ACTA ARITHMETICA
103.1 (2002)

Dynamiques associées à une échelle de numération

par

Guy Barat (Paris), Tomasz Downarowicz (Wrocław)
et Pierre Liardet (Marseille)

1. Introduction. Dans cet article, nous poursuivons l'étude commencée dans [BDIL] sur la numération des entiers naturels au moyen d'une suite strictement croissante d'entiers $G = (G_n)_n$ telle que $G_0 = 1$. Une telle suite est appelée *échelle de numération*. Relativement à cette échelle, tout entier naturel n se décompose sous la forme

$$n = \sum_{k\ge 0} e_k(n) G_k \tag{1}$$

avec $e_k(n) \in \mathbb{N}$. Cette écriture est unique lorsque la condition

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{m} e_k(n) G_k < G_{m+1} \tag{2}$$

est vérifiée, ce que nous supposerons systématiquement par la suite. Dans ce cas, le mot infini $J_G(n) := e_0(n)e_1(n)e_2(n)\ldots$ est, par définition, le G-développement de n, $e_j(n)$ en est le j-ième chiffre ; il est nul pour tout j assez grand. En particulier $J_G(0) = 0^\omega$ (notation). Exemples et propriétés arithmétiques élémentaires se trouvent regroupés dans [Fra] ; les premiers éléments généraux associant à une échelle un système dynamique sont développés dans [GLT].

La propriété (2) conduit à introduire l'ensemble $\mathcal{K}_G$ des suites $e = e_0e_1e_2\ldots$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, appartenant au produit

$$\Pi(G) := \prod_{m=0}^{\infty} \{0, 1, \ldots, \lceil G_{m+1}/G_m \rceil - 1\},$$

et qui satisfont à (2). Dans la suite, un ensemble fini sera muni de la topologie discrète, de sorte que la topologie produit sur $\Pi(G)$ qui en résulte est

---

2000 *Mathematics Subject Classification*: 37B10, 37B40, 37A05, 37A35, 11K55, 05C05.

La recherche du second auteur est subventionnée par KBN grant 2 P03A 03915 (1998–2001), celle du dernier est cofinancée sur contrat par le Ministère de la Recherche et le CNRS.

compacte. L'ensemble $\mathcal{K}_G$ est alors une partie compacte de $\Pi(G)$, appelée G-compactifié de $\mathbb{N}$. Notons que $\mathbb{N}$ s'envoie dans $\mathcal{K}_G$ par l'injection canonique $n \mapsto J_G(n)$, l'entier n étant identifié au mot infini $J_G(n)$. De manière évidente, pour $x \in \mathcal{K}_G$ et $m \geq 0$, le mot infini $x_0 \dots x_m 0^\omega$ correspond par cette application au G-développement de l'entier

$$x[m+1] := x_0 G_0 + \ldots + x_m G_m.$$

Il en résulte que l'image canonique $J_G(\mathbb{N})$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{K}_G$ est partout dense. Inversement, soit $w = w_0 \dots w_m$ un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}$ ($w_i \in \mathbb{N}$ pour chaque indice i). Il est dit G-admissible si $w0^\omega \in \mathcal{K}_G$; il existe alors un unique entier n tel que $J_G(n) = w0^\omega$ et il sera pratique d'utiliser de manière équivalente les notations n, w, $J_G(n)$ et $w0^\omega$. À l'usage, la référence à l'échelle pourrait être omise lorsqu'aucune ambiguïté ne sera à craindre. Enfin, le cylindre dans $\mathcal{K}_G$ de base w sera noté $[w]$, *i.e.*

$$[w_0 \dots w_m] := \{x \in \mathcal{K}_G : x_0 \dots x_m = w_0 \dots w_m\}$$

et, par extension, $e_k : \mathcal{K}_G \to \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) désignera la fonction k-ième coordonnée, de sorte que $x = e_0(x)e_1(x)e_2(x)\dots$

L'odomètre associé à l'échelle G est déterminé par l'application $\tau : \mathcal{K}_G \to \mathcal{K}_G$ qui résulte du prolongement naturel de l'addition de 1 effectuée sur les entiers, mais traduite en termes symboliques sur le G-développement. L'article [BDIL] était consacré principalement aux propriétés combinatoires et topologiques de l'odomètre ; son étude métrique en est la suite logique et constitue la plus grande partie de ce travail. Par soucis de clarté pour le lecteur, les notions spécifiques telles que l'arbre des retenues d'une échelle et les échelles basses, introduites dans [BDIL], seront brièvement rappelées à la section 2. Celle-ci fixe quelques notations utiles, explicite brièvement la définition d'un G-odomètre et donne quelques propriétés élémentaires de τ, dont un critère de continuité très pratique portant sur les arbres des retenues. Trois questions étroitement liées entre elles s'imposent d'emblée et seront traitées : existe-t-il sur $\mathcal{K}_G$ une mesure de probabilité invariante par l'odomètre? Quelle est l'entropie du système dynamique qui en résulte? Une telle mesure est-elle unique?

Dans la section 3, nous introduisons la fonction poids faible ν_G, définie sur $\mathcal{K}_G$ par $\nu_G(x_0x_1x_3\dots) := \max\{k : x_0 \dots x_{k-1} = 0^k\}$, fonction qui joue aussi le rôle d'une valuation. La suite de cette section est consacrée à l'analyse d'un sous-shift symbolique (X_G, σ) appelé *valumètre*, déterminé à partir de la suite des poids faibles $A := (\nu_G(n))_n$. Ce système abrite un sous-shift — noté $X_G^{(0)}$ — qui, en un certain sens, est isomorphe à l'odomètre et un second, qui traduit le caractère irrégulier, voire pathologique, de l'échelle. Il se trouve que X_G hérite par A d'une structure de système codé, d'où résulte un nouvel éclairage sur les échelles de numération et une meilleure classification. Le passage de $(\mathcal{K}_G, \tau)$ à (X_G, σ) se fait naturellement par l'application A_G : $x \mapsto \nu_G(x)\nu_G(\tau x)\nu_G(\tau^2 x)\ldots$ mais, en général, $A_G(\mathcal{K}_G)$ n'est pas contenu dans X_G. La proposition 4 donne une condition nécessaire est suffisante pour avoir égalité. Celle-ci est vérifiée en particulier si τ est continue ; en ce cas, à des ensembles topologiquement négligeables près (maigres au sens de Baire), $A_G(\,\cdot\,)$ fournit un isomorphisme topologique entre l'odomètre et le valumètre. Les propriétés combinatoires de A et celles de l'application A_G sont développées dans la sous-section 3.2. La sous-section suivante caractérise le cas où A est récurrent (proposition 5) et celle d'après, celui où (X_G, σ) est minimal (théorème 3).

La section 4 se rapporte essentiellement aux aspects métriques de la dynamique du valumètre. Une question banale telle que celle de savoir si l'ensemble des entiers n vérifiant la relation $e_0(n) = c$ pour un chiffre donné c admet une densité pose en fait le problème de l'existence d'une mesure de probabilité sur $\mathcal{K}_G$ invariante sous l'action de τ. Dans le cas largement étudié des échelles de Cantor $Q = (Q_n)_n$, définies par la condition que Q_n divise Q_{n+1}, il est facile d'identifier l'odomètre avec l'addition de 1 dans le groupe des entiers Q-adiques ; celui-ci est donc uniquement ergodique, de mesure invariante la mesure de Haar. C'est également le cas si $(G_n)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire finie issue d'un β-shift, comme il est prouvé dans [GLT].

La sous-section 4.1 introduit une notion de convergence molle, avatar de la convergence faible, qui permet notamment, dans la sous-section suivante, d'identifier la situation où $X_G^{(0)}$ admet une mesure invariante (théorème 5). La sous-section 4.3 donne une condition suffisante sur l'échelle G pour que $(X_G^{(0)}, \sigma)$ soit uniquement ergodique (théorème 7). L'étude de l'entropie du valumètre termine la section 4.

La dernière section regroupe les conséquences de l'étude précédente sur l'odomètre. Par exemple, celui-ci est uniquement ergodique pour toute échelle à croissance rapide, plus précisément telle que $\liminf_n G_{n+1}/G_n > 1$. Il est également prouvé que, pour toute mesure invariante sur l'odomètre, le système correspondant est d'entropie nulle, répondant ainsi à une question posée par J.-P. Thouvenot.

La structure dynamique de l'odomètre, en dehors des cas classiques des échelles de Cantor ou d'Ostrowski, et même dans le cas d'une échelle à récurrence finie associée à un β-shift, est loin d'être élucidée. Dans cette direction, on connaît des conditions suffisantes assez simples pour que l'odomètre soit métriquement isomorphe à une translation ergodique sur un groupe compact ([So], [GLT]). Cette situation n'est pas la règle, un odomètre pouvant être sans composante spectrale discrète. Ainsi, les échelles définies par

$$G_{n+1} = qG_n + 1, \qquad n \geq 0,$$

pour tout entier $q \geq 2$ fixé, étudiées dans [Dou], et qui interviennent en combinatoire (voir [ABS] et [CW]), fournissent des exemples simples d'odomètres uniquement ergodiques, qui sont faiblement mélangeants. En outre, ces odomètres ne sont pas continus.

2. L'odomètre

2.1. *Notations et conventions pratiques.* Un ensemble non vide X est appelé *alphabet*. Un *mot* sur X est une suite finie ou infinie $x_0x_1\ldots$ d'éléments de X. On note X_* l'ensemble des mots finis sur X ; $\wedge$ est le mot vide et, pour $x = x_0 \ldots x_{l-1} \in X_*$, la longueur de x est par définition $|x| := l$. La notation x^n (ou $x^{(n)}$) désigne la concaténation de n copies de x (c'est donc un mot de longueur $n|x|$) ; par convention, $x^0 := \wedge$ est de longueur 0. Plus généralement, si $(x, y) \in X_*^2$, $x \cdot y$ (ou xy) est la concaténation des mots x et y. De même, x^ω est le mot infini obtenu par concaténation d'une infinité de copies de x. Pour $m < n$, on pose $x]m, n] = x_{m+1} \ldots x_n$ (à ne pas confondre avec la notation $x[m + 1]$). Si X est un espace topologique, l'ensemble X^ω des suites à valeurs dans X est muni de la topologie produit usuelle et $\sigma : X^\omega \to X^\omega$ désigne l'opérateur de *décalage* (ou *shift*) défini par

$$\sigma(x_0x_1x_2\ldots) := x_1x_2x_3\ldots$$

Considérons un élément noté ∞, distinct de ceux de $\mathbb{N}$ et formons l'ensemble $\Lambda := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie qui en fait le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{N}$, noté Λ_c. L'ordre naturel de $\mathbb{N}$ est prolongé à Λ de sorte que ∞ en soit le plus grand élément. Dans la suite, X est principalement l'espace topologique discret $\mathbb{N}$ (avec l'addition usuelle) ou l'espace compact Λ_c. L'ensemble $\Omega := (\Lambda_c)^\omega$ est muni de la topologie produit ; celle-ci est compacte et métrisable. Pour toute lettre $a \in \Lambda$, on pose

$$U_a := \{x \in \Lambda^\omega : x_0 = a\} \quad \text{et} \quad U_{\bar{a}} := \{x \in \Lambda^\omega : x_0 = \infty \text{ ou } x_0 \geq a\}.$$

Plus généralement, le cylindre de base w est défini par

$$U_w := \bigcap_{0 \leq i < l} \sigma^{-i} U_{w_i} \tag{3}$$

pour $w = w_0 \ldots w_{l-1}$, avec $w_i = a_i$ ou $w_i = \overline{a}_i$, $a_i \in \Lambda$.

2.2. *Successeur et odomètre.* Pour calculer le développement de $n + 1$ dans l'échelle G à partir de $J_G(n) = e_0e_1e_2\ldots$, plusieurs cas doivent être envisagés. Ou bien $(e_0 + 1)e_1e_2e_3\ldots$ est un G-développement, et c'est celui de $n + 1$, ou bien il existe un entier l tel que

$$\sum_{k=0}^{l} e_k G_k = G_{l+1} - 1$$

et l'addition de 1 donne lieu à un calcul de retenue. On introduit alors, pour tout élément $x = x_0x_1x_2\dots$ de $\mathcal{K}_G$, l'ensemble $\mathcal{D}(x)$ des entiers $d \geq 0$ (appelés *sauts des retenues*) tels que

$$J(G_{d+1} - 1) = x_0 \dots x_d.$$

En particulier $\mathcal{D}(0^\omega) = \emptyset$. L'addition de 1 est alors prolongée en l'application $\tau : \mathcal{K}_G \to \mathcal{K}_G$ définie de la manière suivante :

- si $\mathcal{D}(x)$ est fini, on pose $l := \max \mathcal{D}(x)$ lorsque $\mathcal{D}(x)$ n'est pas vide et $l = -1$ sinon et, par définition,

$$\tau(x) := 0^{(l+1)}(x_{l+1} + 1)x_{l+2}x_{l+3}x_{l+4}\dots; \tag{4}$$

- si $\mathcal{D}(x)$ est infini, on pose $\tau(x) := 0^\omega$.

