ACTA ARITHMETICA
160.3 (2013)

Propagation de la 2-birationalité

par

Claire Bourbon et Jean-François Jaulent (Bordeaux)

1. Introduction. La notion de corps S-rationnel a été introduite dans [8], en liaison avec les résultats de [13], pour généraliser la notion de corps de nombres ℓ-rationnel rencontrée implicitement dans des contextes variés par plusieurs auteurs puis explicitement définie et étudiée par [11] d'une part et [4] d'autre part (cf. [7]). Rappelons ce dont il s'agit : si ℓ est un nombre premier et S un sous-ensemble non vide de l'ensemble Pl_K^ℓ des places de K au-dessus de ℓ, on dit que le corps de nombres K est *S-rationnel* lorsque le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(M'/K)$ de sa pro-ℓ-extension (galoisienne) ℓ-ramifiée maximale est le pro-ℓ-produit libre

(i) $$\mathcal{G}_K \simeq \Big(\mathop{*}_{\substack{\mathfrak{p}\mid\ell\infty \\ \mathfrak{p}\notin S}} \mathcal{G}_{K_\mathfrak{p}} \Big) * \mathcal{F}$$

des groupes de Galois locaux $\mathcal{G}_{K_\mathfrak{p}} = \mathrm{Gal}(\bar{K}_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$ respectivement attachés aux pro-ℓ-extensions maximales $\bar{K}_\mathfrak{p}$ des completés $K_\mathfrak{p}$ de K aux places réelles ou ℓ-adiques qui ne sont pas dans S, et d'un pro-ℓ-groupe libre $\mathcal{F}$; dans ce cas, le nombre f de générateurs de $\mathcal{F}$ est donné par la formule

(ii) $$f = d - r - c - l + s + 1,$$

où d est la somme des degrés locaux $d = \sum_{\mathfrak{l}\in S}[K_\mathfrak{l} : \mathbb{Q}_\ell]$ et r, c, l, s sont respectivement les nombres de places réelles, complexes, ℓ-adiques ou dans S de K (cf. [8, th. 2.7]). Lorsque S est un singleton $\{\mathfrak{l}\}$, on parle de corps *$\mathfrak{l}$-rationnel*, et si Pl_K^ℓ est lui-même un singleton, on dit tout simplement que K est *ℓ-rationnel*.

Dans ce dernier cas (i.e. pour $l = s = 1$), la formule (ii) ci-dessus donne $f = c + 1$; et la condition (i) affirme que $\mathcal{G}_K$ est le pro-ℓ-produit libre d'un pro-ℓ-groupe libre de dimension $c+1$ (qui s'identifie au groupe de Galois de la sous-extension ∞-décomposée maximale M/K de M'/K) et des r sous-

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11R37; Secondary 11R11, 11R70.
Key words and phrases: class field theory, rational fields, birational fields.

DOI: 10.4064/aa160-3-5

groupes de décomposition attachés aux places réelles de K. Lorsque le corps K contient en outre les racines ℓ-ièmes de l'unité, ceci a lieu si et seulement si le ℓ-groupe $\mathcal{C}\ell'_K$ des ℓ-classes de diviseurs de K (i.e. le quotient du ℓ-groupe des classes d'idéaux prises au sens restreint par le sous-groupe engendré par la classe de l'idéal premier au-dessus de ℓ) est trivial (cf. e.g. [7]), ce qui s'écrit

$$\text{(iii)} \qquad \mathcal{C}\ell'_K = 1,$$

de sorte que la notion de ℓ-rationalité coïncide alors avec celle de ℓ-régularité introduite par Kummer dans l'étude des corps cyclotomiques $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$.

La question de la propagation de la S-rationalité dans une ℓ-extension L/K de corps de nombres a été complètement résolue dans [8] pour les ℓ premiers impairs. Pour $\ell = 2$ et L/K quadratique il peut arriver que le corps de base K soit $\mathfrak{l}$-rationnel en une place 2-adique décomposée dans l'extension L/K et que L soit $\mathfrak{l}$-rationnel en chacune des deux places au-dessus de $\mathfrak{l}$; on dit alors que le corps L est *birationnel.* Le passage de la 2-rationalité à la 2-birationalité dans une 2-extension L/K a été complètement traité dans [9] pour K totalement réel. Rappelons le résultat principal :

Théorème 0. *Soit L/K une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le corps L est 2-birationnel.*
(ii) *Le corps K est 2-rationnel, son unique place 2-adique est décomposée dans L/K et l'extension L/K est ramifiée modérément soit en une place semi-primitive $\mathfrak{p}$, soit en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$.*

Dans ce contexte, une place finie $\mathfrak{p}$ du corps de base K est dite *primitive* lorsqu'elle est totalement inerte dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K ; *semi-primitive* lorsqu'elle est décomposée dans le premier étage de K^c/K et inerte au-delà. Une telle place est, en particulier, modérée (i.e. ici étrangère à 2).

L'objet du présent travail est d'étudier la propagation de la 2-birationalité par 2-extension (galoisienne) du corps de base. Le problème est le suivant : étant données une extension quadratique à conjugaison complexe L d'un corps totalement réel K d'une part, et une 2-extension totalement réelle K' de K d'autre part, nous regardons à quelle condition sur les extensions L/K et K'/K la 2-birationalité de L/K se propage à l'extension induite LK'/K'.

Le résultat *a priori* surprenant que nous obtenons est le suivant :

Théorème 1. *Lorsque la 2-extension totalement réelle K'/K est ramifiée modérément en une place $\mathfrak{p}$ (auquel cas celle-ci est primitive et c'est l'unique place modérée qui se ramifie dans K'/K), la propagation de la*

2-birationalité de L/K à LK'/K' a lieu si et seulement si les deux conditions qui suivent sont réalisées :

(i) *l'extension L/K est ramifiée modérément en exactement deux places : en la place $\mathfrak{p}$ et en une autre place primitive $\mathfrak{q}$;*
(ii) *le corps K' provient, par composition avec un étage fini K_n de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K, d'une extension quadratique K'' de K.*

En d'autres termes, si l'on impose à K'/K d'être linéairement disjointe de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K, la propagation de la birationalité est impossible lorsque L/K est modérément ramifiée en une place semi-primitive ; et lorsque L/K est modérément ramifiée en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, elle n'est possible que par extension quadratique $\mathfrak{p}$-modérément ou $\mathfrak{q}$-modérément ramifiée, ce qui conduit, comme nous le verrons, à deux possibilités (et deux seulement) pour K'. En itérant le processus, en revanche, il est alors facile de construire des tours infinies de telles extensions.

