ACTA ARITHMETICA
118.2 (2005)

Propriétés q-multiplicatives de la suite $\lfloor n^c \rfloor$, $c>1$

par

CHRISTIAN MAUDUIT et JOËL RIVAT (Marseille)

1. Introduction. Si q désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2, on appelle *fonction q-multiplicative* toute fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{U}$ (le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1) telle que pour $(a,b,k) \in \mathbb{N}^3$,

$$b < q^k \;\Rightarrow\; f(q^k a + b) = f(q^k a) f(b). \tag{1}$$

Une fonction q-multiplicative est donc entièrement déterminée par la donnée de sa valeur sur l'ensemble $\{jq^k : 0 \le j \le q-1,\ k \ge 0\}$. En effet, tout entier n peut s'écrire en base q sous la forme

$$n = \sum_{k\in\mathbb{N}} j_k q^k \quad (0 \le j_k \le q-1), \tag{2}$$

où les j_k sont tous nuls à partir d'un certain rang. Ainsi

$$f(n) = \prod_{k\in\mathbb{N}} f(j_k q^k).$$

Posons $\mathrm{e}(x) = \exp(2i\pi x)$. Les exemples les plus simples de fonctions q-multiplicatives sont les fonctions $f(n) = \mathrm{e}(n\alpha)$ et $f(n) = \mathrm{e}(s_q(n)\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $s_q(n)$ désigne la somme des chiffres du nombre entier n écrit en base q (écriture (2)) :

$$s_q(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} j_k. \tag{3}$$

Cette notion a été introduite en 1948 par R. Bellman et H. N. Shapiro dans [BS48]. Les propriétés des fonctions q-multiplicatives ont depuis été étudiées par de nombreux auteurs sous divers aspects : arithmétique [Gel68, Del72, Shi74, Gra93, BK95, MR95, Tos97, Tos98, Uch99], spectral [MF72, MF73, CKMF77, Coq78, Coq79, Que79, Coq85, Mos89, Mau97], ergodique [Kea68, Lia87, LMM94, LM96], etc.

En 1968, A. O. Gelfond a montré dans [Gel68] que pour tout polynôme P à coefficients entiers positifs de degré 1, la suite $(s_q(P(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11A63, 11L07; Secondary 11N60.

répartie dans les progressions arithmétiques en donnant des estimations précises des sommes trigonométriques associées. Lorsque le degré de P est supérieur ou égal à 2, le problème devient extrêmement difficile et on ne connaît aucun résultat analogue dans ce cas. Récemment, C. Dartyge et G. Tenenbaum [DT, Théorème 1.2] ont pu montrer que si $\deg P = d \geq 1$, $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ et $(m, q-1) = 1$, alors pour tout entier r, le nombre $A(N; P; r, m)$ d'entiers n, $0 \leq n \leq N$, tels que

$$s_q(P(n)) \equiv r \bmod m$$

vérifie la minoration

$$A(N; P; r, m) \geq C N^{\min(1, 2/d!)} \qquad (N \geq N_0),$$

où $C = C(P, r, m) > 0$ et $N_0 = N_0(P, r, m) \geq 1$ sont deux constantes qui dépendent uniquement de P, r et m.

Ce résultat fournit une proportion positive lorsque $d = 2$, ce qui constitue une avancée importante. Cependant, il ne fournit pas la proportion attendue, dont l'évaluation reste un problème très intéressant.

La difficulté d'étendre la bonne répartition de la somme des chiffres à des suites polynomiales de degré supérieur ou égal à 2 rappelle une difficulté analogue bien connue pour la suite des nombres premiers.

La suite $(\lfloor n^c \rfloor)_{n \geq 1}$, $c > 1$, est un exemple classique de suite éparse (c'est-à-dire dont le nombre de termes jusqu'à x est $o(x)$) et elle peut être considérée comme un cas intermédiaire entre les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2. En 1953, I. Piatetski-Shapiro a donné pour $c < 12/11$ un équivalent lorsque x tend vers l'infini du nombre de nombres premiers $p \leq x$ qui sont dans la suite $(\lfloor n^c \rfloor)_{n \geq 1}$. La borne $12/11$ de ce résultat a depuis été améliorée par [Kol67, HB83, Kol85, LR92, Riv92, RS01]. Le meilleur résultat connu est dans [RS01] : $c < 1.16117\ldots$.

Dans le cas particulier où $f(n) = \mathrm{e}(n\alpha)$, des estimations de la somme trigonométrique $\sum_{1 \leq n \leq x} f(\lfloor n^c \rfloor)$ valables pour tout $c > 1$ ont été données par J. M. Deshouillers en 1973 (voir [Des73]).

Ces résultats nous ont inspiré dans [MR95] une première étude de la répartition des entiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$ dans des suites de densité positive définies par des fonctions q-multiplicatives. Nous avions montré

Théorème A ([MR95]). *Soit f une fonction q-multiplicative et $c \in [1, 4/3[$. Alors, en posant $\gamma = 1/c$, pour $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ assez petit on a*

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f([n^c]) = \sum_{1 \leq m \leq x^c} \gamma m^{\gamma - 1} f(m) + O_\gamma(x^{1-\varepsilon}).$$

Corollaire A ([MR95]). *Si $c \in [1, 4/3[$, alors la suite $(s_q([n^c])\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 pour tout nombre irrationnel α.*

Corollaire B ([MR95]). *Si* $c \in [1, 4/3[$, *alors pour tout* $(a, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \#\{n < N : s_q([n^c]) \equiv a \bmod m\} = \frac{1}{m}.$$

Dans cet article nous montrerons le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit* $c \in]1, 7/5[$ *et* $\gamma = 1/c$. *Pour tout* $\delta \in]0, (7-5c)/9[$, *il existe une constante* $C_1(\gamma, \delta) > 0$ *telle que pour toute fonction q-multiplicative* f *et tout* $x \geq 1$,

$$\Big| \sum_{1\leq n\leq x} f(\lfloor n^c \rfloor) - \sum_{1\leq m\leq x^c} \gamma m^{\gamma-1} f(m) \Big| \leq C_1(\gamma, \delta) x^{1-\delta}. \tag{4}$$

En procédant comme dans [MR95] on en déduit

Corollaire 1. *Si* $c \in [1, 7/5[$, *alors la suite* $(s_q([n^c])\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie modulo* 1 *pour tout nombre irrationnel* α.