Cette construction se trouve dans [GLT]. Notons que

$$\tau(x) := \lim_n J(x[n] + 1),$$

ce qui fournit une autre manière, plus concise, de définir τ. L'ensemble $\tau^{-1}(0^\omega)$ joue un rôle important dans l'étude de τ. Rappelons [GLT, BDIL] qu'il peut être vide, fini, dénombrable ou infini non dénombrable ; il peut être dense, mais, dans tous les cas, il est d'intérieur vide. Enfin, $\tau(\mathcal{K}_G) = \mathcal{K}_G$ si et seulement si $\tau^{-1}(0^\omega)$ n'est pas vide et τ est injectif sur $\mathcal{K}_G \setminus \tau^{-1}(0^\omega)$.

Il est intéressant de noter que la définition de $(\mathcal{K}_G, \tau)$ coïncide avec celle de *système adique* introduite par A. Vershik [Ve] lorsque la propriété (2) est markovienne, c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite $M = (M^{(n)})_n$ de matrices d'incidence $(M^{(n)})_{ij}$ $(0 \leq i < G_{n+1}/G_n$ et $0 \leq j < G_{n+2}/G_{n+1})$, telle que $\mathcal{K}_G$ soit exactement le *compactum* de Bratteli $K(M)$ défini par

$$K(M) := \{x \in \Pi(G) : \forall n \in \mathbb{N},\ M^{(n)}_{x_nx_{n+1}} = 1\}. \tag{5}$$

Une famille d'exemples remarquables, étudiée dans [SV], est donnée par les échelles d'Ostrowski : pour $\alpha \in [0, 1[$ irrationnel, de développement en fraction continuée $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ dont $(p_n/q_n)_n$ est la suite des réduites, définissons l'échelle de numération $G_n := q_n$ (ou $G_n = q_{n+1}$ lorsque $a_1 = 1$, cas que nous écartons ici pour simplifier). Alors, si $M^{(n)}$ est la matrice à $a_{n+1} + 1$ lignes et $a_{n+2} + 1$ colonnes avec $M^{(n)}_{ij} = 1$ si, et seulement si, $j \leq a_{n+2}$ ou $j = a_{n+2} + 1$ et $i = 0$, on vérifie que $K(M) = \mathcal{K}_G$. Par ailleurs, on retrouve les échelles de Cantor lorsque tous les coefficients des $M^{(n)}$ sont égaux à 1.

2.3. *Arborescence et échelle basse.* Introduisons l'ensemble $\mathbb{A} = \mathbb{N} \cup \{-1\}$. La donnée d'une échelle G permet de définir l'application $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ suivante :

$$T(n) := \begin{cases} -1 & \text{si } n = -1 \text{ ou } \mathcal{D}(G_{n+1} - 1) = \{n\}, \\ \max(\mathcal{D}(G_{n+1} - 1) \setminus \{n\}) & \text{si } \mathcal{D}(G_{n+1} - 1) \setminus \{n\} \neq \emptyset, \end{cases}$$

de sorte que $\mathcal{D}(G_{n+1}-1)=\{n,T(n),\dots,T^{h-1}(n)\}$, où h est le plus petit entier k tel que $T^k(n)=-1$. L'arbre des retenues $\mathcal{A}_G$ de G introduit dans [BDIL] peut alors être défini à partir de T de la manière suivante : les éléments de $\mathbb{A}$ en forment les nœuds et, entre deux nœuds n et m avec $m<n$, il existe une branche si, et seulement si, $T(n)=m$. L'application T est appelée *descente* de l'arbre. La continuité de τ s'exprime alors facilement dans le langage des graphes :

THÉORÈME 1 ([BDIL, thm. 5]). *Pour que l'odomètre $(\mathcal{K}_G,\tau)$ soit continu, il faut et il suffit que le nombre de branches issues de chaque nœud soit fini.*

Ainsi, les odomètres d'Ostrowski sont continus. D'autre part, si $\mathrm{Disc}(\tau)$ désigne l'ensemble des points de discontinuité de τ, on a la description précise suivante :

THÉORÈME 2 ([BDIL, prop. 8]). $\mathrm{Disc}(\tau)=\omega(G)\setminus\tau^{-1}(0^\omega)$ *où $\omega(G)$ est l'ensemble des valeurs limites de la suite $n\mapsto J(G_n-1)$.*

Les éléments x de $\tau^{-1}(0^\omega)$ se lisent directement sur l'arbre des retenues : il correspondent aux branches infinies, puisque $\mathcal{D}(x)$ est infini. Il existe une infinité d'échelles ayant le même arbre des retenues, mais une seule est de croissance minimale ; elle est alors dite *échelle basse*, pour la distinguer des autres. Elle se caractérise par la propriété suivante :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad G_{n+1}=G_n+G_{T(n)+1}. \tag{6}$$

Pour ces échelles, les points de discontinuité de τ correspondent exactement aux entiers $G_{n+1}-1$ tels que le nombre de branches issues du nœud n soit infini (cf. [BDIL, thm. 4 et prop. 9]).

3. Le valumètre. Nous commençons par quelques préliminaires sur le sous-shift associé à une suite à valeurs dans un espace métrisable compact, avant d'examiner le cas particulier où ce compact est Λ_c, puis celui où la suite est celle des poids faibles dans une échelle donnée.

3.1. *Sous-shift associé à une suite.* Soit E un espace métrisable compact, soit E^ω l'espace des mots infinis muni de la topologie produit usuelle et soit (E^ω,σ) le shift (plein) sur E^ω, où σ est l'opérateur de décalage. Un compact K de E^ω tel que $\sigma(K)\subset K$ détermine un système dynamique topologique $\mathcal{K}=(K,\sigma)$ par restriction de σ à K, restriction encore notée σ. Ce système est appelé *sous-shift* sur E. L'ensemble $\mathcal{I}(K)$ des mesures boréliennes de probabilité sur K, invariantes par σ, n'est pas vide ; il sera muni de la topologie faible. C'est alors un simplexe au sens de Choquet dont les points extrémaux sont les mesures ergodiques pour σ. Par définition, un mot (ou bloc) w de longueur l sur l'alphabet E (fini ou pas) est dit dans $\mathcal{K}$ s'il existe $y\in K$ et $m\geq 0$ tel que $w=y_m\dots y_{m+l-1}$; le mot w est dit *facteur* de y. Notons $\widetilde{E}^\omega$ l'espace des suites bilatérales $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (ou mots bi-infinis $\dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\dots$) et $\widetilde{\sigma}$ le décalage vers la gauche qui relève σ sur $\widetilde{E}^\omega$ suivant la projection canonique $\pi : \widetilde{E}^\omega \to E^\omega$ définie par $\pi(x) = x_0x_1x_2\dots$ Notons $\widetilde{K}$ l'ensemble des $x \in \widetilde{E}^\omega$ tels que $\pi(\widetilde{\sigma}^k(x)) \in K$ pour tout entier $k \geq 0$. Alors, $\widetilde{K}$ est aussi l'ensemble de tous les mots bi-infinis de $\widetilde{E}^\omega$ dont tous les facteurs sont des mots de K. On construit ainsi le système dynamique $\widetilde{\mathcal{K}} := (\widetilde{K}, \widetilde{\sigma})$, appelé *extension naturelle* de $\mathcal{K}$. Une situation particulièrement intéressante est celle où $\mathcal{K}$ est un flot, c'est-à-dire lorsque $\sigma(K) = K$, ce qui équivaut à $\pi(\widetilde{K}) = K$. Dans le cas général, $\pi(\widetilde{K}) = \bigcap_{n\geq 0} \sigma^n(K) \subset K$, l'inclusion étant éventuellement stricte. Pour une suite $\zeta \in E^\omega$ quelconque, son orbite sous l'action de σ est l'ensemble $\mathcal{O}(\zeta) = \{\sigma^n(\zeta) : n \geq 0\}$. Soit $X(\zeta) := \overline{\mathcal{O}(\zeta)}$ l'orbite fermée de ζ ; classiquement, $\sigma X(\zeta) \subset X(\zeta)$, ce qui détermine le sous-shift $\mathcal{X}(\zeta) := (X(\zeta), \sigma)$. Par définition, ζ est *récurrent* (pour le shift) si et seulement si $\mathcal{X}(\zeta)$ est un flot. Dans ces conditions, $\sigma(\zeta)$ est aussi récurrent et $X(\sigma(\zeta)) = X(\zeta)$.

Nous supposons désormais $E = \Lambda_c$. Tout sous-ensemble Y de Λ^ω ou de $\widetilde{\Lambda}^\omega$ peut-être partagé en 4 parties disjointes $Y^{(i)}$: l'ensemble $Y^{(0)}$ formé des points de Y où n'apparaît pas la lettre ∞, l'ensemble $Y^{(1)}$ formé des y où la lettre ∞ n'apparaît qu'un nombre fini de fois, l'ensemble $Y^{(2)}$ des y où la lettre ∞ apparaît une infinité de fois mais tels que les occurrences successives de ∞ ne soient pas à lacunes bornées, et finalement $Y^{(3)}$ où les occurrences successives de ∞ sont à lacunes bornées.

Considérons maintenant un mot infini $\zeta \in \Omega$ $(= \Lambda_c^\omega)$ à lettres dans $\mathbb{N}$ et posons $X := X(\zeta)$. Il est clair que $X^{(0)}$ n'est jamais vide, que $\sigma X^{(i)} \subset X^{(i)}$ pour $i = 0, 2, 3$ et que $X^{(3)}$ est l'union des parties fermées $X_m^{(3)}$ $(m \geq 0)$ formées des x tels que pour tout $n \geq 0$, la lettre ∞ apparaît au moins une fois dans $x_n \dots x_{n+m}$. Soit le cylindre $U_\infty := \{x \in X : x_0 = \infty\}$; il vient

$$X \setminus X^{(0)} = \bigcup_{n\geq 0} \sigma^{-n}(U_\infty), \tag{7}$$

de sorte que si μ est une mesure de probabilité sur X, invariante par σ, alors

$$\mu(X^{(0)}) = 1 \iff \mu(U_\infty) = 0. \tag{8}$$

3.2. *Poids faibles et valumètre.* Revenons à une échelle de numération G. À tout $x = x_0x_1x_2\dots \in \mathcal{K}_G$, associons le plus petit entier n tel que $x_n \neq 0$, appelé *valuation* (ou *poids faible*) de x et noté $\nu_G(x)$. Par convention, $\nu_G(0^\omega) = \infty$. En particulier, chaque entier $n \geq 0$ étant identifié au mot $J_G(n)$, on a

$$\begin{cases} \nu_G(1) = 0, \quad \nu_G(G_m) = m\,; \\ \forall n, \quad G_m < n < G_{m+1} \Rightarrow \nu_G(n) = \nu_G(n - G_m). \end{cases} \tag{9}$$

Le mot infini $A := \nu_G(1)\nu_G(2)\dots$ (vu dans Ω) jouera un rôle essentiel dans la suite. On notera dorénavant

$$A = a_1a_2\dots,\ \ i.e.\ a_n = \nu_G(n) \quad \text{et} \quad A_m := a_1\dots a_{G_m-1} \quad (A_0 = \wedge).$$

Le mot infini A est déterminé par les propriétés (9). Celles-ci expriment que $A_{m+1} = A_m m \dots A_m m A'_m$, où A'_m est un préfixe de A_m. La lettre $m+1$ apparaît pour la première fois dans A à la position G_{m+1}, ce qui permet d'interpréter la fonction descente T de la manière suivante : $T(m)+1$ est l'entier qui termine le préfixe de longueur G_{m+1} du mot infini périodique $(A_m m)^\omega$.

Définition. Le système dynamique topologique $(X(A), \sigma)$ est appelé *valumètre de l'échelle* G ; il sera noté plus simplement $\mathcal{X}_G$.

L'échelle G étant toujours fixée, plus généralement, pour $x \in \mathcal{K}_G$, $A_G(x)$ désignera le mot infini sur Λ donné par

$$A_G(x) := \nu_G(x)\nu_G(\tau x)\nu_G(\tau^2 x)\dots,$$

de sorte que $A_G(x)_n = \nu_G(\tau^n x)$. Nous avons ainsi défini une application $A_G : \mathcal{K}_G \to \Lambda^\omega$; en particulier $A = A_G(1)$. Notons que

$$A_G(\tau x) = \sigma A_G(x)$$

et que ν_G et $\mathcal{D}$ sont liées par la relation

$$\nu_G(\tau x) = \max \mathcal{D}(x) + 1 \tag{10}$$

(rappelons la convention $\max \mathcal{D}(x) = -1$ si $\mathcal{D}(x)$ est vide). Introduisons encore un ensemble important pour la suite :

$$\mathcal{K}_G^\infty := \mathcal{K}_G \setminus \bigcup_{n\ge 0} \tau^{-n}(0).$$

Pour tout $x \in \mathcal{K}_G$ la suite $n \mapsto A_G(x)_n$ n'est pas bornée et plus précisément, on a la propriété locale suivante, très utile :

Lemme 1. *Soit un entier $m > 0$ et $x \in \mathcal{K}_G$. Si $\nu_G(\tau^k x) < m$ pour $k = 1,\dots,s$, alors pour tout $n = 0,\dots,s$: $\tau^n x$ et $J_G(x[m]+n)$ ont les mêmes préfixes de longueur m et $e_k(x) = e_k(\tau^n x)$ pour tout $k \ge m$. En particulier, $s \le G_m - x[m] - 1$ et les s premières lettres de $\sigma A_G(x)$ et $\sigma A_G(x[m])$ sont identiques.*

Démonstration. Si $x = x_0x_1x_2\dots$ et $\nu_G(\tau x) = \nu$, par (10) et la définition de τ, on a $\tau(x) = 0^\nu(x_\nu+1)x_{\nu+1}x_{\nu+2}\dots$ d'où le lemme en itérant τ (s fois) et ses conséquences particulières. ∎

La proposition suivante rend compte de propriétés combinatoires de A, des éléments de X_G et de $A_G(\mathcal{K}_G)$ résultant des définitions et des propriétés de sauts des retenues dans une échelle.