2. Corps 2-rationnels. Pour la commodité du lecteur nous rappelons brièvement ci-dessous quelques-uns des résultats de [4] et [11] sur les notions de régularité et de rationalité :

Définition 2. Soit ℓ un nombre premier. Un corps de nombres K est dit :

(i) *ℓ-régulier* lorsque le ℓ-sous-groupe de Sylow du noyau $R_2(K)$ dans $K_2(K)$ des symboles réguliers est trivial ;
(ii) *ℓ-rationnel* si le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(M/K)$ de sa pro-extension maximale ℓ-ramifiée ∞-décomposée est un pro-ℓ-groupe libre.

Lorsque K contient le sous-corps réel maximal $\mathbb{Q}[\zeta + \zeta^{-1}]$ du ℓ-ième corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta]$, il est équivalent d'affirmer qu'il est ℓ-régulier ou qu'il est ℓ-rationnel (cf. [7, Théorème 1.2]). C'est évidemment le cas pour $\ell = 2$. Ainsi :

Théorème 3. *Le corps K est 2-rationnel lorsqu'il vérifie les propriétés équivalentes :*

(i) *La 2-partie du noyau dans $K_2(K)$ des symboles réguliers est trivial.*
(ii) *Le groupe de Galois $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(M/K)$ de sa pro-2-extension maximale 2-ramifiée ∞-décomposée est un pro-2-groupe libre (nécessairement sur $1 + c_K$ générateurs si c_K est le nombre de places complexes de K).*
(iii) *Le groupe de Galois $\mathcal{G}_K^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/K)$ de sa pro-ℓ-extension abélienne maximale 2-ramifiée ∞-décomposée un $\mathbb{Z}_2$-module libre de rang $1 + c_K$.*

(iv) *Le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt (pour le nombre premier 2) et le sous-module de torsion $\mathcal{T}_K$ de* $\mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/K)$ *est trivial.*
(v) *K possède une unique place dyadique $\mathfrak{l}$ et son 2-groupe $\mathcal{C}\ell'_K$ des 2-classes d'idéaux au sens restreint est trivial.*

L'équivalence des diverses assertions (i) à (v) n'est autre que la déclinaison pour $\ell = 2$ du Théorème 1.2 de [7]. La formulation (ii) montre clairement que la 2-rationalité se propage par 2-extension 2-ramifiée ∞-décomposée, donc à chaque étage fini K_n de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique. En particulier les 2-groupes de 2-classes $\mathcal{C}\ell'_{K_n}$ sont tous triviaux et le 2-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des 2-classes logarithmiques de K est ainsi trivial. Comme expliqué dans [6], il suit de là qu'un tel corps satisfait aussi la conjecture de Gross (pour le nombre premier 2).

La question de la propagation de la ℓ-rationalité a été complétement résolue dans [4] et [11]. Elle s'appuie sur la notion de place primitive. Pour $\ell = 2$, on a :

Définition 4. Étant donné un corps de nombres K, un ensemble S de places modérées de K (i.e. ici de places finies étrangères à 2) est dit primitif (relativement au premier 2) lorsque la famille des logarithmes de Gras de ces places (i.e. de leurs images dans le groupe de Galois $\mathcal{L} = \mathrm{Gal}(Z/K)$ du compositum Z des $\mathbb{Z}_2$-extensions de K) peut être complétée en une $\mathbb{Z}_2$-base de $\mathcal{L}$.

Ainsi, lorsque K est un corps totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt (pour le premier 2), par exemple un corps 2-rationnel, les ensembles primitifs de places modérées de K sont exactement les singletons $S = \{\mathfrak{l}\}$, où $\mathfrak{l}$ est une place de K totalement inerte dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique Z/K.

Définition 5. Une 2-extension L/K est dite *primitivement ramifiée* lorsque l'ensemble $\mathcal{R}_{L/K}$ des places modérément ramifiées dans L/K est primitif.

Le résultat de propagation (cf. [7, Théorème 3.5]) s'énonce alors comme suit :

Théorème 6. *Étant donné une 2-extension de corps de nombres L/K, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le corps L est 2-rationnel.*
(ii) *Le corps K est 2-rationnel et l'extension L/K est primitivement ramifiée.*

Donnons par exemple la liste des corps multiquadratiques 2-rationnels :

COROLLAIRE 7. *Les corps multiquadratiques réels K qui sont 2-rationnels sont les sous-corps des corps biquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{p}]$ pour les nombres premiers p primitifs, c'est-à-dire vérifiant $p \equiv \pm 3 \bmod 8$. En d'autres termes ce sont :*

(i) *le corps des rationnels $\mathbb{Q}$,*
(ii) *les corps quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2p}]$,*
(iii) *les corps biquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$,*

où p est un premier primitif : $p \equiv \pm 3 \bmod 8$.

Les corps multiquadratiques imaginaires 2-rationnels sont :

(iv) *les corps quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-2p}]$,*
(v) *les corps biquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}, \sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}, \sqrt{p}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}, \sqrt{p}]$,*
(vi) *les corps triquadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{p}]$,*

où p est un premier primitif : $p \equiv \pm 3 \bmod 8$.

