R)$ et $\omega$ un point périodique de $R$ tels que $|x - \omega| < \alpha$, qui existe d'après un théorème de Hsia (voir [HS2]). Si $\omega$ n'est pas répulsif, alors sa $D$-composante est périodique, et de rayon inférieur à $\alpha$, ce qui est contraire au choix de $\alpha$, et cette contradiction montre que $\omega$ est non répulsif. ∎

**IV. Exemples.** Nous allons maintenant donner un certain nombre d'exemples relatifs à ces résultats.

Exemple 1. Soit

$$R(x) = \frac{x^p - x}{p},$$

exemple qui apparaît dans [SW]. L'ensemble de Julia de $R$ est $\mathbb{Z}_p$, et on a $|R'(x)| = p > 1$ pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$. Donc la fraction rationnelle $R$ est expansive sur son ensemble de Julia. On vérifie que tous les points périodiques en dehors du point à l'infini sont des points périodiques répulsifs, et il n'y a aucune $D$-composante périodique en dehors de la $D$-composante du point à l'infini.

Exemple 2. C'est un exemple de fraction rationnelle hyperbolique qui n'est pas expansive sur son ensemble de Julia, et qui apparaît dans [BE3] et [BE4]. On prend

$$R(z) = z^2 + p\,\frac{z^2}{z+1}$$

où $p$ est un nombre premier $\geq 3$. Alors $R$ est hyperbolique, et l'ensemble de Fatou de $R$ a une infinité de $D$-composantes périodiques. Soit $x \in B^+(0,1) - B^-(-1,1)$. Alors l'image du disque $B^-(x,1)$ est le disque $B^-(x^2,1)$. On peut alors voir que si $\omega_m$ est un point de $\mathbb{C}_p$ tel que $\omega_m^{2^{m+1}} = -1$ et si $\omega_m^{2^j} \neq -1$ pour $j \leq m$, alors il existe un point de l'ensemble de Julia appartenant au disque $B^-(\omega_m, 1)$, donc tel que $R^{[j]}(\omega_m)$ n'appartienne pas au disque $B^-(-1,1)$ pour $j \leq m$. Alors on a $|(R^{[j]})'(\omega_m)| = 1$ pour $j \leq m$. Il n'existe donc pas d'ensemble fini $A$ tel que pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$, il existe $m \in A$ avec

$|(R^{[m]})'(x)| > 1$, et $R$ n'est pas expansive sur son ensemble de Julia, bien qu'elle soit hyperbolique.

Exemple 3. Donnons aussi un exemple où il existe un ensemble $A$ fini tel que, pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$, il existe $m \in A$ tel que l'on ait $|(R^{[m]})'(x)| > 1$, bien que $R$ ne soit pas expansive sur son ensemble de Julia. On prend $p$ premier, $p \geq 5$. Pour $a, b \in \mathbb{C}_p$, $|a| = |b| = 1$, et $\lambda$ dans l'anneau d'entiers de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $p^{-1} < |\lambda| < 1$, on pose

$$R(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bp^2}{\lambda}.$$

(a) On vérifie que $R$ a un point périodique attractif, $\omega_1$, vérifiant $|\omega_1| = p^{-2}|\lambda|^{-1} < |\lambda|$, un point périodique neutre $\omega_2$ tel que $|\omega_2| = |\lambda|$, et un point périodique répulsif $\omega_3$ tel que $|\omega_3| = 1$. Il en résulte que l'ensemble de Julia de $R$ n'est pas vide.