Proposition 1. (i) *Toutes les lettres de* A_m $(m > 0)$ *sont strictement inférieures à* m *et tout entier* $n = 0, 1, \ldots, m-1$ *apparaît dans* A_m. *Si* $k = e_0(k)G_0 + \ldots + e_{s_k}(k)G_{s_k}$ *est le G-développement de* k, *alors le mot* $a_1 \ldots a_k$ *se factorise sous la forme*

$$(A_{s_k} s_k)^{e_{s_k}(k)} (A_{s_k-1}(s_k-1))^{e_{s_k-1}(k)} \ldots (A_0 0)^{e_0(k)}.$$

De plus, pour $x \in \mathcal{K}_G$,

$$\sigma^{x[n]} A_G(0^n x_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots) = A_G(x).$$

Soit $y = y_0 y_1 y_2 \ldots \in X_G$.

(ii) *Supposons* $y_k = m > 0$, $m \neq \infty$. *Si* $k \geq G_m - 1$, *alors* $y]k - G_m, k-1] = A_m$. *Si* $k \leq G_m - 1$, *alors* $y_0 y_1 \ldots y_{k-1}$ *est le suffixe* $A_m^k := A]G_m - k - 2, G_m - 2]$ *de* A_m *de longueur* k. *En particulier, si* $a_k = m$, *on a* $k \geq G_m$ *et* $A]k - G_m, k-1] = A_m$. *Enfin, s'il existe* $l > 0$ *tel que* $y_k = y_{k+l} = m$ *et* $y_{k+j} \neq m$ *pour tout* $j = 1, \ldots, l-1$, *alors* $l \geq G_m$ *et* $y]k+l-G_m, k+l-1] = A_m$.

(iii) *Si* $y_k = \infty$, *alors il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels* $(m_j)_j$ *telle que* $y_0 y_1 \ldots y_{k-1} = \lim_j A_{m_j}^k$. *Si, de plus,* $y_{k+1} y_{k+2} \ldots \in \mathbb{N}^\omega$, *alors* $y_{k+1} y_{k+2} \ldots = A$.

(iv) *Tout élément* y *de* $X_G^{(0)}$ *distinct de* A *possède exactement un antécédent par* σ, *lequel est dans* $X_G^{(0)}$; A *possède au plus un antécédent, qui ne peut être que* ∞A.

(v) $X_G \neq X_G^{(0)}$.

Soit $y = y_0 y_1 y_2 \ldots$ *un élément de* X_G *ou de* $A_G(\mathcal{K}_G)$.

(vi) *Si* $y_j = y_k = m \neq \infty$, *alors* $j = k$ *ou* $|j - k| \geq G_m$. *En revanche, tout mot facteur de* y *de longueur supérieure ou égale à* G_m *contient une lettre* $m' \geq m$.

(vii) *Soit un entier* $m \geq 0$ *et* $y_j = m' \geq m \geq 0$ *(y compris* $m' = \infty$*). Alors il existe* k, $0 \leq k \leq G_m - 1$, *et* $m'' \geq m$ *tels que* $y_j \ldots y_{j+k+1} = m' a_1 \ldots a_k m''$ $(= m'm''$ *si* $k = 0)$.

(viii) *Si* mwm', *avec* $w = w_1 \ldots w_d$ *dans* $\mathbb{N}^d$, *est un facteur de* y *tel que*

$$\max\{w_1, \ldots, w_d\} < \min\{m, m'\},$$

alors $w = a_1 \ldots a_d$. *Si, de plus,* $m = m' = \infty$, *alors* $J(d) \in \omega(G)$.

Démonstration. (i) La première partie est une conséquence directe des définitions et de $\nu_G(G_m) = m$. La factorisation de $a_1 \ldots a_k$ s'obtient par récurrence sur s_k. Celle de

$$\sigma^{x[n]} A_G(0^n x_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots)$$

vient de ce que, pour $0 \leq k \leq x[n]$, le calcul de $\tau^k(0^n x_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots)$ n'affecte pas les chiffres x_j, $j \geq n$.

(ii) Par définition de la topologie produit, il suffit de traiter le cas particulier de A (pour lequel, d'après (i), $k \geq G_m$). Soit donc un entier k tel que $\nu_G(k) = m$. On peut écrire $J(k) = 0^m e_m e_{m+1} \ldots e_{m+s} 0^\omega$ avec $e_m > 0$. Alors, pour tout entier j tel que $0 < j < G_m$,

$$J(k - G_m + j) = e_0(j) \ldots e_{m-1}(j)\big(e_m - 1\big)e_{m+1} \ldots e_{m+s}0^\omega$$

avec $e_0(j) \ldots e_{m-1}(j) \neq 0^m$, d'où $a_{k-G_m+j} = a_j$, soit

$$a_{k-G_m+1}a_{k-G_m+2} \ldots a_{k-1} = A_m.$$

(iii) La première partie de (iii) résulte directement de (ii). Supposons en outre que, pour tout $l > k$, $y_l \neq \infty$. Quitte à considérer $\sigma^k y$, on peut supposer que $k = 0$. N'étant pas élément de $X_G^{(0)}$, y est un point d'accumulation de X_G, soit $y = \lim_j a_{n_j}a_{n_j+1}a_{n_j+2} \ldots$ avec

$$n_j = e_{m_j}(n_j)G_{m_j} + e_{m_j+1}(n_j)G_{m_j+1} + \ldots,$$

la suite $(m_j)_j$ tendant vers l'infini avec j. Soit $m > 0$. Les y_l, $0 < l \leq m$, sont isolés dans Λ ; alors, pour j suffisamment grand, on a $a_{n_j+1}a_{n_j+2} \ldots a_{n_j+m} = y_1y_2 \ldots y_m$ et $\max_{1 \leq l \leq m} y_l < m_j$; les m premières additions de 1 à n_j n'entraînent donc pas de retenue au-delà de $m_j - 1$, d'où $y_1y_2 \ldots y_m = A[1, m]$.

(vi) Supposons $y_j = y_k = m$ et $j < k$. Si $y \in X_G$ alors par (ii), $k - j \geq G_m$. Si maintenant $y = A_G(x)$ ($x \in \mathcal{K}_G$), notons l le plus grand indice tel que $j \leq l < k$ et $m \leq y_l$. Par le lemme 1 appliqué à $\tau^l x$, $G_m \geq k - l$ (en fait, c'est une égalité) et donc $G_m \geq k - j$ comme attendu.

Montrons maintenant qu'un mot w de y, de longueur plus grande ou égale à G_m, contient une lettre $m' \geq m$ (éventuellement $m' = \infty$). Si $y = A$, notons que, comme ci-dessus, pour tout entier l, si le mot $a_{l+1} \ldots a_{l+s}$ ne contient aucune lettre $\geq m$, le lemme 1 implique $s < G_m$. D'où le résultat pour A, lequel passe sans difficulté à tous les $y \in X_G$. Reste le cas de $y = A_G(x)$, qui résulte également d'une simple application du lemme 1.

(iv) Soit $y \in X_G^{(0)}$ et $y \neq A$. Si $y \in \mathcal{O}(A)$, y admet au moins un antécédent. Si $y \notin \mathcal{O}(A)$, il existe une suite strictement croissante d'entiers non nuls $(n_j)_j$ telle que $y = \lim_j \sigma^{n_j} A$. La suite $(\sigma^{n_j-1}A)_j$ possède une valeur d'adhérence z dans X_G qui vérifie $\sigma(z) = y$. Donc $z \in X_G^{(0)}$ ou $z \in X_G^{(1)}$. Mais, dans ce dernier cas, $z = \infty A$ d'après la propriété (iii), d'où $y = A$, ce qui est exclu. Démontrons maintenant l'unicité : soit $z \in X_G^{(0)}$ tel que $\sigma(z) = y$. D'après (vi), il existe une infinité de couples d'entiers $(m, k(m))$, ne dépendant que de y, tels que $y_{k(m)} = m \geq 1$ et $k(m) \leq G_m - 1$. D'après (ii), l'hypothèse $y \neq A$ assure que l'on peut supposer $k(m) \leq G_m - 2$. Alors, à nouveau en raison de (ii), $z_0z_1 \ldots z_{k(m)}$ est le suffixe A_m^{k+1} de A_m, ce qui détermine z. Soit enfin $y \in X_G$, à supposer qu'il existe, tel que $\sigma(y) = A$. S'il existait k tel que $y = \sigma^k(A)$, alors $A = \sigma^{k+1}(A)$ et A serait périodique, ce qui contredirait l'assertion (i). Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ telle que $y = \lim \sigma^{n_k}(A)$. Soit alors un entier $m \geq 1$. Pour k suffisamment grand, $\sigma^{n_k}(A)_j = y_j = a_j$ pour tout j tel que $1 \leq j < G_m$. Alors, d'après (i), le mot $y_1 y_2 \ldots y_{G_m - 1}$ ne contient aucune lettre supérieure ou égale à m, d'où, d'après (vi), $y_0 \geq m$. Cela valant pour tout m, il s'ensuit $y_0 = \infty$.

(v) Pour tout entier $n \geq 1$, la lettre n est préfixe de $\sigma^{G_n - 1}(A)$. Par compacité, on peut extraire dans X_G une sous-suite convergente de $(\sigma^{G_n - 1}(A))_n$. Sa limite aura ∞ pour préfixe.

(vii) Soit $y = A_G(x)$ avec $y_j = m' \geq m \geq 0$. Soit k le plus petit entier t tel que $y_{j+t+1} \geq m$. Alors, $k < G_m$ et $y_j y_{j+1} \ldots y_{j+k+1} = m' a_1 \ldots a_k m''$ d'après le lemme 1, avec $m'' \geq m$. Si $y = \lim \sigma^{n_i} A$ avec $(n_i)_i$ strictement croissante, à tout i correspond, d'après ce qui précède, des entiers $k_i < G_m$, $m'_i \geq m$ et $m''_i \geq m$ tels que $\sigma^{n_i} A = m' a_1 \ldots a_{k_i} m''_i$. Comme $(\sigma^{n_i} A)_i$ converge et que la suite $(k_i)_i$ est bornée par $G_m - 1$, celle-ci est ultimement constante, d'où le résultat.

(viii) Nous n'examinons que le cas où un mot de X_G contient un facteur $\infty w \infty$, avec $w = w_1 \ldots w_d \in \mathbb{N}_*$; les autres cas sont laissés au lecteur. Soit $M > \max\{w_1, \ldots, w_d\}$. D'après (i), il existe un entier m tel que $A_G(m) = a_m w a_{m+d+1}$, avec $a_{m+d+1} = b > a_m = a > M$, de sorte que $G_b - 1 = d + e_a(m) G_a + \ldots + e_{b-1}(m) G_{b-1}$ et $\nu_G(m+j) = a_j$ pour $1 \leq j \leq d$. Alors, $w = a_1 \ldots a_d$ et, M pouvant être choisi arbitrairement grand, $J(d) \in \omega(G)$. ■

Pour deux entiers m', m tels que $0 \leq m' < m$, notons $N(m', m)$ le plus grand des entiers $n < G_m$ tels que $a_n = m'$ et posons $P(m', m) = G_m - N(m', m)$. D'après proposition 1(i), $N(m', m)$ est bien défini et, de la propriété (ii) de cette même proposition, on déduit :

LEMME 2. 1. *Pour tout j tel que $\nu_G(j) = m$ on a $\nu_G(j - P(m', m)) = m'$ et $\nu_G(k) \neq m'$ si $j - P(m', m) < k \leq j$.*

2. *Les éléments de X_G comptent au plus un symbole infini si, et seulement si,*

$$\lim_{m' \to \infty} \min_{m,\, m > m'} P(m', m) = +\infty.$$

Cette notation sera utilisée principalement dans la sous-section 3.4.

Après les caractéristiques combinatoires des mots de X_G et de $A_G(\mathcal{K}_G)$, la proposition qui suit donne quelques propriétés de l'application A_G utiles pour comparer odomètre et valumètre. Nous aurons besoin d'une version plus précise du lemme 1 sous la forme suivante.