Preuve. Le corps $\mathbb{Q}$ étant 2-rationnel, il suffit d'écrire que la ramification modérée ne peut concerner qu'au plus un premier impair p, lequel doit en outre être primitif, i.e. inerte dans le premier étage $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$ de la $\mathbb{Z}_2$-extension de $\mathbb{Q}$; ce qui se traduit par la congruence annoncée : $p \equiv \pm 3 \bmod 8$.

3. Corps 2-birationnels. Venons-en maintenant à la notion de corps 2-birationnel (cf. [8] et [9]) :

DÉFINITION 8. Un corps de nombres K est dit $\mathfrak{l}$-*rationnel* en une place $\mathfrak{l}$ au-dessus de ℓ si sa ℓ-extension ℓ-ramifiée, $\mathfrak{l}$-décomposée maximale est triviale.

Naturellement la trivialité du groupe de Galois de la pro-ℓ-extension ℓ-ramifiée, $\mathfrak{l}$-décomposée maximale se lit sur son abélianisé. On peut alors interpréter la notion de la pro-$\mathfrak{l}$-rationalité en termes de corps de classes. Introduisons pour cela quelques notations de la théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [6]). Notons :

- $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ le compactifié ℓ-adique du groupe multiplicatif du complété $K_\mathfrak{p}$;
- $\mu_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de torsion de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$;
- $\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ le ℓ-adifié du groupe des idèles de K ;
- $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes K^\times$ son sous-groupe principal ;
- $\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$ enfin le ℓ-groupe des classes d'idèles.

Le groupe $\mathcal{C}_K$ s'identifie au groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K. Et d'après [8, Th. 1.7] il vient :

Proposition 9. *Le corps K est $\mathfrak{l}$-rationnel si et seulement si on a l'identité*

$$\mathcal{J}_K = \mathcal{R}_K \mathcal{R}_{K_\mathfrak{l}} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell\infty} \mu_\mathfrak{p},$$

ce qui a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes se trouvent réunies :

(i) *le groupe $\mathcal{C}\ell_K$ des ℓ-classes d'idéaux du corps K est trivial ;*
(ii) *l'application de semi-localisation $s'_\mathfrak{l}$ induit une surjection du tensorisé $\mathcal{E}'_K$ du groupe des ℓ-unités de K sur le produit $\mathcal{R}'_l = \prod_{\mathfrak{p}\mid\ell\infty,\, \mathfrak{p}\neq\mathfrak{l}} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$.*

Remarque. Sous les conditions précédentes, K est logarithiquement principal en ce sens que son ℓ-groupe des classes logarithiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est trivial. En particulier K vérifie banalement la conjecture de Gross généralisée (pour le premier ℓ).

Ces définitions générales étant posées, nous pouvons spécifier au cas $\ell = 2$.

Théorème 10. *Un corps totalement imaginaire L est dit* 2-birationnel *lorsqu'il est $\mathfrak{l}$-rationnel en chacune des places 2-adiques (en ce sens qu'il n'admet pas de 2-extension 2-ramifiée $\mathfrak{l}$-décomposée non triviale), ce qui a lieu si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) *L admet exactement deux places 2-adiques $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$;*
(b) *le 2-groupe $\mathcal{C}\ell_L$ des 2-classes d'idéaux de L est trivial, i.e. le 2-groupe des classes d'idéaux de L est engendré par les images de $\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{l}'$;*
(c) *les plongements canoniques de $L^\times$ dans $L_\mathfrak{l}^\times$ et $L_{\mathfrak{l}'}^\times$ induisent des isomorphismes $\mathcal{E}'_L \simeq \mathcal{R}_{L_\mathfrak{l}} \simeq \mathcal{R}_{L_{l'}}$ du tensorisé 2-adique $\mathcal{E}'_L$ du groupe des 2-unités de L sur les compactifiés locaux associés aux places 2-adiques.*

Nous avons maintenant besoin d'introduire la notion de place semi-primitive.

Définition 11. Soit K un corps de nombres totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt en $\ell = 2$, et K^c sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique. Nous disons qu'une place finie modérée (i.e. ici ne divisant pas 2) est :

- *primitive* lorsque son image dans le groupe procyclique $\mathrm{Gal}(K^c/K)$ n'est pas un carré, autrement dit lorsqu'elle n'est pas décomposée dans K^c/K ;
- *semi-primitive* lorsqu'elle se décompose dans le premier étage de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K mais pas au-delà.

Cela posé, nous avons les résultats suivants (cf. [9, Th. 4 & Prop. 5]) :

Théorème 12. *Soit L/K une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le corps L est 2-birationnel.*
(ii) *Le corps K est 2-rationnel, son unique place 2-adique est décomposée dans L/K et l'extension L/K est ramifiée modérément soit en une place semi-primitive $\mathfrak{p}$, soit en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$.*
(iii) *K est 2-rationnel; L est 2-logarithmiquement principal; et L/K est 2-décomposée et ramifiée modérément en au moins une place.*

4. Corps multiquadratiques 2-birationnels. Nous nous proposons dans cette section de mettre en œuvre les équivalences données par le Théorème 12 et la classification des corps multiquadratiques réels 2-rationnels explicitée dans le Corollaire 7 pour dresser la liste des corps multiquadratiques 2-birationnels : un tel corps L s'obtient, en effet, par composition d'un corps quadratique imaginaire $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ et d'un corps multiquadratique réel K, qui est nécessairement 2-rationnel en vertu de la condition (ii) du Théorème 12. Le résultat que nous obtenons est le suivant :

Théorème 13. *Soient L un corps multiquadratique imaginaire et K son sous-corps réel maximal. Le corps L est alors le compositum du corps multiquadratique réel K et d'un corps quadratique imaginaire $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ pour un $d \geq 1$ sans facteur carré. Et L est 2-birationnel si et seulement si K est 2-rationnel (i.e. un sous-corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$ avec $p \equiv \pm 3 \bmod 8$) et que l'on est dans l'une des quatre configurations suivantes :*

(a) *Pour $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:*

  (i) *$d = q$ premier avec $q \equiv 7 \bmod 16$;*
  (ii) *$d = qq'$ avec q, q' premiers et $q \equiv -q' \equiv \pm 3 \bmod 8$.*