Corollaire 2. *Si* $c \in [1, 7/5[$, *alors pour tout* $(a, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \#\{n < N : s_q([n^c]) \equiv a \bmod m\} = \frac{1}{m}.$$

Le Théorème 1 apporte plusieurs améliorations au Théorème A. Tout d'abord la borne 4/3 est repoussée à 7/5, et le fait que la majoration ne dépend pas de la fonction f est mis en lumière, mais surtout il précise de manière quantitative la dépendance entre c (ou γ) et δ. Ce point essentiel va nous permettre au Théorème 3 d'établir un résultat beaucoup plus fin que les corollaires précédents sur la répartition des valeurs de $s_q(\lfloor n^c \rfloor)$.

La démonstration du Théorème 1 repose de manière cruciale sur les techniques de sommes d'exponentielles, et notamment sur l'inégalité du « double grand crible » de Bombieri et Iwaniec (Lemme 2.4 de [BI86]). Ainsi nous montrerons que le Théorème 1 est une conséquence du résultat suivant :

Théorème 2. *Soit* $1/2 < \gamma < 1$. *Il existe une constante* $C_2(\gamma) > 0$ *telle que pour toute fonction q-multiplicative* f, *et tous réels* $1/2 \leq H \leq M \leq M' \leq 2M$, $u \in [0, 1]$,

$$\sum_{H<h\leq 2H} \Big| \sum_{M<m\leq M'} f(m)\, \mathrm{e}(h(m+u)^\gamma) \Big| \leq C_2(\gamma) H^{9/8} M^{(2+\gamma)/4} (1 + H^{-1/2} M^{(1-\gamma)/2}) \sqrt{\log(3M)}. \tag{5}$$

Le Théorème 1 a de multiples applications, et permet d'étudier notamment la répartition des entiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$ dans certaines suites de densité nulle définies par des propriétés q-multiplicatives. En particulier, le résultat suivant montre que sous certaines conditions, on obtient l'ordre de grandeur attendu d'entiers $n \leq x$ pour lesquels $s_q(\lfloor n^c \rfloor) = k$:

Théorème 3. *Soit $c \in]1, 7/5[$ et $\gamma = 1/c$. Pour tout $\delta \in]0, (7-5c)/9[$, il existe une constante $C_3(\gamma, \delta)$ telle que pour tout réel $x > 1$ et pour tout entier k vérifiant*

$$\left(1 - \frac{\delta}{c}\right)\frac{q-1}{2}\left\lfloor\frac{\log(x^c+1)}{\log q}\right\rfloor \le k \le \left(1 + \frac{\delta}{c}\right)\frac{q-1}{2}\left\lfloor\frac{\log(x^c+1)}{\log q}\right\rfloor, \tag{6}$$

on ait

$$\#\{n \le x : s_q(\lfloor n^c\rfloor) = k\} \ge C_3(\gamma, \delta)x^{1-c}\,\#\{n \le x^c : s_q(n) = k\}. \tag{7}$$

Notations. Dans toute la suite nous écrirons $F \ll G$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|F| \le C|G|$, et (par exemple) $F \ll_{u,v} G$ si la constante implicite C dépend des paramètres u et v.

2. Démonstration du Théorème 1

2.1. *Réduction du problème*

Lemme 1. *Soit $c > 1$ et $\gamma = 1/c$. Pour toute fonction arithmétique f à valeurs dans le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, on a l'inégalité*

$$\Big|\sum_{1\le n\le x} f(\lfloor n^c\rfloor) - \sum_{1\le m\le x^c}\gamma m^{\gamma-1}f(m)\Big| \le \Big|\sum_{1\le m\le x^c} f(m)(\psi(-(m+1)^\gamma) - \psi(-m^\gamma))\Big| + \frac{1}{4}, \tag{8}$$

où $\psi(u) = u - \lfloor u\rfloor - 1/2$.

Démonstration. Il est facile de voir qu'un entier $m \ge 1$ s'écrit sous la forme $m = \lfloor n^c\rfloor$ avec n entier si et seulement si $\lfloor -m^\gamma\rfloor - \lfloor -(m+1)^\gamma\rfloor = 1$. Par conséquent

$$\sum_{1\le n\le x} f(\lfloor n^c\rfloor) = \sum_{1\le m\le x^c} f(m)(\lfloor -m^\gamma\rfloor - \lfloor -(m+1)^\gamma\rfloor).$$

En introduisant la fonction ψ, cette expression est égale à

$$\sum_{1\le m\le x^c} f(m)((m+1)^\gamma - m^\gamma) + \sum_{1\le n\le x^c} f(m)(\psi(-(m+1)^\gamma) - \psi(-m^\gamma)).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\Big|\sum_{1\le m\le x^c} f(m)((m+1)^\gamma - m^\gamma) - \sum_{1\le m\le x^c}\gamma m^{\gamma-1}f(m)\Big| \le \frac{1}{4},$$

ce qui découle immédiatement de l'inégalité $|f(m)| \le 1$ et du lemme ci-dessous. ∎

Lemme 2. *Pour tout $\theta \in [0, 1]$,*

$$\sum_{m\ge 1}|(m+1)^\theta - m^\theta - \theta m^{\theta-1}| \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\theta+1}} \le \frac{1}{4}.$$

Démonstration. L'inégalité de droite est évidente pour tout $\theta \in [0,1]$. L'inégalité de gauche est vraie pour $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, donc nous pouvons supposer $0 < \theta < 1$. Alors pour tout $m \geq 1$,

$$|(m+1)^\theta - m^\theta - \theta m^{\theta-1}| = \frac{\theta(1-\theta)}{2} \int_0^1 \int_0^t (m+u)^{\theta-2}\, du\, dt.$$

Pour $u \geq 0$, la fonction $v \mapsto (v+u)^{\theta-2}$ est convexe sur $]0,+\infty[$, donc

$$\sum_{m \geq 1} (1-\theta)(m+u)^{\theta-2} \leq \int_{1/2}^{\infty} (1-\theta)(v+u)^{\theta-2}\, dv = \left(\frac{1}{2}+u\right)^{\theta-1}.$$

En intégrant en u puis en t, nous obtenons

$$\sum_{m \geq 1} |(m+1)^\theta - m^\theta - \theta m^{\theta-1}| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}+t\right)^\theta - \left(\frac{1}{2}\right)^\theta\right) dt.$$