(b) On vérifie également que le disque $B^+(0, |\lambda|)$ est fixe sous l'action de $R$. En particulier, il est inclus dans l'ensemble de Fatou de $R$. D'autre part, soit $\varrho \in ]|\lambda|, 1[$ dans le groupe des valeurs, et $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x| = \varrho$. On vérifie que $|R(x)| = |x|^2/|\lambda| > |x|$. Donc le disque $B^+(0, \varrho)$ n'est pas stable par $R$, le disque $B^+(0, 1)$ non plus, ainsi que tout disque de centre 0 et de rayon $> 1$. Par conséquent $U = B^+(0, |\lambda|)$ est la $D$-composante de 0, et c'est un disque stable de rayon maximal fixé par $R$. Les deux points critiques sont 0, qui appartient à $B^+(0, 1)$, et qui est donc dans l'ensemble de Fatou, et $\theta = -2a/3$. On vérifie que $|R(\theta)| = 1/|\lambda| > 1$, de sorte que $R(\theta)$ est dans le bassin d'attraction du point à l'infini, et donc dans l'ensemble de Fatou, ainsi que $\theta$. Par conséquent, le polynôme $R$ est hyperbolique.

(c) Soit $\omega$ un point périodique de $R$ n'appartenant pas à $U$. Si $|\omega| < 1$, on a $|\omega| > |\lambda|$, et on voit que $|R'(\omega)| = |\omega|/|\lambda| > 1$. Si $|\omega| = 1$, on a $|\omega + a| < 1$. En effet, dans le cas contraire $|R(\omega)| = 1/|\lambda| > 1$, et il en résulte que $|R^{[n]}(\omega)| \to \infty$, contrairement au fait que $\omega$ est périodique. On voit alors aisément que $|R'(\omega)| = 1/|\lambda| > 1$. On a donc montré que si $\omega$ est un point périodique qui n'appartient pas à $U$, alors $|R'(\omega)| > 1$. Mais alors, aucun de ses itérés n'appartient à $U$, et il en résulte que $\omega$ est répulsif. Par suite, $U$ est l'unique $D$-composante périodique de $R$ dans $\mathbb{C}_p$ (parce que les $D$-composantes périodiques différentes de la $D$-composante du point à l'infini d'un polynôme sont circonférenciées, donc contiennent un point périodique).

(d) Comme $R$ est hyperbolique, on a $R'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$. Il existe une suite $\omega_n$ de points périodiques répulsifs de $R$ qui converge vers $x$. Pour $n$ assez grand, on aura $|R'(x)| = |R'(\omega_n)| > 1$ par ce qui précède. On a donc vérifié les hypothèses, avec $A = \{1\}$. On peut voir facilement qu'il n'existe pas de $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, et de $c > 1$ tel que l'on ait pour tout $x \in \mathcal{J}(R)$ l'inégalité $|(R^{[m]})'(x)| \geq c > 1$, de sorte que $R$ n'est pas expansive sur son ensemble de Julia. On peut aussi déduire cette propriété du fait qu'il existe une $D$-composante fixée circonférenciée rationnelle.

Exemple 4. L'étude de l'exemple précédent utilisait le fait que dans une $D$-composante circonférenciée périodique, il y a toujours un point périodique. L'exemple suivant montre qu'il peut exister des $D$-composantes périodiques non circonférenciées qui ne contiennent aucun point périodique de $R$, ce qui répond aussi à une question posée par R. Benedetto (voir [BE4]). Soient $p$ un nombre premier, $p \geq 3$, et $c_1 = 1 + p^2$, $c_2 = 2 + p^2 \in \mathbb{C}_p$. On considère la fraction rationnelle

$$R(x) = x + p\,\frac{(x-1)(x-2)}{(x-c_1)(x-c_2)}.$$

(a) Si $|x| < p^{-1}$, on a $|R(x)| \leq \max\{|x|, 1/p\} = p^{-1}$. Si $1 > |x| > p^{-1}$, on a $|R(x)| = |x|$, ce qui prouve que $R$ applique la boule $B^-(0,1)$ sur elle-même. Par conséquent, $B^-(0,1)$ est incluse dans l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(R)$ de la fraction rationnelle $R$. Notons de plus que si $x \in B^-(0,1)$, alors on a

$$R'(x) = 1 + p\,\frac{(2x-3)(x-c_1)(x-c_2) - (2x-c_1-c_2)(x-1)(x-2)}{(x-c_1)^2(x-c_2)^2}$$

d'où on déduit immédiatement que $|R'(x)| = 1$ pour tout $x \in B^-(0,1)$. Il en résulte que si $\omega$ est un point périodique d'ordre $q$ non répulsif dans $B^-(0,1)$, son multiplicateur est de module $|R'(\omega)| \ldots |R'(R^{[q-1]}(\omega))| = 1$, et par suite un tel point est indifférent.