(b) *Pour $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$:*

  (i) *$d = q \neq p$ premier avec $-q \equiv p \equiv \pm 3 \bmod 8$ et $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$;*
  (ii) *$d = q \neq p$ premier avec $-q \equiv p \equiv \pm 3 \bmod 8$ et $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$.*

Pour démontrer cela, nous nous appuierons sur :

Lemme 14. *Soit L une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit K_n le n-ième étage de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c de K, et $L_n = K_n L$ le compositum. On a alors les équivalences :*

(i) *K est 2-rationnel $\Leftrightarrow$ K_n est 2-rationnel.*
(ii) *L est 2-birationnel $\Leftrightarrow$ L_n est 2-birationnel.*

Preuve. Observons d'abord que la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c/K étant 2-ramifiée, il en est de même de toutes ses sous-extensions finies K_n/K, de sorte que la 2-rationalité de K est bien équivalente à celle de chacun des K_n en vertu du Théorème 6 ; d'où l'équivalence (i) du lemme.

Ce point acquis, intéressons-nous à la 2-birationalité de L. D'après la formulation (iii) dans le Théorème 12, celle-ci se caractérise par la 2-rationalité de K, la 2-décomposition de L/K et la trivialité du 2-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$; et il s'agit simplement de vérifier que ces conditions se propagent le long de la tour cyclotomique L^c/L. Or :

- La 2-rationalité de K_n se lit indifféremment à n'importe quel étage de la tour en vertu du point (i) ci-dessus.
- Si K est 2-rationnel, il admet une unique place dyadique $\mathfrak{l}$ et il en est de même pour chacun des K_n ; l'unique place dyadique $\mathfrak{l}_n$ de K_n se décompose dans L_n/K_n si et seulement si $\mathfrak{l}$ est décomposée dans L/K.
- Enfin, le 2-groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ étant le quotient des copoints fixes par $\Gamma = \mathrm{Gal}(L^c/L)$ de l'abélianisé $\mathcal{C}'_L$ du groupe de Galois de la pro-2-extension totalement décomposée maximale $\widetilde{L}$ de L (cf. [5, 6]), la trivialité de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ affirme tout simplement l'égalité $\widetilde{L} = L$; ce qui se lit encore à n'importe quel étage de la tour, puisque $\widetilde{L}$ est aussi la pro-2-extension totalement décomposée maximale de chacun des L_n.

Preuve du Théorème 13. Si L est 2-birationnel, son sous-corps réel K est 2-rationnel, i.e. (par le Corollaire 7) contenu dans un corps biquadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$ pour un premier primitif $p \equiv \pm 3 \bmod 8$. Cela étant, le Lemme 14 nous permet de remplacer K par n'importe quel étage fini de sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique, donc de supposer par exemple $K \supset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Distinguons deux cas :

- $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

Dans ce cas, toujours d'après le Lemme 14, nous pouvons remplacer K par $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ donc par $\mathbb{Q}$, de sorte que le corps L est 2-birationnel si et seulement si $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ l'est ; ce qui suppose, d'après le Théorème 12(ii) :

(i) 2 décomposé dans l'extension $k/\mathbb{Q}$, i.e. $d \equiv -1 \bmod 8$, et
(ii) $k/\mathbb{Q}$ ramifiée modérément soit en une place semi-primitive q, i.e. $d = q$ ou $2q$, avec $q \equiv \pm 7 \bmod 16$, soit en deux places primitives q et q', i.e. $d = qq'$ ou $2qq'$, avec $q \equiv \pm q' \equiv \pm 3 \bmod 8$.

En fin de compte, il vient $d = q \equiv 7 \bmod 16$ ou $d = qq'$ avec $q \equiv -q' \equiv \pm 3 \bmod 8$.

- $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$:

Dans ce cas, toujours d'après le Lemme 14, nous pouvons remplacer K par $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ et L par $\mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{-d}]$, d'où par le Théorème 12(ii) les trois conditions :

(i) Le corps quadratique $K = \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ est 2-rationnel, i.e. $p \equiv \pm 3 \bmod 8$.

(ii) Son unique place dyadique $\mathfrak{l}$ est décomposée dans L/K ; autrement dit, soit 2 est décomposé dans l'extension $k/\mathbb{Q}$, auquel cas on a $d \equiv -1 \bmod 8$, soit 2 est décomposé dans l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{-dp}]/\mathbb{Q}$, auquel cas on a $dp \equiv -1 \bmod 8$, conformément au schéma d'extensions

$$\begin{tikzcd}
k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}] \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & L \arrow[d, dash] \\
 & k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-dp}] \arrow[ur, dash] & \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, dash] \arrow[rr, dash] & & K = \mathbb{Q}[\sqrt{p}]
\end{tikzcd}$$

Et, dans les deux éventualités, d est donc impair.

(iii) L/K se ramifie modérément soit en une unique place semi-primitive $\mathfrak{q}$, soit en deux places primitives $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$.

- Dans le premier cas la place $\mathfrak{q}$ provient alors d'un premier $q \neq p$ ramifié dans $k/\mathbb{Q}$ mais inerte dans $K/\mathbb{Q}$, auquel cas on a $d = q$ ou $d = pq$ et $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$. Reste simplement à vérifier la semi-primitivité de $\mathfrak{q}$. Le schéma

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dash, "\text{dec}"] \arrow[d, dash, "\text{in}"] & K[\sqrt{2}] \arrow[r, dash, "\text{in}"] \arrow[d, dash, "\text{dec}"] & K[\sqrt{2+\sqrt{2}}] \arrow[r, dotted, dash] \arrow[d, dash, "\text{dec}"] & K^c \arrow[d, dotted, dash] \\
\mathbb{Q} \arrow[r, dash, "\text{in}"] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \arrow[r, dash, "\text{in}"] & \mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}] \arrow[r, dotted, dash] & \mathbb{Q}^c
\end{tikzcd}$$

(où est indiqué le comportement des places au-dessus de q) montre alors que celle-ci correspond à la primitivité de q, qui s'écrit $q \equiv \pm 3 \bmod 8$.