Nous écrivons maintenant, en posant $w = t - 1/2$,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}+t\right)^\theta dt = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (1+w)^\theta\, dw = \int_0^{1/2} \frac{(1-w)^\theta + (1+w)^\theta}{2}\, dw$$

et par concavité de $\xi \mapsto (1+\xi)^\theta$ sur $[-1/2, 1/2]$, pour tout $w \in [0,1/2]$ on a

$$\frac{(1-w)^\theta + (1+w)^\theta}{2} \leq \left(\frac{1-w}{2} + \frac{1+w}{2}\right)^\theta = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}+t\right)^\theta - \left(\frac{1}{2}\right)^\theta\right) dt \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\theta+1}},$$

ce qui achève la démonstration. ∎

Afin de contrôler la taille de la variable de sommation dans la somme du membre de droite de (8), nous posons $M_k = x^c/2^k$ pour tout entier $k \geq 0$, et nous écrivons

$$\Big| \sum_{1 \leq m \leq x^c} f(m)(\psi(-(m+1)^\gamma) - \psi(-m^\gamma)) \Big| \\ \leq \sum_{k \geq 0} \Big| \sum_{M_{k+1} < m \leq M_k} f(m)(\psi(-(m+1)^\gamma) - \psi(-m^\gamma)) \Big|.$$

Le Théorème 1 résulte alors du résultat suivant :

Lemme 3. *Soit $c \in]1, 7/5[$ et $\gamma = 1/c$. Pour tout $\delta \in]0, (7/15)\gamma - 1/3[$, il existe une constante $C_3 = C_3(\gamma,\delta) \geq 1$ telle que pour toute fonction*

q-multiplicative f et tout réel $M > 0$,

$$\Big| \sum_{M<m\le 2M} f(m)(\psi(-(m+1)^\gamma) - \psi(-m^\gamma))\Big| \le C_3(\gamma,\delta) M^{\gamma(1-\delta)}. \tag{9}$$

En effet, en appliquant ce lemme pour chaque M_k, $k \ge 0$, puis en sommant sur k et en posant

$$C_1(\gamma,\delta) = C_3(\gamma,\delta) \sum_{k\ge 0} 2^{-k(1-\delta)},$$

nous obtenons le Théorème 1.

2.2. *Passage aux sommes trigonométriques.* Il reste à démontrer le Lemme 3. Notons que l'inégalité (9) est triviale pour $M < 1$. Afin de transformer le problème de l'obtention de (9) en une majoration de somme d'exponentielles, et d'être en mesure d'appliquer le Théorème 2 (dont la démonstration sera donnée dans le paragraphe 4), utilisons une approximation fine de $\psi(t)$ par des polynômes trigonométriques :

Lemme 4. *Soit un entier $H \ge 1$. Il existe des coefficients $a_H(h)$ avec $0 \le a_H(h) \le 1$ tels que les polynômes trigonométriques*

$$\psi_H(t) = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{1\le |h| \le H} \frac{a_H(h)}{h} \mathrm{e}(ht),$$

$$\kappa_H(t) = \frac{1}{2H+2} \sum_{|h|\le H} \left(1 - \frac{|h|}{H+1}\right) \mathrm{e}(ht)$$

vérifient

$$|\psi(t) - \psi_H(t)| \le \kappa_H(t).$$

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 17 de [Vaa85]. ∎

Lemme 5. *Soit $0 < \theta < 1$. Il existe une constante $C_3(\theta) > 0$ telle que pour tout entier $H \ge 1$ et tout réel $M \ge 1$,*

$$\sum_{M<m\le 2M} \kappa_H(m^\theta) \le C_3(\theta)(H^{-1}M + H^{1/2}M^{\theta/2} + H^{-1/2}M^{1-\theta/2}).$$

Démonstration. En remplaçant κ_H par son expression, nous pouvons écrire

$$\sum_{M<m\le 2M} \kappa_H(m^\theta) \ll \frac{M}{H} + \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \Big| \sum_{M<m\le 2M} \mathrm{e}(hm^\theta)\Big|.$$

Nous appliquons le Théorème 2.2 de [GK91] à la dernière somme, ce qui donne

$$\sum_{M<m\le 2M} \kappa_H(m^\theta) \ll_\theta \frac{M}{H} + \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}(h^{1/2}M^{\theta/2} + h^{-1/2}M^{1-\theta/2})$$
$$\ll_\theta H^{-1}M + H^{1/2}M^{\theta/2} + H^{-1/2}M^{1-\theta/2}. \blacksquare$$

Pour majorer le membre de gauche de (9) nous écrivons, pour tout entier $H_0 \ge 1$,

$$\Big|\sum_{M<m\le 2M} f(m)(\psi(-(m+1)^\gamma) - \psi(-m^\gamma))\Big|$$
$$\le \Big|\sum_{M<m\le 2M} f(m)(\psi_{H_0}(-(m+1)^\gamma) - \psi_{H_0}(-m^\gamma))\Big|$$
$$+ \sum_{M<m\le 2M} \kappa_{H_0}(-(m+1)^\gamma) + \sum_{M<m\le 2M} \kappa_{H_0}(-m^\gamma).$$

En assumant les conditions du Lemme 3, les deux dernières sommes se majorent à l'aide du Lemme 5 avec $\theta = \gamma$ et leur contribution avec le choix $H_0 \asymp M^{1-\gamma(1-\delta)}$ est majorée par

$$\ll_\gamma M^{\gamma(1-\delta)} + M^{1/2+\gamma\delta/2} + M^{1/2-\gamma\delta/2}.$$

Le deuxième terme domine le troisième. Montrons que le premier terme domine le deuxième, en utilisant les inégalités $5/7 < \gamma < 1$ et $0 < \delta < 2/15$:

$$\gamma(1-\delta) - \tfrac12 - \tfrac12\gamma\delta = \gamma\big(1 - \tfrac32\delta\big) - \tfrac12 \ge \tfrac57\big(1 - \tfrac32\cdot\tfrac{2}{15}\big) - \tfrac12 = \tfrac{1}{14} > 0.$$

Nous avons obtenu pour les termes contenant κ_{H_0} la majoration admissible

$$\sum_{M<m\le 2M} \kappa_{H_0}(-(m+1)^\gamma) + \sum_{M<m\le 2M} \kappa_{H_0}(-m^\gamma) \ll_\gamma M^{\gamma(1-\delta)}.$$

Il reste donc à montrer la majoration

$$\Big|\sum_{M<m\le 2M} f(m)(\psi_{H_0}(-(m+1)^\gamma) - \psi_{H_0}(-m^\gamma))\Big| \ll_{\gamma,\delta} M^{\gamma(1-\delta)}.$$