LEMME 3. *Pour tout $x \in \mathcal{K}_G$ et tout entier $n \geq 0$, définissons*

$$\mu_n := \max_{0 \leq l \leq n} \nu_G(\tau^l x).$$

Supposons $\mu_n < \infty$ *et posons* $z_n := x_0 + x_1G_1 + \ldots + x_{\mu_n}G_{\mu_n}$. *Alors*, z_n *n'est pas nul*,

$$\tau^l x = e_0(z_n + l)\ldots e_{\mu_n}(z_n + l)e_{\mu_n+1}(x)e_{\mu_n+2}(x)e_{\mu_n+3}(x)\ldots \tag{11}$$

pour $0 \le l \le n$ *et*

$$\nu_G(x)\ldots\nu_G(\tau^n x) = \nu_G(z_n)\ldots\nu_G(z_n + n). \tag{12}$$

En outre, *si* $\lambda_n := \min\{l : \nu_G(\tau^l(x)) = \mu_n\}$, *alors* $\lambda_n < G_{\mu_n}$ *et*

$$x_0 \ldots x_{\mu_n-1}0^\omega = \begin{cases} J(G_{\mu_n} - \lambda_n) & si\ \lambda_n > 1, \\ 0^\omega & si\ \lambda_n = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Démonstration. Il est clair que z_n n'est pas nul et les formules (11) et (12) résultent du lemme 1. En remplaçant n par λ_n, ce qui ne change pas la valeur de μ_n, on peut écrire

$$\tau^{\lambda_n} x = 0^{(\mu_n)}(e_{\mu_n}(x) + \varepsilon_n)e_{\mu_n+1}(x)e_{\mu_n+2}(x)e_{\mu_n+3}(x)\ldots$$

avec $x_0 + \ldots + x_{\mu_n-1}G_{\mu_n-1} + \lambda_n = \varepsilon_n G_{\mu_n}$ et $\varepsilon_n = 0$ si $\lambda_n = 0$, $\varepsilon_n = 1$ sinon ; d'où (13). ∎

PROPOSITION 2. (i) *Si* $x \in \mathcal{K}_G$ *et* $\nu_G(x) = m$, *il existe un unique* $y \in \mathcal{K}_G$ *tel que* $\tau^{G_m} y = x$. *Alors*, $A_G(\tau y) = A_m A_G(x)$.

(ii) $\mathrm{Disc}(A_G) = \bigcup_{n\ge1} \mathrm{Disc}(\tau^n)$. *En particulier*, A_G *est continue si et seulement si* τ *est continue.*

(iii) *L'application* A_G *est borélienne* ; *elle définit*, *par restriction*, *une bijection de* $\mathcal{K}_G^\infty$ *sur* $X_G^{(0)}$ *d'application réciproque* $\phi : X_G^{(0)} \to \mathcal{K}_G^\infty$ *continue.*

(iv) $X_G^{(1)} = \{y \in X_G : \exists\, k \ge 1, \sigma^k(y) = A\}$. *En particulier*, $X_G^{(1)}$ *est au plus dénombrable.*

Démonstration. (i) Soit $x \in \mathcal{K}_G$ tel que $\nu_G(x) = m$, et posons

$$y = 0^m(e_m(x) - 1)e_{m+1}(x)e_{m+2}(x)\ldots$$

On a bien $y \in \mathcal{K}_G$ et $\tau^{G_m} y = x$; l'unicité de y provient du caractère injectif de la restriction de τ à $\mathcal{K}_G \backslash \tau^{-1}(0^\omega)$. On a enfin $A_G(\tau y) = A_m A_G(x)$ d'après la proposition 1(vii) en prenant $j = 0$, $m' = \nu_G(y) \ge m$ et en notant qu'alors, $k = G_m - 1$ et $m'' = m$.

(ii) Soit x un point de discontinuité de τ, c'est-à-dire $x \in \omega(G)\backslash\tau^{-1}(0^\omega)$. Il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ telle que $x = \lim_k(G_{n_k} - 1)$. Alors, $\nu_G(\tau(G_{n_k} - 1)) = n_k$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini. Comme $\tau x \ne 0^\omega$, on a $\nu_G(\tau x) \ne \infty$. Ainsi, ν_G étant continue, $\nu_G \circ \tau$ est continue si et seulement si τ l'est, d'où le résultat par itération.

(iii) L'application $A_G(\cdot)$ est borélienne puisque $\nu_G(\cdot)$ et τ le sont. Avec les notations du lemme 3, si $x \in \mathcal{K}_G^\infty$, la suite $(\mu_n)_n$ associée à x est à valeurs finies et (12) montre qu'elle tend vers l'infini. Il en est de même de $(\lambda_n)_n$, et (13) montre alors que la restriction de A_G à $\mathcal{K}_G^\infty$ est injective.

Démontrons l'inclusion $A_G(\mathcal{K}_G^\infty) \subset X_G^{(0)}$. Tout d'abord, $x \in \mathcal{K}_G^\infty$ si, et seulement si, la lettre ∞ n'apparaît pas dans $A_G(x)$; il suffit donc de montrer que $A_G(x) \in X_G$ si $x \in \mathcal{K}_G^\infty$, ce qui est clair en passant à la limite dans (12). Soit maintenant $y = my_1y_2\dots$ dans $X_G^{(0)}$. On détermine facilement deux suites d'entiers strictement croissantes $(k_j)_j$ et $(n_j)_j$ $(k_0 = n_0 = 0)$ telles que $y_{n_j} = m + k_j$ et $y_l < m + k_j$ pour tout l, $0 \le l < n_j$. D'après la proposition 1(ii), $my_1\dots y_{n_j-1}$ est suffixe de A_{m+k_j}, donc, en posant $x^{(j)} := J(G_{m+k_j} - n_j)$, on a $A_G(x^{(j)}) \in U_{my_1\dots y_{n_j}}$. A fortiori, $A_G(x^{(l)}) \in U_{my_1\dots y_{n_j}}$ pour tout $l \ge j$. D'autre part, si x est un élément de $\mathcal{K}_G$ tel que $A_G(x) \in U_{my_1\dots y_{n_j}}$, alors, avec les notations du lemme 3, on a $\lambda_{n_j} = m + k_j$ et donc $e_t(x) = e_t(x^{(j)})$ pour tout t, $0 \le t \le m+k_j-1$. Il s'ensuit que $x^{(j)}$ est préfixe de $x^{(j+1)}$. Ainsi, la suite $(x^{(j)})_j$ converge dans $\mathcal{K}_G$; notons ξ sa limite. La suite d'égalités $\lambda_{n_j} = m + k_j$ et le caractère croissant de $(k_j)_j$ montrent que $A_G(\xi) = y$, ce qui assure de plus $\xi \in \mathcal{K}_G^\infty$. L'égalité $A_G(\mathcal{K}_G^\infty) = X_G^0$ est donc prouvée.

L'application A_G réalise donc une bijection de $\mathcal{K}_G^\infty$ sur $X_G^{(0)}$; notons ϕ sa bijection réciproque et soit $y = A_G(x)$ avec $x \in \mathcal{K}_G^\infty$.

D'après (12) et (13),

$$\phi(X_G^{(0)} \cap U_{y_0\dots y_n}) \subset [x_0\dots x_{\mu_n-1}],$$

d'où la continuité de ϕ.

(iv) Ces propriétés sont des conséquences de la proposition 1(iv). ∎

La proposition 2(iii) montre le lien, simple et anhypothétique, qu'il y a entre $\mathcal{K}_G^\infty$ et $X_G^{(0)}$ via A_G. Si l'on considère l'application A_G dans son ensemble, la situation peut devenir beaucoup plus compliquée. La proposition suivante donne quelques implications, dont les exemples qui la prolongent montrent qu'aucune d'entre elles n'admet de réciproque.

Proposition 3. *On a* (A)⇒(B), (B)⇒(C) *et* (C)⇒(D), *où*

(A) $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$;

(B) *le symbole* ∞ *apparaît au plus une fois dans tout mot infini de* X_G ;

(C) *la suite* $(G_{m+1} - G_m)_m$ *tend vers l'infini*;

(D) $A_G(\mathcal{K}_G) \subset X_G$.

Démonstration. (A)⇒(B). C'est évident, vu que $A_G(x)$ est dans $X_G^{(0)}$ si x n'est pas dans $\tau^{-p}(0^\omega)$ pour un certain $p \ge 0$ et compte exactement un symbole ∞ sinon.

(B)⇒(C). Si $(G_{n+1} - G_n)_n$ ne tend pas vers l'infini, il existe $c \ge 1$ et une infinité d'entiers n tels que $G_{n+1} - G_n = c$. Pour de tels n, on a $\sigma^{G_n-1}A = na_1a_2\dots a_{c-1}(n+1)\dots$; on peut donc extraire de $(\sigma^{G_n-1}A)_n$ une suite convergeant vers un élément de X_G qui sera de la forme $\infty a_1a_2\dots a_{c-1}\infty\dots$

(C)⇒(D). Supposons que la suite $(G_{m+1}-G_m)_m$ tende vers l'infini. Au vu de la proposition 2, il suffit de montrer que $A_G(x) \in X_G$ pour tout x appartenant à l'un des $\tau^{-p}(0^\omega)$, $p \geq 0$. Soit donc x tel que $\tau^p(x) = 0^\omega$. Si $p = 0$, c'est-à-dire si $x = 0^\omega$, on a $A_G(x) = \infty A$, tandis que $\infty A \in X_G$ d'après les propositions 5 et 1(iv). Si $p > 0$, on définit l'entier μ_{p-1} pour x comme dans le lemme 3 ; c'est le même si l'on remplace x par $x_0 \dots x_m 0^\omega$ avec $m \geq \mu_{p-1}$. Puisque $\tau^{p-1}x \in \tau^{-1}(0^\omega)$ notons $(m_j)_j$ une suite strictement croissante d'entiers dans $\mathcal{D}(\tau^{p-1}x)$ avec $m_0 \geq \mu_{p-1}$. Alors, pour tout l, $0 \leq l \leq p-1$, le lemme 3 donne

$$J(G_{m_j+1}-p+l) = e_0(\tau^l x)\dots e_{\mu_{p-1}}(\tau^l x)e_{\mu_{p-1}+1}(x)e_{\mu_{p-1}+2}(x)\dots e_{m_j}(x)0^\omega.$$

Il s'ensuit que

$$\sigma^{G_{m_j+1}-p-1}A = \nu_G(x)\nu_G(\tau x)\dots\nu_G(\tau^{p-1}x)(m_j+1)\sigma^{G_{m_j+1}}A,$$

qui tend, quand j tend vers l'infini, vers $\nu_G(x)\nu_G(\tau x)\dots\nu_G(\tau^{p-1}x)\infty A = A_G(x)$. ■

Exemple 1. Il n'est pas vrai en général que $A_G(\mathcal{K}_G) \subset X_G$. Par exemple, si $\mathcal{K}_G$ est dénombrable, $\tau^{-1}(0^\omega) = \emptyset$. Alors, $A_G(\mathcal{K}_G) = A_G(\mathcal{K}_G^\infty) \cup \{A_G(0)\} = X_G^{(0)} \cup \{\infty A\} \not\subset X_G$ car $X_G^{(1)} = \emptyset$ d'après la proposition 5. Cette inclusion n'est pas non plus systématiquement réalisée si A est récurrent : prenons par exemple $G_{2n+1} = G_{2n}+1$ et $G_{2n+2} = G_{2n+1}+G_{2n}$. Alors, la descente T de l'arbre de G est donnée par $T(2n) = -1$ et $T(2n+1) = 2n-1$; de plus, $\tau^{-1}(0) = \{(01)^\infty\}$. Ainsi, $A_G((01)^\infty) = 1\infty A$, mais la suite des $(A_m)_m$ est donnée par $A_{2n+1} = A_{2n}(2n)$ et $A_{2n+2} = A_{2n+1}(2n+1)A_{2n}$ et l'on voit facilement que les éléments de $X_G \backslash X_G^{(0)}$ sont ∞A ou de la forme $w\infty\infty A$ avec $w \in \mathbb{N}_*$.

Exemple 2. Si τ est continue, la densité de $\mathcal{K}_G^\infty$ (resp. $X_G^{(0)}$) dans $\mathcal{K}_G$ (resp. X_G) et la continuité de A_G montrent que $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$. Mais le fait, pour un odomètre d'échelle G, d'être continu n'est pas nécessaire pour que les propriétés (B) ou (A) soient vérifiées. Ainsi, dans le cas de l'échelle G donnée par $G_{n+1} = 2G_n + G_{n-1} + G_{n-2} + \dots + G_1 + G_0$, on a $P(m', m) = G_0 + G_1 + \dots + G_{m'-1}$ pour tout m et tout $m' < m$, et $P(m', m)$ tend bien vers l'infini avec m', ce qui montre (B) en vertu du lemme 2. Pourtant, le théorème 1 montre que l'odomètre n'est pas continu. En effet, la fonction T, descente de l'arbre des retenues de G (cf. sous-section 2.3), est donnée par $T(n) = -1$ (dans la terminologie de [BDIL], l'arbre des retenues correspondant est l'arbre buisson). De plus, dans cet exemple, $\tau^{-1}(0^\omega)$ est vide, d'où $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G^{(0)} \cup \{\infty A\}$ et, comme A est récurrent d'après la proposition 5, on a $A_G(\mathcal{K}_G) \subset X_G$ mais $A_G(0) = \infty A$ possède au moins un antécédent par σ. Donc (A) n'est pas vérifiée non plus.