- Dans le second cas, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$, du fait de leur primitivité, proviennent nécessairement d'un même premier $q \neq p$ ramifié dans $k/\mathbb{Q}$ et décomposé dans $K/\mathbb{Q}$, auquel cas on a $d = q$ ou $d = pq$ et $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$, ainsi que la congruence $q \equiv \pm 3$ qui traduit la primitivité de q.

En fin de compte, quitte à échanger k et k^*, on obtient $d = q \neq p$ premier avec $-q \equiv p \equiv \pm 3 \bmod 8$ et $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ dans le premier cas et $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$ dans le second, ce qui achève la démonstration du Théorème 13.

Remarque. Le cas (a) du Théorème 13 redonne naturellement la classification des corps quadratiques imaginaires 2-birationnels décrite dans [8, Cor. 1.12], ainsi que la liste des corps quadratiques imaginaires 2-logarithmiquement principaux établie dans [12] (restreinte ici à ceux qui sont 2-décomposés) :

Corollaire 15. *Les corps quadratiques 2-birationnels sont les corps quadratiques imaginaires* $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$ *pour* p *premier de la forme* $p \equiv 7 \bmod 16$, *et* $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$ *pour* p *et* q *premiers* $p \equiv -q \equiv 3 \bmod 8$.

5. Propagation de la birationalité. Dans le cas (b) du Théorème 13, on a $d = q$ ou $d = -pq$, de sorte que le corps $L = K[\sqrt{-d}]$ provient, par composition avec K, indifféremment du corps quadratique imaginaire $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-q}]$ comme du corps $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$. Il est intéressant d'observer que, du fait des congruences satisfaites par p et q, un et un seul d'entre eux (à savoir k^*) se trouve être birationnel. Plus précisément, k^* est une extension 2-birationnelle de $\mathbb{Q}$ qui est ramifiée modérément en deux places primitives, dont l'une se ramifie dans $K/\mathbb{Q}$ tandis que l'autre se décompose.

Nous allons voir que cette sitation est, en fait, générale :

Théorème 16. *Soit* K *un corps* 2*-rationnel totalement réel ; soit* $L = K[\sqrt{-\delta}]$ (*avec* $\delta \gg 0$ *dans* K) *une extension quadratique totalement imaginaire et* K' *une* 2*-extension totalement réelle non triviale de* K *linéairement disjointe de la* $\mathbb{Z}_2$*-extension cyclotomique* K^c *; soit enfin* $L' = LK'$ *le compositum de* L *et de* K'*. Alors :*

- (i) *Si* L'/K' *est* 2*-birationnelle, l'extension* L/K *ne peut elle-même être* 2*-birationnelle que si sont réunies les deux conditions suivantes :*
  - (a) *L'extension* K'/K *est aussi quadratique,* $[K' : K] = 2$.
  - (b) *L'extension* L/K *vérifie l'une des deux propriétés qui suivent :*
    - (b1) *ou bien* L/K *est ramifiée modérément en une unique place primitive* $\mathfrak{q}$*, laquelle est inerte dans* K'/K*,*
    - (b2) *ou bien* L/K *est ramifiée modérément en exactement deux places primitives* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *et l'extension quadratique* K'/K *est ramifiée modérément en exactement l'une de ces deux places et décomposée en l'autre.*
- (ii) *Réciproquement, lorsque les conditions ci-dessus sont réunies, la* 2*-birationalité de* L/K *se propage à* L'/K'*.*

En particulier :

Scolie 17. *La propagation de la* 2*-birationalité par* 2*-extension du corps de base ne peut se faire que par extension quadratique.*

Scolie 18. *Cette propagation ne peut se faire que si l'extension de départ* L/K *est ramifiée modérément en deux places primitives.*

Preuve du Théorème 16. Supposons d'abord L'/K' 2-birationnelle. Le corps K' est alors une extension 2-rationnelle de K. Et, comme nous l'avons supposée linéairement disjointe de la 2-extension cyclotomique K^c/K, le

Théorème 6 nous assure que l'extension K'/K est modérément ramifiée en une unique place modérée $\mathfrak{p}$, laquelle est primitive dans K. Plus précisément, il résulte de l'hypothèse de disjonction linéaire que la place $\mathfrak{p}$ est totalement ramifiée dans K'/K (puisque la pro-2-extension 2-ramifiée ∞-décomposée maximale de K est K^c). En particulier, l'unique place $\mathfrak{p}'$ de K' au-dessus de $\mathfrak{p}$ est primitive dans K'.

Considérons le schéma d'extensions

$$\begin{tikzcd} L = K[\sqrt{-\delta}] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L' = LK' \arrow[d, dash] \\ K \arrow[r, dash] & K' \end{tikzcd}$$

Et examinons les deux possibilités décrites dans le Théorème 12(ii) :

• L'/K' est ramifiée modérément en une unique place semi-primitive $\mathfrak{q}'$. Dans ce cas, $\mathfrak{q}'$, qui n'est pas primitive, est distincte de $\mathfrak{p}'$ et provient d'une place $\mathfrak{q}$ de K qui se ramifie dans L/K mais ne se décompose pas dans K'/K. Ainsi $\mathfrak{q}$ est (totalement) inerte dans K'/K, ce qui montre déjà que K'/K est nécessairement cyclique. Plus précisément, puisque $\mathfrak{q}'$ est semi-primitive dans K', son degré d'inertie est (au plus) 2, et $\mathfrak{q}$ doit être primitive. Ainsi d'une part K'/K est quadratique, et d'autre part L/K, qui est ramifiée en la place primitive $\mathfrak{q}$, dès lors qu'elle est 2-birationnelle se ramifie aussi en une autre place primitive (toujours en vertu du Théorème 12(ii)), laquelle ne peut être que $\mathfrak{p}$.