En remplaçant ψ_{H_0} par son expression définie dans le Lemme 4 nous devons montrer

$$\sum_{h=1}^{H_0} \frac{1}{h}\Big|\sum_{M<m\le 2M} f(m)(\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma))\Big| \ll_{\gamma,\delta} M^{\gamma(1-\delta)}$$

et en effectuant un découpage dyadique de la sommation sur h, en posant $H_k = H_0 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$, il suffit de montrer

$$\sum_{k\ge 0}\sum_{H_{k+1}<h\le H_k} \frac{1}{h}\Big|\sum_{M<m\le 2M} f(m)(\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma))\Big| \ll_{\gamma,\delta} M^{\gamma(1-\delta)}.$$

2.3. *Sommation par parties.* Lorsque $h \ll M^{1-\gamma}$, nous pouvons exploiter avantageusement la différence $\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma)$ par une sommation par partie. Posons $\phi_h(t) = \mathrm{e}(h(t+1)^\gamma - ht^\gamma) - 1$, et écrivons

$$\begin{aligned}\sum_{M<m\le 2M} & f(m)(\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma)) \\ &= \sum_{M<m\le 2M} f(m)\,\mathrm{e}(hm^\gamma)\phi_h(m) \\ &= \phi_h(2M) \sum_{M<m\le 2M} f(m)\,\mathrm{e}(hm^\gamma) - \int_M^{2M} \phi_h'(t) \sum_{M<m\le t} f(m)\,\mathrm{e}(hm^\gamma)\,dt.\end{aligned}$$

Or pour $t \in [M, 2M]$ on a

$$\phi_h(t) \ll hM^{\gamma-1}, \qquad \phi_h'(t) \ll hM^{\gamma-2}.$$

Donc pour tout $k \ge 0$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{H_{k+1}<h\le H_k} \frac{1}{h}\Big| & \sum_{M<m\le 2M} f(m)(\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma))\Big| \\ &\ll \max_{M'\in[M,2M]} M^{\gamma-1} \sum_{H_{k+1}<h\le H_k} \Big| \sum_{M<m\le M'} f(m)\,\mathrm{e}(hm^\gamma)\Big|.\end{aligned}$$

Cependant, pour tout $k \ge 0$, nous pouvons aussi écrire en séparant simplement les termes

$$\begin{aligned}\sum_{H_{k+1}<h\le H_k} \frac{1}{h}\Big| & \sum_{M<m\le 2M} f(m)(\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma))\Big| \\ &\ll \max_{u\in\{0,1\}} \frac{1}{H_{k+1}} \sum_{H_{k+1}<h\le H_k} \Big| \sum_{M<m\le 2M} f(m)\,\mathrm{e}(h(m+u)^\gamma)\Big|.\end{aligned}$$

La somme sur k comporte $O(\log H_0)$ termes non nuls, et en sommant nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{1\le h\le H_0} \frac{1}{h}\Big| & \sum_{M<m\le 2M} f(m)(\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma))\Big| \\ &\ll \log(H_0) \max_{0<H\le H_0} \max_{u\in\{0,1\}} \max_{M'\in[M,2M]} \min(M^{\gamma-1}, H^{-1}) S(H, M, M', u),\end{aligned}$$

où

$$S(H, M, M', u) = \sum_{H<h\le 2H} \Big| \sum_{M<m\le M'} f(m)\,\mathrm{e}(h(m+u)^\gamma)\Big|. \tag{10}$$

D'après le Théorème 2, que nous démontrerons plus loin, on a

$$S(H, M, M', u) \ll_\gamma H^{9/8} M^{(2+\gamma)/4} (1 + H^{-1/2} M^{(1-\gamma)/2}) \sqrt{\log(3M)}.$$

Pour $H \le M^{1-\gamma}$, on a donc

$$M^{\gamma-1} S(H, M, M', u) \ll_\gamma H^{5/8} M^{3\gamma/4} \sqrt{\log(3M)} \le M^{(5+\gamma)/8} \sqrt{\log(3M)},$$

et pour $H > M^{1-\gamma}$,

$$H^{-1} S(H, M, M', u) \ll_\gamma H^{1/8} M^{(2+\gamma)/4} \sqrt{\log(3M)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le h\le H_0} \frac{1}{h} \Big| \sum_{M<m\le 2M} & f(m)(\mathrm{e}(h(m+1)^\gamma) - \mathrm{e}(hm^\gamma)) \Big| \\ & \ll (M^{(5+\gamma)/8} + H_0^{1/8} M^{(2+\gamma)/4}) \log(H_0) \sqrt{\log(3M)} \\ & \ll H_0^{1/8} M^{(2+\gamma)/4} (H_0^{-1/8} M^{(1-\gamma)/8} + 1)(\log(3M))^{3/2} \\ & \ll H_0^{1/8} M^{(2+\gamma)/4} (\log(3M))^{3/2}.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc la majoration attendue en $O_{\gamma,\delta}(M^{\gamma(1-\delta)})$ dès que

$$1 - \gamma(1-\delta) + 4 + 2\gamma < 8\gamma(1-\delta),$$

c'est-à-dire

$$5c + 9\delta < 7,$$

ce qui équivaut à

$$\delta < (7 - 5c)/9,$$

et termine la démonstration du Théorème 1.

3. Lemme d'espacement

Lemme 6. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha\beta \ne 0$, et $0 < \Delta_1 \le \Delta_2$. Pour tous réels $H > 0$, $A > 0$, le nombre $\mathcal{N}(H, A)$ de quadruplets (h_1, h_2, a_1, a_2) qui satisfont*

$$H \le h_1, h_2 \le 2H, \qquad A \le a_1, a_2 \le 2A,$$

et

$$\left| \frac{h_1}{h_2} - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha \right| \le \Delta_1, \qquad \left| \frac{h_1}{h_2} - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta \right| \le \Delta_2 \tag{11}$$

vérifie

$$\mathcal{N}(H, A) \ll_{\alpha,\beta} HA + \Delta_2 HA \log(HA) + \Delta_1 HA(H+A) + \Delta_1 \Delta_2 H^2 A^2. \tag{12}$$

Démonstration. Nous procédons comme dans la preuve du Lemme 1 de [FI89]. Les conditions d'espacement (11) impliquent

$$\left| \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta \right| \le \Delta_1 + \Delta_2 \ll \Delta_2,$$

et par le théorème des accroissements finis, on a donc

$$\left|\frac{a_1}{a_2}-1\right| \ll_{\alpha,\beta} \Delta_2. \tag{13}$$

On en déduit

$$\left|\frac{h_1}{h_2}-1\right| \ll_{\alpha,\beta} \Delta_2. \tag{14}$$

Pour $1 \le \mu \le 2H$ les points h_1/h_2 avec $(h_1,h_2)=\mu$ sont espacés de $O(\mu^2/H^2)$. Il y en a donc au plus $O_{\alpha,\beta}(1+\Delta_2 H^2/\mu^2)$ qui vérifient la condition (14). Pour $1 \le \nu \le 2A$ les points $(a_1/a_2)^\alpha$ sont espacés de $O_\alpha(\nu^2/A^2)$, donc pour chaque h_1/h_2 fixé, le nombre de points $(a_1/a_2)^\alpha$ qui satisfont la première condition de (11) est au plus $O_\alpha(1+\Delta_1 A^2/\nu^2)$.