La situation décrite par l'exemple précédent n'a jamais lieu si l'échelle est basse, comme le montre le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. *Si l'échelle de numération est basse, elle détermine un odomètre continu si, et seulement si, l'une des trois propriétés* (A), (B), (C) *de la proposition* 3 *est vérifiée.*

Démonstration. En introduisant la descente T de l'arbre des retenues, la relation (6), dans le cas d'une échelle basse G, donne

$$\min_{m,\, m>m'} P(m', m) = P(m', m'+1) = G_{T(m')+1},$$

quantité qui tend vers l'infini si, et seulement si, l'odomètre associé est continu d'après le théorème 1. Ainsi (B) est-elle équivalente, d'après le lemme 2, à la continuité de τ. Pour terminer la démonstration, notons que pour une échelle basse, la condition (C) est équivalente à la continuité (proposition 7 de [BDIL]) et que la continuité implique (A) par le théorème 4. ∎

EXEMPLE 3. L'échelle définie par $G_{n+1} = 2G_n + 1$ montre que l'on peut avoir (D) (la preuve est la même que dans l'exemple 2), avec (C), mais pas (B), puisque $X_G^{(3)}$ est non vide. Pour avoir (D) et pas (C), on peut prendre $G_{2n+1} = G_{2n} + 1$ et $G_{2n+2} = 2G_{2n+1}$. Pour cette échelle, $\tau^{-1}(0) = \emptyset$, la descente de l'arbre étant donnée par $T(2n) = -1$ et $T(2n+1) = 2n$.

REMARQUE 1. La continuité, même dans le cas d'une échelle basse, n'est pas équivalente à (D). Soit en effet une échelle, basse ou non, dont les branches de l'arbre des retenues soient de longueur finie, mais non bornée. Alors, par un raisonnement déjà effectué à l'occasion de l'exemple 2, $\tau^{-1}(0^\omega) = \emptyset$ et $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G^{(0)} \cup \{\infty A\}$, qui est bien contenu dans X_G. En revanche, τ n'est pas continue.

L'égalité entre $A_G(\mathcal{K}_G)$ et X_G est toutefois intimement liée à la continuité de τ, sans pour autant lui être équivalente ; c'est ce que précise le résultat suivant.

PROPOSITION 4. *Une condition nécessaire est suffisante pour avoir l'égalité* $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$ *est que* $J(\mathbb{N}) \cap \omega(G) = \emptyset$ (*i.e. les entiers sont des points de continuité de* τ) *et* $\omega(G) = \overline{\tau^{-1}(0^\omega)}$. *D'autre part, si* A_G *réalise une bijection de* $\mathcal{K}_G$ *sur* X_G, *alors* $\omega(G) = \tau^{-1}(0^\omega)$ (*ce qui équivaut à la continuité de* τ), *et cet ensemble est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Supposons $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$. Les éléments de X_G sont alors de la forme $w\infty A$, avec $w \in \mathbb{N}_*$. Soit $x \in \omega(G)$ et soit $(n_j)_j$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $x = \lim_j(J(G_{n_j} - 1))$. Si $x = J(s)$, $s \in \mathbb{N}$, tout point limite de $(A_G(G_{n_j} - 1 - s))_j$ commence par le mot $\infty a_1 \dots a_s \infty$, ce qui est exclu par l'hypothèse. Donc $J(\mathbb{N}) \cap \omega(G) = \emptyset$. Revenons à x ; ce n'est pas un entier, il existe donc une infinité d'indices

p tels que ni x_p ni $x[p] := x_0 + x_1G_1 + \ldots + x_{p-1}G_{p-1}$ ne soient nuls. Lorsque j est assez grand, $x_0 \ldots x_p$ est préfixe de $J(G_{n_j} - 1)$, de sorte que $A_G(0^p x_p x_{p+1} x_{p+2} \ldots)$ et $A_G(J(G_{n_j} - 1 - x[p]))$ ont le même préfixe $pa_1 \ldots a_{x[p]}$ de longueur $x[p]+1$ (qui se termine par $\nu_G(x)$), la lettre suivante étant respectivement $\nu_G(\tau(x))$ et n_j. Quitte à prendre une suite extraite, on peut supposer que la suite $(A_G(J(G_{n_j} - 1 - x[p])))_j$ converge. Soit $y^{(p)}$ sa limite et $x^{(p)}$ un point dans $\mathcal{K}_G$ tel que $A_G(x^{(p)}) = y^{(p)}$. Par construction, $y^{(p)} = pa_1 \ldots a_{x[p]}\infty A$, donc $z^{(p)} := \tau^{x[p]+1}(x^{(p)}) \in \tau^{-1}(0)$ d'une part et $z^{(p)} = x_0 \ldots x_{p-1} z_p^{(p)} z_{p+1}^{(p)} z_{p+2}^{(p)} \ldots$ d'autre part. Il s'ensuit que x est adhérent à $\tau^{-1}(0^\omega)$; d'où $\omega(G) = \overline{\tau^{-1}(0^\omega)}$ puisque $\omega(G)$ est fermé. Supposons en outre que A_G soit injective. Alors, dans la construction précédente, tous les $z^{(p)}$ sont identiques à $z = A_G^{-1}(\infty A)$ d'où $x = z$, vu l'infinité de p dont on dispose. De plus, $\tau^{-1}(0^\omega)$ est au plus dénombrable, puisque $\sigma^{-1}A$ l'est.

Réciproquement, supposons $J(\mathbb{N}) \cap \omega(G) = \emptyset$ et $\omega(G) = \overline{\tau^{-1}(0^\omega)}$. La proposition 1(viii) montre que les éléments de X_G comptent au plus un symbole ∞. D'après la proposition 3, cela implique que $A_G(\mathcal{K}_G) \subset X_G$. Alors, tout élément de $X_G \setminus X_G^{(0)}$ est, en vertu de la proposition 1(iii), de la forme $w\infty A$, avec $w \in \mathbb{N}_*$. Soit donc $y = w\infty A \in X_G$. Posons $w = w_1 \ldots w_d$ et $M := \max\{w_1, \ldots, w_d\}$. Il existe un ensemble infini E d'indices $n > M$ et des entiers associés N_n tels que le mot wn soit préfixe de $A_G(N_n)$ et donc tels que wn soit aussi préfixe de $A_G(G_n - d)$. Choisissons un point d'accumulation x des $G_n - 1$ $(n \in E)$; étant dans $\omega(G)$, x n'est pas dans $J(\mathbb{N})$, d'où l'existence d'un entier p tel que $x[p] > d$ et $x_p \neq 0$. Considérons maintenant un indice $n \in E$ tel que $x_0 \ldots x_p$ soit préfixe de $J(G_n - 1)$. Par hypothèse, il existe x' dans $\tau^{-1}(0^\omega)$ tel que $x_0 \ldots x_p$ soit aussi préfixe de x'. Rappelons que tout élément de $\mathcal{K}_G \setminus \{0^\omega\}$ possède un unique antécédent par τ. Alors, $A_G(G_n - 1 - x[p])$, $A_G(\tau^{-x[p]}x)$ et $A_G(\tau^{-x[p]}x')$ ont tous le même préfixe de longueur $x[p] + 1$, la lettre suivante étant respectivement n, $\nu_G(\tau x)$ et ∞. En particulier, w est préfixe commun de $A_G(G_n - d)$ et de $A_G(\tau^{-d+1}x')$; par suite, $A_G(\tau^{-d+1}x') = y$. ∎

Exemple 4. Un cas particulier intéressant est celui où $\tau^{-1}(0^\omega)$ est fermé puisqu'alors, la proposition précédente montre que l'odomètre est continu si, et seulement si, $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$. Avec $\tau^{-1}(0^\omega)$ dénombrable, il existe des échelles dont les odomètres associés sont non continus et qui vérifient pourtant l'égalité $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$. Par exemple, considérons la partition de van der Corput $(P_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{N}$ définie par $P_n := 2^{n+1}\mathbb{N} + 2^n - 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $G_{2^n} - 1 := 2G_{2^n-1} + G_{2^n-2} + G_{2^n-3} + \ldots + G_0$ et, pour $(p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $G_{2^{n+1}p+2^n} - 1 := 2G_{2^{n+1}p+2^n-1} + G_{2^{n+1}p+2^n-2} + G_{2^{n+1}p+2^n-3} + \ldots + G_{2^{n+1}(p-1)+2^n} + (G_{2^{n+1}(p-1)+2^n} - 1)$. Pour $m \in P_n$, $T(m)$ est égal à -1 si m est le plus petit élément de P_n et son prédécesseur dans

P_n sinon. Par construction, si $m = 2^{n+1}p + 2^n - 1 \in P_n$, on a $J(G_{m+1} - 1) = 1^{2^n-1}2(1^{2^{n+1}-1}2)^p 0^\omega$; il s'ensuit $\tau^{-1}(0^\omega) = \{1^{2^n-1}2(1^{2^{n+1}-1}2)^\omega : n \in \mathbb{N}\}$ et $\omega(G) = \{1^\omega\} \cup \tau^{-1}(0^\omega) = \overline{\tau^{-1}(0^\omega)}$. D'après la proposition 4, $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$.

3.3. *Valumètre et récurrence.* Le caractère récurrent de A est étroitement relié à la structure topologique de $\mathcal{K}_G$:

PROPOSITION 5. *Pour toute échelle de numération, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *A est récurrent ;*

(b) *$X_G^{(1)} \neq \emptyset$ (ou encore, A possède une pré-image par σ dans X_G) ;*

(c) *$X_G^{(0)}$ n'est pas dénombrable ;*

(d) *$X_G^{(0)}$ n'est pas réduit à $\mathcal{O}(A)$;*

(e) *la suite $(G_{m+1} - G_m)_m$ n'est pas bornée (ou, de manière équivalente, $\mathcal{K}_G$ est un ensemble de Cantor* (cf. [BDIL, thm. 1 et 2])*).*

Démonstration. (a)⇒(b). Cette implication est une conséquence de la proposition 1(iv) et du fait que A est récurrent si et seulement s'il existe $y \in X(A)$ tel que $\sigma y = A$.

(b)⇒(c). $X_G^{(0)}$ est une intersection dénombrable d'ouverts partout denses de X_G, qui est un espace de Baire. Supposons (b) ; par ce qui précède, A est récurrent et donc, pour tout point $x \in X_G$, l'ouvert $X_G \setminus \{x\}$ est partout dense puisqu'il contient l'orbite de $\sigma^k(A)$ pour un entier k déterminé, laquelle orbite est partout dense. Il en résulte, par la propriété de Baire, que $X_G^{(0)}$ n'est pas dénombrable.

(c)⇒(d). C'est évident.

(d)⇒(e). Si la suite $(G_{m+1} - G_m)_m$ est bornée, disons par M, alors, pour tout m tel que $M < G_m$, on a $a_{G_m} \dots a_{G_{m+1}-1} = m a_1 \dots a_{t_m}$ avec $t_m = G_{m+1} - G_m - 1 < M$. Il en résulte que les points d'accumulation de la suite $n \mapsto \sigma^n A$ sont dans $X_G^{(3)}$, d'où $X_G^{(0)} = \mathcal{O}(A)$.

(e)⇒(a). Par hypothèse, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(m_k)_k$ telle que $G_{m_k+1} > G_{m_k} + k$, de sorte que $a_{m_k+1} \dots a_{m_k+k} = a_1 \dots a_k$. Alors

$$\lim_k \sigma^{m_k} A = A,$$

donc A est récurrent. ∎

REMARQUE 2. Si A n'est pas récurrent, les ensembles $X_G^{(1)}$ et $X_G^{(2)}$ sont vides, tandis que $X_G^{(3)}$ ne l'est pas. En fait, $X_G^{(3)}$ est alors un fermé invariant par σ dont les lettres appartiennent à un alphabet fini de cardinal au plus $\limsup_n (G_{n+1} - G_n)$. Soit donc $Y_G = \bigcap_{n \geq 0} \sigma^n X_G$ le plus grand compact de X_G sur lequel σ induise un flot. Toute mesure σ-invariante sur X_G a son support dans Y_G et c'est un fait général que Y_G contient tous les points d'accumulation de X_G donc, ici, $X_G^{(3)}$. Enfin, comme dans le cas présent, $X_G^{(0)}$ $(= \mathcal{O}(A))$ ne contient pas de point périodique, d'où $\bigcap_{n\geq 0} \sigma^n X_G^{(0)} = \emptyset$. Ainsi, lorsque A n'est pas récurrent, $Y_G = X_G^{(3)}$ et toute mesure σ-invariante est portée par $X_G^{(3)}$.

Donnons quelques exemples avec $X_G^{(3)} \neq \emptyset$. Tout d'abord, $X_G^{(3)} = \{\infty^\omega\}$ pour toutes les échelles G de la forme $G_{n+1} = q_n G_n + 1$ pour tout n assez grand. Dans le cas où $G_{n+1} = G_n + e_n$ avec $e_n \in \{1, 2\}$, le système dynamique $(X_G^{(3)}, \sigma)$ s'identifie topologiquement au sous-shift obtenu en considérant l'orbite fermée de $e = e_0 e_1 e_1 \ldots \in \{0, 1\}^\omega$ suivant le shift binaire. En particulier, on peut choisir e de manière à ce que $(X_G^{(3)}, \sigma)$ soit le shift plein sur un alphabet à deux lettres. On peut varier cette construction qui montre finalement que le cas pathologique où $\mathcal{K}_G$ est dénombrable conduit à une très grande variété de systèmes dynamiques sur $X_G^{(3)}$.