• L'/K' est ramifiée modérément en deux places primitives $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$. Dans ce cas, $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ proviennent soit d'une même place primitive $\mathfrak{q}$ de K, soit de deux places primitives $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ distinctes, qui se ramifient dans L/K.

Dans cette dernière hypothèse, ni $\mathfrak{q}_1$ ni $\mathfrak{q}_2$ ne pourraient se décomposer dans K'/K, car L'/K' serait alors ramifiée modérément en quatre places ; elles ne pouraient non plus présenter de l'inertie, car $\mathfrak{q}'_1$ ou $\mathfrak{q}'_2$ ne serait plus primitive dans K' ; elles seraient donc toutes les deux totalement ramifiées dans K'/K, contrairement au fait que $\mathfrak{p}$ est la seule place modérée ramifiée dans K'/K.

Il en résulte que $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ proviennent nécessairement d'une même place primitive $\mathfrak{q}$ de K dont l'indice de décomposition dans K'/K est égal à 2 et le degré d'inertie 1, puisque $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ sont primitives dans K'. De plus, $\mathfrak{q}$ est distincte de $\mathfrak{p}$, sans quoi $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ ne seraient pas ramifiées dans L'/K', donc non ramifiée dans K'/K.

En résumé $[K' : K]$ est égal à 2 et $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ proviennent d'une même place primitive de K ramifiée dans L/K et décomposée dans K'/K. Comme dans le cas précédent, L/K, qui est ramifiée en la place primitive $\mathfrak{q}$, dès lors qu'elle est 2-birationnelle se ramifie nécessairement en une autre place primitive (toujours en vertu du Théorème 12(ii)), laquelle ne peut être que $\mathfrak{p}$.

Intéressons-nous maintenant à la montée en supposant L/K 2-birationnelle ramifiée modérément en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, dont l'une, disons $\mathfrak{p}$, est l'unique place modérée ramifiée dans l'extension quadratique K'/K. Et examinons successivement les deux possibilités recensées plus haut :

• La place $\mathfrak{q}$ est inerte dans K'/K. Dans ce cas, la place $\mathfrak{q}'$ de K' au-dessus de $\mathfrak{q}$ est semi-primitive dans K' et c'est l'unique place modérée ramifiée dans L'/K', puisque $\mathfrak{p}$, qui est totalement ramifiée dans K'/K, ne peut l'être aussi dans L'/K, son sous-groupe d'inertie étant cyclique. Ainsi K' est bien 2-rationnel en vertu du Théorème 6 et L' est 2-birationnel d'après le Théorème 12(ii).

• La place $\mathfrak{q}$ est décomposée dans K'/K. Dans ce cas, les deux places $\mathfrak{q}'_1$ et $\mathfrak{q}'_2$ de L' au-dessus de $\mathfrak{q}$ sont encore primitives et ce sont les seules places modérées qui se ramifient dans L'/K' puisque, comme précédemment, $\mathfrak{p}$, qui est totalement ramifiée dans K'/K, ne peut l'être aussi dans L'/K. On conclut comme plus haut que L'/K' est 2-birationnelle.

Ceci achève la démonstration du Théorème 16.

6. Tours d'extensions 2-birationnelles. Le Théorème 16 limite aux seules extensions quadratiques la possibilité de réaliser la propagation de la 2-rationalité par 2-extension (galoisienne) du corps de base K. Mais il laisse ouverte la possibilité de construire des tours infinies (donc non galoisiennes) de telles extensions. Comme chaque montée quadratique n'est possible qu'à partir d'une extension birationnelle L/K biramifiée modérément, la seule contrainte pour que la construction puisse se poursuivre est de ne fabriquer à chaque étage n que des extensions birationnelles L_n/K_n qui soient encore biramifiées.

En d'autres termes, la question de la propagation indéfinie de la 2-birationalité se ramène à construire, pour une extension 2-birationnelle L/K donnée, ramifiée modérément en exactement deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, une extension quadratique totalement réelle K' de K décomposée en $\mathfrak{q}$ et ramifiée modérément en $\mathfrak{p}$ seulement (la ramification sauvage étant indifférente).

En vertu de la théorie 2-adique du corps de classes, une telle extension existe si et seulement si le 2-groupe des $\infty\mathfrak{q}$-classes $2\mathfrak{p}$-infinitésimales est non trivial.

Regardons si c'est bien le cas. Rappelons le contexte de notre étude :

1. K est un corps de nombres totalement réel qui est 2-rationnel, ce qui peut se traduire par les deux propriétés suivantes :
   (a) K possède une seule place dyadique $\mathfrak{l}$, d'où $[K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_2] = [K : \mathbb{Q}] = r$;
   (b) sa 2-extension abélienne 2-ramifiée ∞-décomposée maximale est sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique K^c ; ainsi le groupe d'idèles qui définit l'extension cyclotomique est donnée par
$$\widetilde{\mathcal{J}}_K = \prod_{\mathfrak{r}\neq\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_K.$$
2. L est une extension quadratique totalement imaginaire de K qui se ramifie modérément en exactement deux places $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, qui sont primitives. En termes idéliques, cette primitivité s'écrit
$$\mathcal{J}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K\mathfrak{p}} = \widetilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}}.$$

Cela étant, nous cherchons une extension quadratique K'/K satisfaisant les quatre propriétés suivantes :

(i) elle est ramifiée modérément en $\mathfrak{p}$ seulement,
(ii) elle est décomposée en $\mathfrak{q}$,
(iii) elle est non décomposée en 2,
(iv) elle est complètement décomposée à l'infini (i.e. totalement réelle).