En inversant les rôles de h_1/h_2 et a_1/a_2 dans le raisonnement précédent, nous obtenons que le nombre de quadruplets (h_1,h_2,a_1,a_2) qui satisfont les conditions (11) et tels que $(h_1,h_2)=\mu$, $(a_1,a_2)=\nu$ est majoré par

$$\ll_{\alpha,\beta} \min\left\{\left(1+\Delta_2\frac{H^2}{\mu^2}\right)\left(1+\Delta_1\frac{A^2}{\nu^2}\right),\left(1+\Delta_1\frac{H^2}{\mu^2}\right)\left(1+\Delta_2\frac{A^2}{\nu^2}\right)\right\}. \tag{15}$$

Nous devons sommer cette expression pour $1 \le \mu \le 2H$ et $1 \le \nu \le 2A$. Nous distinguerons plusieurs cas.

Lorsque $\mu \le \Delta_1^{1/2}H$, le minimum dans (15) est majoré par

$$\begin{aligned}&\ll \min\left\{\Delta_2\frac{H^2}{\mu^2}\left(1+\Delta_1\frac{A^2}{\nu^2}\right),\Delta_1\frac{H^2}{\mu^2}\left(1+\Delta_2\frac{A^2}{\nu^2}\right)\right\}\\ &= \min\left\{\Delta_2\frac{H^2}{\mu^2},\Delta_1\frac{H^2}{\mu^2}\right\}+\Delta_1\Delta_2\frac{H^2A^2}{\mu^2\nu^2} = \Delta_1\frac{H^2}{\mu^2}+\Delta_1\Delta_2\frac{H^2A^2}{\mu^2\nu^2},\end{aligned}$$

et en sommant sur $\mu \le \Delta_1^{1/2}H$ et $1 \le \nu \le 2A$, nous obtenons une contribution admissible

$$\Delta_1 H^2 A + \Delta_1\Delta_2 H^2 A^2.$$

Lorsque $\nu \le \Delta_1^{1/2}A$, en procédant de la même manière nous obtenons une contribution admissible

$$\Delta_1 H A^2 + \Delta_1\Delta_2 H^2 A^2.$$

Il reste à étudier la contribution des termes $\mu > \Delta_1^{1/2}H$ et $\nu > \Delta_1^{1/2}A$. Le minimum de (15) est majoré sous ces hypothèses par

$$\ll \min\left\{1+\Delta_2\frac{H^2}{\mu^2},1+\Delta_2\frac{A^2}{\nu^2}\right\} = 1+\Delta_2\min\left\{\frac{H^2}{\mu^2},\frac{A^2}{\nu^2}\right\}$$

et en sommant sur μ et ν on obtient une contribution admissible

$$HA+\Delta_2 HA\log(H)+\Delta_2 HA\log(A),$$

ce qui établit le Lemme 6. ∎

4. Démonstration du Théorème 2

4.1. *f est q-multiplicative.* Soit k un entier ≥ 1 et $B = q^k$. On suppose $B \leq M$. On pose $m = q^k a + b$, et on remplace la sommation sur m dans (5) par une sommation sur a et b, de la manière suivante. Par la division euclidienne, il existe des entiers A, R, A', R' tels que

$$M = AB + R \quad \text{avec } 0 \leq R < B, \qquad M' = A'B + R' \quad \text{avec } 0 \leq R' < B,$$

où $A \leq A' \leq 2A + 1$ et $AB \asymp M$. Ainsi en utilisant la notation définie en (10),

$$\begin{aligned} &S(H, M, M', u) \\ &\quad = \sum_{H<h\leq 2H} \Big| \sum_{AB\leq m<A'B} f(m)\, \mathrm{e}(h(m+u)^\gamma) \Big| + O(HB) \\ &\quad = \sum_{H<h\leq 2H} \Big| \sum_{A\leq a<A'} \sum_{0\leq b<B} f(Ba+b)\, \mathrm{e}(h(Ba+b+u)^\gamma) \Big| + O(HB). \end{aligned}$$

Comme f est q-multiplicative et $b < q^k$, on a

$$f(Ba+b) = f(q^k a + b) = f(Ba) f(b),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} &S(H, M, M', u) \\ &\quad = \sum_{H<h\leq 2H} \Big| \sum_{A\leq a<A'} \sum_{0\leq b<B} f(Ba) f(b)\, \mathrm{e}(h(Ba+b+u)^\gamma) \Big| + O(HB). \end{aligned}$$

4.2. *Séparation des variables a et b.* Posons $b_u = b + u$ et

$$\gamma_1 = \gamma, \qquad \gamma_2 = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-1), \qquad \gamma_3 = \tfrac{1}{6}\gamma(\gamma-1)(\gamma-2).$$

Par la formule de Taylor on peut écrire

$$\begin{aligned} (Ba+b+u)^\gamma = B^\gamma a^\gamma &+ \gamma_1 B^{\gamma-1} a^{\gamma-1} b_u + \gamma_2 B^{\gamma-2} a^{\gamma-2} b_u^2 \\ &+ \gamma_3 B^{\gamma-3} a^{\gamma-3} b_u^3 + O_\gamma(B^4 M^{\gamma-4}), \end{aligned}$$

donc en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(a, h) &= (h a^{\gamma-1}, h a^{\gamma-2}, h a^{\gamma-3}), \\ \mathbf{y}(b_u) &= (\gamma_1 B^{\gamma-1} b_u, \gamma_2 B^{\gamma-2} b_u^2, \gamma_3 B^{\gamma-3} b_u^3), \end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\mathrm{e}(h(Ba+b+u)^\gamma) = \mathrm{e}(hB^\gamma a^\gamma)\, \mathrm{e}(\mathbf{x}(a,h)\cdot \mathbf{y}(b_u)) + O_\gamma(HB^4 M^{\gamma-4}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &S(H, M, M', u) \\ &\quad \ll_\gamma \sum_{H<h\leq 2H} \sum_{A\leq a<A'} \Big| \sum_{0\leq b<B} f(b)\, \mathrm{e}(\mathbf{x}(a,h)\cdot \mathbf{y}(b_u)) \Big| + HB + H^2 B^4 M^{\gamma-3}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité du « double grand crible » (Lemme 2.4 de [BI86]) en dimension 3, nous avons