Voici une famille d'exemples donnant $X_G^{(3)} \neq \emptyset$ à coup sûr :

PROPOSITION 6. *S'il existe $x \in \mathcal{K}_G$ tel que $\overline{\mathcal{O}(x)} \neq \mathcal{K}_G$, alors $X_G^{(3)} \neq \emptyset$.*

Démonstration. Étant donnée la remarque précédente, on peut supposer que $\mathcal{K}_G$ est non dénombrable ; la suite $m \mapsto G_{m+1} - G_m$ n'est donc pas bornée. Soit $x \in \mathcal{K}_G$ d'orbite (par τ) non dense. D'après la proposition 10(iv) de [BDIL], les points d'accumulation de $\mathcal{O}_\tau(x)$ forment un segment $\{0, \ldots, M-1\}$ de $\mathbb{N}$. Il s'ensuit l'existence de suites strictement croissantes d'entiers $(n_{j,p})_j$ telles que chaque mot infini $\sigma^{n_{j,p}}(A_G(x))$ prend des valeurs supérieures à p suivant des occurrences à lacunes bornées par M. Par un argument de compacité, il existe une suite $(\sigma^{m_j}(A_G(x)))_j$ convergente, de limite y (dans Ω), où la lettre ∞ apparaît avec des occurrences à lacunes bornées par M. Or $x \in \mathcal{K}_G^\infty$, car s'il existait un entier naturel n tel que $\tau^n x = 0^\omega$, $\mathcal{O}_\tau(x)$ serait dense. Alors, d'après la proposition 2(iii), $A_G(x) \in X_G^{(0)} \subset X_G$, donc $y \in X_G^{(3)}$. ∎

Le résultat suivant permet de construire des éléments à peu près quelconques de $X_G^{(2)}$ et $X_G^{(3)}$. On en trouvera une application dans la section suivante.

PROPOSITION 7. *Soit $M \in \{0, \infty\}^\omega$ récurrent et distinct de 0^ω et soit $\pi : \Lambda \to \{\infty, 0\}$ définie par $\pi(\infty) = \infty$ et $\pi(n) = 0$ si $n \in \mathbb{N}$. Il existe une échelle de numération G et un point $x \in X_G$ tels que*

$$\pi(x) := \pi(x_0)\pi(x_1)\pi(x_2)\ldots = M.$$

Démonstration. Écartons le cas banal où $M = \infty^\omega$ et supposons que la première lettre de M soit ∞. Puisque M est récurrent, il s'écrit

$$M = \infty^{s_1} 0^{t_1} \infty^{s_2} 0^{t_2} \infty^{s_3} \ldots$$

avec des suites convenables $(s_i)_i$ et $(t_i)_i$ d'entiers strictement positifs. Soit maintenant l'échelle de numération G définie par

$$\begin{aligned} G_0 &= 1, \\ G_1 &= G_0 + 1, \ \ldots, \ G_{s_1 - 1} = G_{s_1 - 2} + 1 \quad (\text{si } s_1 \geq 2), \\ G_{s_1} &= G_{s_1 - 1} + t_1 + 1, \ \ldots \\ G_{s_1 + \ldots + s_k + l} &= G_{s_1 + \ldots + s_k + l - 1} + 1 \quad (\text{pour } 1 \leq l < s_{k+1} - 1), \\ G_{s_1 + \ldots + s_{k+1} - 1} &= G_{s_1 + \ldots + s_{k+1} - 2} + 1 \quad (\text{si } s_{k+1} \geq 2), \\ G_{s_1 + \ldots + s_{k+1}} &= G_{s_1 + \ldots + s_{k+1} - 1} + t_{k+1} + 1, \ \ldots \end{aligned}$$

On vérifie par récurrence que $G_{s_1 + \ldots + s_k} = (s_1 + t_1) + \ldots + (s_k + t_k) + 1$. Pour simplifier les écritures à venir, notons $s_0 = 0$ et introduisons les mots S_k et T_k définis par

$$S_k := (s_0 + s_1 + \ldots + s_k)(s_0 + s_1 + \ldots + s_k + 1) \ldots (s_0 + s_1 + \ldots + s_k + s_{k+1} - 1),$$

qui est donc de longueur s_{k+1}, et T_k le segment initial de $A = A_G(1)$ de longueur t_k. Alors,

$$\sigma^{G_{s_1 + \ldots + s_k} - 1} A = S_k T_{k+1} S_{k+1} T_{k+2} \ldots$$

Choisissons une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_j$ telle que, simultanément, $M = \lim \sigma^{n_j} M$ et la suite $(\sigma^{n_j} A)_j$ converge. Soit x sa limite ; alors, $x \in X_G$ et, par construction de G, $\pi(x) = M$.

Notons enfin que $\lim_j \sigma^{n_j + s_1} x = 0^{t_1} \infty^{s_2} 0^{t_2} \ldots$ La même construction convient donc au cas où la première lettre de M est 0. ∎

3.4. *Valumètre et minimalité.* Pour tout entier $p > 0$, nous dirons que la chaîne croissante d'entiers $m_1 < \ldots < m_k$ $(k \geq 2)$ est une *p-chaîne de longueur k* si, avec les notations de la sous-section 3.2,

$$P(m_1, m_2) \leq p, \quad P(m_2, m_3) \leq p, \ \ldots, \ P(m_{k-1}, m_k) \leq p.$$

Cette définition se justifie par le résultat suivant :

Théorème 3. *Les propriétés* (M_1) *à* (M_3) *sont équivalentes* :

(M_1) *le valumètre $\mathcal{X}_G$ est minimal*;

(M_2) *pour tout entier $p > 0$, les longueurs des p-chaînes sont bornées dans leur ensemble*;

(M_3) $X_G^{(3)} = \emptyset$.

Démonstration. (M_2)$\Rightarrow$(M_1). D'après la proposition 1(ii), il suffit — pour établir la minimalité de $(\mathcal{X}_G, \sigma)$ — de montrer la condition plus faible suivant laquelle toute lettre finie de Λ apparaît dans A avec des lacunes bornées. Fixons un entier m, choisissons $p \geq m$ et une occurrence de p dans

A. Si les G_m lettres suivantes sont distinctes de m, alors, par la proposition 1(iv), l'une de ces lettres au moins est strictement supérieure à m. Notons-là q ; alors, la proposition 1(i) montre que $q > p$ et le lemme 2 assure que $P(p,q) \le G_m$. Par induction sur k, on obtient que si deux occurrences successives de m sont espacées d'au moins kG_m lettres, il existe une chaîne croissante $m_1 = m < m_2 < \ldots < m_k$ qui est une G_m-chaîne.

(M_1)$\Rightarrow$(M_3). Si $X_G^{(3)}$ n'est pas vide, alors, pour tout point $\zeta \in X_G^{(3)}$, son orbite fermée est distincte de X_G (elle est incluse dans $X_G^{(3)}$), ce qui est contraire à la minimalité de (X_G, σ).

(M_3)$\Rightarrow$(M_2). S'il existe une p-chaîne de longueur arbitaire, alors il existe $y \in X_G$ tel que la lettre ∞ apparaît avec des lacunes de longueur au plus p, donc $y \in X_G^{(3)}$. ∎

Remarque 3. Puisque l'ensemble $X_G^{(3)}$ est réunion dénombrable de parties compactes σ-invariantes, s'il n'est pas vide, l'une d'elles ne l'est pas et il existe ainsi une mesure de probabilité σ-invariante μ sur X_G portée par $X_G^{(3)}$. En particulier, $\mu(X_G^{(0)}) = 0$.

Le théorème suivant décrit précisément le cas où l'odomètre τ associé à une échelle G est continu.

Théorème 4. *Si τ est continue, A_G réalise une surjection continue de $\mathcal{K}_G$ sur X_G et induit un homéomorphisme de $\mathcal{K}_G^\infty$ sur $X_G^{(0)}$. De plus, (X_G, σ) est minimal, $X_G^{(2)} = X_G^{(3)} = \emptyset$ et toute mesure μ, σ-invariante sur X_G, est portée par $X_G^{(0)}$.*

Démonstration. Supposons τ continue. La première phrase de l'énoncé est une application directe des propositions 2(ii) et 4 (on peut aussi reprendre l'argumentation de l'exemple 2).

Soit maintenant μ une mesure de probabilité σ-invariante telle que $\mu(X_G^{(0)}) < 1$; alors, $\mu(U_\infty)$ est strictement positif par (8). En vertu du théorème de récurrence de Poincaré, il existe $x \in U_\infty \cap X_G$ dans lequel la lettre ∞ apparaît au moins 2 fois, ce qui contredit $A_G(\mathcal{K}_G) = X_G$. Donc $\mu(X_G^{(0)}) = 1$. ∎

4. Mesures invariantes sur le valumètre

4.1. *Convergence molle.* Dans la suite, l'espace Ω $(= \Lambda_c^\omega)$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Rappelons qu'une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_n$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ converge faiblement vers la mesure μ si, et seulement si, la suite $(\mu_n(U_w))_n$ converge vers $\mu(U_w)$ pour tout cylindre de base $w = w_0 \ldots w_{l-1}$, $w_i = a_i$ ou $w_i = \overline{a}_i$ avec $a_i \in \mathbb{N}$ (cf. (3)), et que l'ensemble de ces mesures est faiblement compact.

DÉFINITION. Soit μ une mesure $(\Omega, \mathcal{B})$. Une suite de mesures $(\mu_n)_n$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ sera dite *converger mollement* vers μ si, pour tout mot w sur Λ, on a

$$\lim_n \mu_n(U_w) = \mu(U_w).$$

On écrira alors $\mu = m\text{-}\lim \mu_n$. On aura noté que les cylindres intervenant dans la définition de la convergence molle sont ceux de la forme $U_{a_1 \dots a_{l-1}}$ avec $a_i \in \Lambda$ (il n'y a pas de $\overline{a}_i$). Dans la suite, la notation U_w sera réservée par convention aux cylindres de ce type, alors que l'on écrira U_w^0 pour ceux intervenant dans la définition de la convergence faible (avec $\overline{w}_i$ éventuellement, mais la lettre ∞ n'apparaît plus dans w).

LEMME 4. *Considérons sur* $(\Omega, \mathcal{B})$ *une mesure de probabilité* μ *et une suite de mesures de probabilité* $(\mu_n)_n$.

1. *Si* $\mu = m\text{-}\lim_n \mu_n$, *alors* $(\mu_n)_n$ *converge faiblement vers* μ.

2. *Si* $\mu(\mathbb{N}^\omega) = 1$, *alors* $\mu = m\text{-}\lim_n \mu_n$ *si, et seulement si,* $(\mu_n)_n$ *converge faiblement vers* μ.

Démonstration. 1. Sous les hypothèses du lemme, supposons que $\mu = m\text{-}\lim_n \mu_n$. Par compacité faible, il existe une suite extraite $(\mu_{n_k})_k$ qui converge vers une mesure de probabilité ν. Alors, les mesures μ et ν coïncident sur tout cylindre U_w^0, avec $w \in \mathbb{N}_*$. Soit $w \in \Lambda_* \backslash \mathbb{N}_*$ et soient, pour $m \in \mathbb{N}$, les cylindres $U_{w[m]}$, avec $w[m]_i = w_i$ si $w_i \in \mathbb{N}$ et $w[m]_i = \overline{m}$ si $w_i = \infty$. On a $U_w \subset U_{w[m]}$ pour tout m, d'où $\mu_{n_k}(U_w) \leq \mu_{n_k}(U_{w[m]})$ et, en passant à la limite, $\mu(U_w) \leq \nu(U_{w[m]})$. Comme $\nu(U_w) = \lim_m \nu(U_{w[m]})$, il vient $\mu(U_w) \leq \nu(U_w)$. Par σ-additivité, $\mu \leq \nu$ sur tout type de cylindre (cf. (3)), donc, en fait, $\mu = \nu$. La mesure μ est ainsi la seule valeur d'adhérence faible de la suite $(\mu_n)_n$, qui converge donc faiblement vers μ.

2. Si $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers μ avec $\mu(\mathbb{N}^\omega) = 1$, alors, pour tout $w \in \Lambda_* \backslash \mathbb{N}_*$ et tout entier $m \geq 0$, on a $\limsup_n \mu_n(U_w) \leq \mu(U_{w[m]})$; il s'ensuit que $\limsup_n \mu_n(U_w) = 0$. Ainsi, la suite $(\mu_n(U_w))_n$ tend bien vers $\mu(U_w) = 0$ quand n tend vers l'infini. ∎

La convergence molle correspond à une topologie sur l'ensemble Ξ des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$ qui est métrisable, strictement plus fine que la topologie faible et, donc, n'est pas compacte. Par exemple, la suite des mesures de Dirac $\delta_{\{n^\omega\}}$ converge faiblement vers $\delta_{\{\infty^\omega\}}$ mais ne converge pas mollement dans Ξ.