Pour l'instant, considérons la 2-extension abélienne maximale N de K qui est totalement réelle, $\mathfrak{p}$-modérément ramifiée et $\mathfrak{q}$-décomposée. Le sous-groupe d'idèles qui lui correspond est ainsi
$$\prod_{\mathfrak{r}|\infty} \mu_{\mathfrak{r}} \Big(\prod_{\mathfrak{r}\nmid\mathfrak{l}\mathfrak{p}\infty} \mu_{\mathfrak{r}} \Big) \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \mathcal{R}_K.$$
Et il vient donc que
$$\mathrm{Gal}(N/K) = \mathcal{J}_K / \prod_{\mathfrak{r}\nmid\mathfrak{p}\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \mathcal{R}_K \simeq \mu_{\mathfrak{p}} / \mu_{\mathfrak{p}} \cap \Big(\prod_{\mathfrak{r}\nmid\mathfrak{p}\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \mathcal{R}_K \Big),$$
en vertu des égalités rappelées plus haut :
$$\mathcal{J}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{J}}_K = \prod_{\mathfrak{r}\neq\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_K.$$
Dans le quotient obtenu, les idèles principaux (i.e. les éléments de $\mathcal{R}_K$) qui apparaissent au dénominateur sont dans $\prod_{\mathfrak{r}\neq\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}}$: ce sont des $\mathfrak{q}$-unités infinitésimales.

Or, nous avons ici :

Lemme 19. *Dans un corps de nombres 2-rationnel totalement réel, pour toute place modérée $\mathfrak{q}$ de K le pro-2-groupe $\mathcal{E}_\infty^{\mathfrak{q}}$ des $\mathfrak{q}$-unités infinitésimales est trivial.*

Preuve. Il s'agit de vérifier que l'image locale $s_{\mathfrak{l}}(\mathcal{E}^{\mathfrak{q}})$ du 2-adifié $\mathcal{E}^{\mathfrak{q}} = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} E^{\mathfrak{q}}$ du groupe des $\mathfrak{q}$-unités de K est encore un $\mathbb{Z}_2$-module de rang $r = [K : \mathbb{Q}]$. Pour voir cela, observons que K, puisqu'il est présumé 2-rationnel, vérifie la conjecture de Leopoldt ; autrement dit, le 2-adifié groupe des unités $\mathcal{E} = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} E$ s'injecte dans le groupe des unités locales $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$ attaché à l'unique place dyadique $\mathfrak{l}$ de K. En particulier $\mathcal{E}$, qui est de rang $r-1 = [K : \mathbb{Q}] - 1$, s'envoie avec un indice fini dans la préimage $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}^*$ dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$ du groupe $\mu_2 = \{\pm 1\}$ des racines de l'unité pour la norme arithmétique $\nu = N_{K/\mathbb{Q}}$. Soit alors x l'image canonique dans $\mathcal{E}^{\mathfrak{q}}$ d'un générateur arbitraire d'une puissance principale de l'idéal $\mathfrak{q}$. La norme x^{ν} est (au signe près) une puissance non triviale de $N\mathfrak{q}$, et son logarithme 2-adique n'est donc pas nul. De sorte que le $\mathbb{Z}_2$-module $s_{\mathfrak{l}}(\mathcal{E}^{\mathfrak{q}})$, qui contient $s_{\mathfrak{l}}(\mathcal{E})$ et $s_{\mathfrak{l}}(x)$, est de rang au moins $(r-1)+1 = r$; et finalement de rang exactement r, tout comme $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$. En d'autres termes, le sous-module $\mathcal{E}^{\mathfrak{q}}_{\infty}$ des $\mathfrak{q}$-unités infinitésimales est bien trivial.

Ce point acquis, nous avons obtenu :

Proposition 20. *Pour toute place primitive* $\mathfrak{q}$ *d'un corps* 2*-rationnel totalement réel* K*, la* 2*-extension abélienne maximale* N *de* K *qui est totalement réelle,* $\mathfrak{q}$*-décomposée et ramifiée modérément en une unique place* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$*, est cyclique, de groupe de Galois*

$$\mathrm{Gal}(N/K) \simeq \mu_{\mathfrak{p}}.$$

En particulier, N/K *contient une unique sous-extension quadratique* K'/K*.*

Il suit de là que, sous les hypothèses de la proposition, l'unique sous-extension quadratique K'/K de N/K est l'unique extension quadratique qui satisfait aux conditions (i), (ii) et (iv) listées plus haut. Reste à voir si elle vérifie également la condition (iii) qui postule l'existence d'une unique place dyadique dans K'. Or c'est là qu'intervient précisément la condition de primitivité de la place $\mathfrak{p}$, que nous n'avons pas utilisée jusqu'ici : les résultats sur la propagation de la 2-rationalité rappelés dans le chapitre 1 assurent que K' est encore 2-rationnel si et seulement si la place $\mathfrak{p}$ est primitive dans K. Lorsque c'est le cas, K' ne peut alors contenir qu'une seule place dyadique, et la condition (iii) est, de ce fait, automatiquement vérifiée.

L'ensemble de cette discussion peut donc se résumer comme suit :

Théorème 21. *Soient* K *un corps* 2*-rationnel totalement réel et* L *une extension quadratique* 2*-birationnelle totalement imaginaire de* K *ramifiée modérément en deux places primitives* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$*. Il existe alors exactement deux extensions quadratiques* K'/K *totalement réelles,* 2*-rationnelles et ramifiées modérément, telles que l'extension composée* $L' = LK'$ *soit* 2*-birationnelle : celle qui est ramifiée modérément en* $\mathfrak{p}$ *et décomposée en* $\mathfrak{q}$*, et celle qui est ramifiée modérément en* $\mathfrak{q}$ *et décomposée en* $\mathfrak{p}$*.*

Comme vu plus avant, l'extension L'/K' vérifie à son tour les mêmes hypothèses que l'extension de départ. Itérant le théorème, on obtient ainsi :

SCOLIE 22. *Sous les hypothèses du Théorème* 21, *il existe une infinité de tours infinies d'extensions relativement quadratiques* $K \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ *de corps* 2*-rationnels totalement réels telles que les extensions composées* $L_i = LK_i$ *pour* $i \in \mathbb{N}$ *soient* 2*-birationnelles.*

Il convient, en effet, à chaque étage $i \in \mathbb{N}$ déjà construit, de choisir celle des deux places primitives du corps K_i ramifiées dans L_i/K_i qu'on autorise à se ramifier modérément dans l'extension quadratique K_{i+1}/K_i.