$$\Big(\sum_{H<h\le 2H}\ \sum_{A\le a<A'}\Big|\sum_{0\le b<B} f(b)\,\mathrm{e}(\mathbf{x}(a,h)\cdot\mathbf{y}(b_u))\Big|\Big)^2 \ll (1+\Delta_1^{-1})(1+\Delta_2^{-1})(1+\Delta_3^{-1})\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2,$$

où on a posé

$$\Delta_1^{-1}\asymp\gamma_1 HBM^{\gamma-1},\qquad \Delta_2^{-1}\asymp\gamma_2 HB^2M^{\gamma-2},\qquad \Delta_3^{-1}\asymp\gamma_3 HB^3M^{\gamma-3}.$$

$\mathcal{B}_1$ représente le nombre de quadruplets (h_1,h_2,a_1,a_2) avec

$$H\le h_1,h_2\le 2H,\qquad A\le a_1,a_2\le A'$$

qui satisfont les conditions

$$|h_1a_1^{\gamma-1}-h_2a_2^{\gamma-1}|\le\Delta_1HA^{\gamma-1},$$
$$|h_1a_1^{\gamma-2}-h_2a_2^{\gamma-2}|\le\Delta_2HA^{\gamma-2},$$
$$|h_1a_1^{\gamma-3}-h_2a_2^{\gamma-3}|\le\Delta_3HA^{\gamma-3},$$

et en ignorant la troisième condition, $\mathcal{B}_1$ est majoré à l'aide du Lemme 6 par

$$\mathcal{B}_1\ll_\gamma HA+\Delta_2HA\log(HA)+\Delta_1HA(H+A)+\Delta_1\Delta_2H^2A^2. \tag{16}$$

$\mathcal{B}_2$ représente le nombre de couples (b_u,b'_u) tels que $0\le b_u,b'_u\ll B$, qui satisfont les conditions

$$|b_u-b'_u|\le\Delta_1B,\qquad |b_u^2-b_u'^2|\le\Delta_2B^2,\qquad |b_u^3-b_u'^3|\le\Delta_3B^3.$$

$\mathcal{B}_2$ est donc majoré par

$$\mathcal{B}_2\ll B+\Delta_1B^2. \tag{17}$$

Afin d'épargner au lecteur de fastidieux calculs, nous fixons dès à présent

$$A\asymp H^{1/4}M^{\gamma/2},\qquad B\asymp H^{-1/4}M^{1-\gamma/2}, \tag{18}$$

ce qui entraîne

$$\Delta_1^{-1}\asymp\gamma_1H^{3/4}M^{\gamma/2}\gg 1,\qquad \Delta_2^{-1}\asymp\gamma_2H^{1/2}\gg 1,\qquad \Delta_3^{-1}\asymp\gamma_3H^{1/4}M^{-\gamma/2}.$$

Comme $H\le M$ et $\gamma>1/2$, nous avons $\Delta_3\gg 1$, donc $1+\Delta_3^{-1}\ll 1$. La présence du terme faisant intervenir Δ_3 permet de diminuer la taille des termes d'erreur, et nous fait perdre seulement un facteur multiplicatif constant.

Maintenant d'une part $\Delta_2A\gg_\gamma H^{-1/4}M^{\gamma/2}\gg 1$, d'autre part $\Delta_2H\gg_\gamma H^{1/2}\gg 1$, donc

$$\Delta_2HA\gg_\gamma H+A,$$

donc le quatrième terme de (16) domine le troisième. Nous avons encore

$$HB\asymp H^{3/4}M^{1-\gamma/2},\qquad H^2B^4M^{\gamma-3}\asymp HM^{1-\gamma}.$$

En définitive

$$\begin{aligned}|S(H,M,M',u)|^2 &\ll \varDelta_1^{-1}\varDelta_2^{-1}(HA+\varDelta_1\varDelta_2H^2A^2)(B+\varDelta_1B^2)\log(3M)\\ &\quad + H^{3/2}M^{2-\gamma}+H^2M^{2-2\gamma}\\ &\ll_\gamma HM(\varDelta_1^{-1}\varDelta_2^{-1}+HA)(1+\varDelta_1B)\log(3M)\\ &\quad + H^{3/2}M^{2-\gamma}+H^2M^{2-2\gamma}.\end{aligned}$$

C'est ici que le choix de A et B se révèle judicieux, car il permet d'égaliser les deux termes de la première parenthèse. Nous obtenons

$$\begin{aligned}|S(H,M,M',u)|^2 &\ll_\gamma H^{9/4}M^{1+\gamma/2}(1+H^{-1}M^{1-\gamma})\log(3M)\\ &\quad + H^{3/2}M^{2-\gamma}+H^2M^{2-2\gamma}.\end{aligned}$$

Nous pouvons éliminer le terme $H^2M^{2-2\gamma}$ en observant que pour $1/2<\gamma<1$,

$$H^{9/4}M^{1+\gamma/2}(H^2M^{2-2\gamma})^{-1}=H^{1/4}M^{-1+5\gamma/2}\gg 1.$$

Il nous reste à éliminer le terme $H^{3/2}M^{2-\gamma}$. Pour $1/2<\gamma<1$ et $H\le M^{1-\gamma}$,

$$\begin{aligned}H^{9/4}M^{1+\gamma/2}H^{-1}M^{1-\gamma}(H^{3/2}M^{2-\gamma})^{-1} &= H^{-1/4}M^{\gamma/2}\\ &\gg M^{-(1-\gamma)/4}M^{\gamma/2}=M^{(3\gamma-1)/4}\gg 1,\end{aligned}$$

et pour $1/2<\gamma<1$ et $H>M^{1-\gamma}$,

$$\begin{aligned}H^{9/4}M^{1+\gamma/2}(H^{3/2}M^{2-\gamma})^{-1} &= H^{3/4}M^{(3\gamma-2)/2}\\ &\gg M^{3(1-\gamma)/4}M^{(3\gamma-2)/2}=M^{(3\gamma-1)/4}\gg 1,\end{aligned}$$

ce qui établit le Théorème 2.