(b) Les points $x = 1$ et $x = 2$ sont des points fixes de $R$, que l'on voit être répulsifs. Il en résulte que l'ensemble de Julia de $R$ est non vide.

(c) On regarde la $D$-composante de 0, qui contient donc $B^-(0,1)$. Supposons que cette $D$-composante soit la $D$-composante de l'infini. Alors c'est le complémentaire d'un disque $B$ de $\mathbb{C}_p$, et ce disque contient les deux points 1 et 2, qui sont des points de l'ensemble de Julia. Par suite, son rayon est au moins 1. Comme $x = 0$ appartient à cette $D$-composante, on a $|0-1| = 1 \geq r$, ce qui implique $r = 1$. Comme 1 et 2 sont dans le disque $B$, il en résulte que ce disque est $B = B^+(0,1)$, qui contient l'origine, contradiction. La $D$-composante de 0 est donc un disque de $\mathbb{C}_p$ contenant $B^-(0,1)$, et ne contenant pas les points 1 et 2, de sorte que c'est $B^-(0,1)$, qui est donc une $D$-composante fixée non circonférenciée de l'ensemble de Fatou de $R$.

(d) Nous allons maintenant utiliser des résultats de J. Rivera-Letelier (cf. [RL]). On définit une suite $T_n$ de fractions rationnelles par $T_0(x) = x$ et $T_{n+1}(x) = T_n \circ R(x) - T_n(x)$. On a facilement que $T_1(x) = R(x) - x$ vérifie $|T(x)| = p^{-1}$ pour tout $x \in B^-(0,1)$. Pour une fonction rationnelle $S$ sans pôle dans $B^-(0,1)$, on note $\|S\| = \sup\{|S(x)|\,;x \in B^-(0,1)\}$ ("norme de Gauss" sur $B^-(0,1)$). Il est immédiat que la fraction rationnelle $T_n$ n'a pas de pôles sur $B^-(0,1)$, puisque $R$ applique $B^-(0,1)$ sur $B^-(0,1)$. On démontre maintenant par récurrence que l'on a $\beta_n = \|T_n\| \leq p^{-n}$ pour tout $n \geq 1$. On vient de voir que c'est vrai si $n = 1$. Soit $\alpha_n \in \mathbb{C}_p$ tel que $|\alpha_n| = \beta_n$, et $S_n(x) = T_n(x)/\alpha_n$. On a alors $\|S_n\| = 1$, et si on écrit $S_n(x) = \sum a_{k,n}x^k$, il en résulte que $\sup\{|a_{k,n}|\} = 1$. On a : $T_{n+1}(x) = \alpha_n(S_n \circ R - S_n(x))$, et

$$S_n \circ R(x) - S_n(x) = \sum_{k\geq 1} a_{k,n}((R(x))^k - x^k).$$

D'autre part

$$(R(x))^k - x^k = (R(x) - x)((R(x))^{k-1} + x(R(x))^{k-2} + \ldots + x^{k-1}).$$

Comme $|R(x) - x| = p^{-1}$ pour tout $x \in B^-(0,1)$, et que $|R(x)| \leq 1$, il vient que $|(R(x))^k - x^k| \leq p^{-1}$ pour tout $k$ entier $\geq 1$, et par suite $|T_{n+1}(x)| \leq |\alpha_n| \sup\{|a_{k,n}|\}p^{-1} \leq p^{-n}p^{-1} = p^{-n-1}$, ce qui démontre l'assertion.