Soient $\beta := \beta_1 \dots \beta_l$ et $B := b_0 \dots b_{L-1}$ deux mots non vides sur Λ de longueurs respectives l et L. La *fréquence* de β dans B est, par définition, le rapport

$$f_B(\beta) := \frac{\operatorname{card}\{m : 0 \leq m \leq L - l \ \&\ b_m \dots b_{m+l-1} = \beta\}}{L}.$$

Il sera utile d'associer à B la mesure de probabilité $\mu_{[B]}$ sur Λ^ω définie par

$$\mu_{[B]} := \frac{1}{|B|} \sum_{0\le i<|B|} \delta_{\sigma^i(B^\omega)}$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x. En particulier, pour tout mot β non vide tel que $|\beta| \le |B|$ on a

$$f_B(\beta) \le \mu_{[B]}(U_\beta) \le f_B(\beta) + \frac{|\beta|-1}{|B|}. \tag{14}$$

Soit une suite de mots B_n ($n \ge 0$) sur Λ de longueurs $L_n > 0$ telle que $\lim_n L_n = +\infty$ et tel que pour tout mot β non vide sur l'alphabet Λ, la limite

$$\ell(\beta) := \lim_n f_{B_n}(\beta)$$

existe. Dans ces conditions, la suite des mesures $\mu_{[B_n]}$ converge mollement vers une mesure de probabilité μ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ si, et seulement si, $\mu(U_\beta) = \ell(\beta)$ pour tout mot non vide $\beta \in \Lambda_*$. En outre, μ est nécessairement invariante par le shift. La suite $(B_n)_n$ est alors dite *m-génératrice* pour μ. De plus, si les B_n sont dans $\mathbb{N}_*$ alors $\mu(\mathbb{N}^\omega) = 1$. Dans le cas particulier où il existe y dans Ω tel que la suite $(y_0 \dots y_n)_n$ soit m-génératrice pour μ, on dira que y est *m-générique* pour μ. De manière équivalente, la suite $(N^{-1}\sum_{0\le n<N} \delta_{\sigma^n y})_N$ converge mollement vers μ.

Examinons maintenant le cas $y = A$ en notant que, pour toute mesure de probabilité μ sur X_G, σ-invariante, on a $\mu(\{A\}) = 0$. En conséquence, $\mu(X_G^{(1)}) = 0$ d'après la proposition 2(iv). On peut donc décomposer μ en la somme d'une mesure σ-invariante μ' portée par $X_G^{(0)}$ et d'une mesure σ-invariante μ'' portée par $X_G^{(2)} \cup X_G^{(3)}$.

Exemple 5 (Échelle G avec $X_G^{(3)} = \emptyset$ et une mesure ergodique chargeant U_∞). Construisons sur l'alphabet $\{0, \infty\}$ le mot infini M suivant : soient $M_1 := \infty$ et, pour tout entier $n \ge 0$, $M_{n+1} := M_n^{2^n-1} W_n M_n^{2^n-1}$ où $W_n := 0^{|M_n|}$. Alors, $|M_{n+1}| = (2^{n+1}-1)|M_n|$. Notons f_n la fréquence de ∞ dans M_n. Par construction, $f_{n+1} = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1} f_n$; cette relation définit un produit infini convergent dont la valeur, strictement positive, est la densité de ∞ dans $M := \lim M_n$ (on voit facilement que les limites donnant M et la densité de ∞ dans M existent). Par ailleurs, $M = \lim \sigma^{|M_n|} M$. Soit G l'échelle de numération associée au mot M par la proposition 7 ; ∞ n'apparaît pas dans M avec des lacunes bornées. De manière plus restrictive, tout segment initial de $A = A_G(1)$ apparaît dans A avec des lacunes bornées. Donc, si x est un élément quelconque de X_G et si n est un entier naturel donné, il n'existe pas de places arbitrairement grandes de x où la lettre ∞ apparaîtrait avec des lacunes bornées par n. Par conséquent, $X_G^{(3)} = \emptyset$. On peut extraire de la suite $(N^{-1}\sum_{n<N} \delta_{\sigma^n M})_N$ une sous-suite faiblement

convergente dont la limite est une mesure invariante ν telle que $\nu(U_\infty) > 0$. Il existe alors une mesure ergodique μ, σ-invariante, telle que $\mu(U_\infty) > 0$, donc $\mu(X_G^{(0)}) = 0$.

Le cas où μ est ergodique présente une dichotomie intéressante qui sera mise en évidence par la convergence molle en privilégiant A. Auparavant, il est intéressant de noter que la structure codée particulière des préfixes de A qui ressort de la proposition 1 donne la caractérisation suivante :

PROPOSITION 8. *Soit U_w un cylindre de base w dans Ω (cf.* (3)*). Pour que la limite* $\lim_k \mu_{[a_1\ldots a_k]}(U_w)$ *existe, il faut et il suffit que* $\lim_m \mu_{[A_m]}(U_w)$ *existe.*

Démonstration. La nécessité est évidente ; montrons la suffisance. Le cas où w est un mot sur Λ contenant la lettre ∞ est trivial et on peut, sans inconvénient, remplacer la convergence de la suite $(\mu_{[A_m]}(U_w))_m$ par celle de $(\mu_{[A_m m]}(U_w))_m$. En adoptant les notations dans la factorisation en proposition 1(i), on obtient

$$\left|\mu_{[a_1\ldots a_k]}(U_w) - \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{s_k} e_r(k) G_r \mu_{[A_r r](U_w)}\right| \le 2|\beta|\frac{S_G(k)}{k}$$

où $S_G(k) = \sum_{r=0}^{s_k} e_r(k)$ est la somme des chiffres du G-développement de k. Or, pour l fixé et $k > G_l$, on a

$$\frac{S_G(k)}{k} \le \frac{G_l}{k} + \frac{1}{G_l},$$

ce qui montre que $\lim_k S(k)/k = 0$ et, par la majoration précédente,

$$\lim_k \mu_{[a_1\ldots a_k]}(U_w) = \lim_m \mu_{[A_m]}(U_w). \ \blacksquare$$

4.2. *Mesures portées par $X_G^{(0)}$.* Les mesures de probabilité σ-invariantes portées par $X_G^{(0)}$ sont contrôlées par les suffixes de A et leurs valeurs d'adhérence au sens de la convergence molle.

THÉORÈME 5. *Soit μ une mesure de probabilité σ-invariante et ergodique sur X_G. Il y a équivalence entre*

(i) $\mu(X_G^{(0)}) = 1$;

(ii) *il existe une sous-suite de la suite des mots A_m qui soit m-génératrice pour μ ;*

(iii) *il existe une sous-suite de la suite des préfixes $a_1 \ldots a_n$ de A qui soit m-génératrice pour μ.*

Démonstration. L'implication (ii)$\Rightarrow$(iii) est immédiate. Puisque, par (ii), les cylindres dont les bases sont les mots contenant la lettre ∞ ont par μ une mesure nulle, on a aussi (ii)$\Rightarrow$(i).

Montrons les implications réciproques (i)⇒(iii) et (iii)⇒(ii). Supposons (i). Puisque μ est ergodique, il existe un point $y \in X_G^{(0)}$ générique (au sens usuel) pour μ. Dans une première étape, montrons que μ est limite faible d'une suite extraite de la suite des mesures $k \mapsto \mu_{[a_1 \dots a_k]}$. Soit donc w un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}$, de longueur $l \geq 1$, et soit m un entier ≥ 2 tel que toutes les lettres de w soient strictement plus petites que m. D'après proposition 1(vii), le mot $y_0 \dots y_{n-1}$ se factorise sous la forme $P_n Q_n R_n$ où le préfixe P_n et le suffixe R_n sont de longueur au plus $G_m - 1$ ne contenant pas de lettres $m' \geq m$, et où le mot Q_n est un concaténé de mots de la forme $m' a_1 \dots a_k$, $0 \leq k < G_m$, $m \leq m'$ (réduit au mot m' pour $k = 0$). Par choix de m,

$$\begin{aligned} f_{y_0 \dots y_{n-1}}(w) = &\frac{|P_n| f_{P_n}(w) + |R_n| f_{R_n}(w)}{n} \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{G_m - 1} (k+1) f_{\infty a_1 \dots a_k}(w) \sum_{s=0}^{n-1} \mathbf{1}_{U_{\overline{m} a_1 \dots a_k \overline{m}}}(\sigma^s(y)), \end{aligned}$$

où $a_1 \dots a_k$ représente le mot vide lorsque $k = 0$. Remarquons qu'ici,

$$f_{\infty a_1 \dots a_k}(w) = \mu_{[\infty a_1 \dots a_k]}(U_w)$$

et posons

$$p(k, m) = \mu(U_{\overline{m} a_1 \dots a_k \overline{m}}).$$

La factorisation précédente de $y_0 \dots y_{n-1}$ donne, par passage à la limite en n, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{G_m - 1} (k+1) p(k, m) = 1,$$

tandis que la généricité de y entraîne

$$\begin{aligned} \mu(U_w) &= \sum_{k=0}^{G_m - 1} (k+1) p(k, m) \mu_{[\infty a_1 \dots a_k]}(U_w) \\ &= \sum_{k=0}^{G_m - 1} (k+1) p(k, m) \mu_{[m a_1 \dots a_k]}(U_w), \end{aligned}$$

le mot w ne comportant pas de lettre supérieure ou égale à m. De plus, si v est un mot de Λ_* contenant au moins une lettre infinie, on a par hypothèse

$$0 = \mu(U_v) = \sum_{k=0}^{G_m - 1} (k+1) p(k, m) \mu_{[m a_1 \dots a_k]}(U_v).$$

Ainsi, la suite des mesures $\mu_m := \sum_{k=0}^{G_m - 1} (k+1) p(k, m) \mu_{[m a_1 \dots a_k]}$ converge mollement vers μ. Par le lemme 4, cette convergence à lieu faiblement. Par suite, μ appartient à l'enveloppe convexe faiblement fermée $C(M)$ de l'ensemble M des mesures $\mu_{[ma_1\ldots a_k]}$ ($m \geq 1$, $k \geq 0$). Comme μ est ergodique, elle est aussi point extrémal de $C(M)$ et, en tant que tel, μ est faiblement adhérente à M en vertu du théorème de Milman [Mi]. D'autre part, μ n'est pas de la forme $\mu_{[ma_1\ldots a_k]}$ puisque, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la proposition 1(vi) implique $\mu(U_{\overline{m}}) \geq 1/G_m$. Elle n'est pas non plus de la forme $\mu_{[\infty a_1\ldots a_k]}$, au vu de l'hypothèse (i). D'où l'existence d'une suite d'entiers positifs $(m_n)_n$ et d'une suite strictement croissante $(k_n)_n$ d'entiers telles que la suite $n \mapsto \mu_{[m_n a_1\ldots a_{k_n}]}$ soit faiblement convergente vers μ. Mais alors, $n \mapsto \mu_{[a_1\ldots a_{k_n}]}$ converge aussi faiblement vers μ et, par le lemme 4, la convergence est molle ; c'est la propriété (iii).

Montrons maintenant que l'on peut substituer la suite des mesures $\mu_{[A_m]}$ à celle des mesures $\mu_{[a_1\ldots a_k]}$. Supposons que la suite $n \mapsto \mu_{[a_1\ldots a_{k_n}]}$ converge mollement vers μ. Une première conséquence est que μ vérifie (i). D'après la proposition 1(i), si $J(k) = e_0(k)\ldots e_{s_k}(k)0^\omega$ (avec $e_{s_k}(k) \neq 0$), alors

$$a_1\ldots a_k = (A_{s_k}s_k)^{e_{s_k}(k)}(A_{s_k-1}(s_k-1))^{e_{s_k-1}(k)}\ldots(A_0 0)^{e_0(k)}.$$

Introduisons le mot

$$\beta_n := (A_{s_{k_n}}\infty)^{e_{s_{k_n}}(k_n)}(A_{s_{k_n}-1}\infty)^{e_{s_{k_n}-1}(k_n)}\ldots(A_0\infty)^{e_0(k_n)}.$$

Il est immédiat que, pour tout mot fini w sur $\mathbb{N}$, on a

$$\mu(U_w) = \lim_n \mu_{[a_1\ldots a_{k_n}]}(U_w) = \lim_n \mu_{[\beta_n]}(U_w),$$

tandis que

$$\mu_{[\beta_n]}(U_w) = \sum_{j=0}^{k_n} q_j(n)\mu_{[A_j\infty]}(U_w), \quad \text{avec} \quad q_j(n) = \frac{e_j(k_n)G_j}{k_n}$$

et $\sum_{j\geq 0} q_j(n) = 1$. Si toutes les lettres de w sont strictement plus petites que n_0 et si $n \geq n_0$, alors

$$\mu_{[\beta_n]}(U_w) = \sum_{j=0}^{k_n} q_j(n)\mu_{[A_j n]}(U_w).$$

Il en résulte, comme précédemment, que μ est limite faible d'une sous-suite de la suite $(\mu_{[A_j]})_j$. Enfin, d'après le lemme 4, cette convergence est molle. ∎

Le théorème 5 permet en fait de donner un critère affirmant l'existence de mesures invariantes sur $X_G^{(0)}$ ou sur l'odomètre.

Proposition 9. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(P_1) *il existe une mesure μ de probabilité sur X_G, σ-invariante et portée par $X_G^{(0)}$* ;

(P_2) *il existe une partie infinie J de $\mathbb{N}$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{j\in J} \mu_{[A_j]}(U_{\overline{m}}) = 0. \tag{15}$$

Démonstration. (P_1)⇒(P_2). Il suffit de traiter le cas μ ergodique. Par le théorème 5, il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_k$ telle que μ soit limite molle de $\mu_{[A_{n_k}]}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(U_{\overline{m}_0}) \leq \varepsilon/2$ et il existe k_0 tel que $\mu_{[A_{n_k}]}(U_{\overline{m}_0}) \leq \varepsilon$ si $k \geq k_0$. Choisissons maintenant $m > \max\{m_0, n_{k_0}\}$. Alors, $\mu_{[A_j]}(U_{\overline{m}}) = 0$ pour $0 \leq j \leq n_{k_0}$, d'où $\mu_{A_{n_k}}(U_{\overline{m}}) \leq \varepsilon$ pour tout indice k.