5. Preuve du Théorème 3

5.1. *Préliminaires.* Soit $c\in\,]1,7/5[$ et $\gamma=1/c$. Pour tout entier naturel k et tout réel $x>0$ on définit

$$T_k(x)=\sum_{n\le x}\mathbb{1}_{s_q(\lfloor n^c\rfloor)=k},\qquad V_k(x)=\sum_{n\le x}\mathbb{1}_{s_q(n)=k}. \tag{19}$$

On écrit

$$T_k(x)=\int_0^1 \mathrm{e}(-k\alpha)\sum_{n\le x}\mathrm{e}(\alpha s_q(\lfloor n^c\rfloor))\,d\alpha.$$

En posant $f(m)=\mathrm{e}(\alpha s_q(m))$, on définit une fonction q-multiplicative à laquelle on peut appliquer le Théorème 1. Pour tout $\delta\in\,]0,(7-5c)/9[$, on obtient

$$T_k(x)=\int_0^1 \mathrm{e}(-k\alpha)\gamma\sum_{m\le x^c}m^{\gamma-1}\,\mathrm{e}(\alpha s_q(m))\,d\alpha+O(x^{1-\delta}).$$

En intervertissant la somme et l'intégrale, nous obtenons

$$T_k(x) = \gamma \sum_{m \le x^c} m^{\gamma-1} \mathbb{1}_{s_q(m)=k} + O(x^{1-\delta}),$$

et à l'aide d'une sommation par parties

$$T_k(x) = \gamma x^{1-c} V_k(x^c) + \gamma(1-\gamma) \int_1^{x^c} V_k(t) t^{\gamma-2}\, dt + O(x^{1-\delta}).$$

La majoration triviale $V_k(t) \le t$ permet d'écrire

$$T_k(x) = \gamma x^{1-c} V_k(x^c) + \gamma(1-\gamma) \int_{x^{c(1-\delta)}}^{x^c} V_k(t) t^{\gamma-2}\, dt + O(x^{1-\delta}). \tag{20}$$

Pour poursuivre une étude précise et obtenir à partir de (20) une formule asymptotique pour $T_k(x)$ lorsque $x \to +\infty$, nous aurions besoin d'une approximation précise de $V_k(t)$ valable pour

$$c(1-\delta)\log x \le \log t \le c \log x.$$

Les résultats connus actuellement sur $V_k(t)$ ne permettent pas de réaliser un objectif aussi ambitieux. Dans [MS97], Mauduit et Sárközy ont montré (Corollaire 1, p. 150) qu'il existe une constante $c_5(q) > 0$ telle que pour t réel suffisamment grand, on ait uniformément

$$V_k(t) > c_5(q) r^{-\mu\tau} (1 + r + \cdots + r^{q-1})^\tau k^{-1/2}, \tag{21}$$

avec

$$\tau = \left\lfloor \frac{\log(t+1)}{\log q} \right\rfloor, \qquad k \le \frac{q-1}{2}\tau, \qquad \mu = \frac{k}{\tau}, \tag{22}$$

et $r \in]0,1[$ défini implicitement en fonction de μ par la formule

$$\mu(r) = \frac{r + 2r^2 + \cdots + (q-1)r^{q-1}}{1 + r + \cdots + r^{q-1}}. \tag{23}$$

Il résulte en particulier de [MS97, formules (2.5) et (2.6)] que μ est une bijection continue de $[0,1]$ sur $[0,(q-1)/2]$, donc monotone (croissante puisque $\mu(0) = 0 < \mu(1) = (q-1)/2$). Nous aurons besoin d'un résultat plus fort impliquant la dérivée de μ :

Proposition 1. *Pour* $0 < r < 1$, *on a* $\mu'(r) > 0$.

Démonstration. Nous supposons $0 < r < 1$. La formule (23) s'écrit

$$\mu(r) = \frac{r F_q'(r)}{F_q(r)} \tag{24}$$

avec

$$F_q(r) = 1 + r + \cdots + r^{q-1} = \frac{1-r^q}{1-r}. \tag{25}$$

La dérivée logarithmique de F_q est

$$\frac{F_q'(r)}{F_q(r)} = \frac{1}{1-r} - \frac{qr^{q-1}}{1-r^q},$$

ce qui en remplaçant dans (24) donne

$$\mu(r) = q - 1 + \frac{1}{1-r} - \frac{q}{1-r^q}.$$

Ainsi, en dérivant puis en utilisant (25), on obtient

$$\mu'(r) = \frac{1}{(1-r)^2} - \frac{q^2 r^{q-1}}{(1-r^q)^2} = \frac{F_q(r)^2 - q^2 r^{q-1}}{(1-r^q)^2}.$$

Pour montrer que cette différence est strictement positive, nous observons que la convexité stricte de $k \to r^k$ implique

$$r^{(q-1)/2} = r^{(0+1+\cdots+q-1)/q} < \frac{1}{q}\,(1 + r + \cdots + r^{q-1}) = \frac{F_q(r)}{q}.$$

En élevant au carré on obtient $F_q(r)^2 > q^2 r^{q-1}$ et donc $\mu'(r) > 0$. ∎

5.2. *Minoration.* Dans la formule (20) l'intégrale est positive, donc pour minorer $T_k(x)$ nous pouvons la supprimer, ce qui nous permet d'écrire

$$T_k(x) \geq \gamma x^{1-c} V_k(x^c) + O(x^{1-\delta}). \tag{26}$$

Il s'agit de montrer que dans le membre de droite de (26), le premier terme domine le second. Nous appliquons la minoration (21) en prenant $t = x^c$ avec τ, k vérifiant (22), et μ, r vérifiant (23). Nous observons que $k \leq (q-1)\tau/2$ implique $k^{-1/2} \gg_q \tau^{-1/2}$. Pour vérifier que $x^{1-c} V_k(x^c) \ggg x^{1-\delta}$, il suffit que

$$xq^{-\tau} r^{-\mu\tau} (1 + r + \cdots + r^{q-1})^{\tau} \tau^{-1/2} \ggg xq^{-\tau\delta/c},$$

et en prenant la puissance $1/\tau$ et en observant que $\tau^{-1/(2\tau)}$ est borné, il suffit pour minorer convenablement $T_k(x)$ que

$$r^{-\mu}(1 + r + \cdots + r^{q-1}) > q^{1-\delta/c}. \tag{27}$$

Avec la notation (25), considérons

$$\varphi(\mu) = \log(r^{-\mu} F_q(r)) = -\mu \log r + \log F_q(r),$$

où nous rappelons que r est une fonction implicite de μ définie par (23). La Proposition 1 nous permet d'affirmer que r est une fonction dérivable de μ avec $dr/d\mu > 0$. On a donc

$$\varphi'(\mu) = -\log r - \frac{\mu}{r}\frac{dr}{d\mu} + \frac{F_q'(r)}{F_q(r)}\frac{dr}{d\mu} = -\log r \geq 0,$$

$$\varphi''(\mu) = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\mu} \leq 0.$$