7. Appendice : identités du miroir. Il peut être instructif de relire les résultats ci-dessus à la lumière des identités du miroir qui fournissent une seconde preuve du Théorème 21.

Reprenons pour cela les calculs effectués plus haut : l'isomorphisme donné par le corps de classses

$$\mathrm{Gal}(N/K) \simeq \mu_{\mathfrak{p}}/\mu_{\mathfrak{p}} \cap \Big(\prod_{\mathfrak{r} \nmid \mathfrak{p}\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{r}} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}} \mathcal{R}_K\Big)$$

nous assure que l'extension N/K est cyclique (éventuellement triviale). Posons $S = \{\mathfrak{q}\infty\}$ et $T = \{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}$. Par construction, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N/K)$ s'identifie alors au 2-groupe des S-classes T-infinitésimales $\mathcal{C}\ell_T^S$; et le résultat précédent se lit tout simplement

$$\mathrm{rg}_2\, \mathcal{C}\ell_T^S \leq 1.$$

Nous allons à présent minorer ce rang grâce à la formule de réflexion de Gras (cf. [3, Th. 4.6, p. 45]).

Reprenant les notations de Gras nous avons : $S = \{\mathfrak{q}\infty\}$, $T = \{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}$, $S_0 = \{\mathfrak{q}\}$, $T_2 = \{\mathfrak{l}\}$, $S_2 = \emptyset$ et $\Delta_\infty = \emptyset$; donc

$$\mathrm{rg}_2\, \mathcal{C}\ell_T^S - \mathrm{rg}_2\, \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}} = |T| + [K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_2] - r - |S_0| - |\Delta_\infty| = 2 + r - r - 1 - 0 = 1.$$

De cette formule, il suit en particulier que

$$\mathrm{rg}_2\, \mathcal{C}\ell_T^S \geq 1,$$

de sorte qu'en fin de compte nous avons simultanément

$$\mathrm{rg}_2\, \mathcal{C}\ell_T^S = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}} = 1.$$

Le groupe $\mathcal{C}\ell_T^S$ est donc cyclique mais non trivial (comme nous l'avons déjà établi à l'aide du lemme d'indépendance 19 plus haut), tandis que le ℓ-groupe $\mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}}$ des $\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}$-classes $\{\mathfrak{q}\}$-infinitésimales, lui, est nécessairement trivial.

De l'identité $\mathrm{rg}_2\, \mathcal{C}\ell_T^S = 1$, on conclut qu'il existe une unique extension quadratique K'/K qui est non-ramifiée modérément en dehors de $\mathfrak{p}$ et $\infty\mathfrak{q}$-décomposée. Il reste alors à vérifier que cette extension est effectivement ramifiée en $\mathfrak{p}$ et qu'elle est non décomposée en 2, pour qu'elle réalise la propagation de la 2-birationalité. Or :

- Le premier point est évident, puisque le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N/K)$ est engendré par l'image du sous-groupe d'inertie de la place $\mathfrak{p}$.
- Il reste à voir que la place dyadique $\mathfrak{l}$ est non décomposée. Pour cela, reprenons le raisonnement précédent en échangeant les rôles de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{q}$. Ce faisant, nous obtenons $\mathrm{rg}_2\, \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{p}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{q}\}} = 0$, i.e. $\mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{l}\mathfrak{p}\}} = 1$, ce qui est précisément le résultat attendu.

En conclusion, nous retrouvons le fait que pour un couple de places $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ primitives fixé, il existe une unique extension K'/K vérifiant les hypothèses du Théorème 16 et permettant la propagation de la 2-birationalité.

De ce fait, ce processus peut être réitéré à l'infini et ainsi nous pouvons construire des extensions K' de K de degrés arbitrairement grands, disjointes de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique, de telle manière que le corps L' obtenu soit encore 2-birationnel.

Références

[1] C. Bourbon, *Propagation de la 2-rationalité*, thèse, Univ. Bordeaux, 2011.

[2] G. Gras, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1998), 399–499.

[3] G. Gras, *Class Field Theory: From Theory To Practice*, Springer, 2003.

[4] G. Gras et J.-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. 202 (1989), 343–365.

[5] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1994), 301–325.

[6] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1998), 355–397.

[7] J.-F. Jaulent et T. Nguyen Quang Do, *Corps p-réguliers, corps p-rationnels et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux 5 (1993), 343–363.

[8] J.-F. Jaulent et O. Sauzet, *Pro-ℓ-extension de corps de nombres $\mathfrak{l}$-rationnels*, J. Number Theory 65 (1997), 240–267; Corrigendum, ibid. 80 (2000), 318–319.

[9] J.-F. Jaulent et O. Sauzet, *Extensions quadratiques 2-birationnelles de corps totalement réels*, Publ. Mat. 44 (2000), 343–353.

[10] A. Movahhedi, *Sur les p-extensions des corps p-rationnels*, Math. Nachr. 149 (1990), 163–176.

[11] A. Movahhedi et T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, dans: Sém. Théor. Nombres Paris 1987/1988, Progr. Math. 81, Birkhäuser Boston, 1990, 155–200.

[12] F. Soriano, *Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques*, Acta Arith. 78 (1997), 201–219.

[13] K. Wingberg, *On Galois groups of p-closed algebraic number fields with restricted ramification, I, II*, J. Reine Angew. Math. 400 (1989), 185–202; 416 (1991), 187–194.

Claire Bourbon, Jean-François Jaulent
Univ. Bordeaux
Institut de Mathématiques de Bordeaux
351 Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex, France
et
CNRS
Institut de Mathématiques de Bordeaux
351 Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex, France
E-mail: claire.bourbon@math.u-bordeaux1.fr
jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux1.fr

Reçu le 26.3.2013
et révisé le 7.6.2013 (7385)