(e) On a les formules

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k R^{[k]}(x) \quad \text{et} \quad R^{[n]}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T_k(x).$$

On a donc pour $n \geq 1$ :

$$\frac{R^{[n]}(x) - x}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} C_n^k T_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} T_k(x).$$

Pour $k$ fixé, si $n$ tend vers l'infini de manière que $|n|_p \to 0$, on a

$$\frac{1}{n} C_n^k = \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \to \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Comme

$$\left\|\frac{1}{n} C_n^k T_k(x)\right\| \leq \frac{p^{-k}}{|k!|},$$

et que cette dernière quantité est indépendante de $n$ et tend vers 0 si $k \to \infty$, il en résulte que la limite si $n \to \infty$, $|n|_p \to 0$ de $(R^{[n]}(x) - x)/n$ est

$$R_*(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} T_k(x).$$

Ceci implique que l'ensemble $B^-(0,1)$ est inclus dans l'ensemble des points récurrents pour $R$, et $R_*$ est le logarithme itératif de $R$ (voir [RL] pour les définitions et les propriétés). On va montrer maintenant que $R_*(x)$ est non nul pour tout $x \in B^-(0,1)$. On a vu que $\|T_k\| \leq p^{-k}$ pour tout $k \geq 1$, et que $|T_1(x)| = p^{-1}$ pour tout $x \in B^-(0,1)$. Par suite, pour $k \geq 2$, on a

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k} T_k(x)\right| \leq \frac{p^{-k}}{|k|} \leq p^{-2}.$$

Il en résulte immédiatement que $|R_*(x)| = p^{-1}$ pour tout $x \in B^-(0,1)$, et donc $R_*(x)$ ne s'annule pas dans $B^-(0,1)$.

(f) D'après les résultats de J. Rivera-Letelier (cf. [RL, page 55]), un point $\omega$ de $B^-(0,1)$ est périodique indifférent si et seulement si on a $R_*(\omega) = 0$ ; par ce qui précède, $R$ n'a donc aucun point périodique indifférent dans $B^-(0,1)$, et par ce que nous avons vu dans le (a), aucun point périodique dans $B^-(0,1)$, ce qui termine la démonstration.

### Bibliographie


[BE1] R. Benedetto, *Reduction, dynamics, and Julia sets of rational functions*, J. Number Theory 86 (2001), 175–195.

[BE2] —, *Hyperbolic maps in p-adic dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), 1–11.

[BE3] —, *p-adic dynamics and Sullivan's No Wandering Domains Theorem*, Compositio Math. 122 (2000), 281–298.

[BE4] —, *Components and periodic points in non-archimedean dynamics*, Proc. London Math. Soc. 84 (2002), 231–256.

[BE5] —, *Non-archimedean holomorphic maps and the Ahlfors Islands Theorem*, preprint.

[BE6] —, *Examples of wandering domains in p-adic polynomial dynamics*, preprint.

[BM] F. Berteloot et V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés 7, Soc. Math. France, Paris, EDP Sciences, Les Ulis, 2001.

[B1] J.-P. Bézivin, *Sur les points périodiques des applications rationnelles en dynamique ultramétrique*, Acta Arith. 100 (2001), 63–74.

[B2] —, *Sur la compacité des ensembles de Julia des polynômes p-adiques*, preprint.

[FVDP] J. Fresnel et M. van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progr. Math. 18, Birkhäuser, Boston, 1981.

[HS1] L. Hsia, *A weak Néron model with applications to p-adic dynamical systems*, Compositio Math. 100 (1996), 277–304.

[HS2] —, *Closure of periodic points over a non-archimedean field*, J. London Math. Soc. 62 (2000), 685–700.

[RL] J. Rivera-Letelier, *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*, thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 2000.

[SW] N. Smart and C. Woodcock, *p-adic chaos and random number generation*, Experiment. Math. 7 (1998), 765–788.



Département de Mathématiques et Mécanique
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen
Campus II, Boulevard du Maréchal Juin
BP 5186
14032 Caen Cedex, France
E-mail: Bezivin@math.unicaen.fr



*Reçu le 25.11.2002*
*et révisé le 24.6.2003* (4412)