Ainsi φ est croissante et concave sur l'intervalle $[0, (q-1)/2]$ (par continuité aux bornes), avec les valeurs $\varphi(0) = 0$ (car alors $r = 0$) et $\varphi((q-1)/2) = \log q$

(car alors $r = 1$). On a donc, pour tout $\mu \in [0, (q-1)/2]$,

$$\varphi(\mu) \geq \frac{2\mu \log q}{q-1}.$$

La condition (27) est donc satisfaite dès que

$$\mu \in \left[\left(1 - \frac{\delta}{c}\right) \frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2} \right].$$

En utilisant la symétrie de la fonction $V_k(t)$ décrite par la formule (2.3) de [MS97], on obtient finalement la minoration (7) du Théorème 3 sous la condition (6).

Références

[BK95] N. L. Bassily and I. Kátai, *Distribution of the values of q-additive functions on polynomial sequences*, Acta Math. Hungar. 68 (1995), 353–361.

[BS48] R. Bellman and H. N. Shapiro, *On a problem in additive number theory*, Ann. of Math. 49 (1948), 333–340.

[BI86] E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(1/2+it)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1986), 449–472.

[Coq78] J. Coquet, *Contributions à l'étude harmonique des suites arithmétiques*, thèse d'état, Orsay, 1978.

[Coq79] —, *Sur la mesure spectrale des suites multiplicatives*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), no. 3, 163–170.

[Coq85] —, *Mesures spectrales de Walsh associées à certaines suites arithmétiques*, ibid. 35 (1985), no. 2, 1–12.

[CKMF77] J. Coquet, T. Kamae et M. Mendès France, *Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France 105 (1977), 369–384.

[DT] C. Dartyge et G. Tenenbaum, *Congruences de sommes de chiffres de valeurs polynomiales*, prépublication.

[Del72] H. Delange, *Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives*, Acta Arith. 21 (1972), 285–298.

[Des73] J.-M. Deshouillers, *Problème de Waring avec exposants non entiers*, Bull. Soc. Math. France 101 (1973), 285–295.

[FI89] É. Fouvry and H. Iwaniec, *Exponential sums with monomials*, J. Number Theory 33 (1989), 311–333.

[Gel68] A. O. Gelfond, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*, Acta Arith. 13 (1968), 259–265.

[Gra93] P. J. Grabner, *Completely q-multiplicative functions: the Mellin transform approach*, ibid. 65 (1993), 85–96.

[GK91] S. W. Graham and G. Kolesnik, *Van der Corput's Method of Exponential Sums*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 126, Cambridge Univ. Press, 1991.

[HB83] D. R. Heath-Brown, *The Pyatetskiĭ-Shapiro prime number theorem*, J. Number Theory 16 (1983), 242–266.

[Kea68] M. Keane, *Generalized Morse sequences*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 10 (1968), 259–265.

[Kol67] G. A. Kolesnik, *The distribution of primes in sequences of the form* $[n^c]$, Mat. Zametki 2 (1967), 117–128.

[Kol85] —, *Primes of the form* $[n^c]$, Pacific J. Math. 118 (1985), 437–447.

[LM96] E. Lesigne et C. Mauduit, *Propriétés ergodiques des suites q-multiplicatives*, Compositio Math. 100 (1996), 131–169.

[LMM94] E. Lesigne, C. Mauduit et B. Mossé, *Le théorème ergodique le long d'une suite q-multiplicative*, ibid. 93 (1994), 49–79.

[Lia87] P. Liardet, *Regularities of distributions*, ibid. 61 (1987), 267–293.

[LR92] H.-Q. Liu and J. Rivat, *On the Pjatetski-Sapiro prime number theorem*, Bull. London Math. Soc. 24 (1992), 143–147.

[Mau97] J.-L. Mauclaire, *Some consequences of a result of Jean Coquet*, J. Number Theory 62 (1997), 1–18.

[MR95] C. Mauduit et J. Rivat, *Répartition des fonctions q-multiplicatives dans la suite* $([n^c])$, $c > 1$, Acta Arith. 71 (1995), 171–179.

[MS97] C. Mauduit and A. Sárközy, *On the arithmetic structure of the integers whose sum of digits is fixed*, ibid. 81 (1997), 145–173.

[MF72] M. Mendès France, *Fonctions g-additives et les suites à spectre vide*, dans : Séminaire Delange–Pisot–Poitou (12e année : 1970/71), Théorie des nombres, Exp. No. 10, Secrétariat Mathématique, Paris, 1972, 6 pp.

[MF73] —, *Les suites à spectre vide et la répartition modulo* 1, J. Number Theory 5 (1973), 1–15.

[Mos89] B. Mossé, *q-adic spectral analysis of some arithmetic sequences*, Theoret. Comput. Sci. 65 (1989), 249–263.

[Que79] M. Queffélec, *Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France 107 (1979), 385–421.

[Riv92] J. Rivat, *Autour d'un théorème de Piatetski-Shapiro* (*Nombres premiers dans la suite* $[n^c]$), thèse de doctorat, Univ. de Paris-Sud, 1992.

[RS01] J. Rivat et P. Sargos, *Nombres premiers de la forme* $\lfloor n^c \rfloor$, Canad. J. Math. 53 (2001), 414–433.

[Shi74] I. Shiokawa, *g-adical analogues of some arithmetical functions*, Math. J. Okayama Univ. 17 (1974), 75–94.

[Tos97] T. Toshimitsu, *q-additive functions and algebraic independence*, Arch. Math. (Basel) 69 (1997), 112–119.

[Tos98] —, *Strongly q-additive functions and algebraic independence*, Tokyo J. Math. 21 (1998), 107–113.

[Uch99] Y. Uchida, *On p- and q-additive functions*, ibid. 22 (1999), 83–97.

[Vaa85] J. D. Vaaler, *Some extremal functions in Fourier analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 183–216.

Institut de Mathématiques de Luminy CNRS-UMR 6206
Université de la Méditerranée
163 avenue de Luminy, Case 907
13288 Marseille Cedex 9, France
E-mail: mauduit@iml.univ-mrs.fr
rivat@iml.univ-mrs.fr

Reçu le 6.9.2004
et révisé le 4.2.2005 (4843)