(P_2)⇒(P_1). Supposons (15) et soit μ une mesure σ-invariante sur X_G, limite faible d'une sous-suite $(\mu_{[A_{j_k}]})_k$ de la suite de mesures $(\mu_{[A_j]})_{j\in J}$. Par (15), $\mu(U_\infty) = 0$, de sorte que cette sous-suite converge mollement vers μ qui est portée par $X_G^{(0)}$. ■

Donnons quelques conséquences de l'étude précédente.

COROLLAIRE 2. (i) *Si la série* $\sum_{m\geq 0} G_m^{-1}$ *converge, alors il existe une mesure de probabilité invariante sur* $X_G^{(0)}$ *et* $\lim_m \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_{[A_j]}(U_{\overline{m}}) = 0$.

(ii) *S'il existe une mesure de probabilité ergodique* μ *sur* $X_G^{(0)}$, *alors la suite* $n \mapsto \mu(U_n)$ *est décroissante au sens large*, *converge vers* 0 *et* $\liminf_m m/G_m = 0$.

(iii) *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(a) *toutes les mesures invariantes pour le valumètre sont portées par* $X_G^{(0)}$;

(b) $\lim_m \sup_{0<i\leq j} \mu_{[a_i\ldots a_j]}(U_{\overline{m}})=0$ (*en particulier*, $\lim_m m/G_m=0$).

Démonstration. (i) repose sur le fait que, grâce à la proposition 1(vi), pour tous entiers positifs l et j, on a $\mu_{[A_j]}(U_l) \leq 1/G_l$. On peut donc appliquer la proposition 9 avec $J = \mathbb{N}$. Pour ce qui est de (ii), la proposition 1(i), (ii) assure, pour tout entier j, la décroissance de la suite $(\mu_{[A_j]}(U_n))_n$. Le théorème 5 montre que celle de $(\mu(U_n))_n$ s'en déduit. Le résultat sur la limite inférieure résulte de la majoration suivante, qui est immédiate, et du même théorème 5 :

$$\frac{m}{G_m - 1} \leq \mu_{[A_m]}(U_{\overline{l}}) + \frac{l}{G_m - 1}. \tag{16}$$

Montrons (iii). Supposons (a) et considérons les applications $d_m : \mu \mapsto \mu(U_{\overline{m}})$ définies sur l'espace compact $\mathcal{I}(X_G)$. Elles sont continues. La suite $(d_m)_m$ est décroissante et, d'après (a), elle converge simplement vers 0. Le théorème de Dini entraîne que la convergence est uniforme, ce qui donne en particulier la propriété (b). Réciproquement, supposons (b) et soit λ une mesure de probabilité invariante et ergodique sur (X_G, σ). Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier M tel que $\mu_{[a_i\ldots a_j]}(U_{\overline{m}}) \leq \varepsilon$ pour tout $0 < i \leq j$ et tout $m \geq M$. D'autre part, la mesure λ admet un point générique x ; il existe alors un entier $m \geq M$ et un indice n tels que $\mu_{[x_0\ldots x_n]}(U_{\overline{m}}) \geq \lambda(U_\infty) - \varepsilon$. Mais, x étant adhérent à l'orbite de A, il existe un entier i (dépendant de

n et m) tel que $\mu_{[x_0\ldots x_n]}(U_{\overline{m}}) = \mu_{[a_i\ldots a_{i+n}]}(U_{\overline{m}})$, d'où $\lambda(U_\infty) \leq 2\varepsilon$, montrant ainsi que λ est portée par $X_G^{(0)}$, d'où (a). Finalement, notons que la densité de l'échelle est nulle à cause de (16). ∎

Il est possible de construire des exemples qui montrent que les propriétés de ce corollaire sont au plus juste.

Exemple 6. Considérons une échelle de la forme $G_{n+1} = \alpha_n G_n + \beta_n$. Un choix approprié des entiers $\alpha_n \geq 1$ et $\beta_n \geq 0$ permet d'obtenir simultanément G de densité nulle et la densité de 0 dans $A_G(1)$ également nulle (et donc, seule la mesure nulle est invariante sur $X_G^{(0)}$). Prenons par exemple $(\alpha_n, \beta_n) = (1, 1)$ sauf pour un ensemble d'indices exceptionnels. Plus précisément, soient $(j_n)_n$ une suite d'entiers strictement croissante et $(r_n)_n$ une suite d'entiers au moins égaux à 2. Posons, pour $k \geq 1$, $G_{j_k} := r_k G_{j_k - 1} + 1$ et $G_m := G_{m-1} + 1$ pour les entiers $m \notin \{j_k : k \geq 1\}$. Posons enfin, pour simplifier,

$$s_n := j_1 + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{j_k - j_{k-1}}{r_1 \ldots r_{k-1}}.$$

On calcule facilement

$$\liminf_n \frac{G_n}{n} = \liminf_n \frac{G_{j_n - 1}}{j_n - 1} = \liminf_n \frac{r_1 \ldots r_{n-1}}{j_n - 1} s_n$$

et, en remarquant que la suite $(\mu_{[A_n]}(U_0))_n$ est ici décroissante,

$$\lim_n \mu_{[A_n]}(U_0) = \lim_n \mu_{[A_{j_n}]}(U_0) = \lim_n s_n^{-1}.$$

En particulier, pour $r_n := n + 1$ et $j_n := \sum_{k=1}^n k!$, on trouve bien $\liminf_n G_n/n = +\infty$ et $\limsup_n \mu_{[A_n]}(U_0) = 0$. Enfin, grossièrement, $f_{a_1\ldots a_m}(0) \leq 2\mu_{[A_n]}(U_0)$ si $j_n \leq m < j_{n+1}$, ce qui donne bien une densité nulle des occurrences de 0 dans A.

Notons au passage qu'on vient de construire une échelle G telle que $\mathcal{K}_G$ est un espace de Cantor, mais dont l'odomètre correspondant n'admet pas de mesure de probabilité invariante.

Exemple 7. Construisons maintenant une échelle G avec $\limsup_n n/G_n = 1$ et telle qu'il existe des parties infinies J et K de $\mathbb{N}$ avec $\sup_{j\in J} \mu_{[A_j]}(U_{\overline{m}}) = 1$ pour tout m et $\lim_m \sup_{k\in K} \mu_{[A_k]}(U_{\overline{m}}) = 0$. Pour une suite strictement croissante d'entiers non nuls $(j_n)_n$, posons $G_m := m + 1$ pour $m < j_1$, puis $G_{m+1} = G_m + 2$ pour $j_1 - 1 \leq m \leq j_2 - 2$ et, pour tout $n \geq 1$, $G_{m+1} = G_m + 1$ si $j_{2n} - 1 \leq m \leq j_{2n+1} - 2$ et $G_{m+1} = G_m + G_{j_{2n}-1}$ si $j_{2n+1} - 1 \leq m \leq j_{2n+2} - 2$. Afin de simplifier les notations dans les calculs qui vont suivre, introduisons $B_n := A_{j_n - 1}(j_n - 1)$ et $f_n(m) := \mu_{[B_n]}(U_{\overline{m}})$.

Pour tout $n \geq 1$, la proposition 1 donne les factorisations

$$B_{2n+1} = B_{2n}(j_{2n})(j_{2n} + 1)(j_{2n} + 2) \ldots (j_{2n+1} - 1)$$

et

$$B_{2n+2} = B_{2n+1}A_{j_{2n}-1}(j_{2n+1})A_{j_{2n}-1}(j_{2n+1}+1)\dots A_{j_{2n}-1}(j_{2n+2}-1).$$

Pour $j_{2n} \leq m < j_{2n+1}$, on en déduit $f_k(m) = 0$ si $k \leq 2n$,

$$f_{2n+1}(m) = \frac{j_{2n+1}-m}{|B_{2n+1}|}, \qquad f_{2n+2}(m) = \frac{|B_{2n+1}|f_{2n+1} + (j_{2n+2}-j_{2n+1})}{|B_{2n+1}| + |B_{2n}|(j_{2n+2}-j_{2n+1})}$$

et, si $k \geq 1$,

$$f_{2n+2k+1}(m) = \frac{|B_{2n+2k}|f_{2n+2k} + (j_{2n+2k+1}-j_{2n+2k})}{|B_{2n+2k}| + (j_{2n+2k+1}-j_{2n+2k})}$$

et

$$f_{2n+2k+2}(m) = \frac{|B_{2n+2k+1}|f_{2n+2k+1} + |B_{2n+2k}|(j_{2n+2k+2}-j_{2n+2k+1})f_{2n+2k}}{|B_{2n+2k+1}| + |B_{2n+2k}|(j_{2n+2k+2}-j_{2n+2k+1})}.$$

Ces expressions permettent de construire, pas à pas, une suite $(j_n)_n$ donnant une échelle répondant aux conditions annoncées : il suffit de prendre $j_1,\dots,j_{2n}$ arbitrairement, $n \geq 1$ étant fixé une fois pour toutes. Puis l'on choisit j_{2n+1} tel que $G_{j_{2n+1}-1}/(j_{2n+1}-1) \leq 2$, j_{2n+2} tel que $f_{2n+2}(j_{2n+1}-1) \leq (1+1/n^2)(1/|B_{2n}|)$. Enfin, pour tout $k \geq 1$, $j_{2n+2k+1}$ est tel que

$$G_{j_{2n+2k+1}}-1 \leq \left(1+\frac{1}{k}\right)(j_{2n+2k+1}-1) \quad \text{et} \quad f_{2n+2k+1}(2n+2k-1) \geq 1-\frac{1}{k},$$

puis $j_{2n+2k+2}$ tel que

$$f_{2n+2k+2}(j_{2n+2k+1}-1) \leq \frac{1}{|B_{2n+2k}|}\left(1+\frac{1}{(n+k)^2}\right)$$

et, pour tout $t = 0,\dots,k-1$,

$$f_{2n+2k+2}(j_{2n+2t+1}-1) \leq \left(1+\frac{1}{(n+k)^2}\right)f_{2n+2k}(j_{2n+2t+1}-1).$$

Le valumètre possède donc, au moins comme mesures invariantes, une mesure ergodique portée par $X_G^{(0)}$ et la mesure de Dirac δ_{∞^ω}. De plus, cet exemple prouve que, dans le corollaire 2, la conclusion de (ii) ne saurait être améliorée et que l'hypothèse de (i), s'il advenait éventuellement qu'elle pût être affaiblie, ne pourrait être en aucun cas supprimée.

Exemple 8. Pour terminer, la propriété (b) du corollaire 2(iii) ne peut pas se réduire à $\lim_m \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_{[A_j]}(U_{\overline{m}}) = 0$. L'échelle $G_n = 2^{n+1}-1$ fournit un contre-exemple. Elle satisfait bien à cette nouvelle condition, car on calcule simplement $\mu_{[A_{n+p}]}(U_{\overline{n}}) = (2^p-1)/(2^{n+p}-1)$, d'où $\sup_j \mu_{[A_j]}(U_{\overline{n}}) = 2^{-n}$. Mais

$$A]2(2^{n+1}-1)+(2^{n+2}-1)+\dots+(2^{n+k}-1), 2^{n+k+1}-1] = (n+1)\dots(n+k),$$

d'où $\sup_{0<i\leq j} \mu_{[a_i\dots a_j]}(U_{\overline{m}}) = 1$ pour tout m. Cette échelle admet donc la mesure de Dirac $\delta_{\{\infty^\omega\}}$ comme mesure ergodique. Sur $X_G^{(0)}$, elle admet une

unique mesure ergodique (cf. le théorème 7, infra) par rapport à laquelle A est m-générique. En effet, toute valeur d'adhérence faible de la suite $(\mu_{[a_1\ldots a_k]})_k$ est à support dans $X_G^{(0)}$, donc coïncide avec μ_G. Ainsi, contrairement à ce qui se passe dans le cas non récurrent, la mesure invariante δ_{∞^ω} n'est limite faible d'aucune sous-suite de $(\mu_{[A_m]})_m$.

4.3. *Unique ergodicité.* Si toutes les mesures σ-invariantes sur X_G sont portées par $X_G^{(2)} \cup X_G^{(3)}$, alors $X_G^{(0)}$ est négligeable pour toute mesure faiblement adhérente à la suite des mesures $\mu_{[a_1\ldots a_n]}$. En conséquence, A est mollement générique pour la mesure nulle. D'un autre côté, la proposition 9 permet d'affirmer qu'il existe une mesure invariante ergodique sur $X_G^{(0)}$ mais elle n'en garantit pas l'unicité ; cette situation est examinée par le théorème suivant :

Théorème 6. *Si la suite des mots A_m est mollement génératrice pour une mesure de probabilité μ_G, celle-ci est l'unique mesure de probabilité σ-invariante sur $X_G^{(0)}$; elle est alors ergodique et toute mesure de probabilité ν, σ-invariante sur X_G, se décompose de manière unique sous la forme $\nu = \alpha\mu_G + (1-\alpha)\nu^*$ $(0 \le \alpha \le 1)$ où ν^* est une mesure de probabilité portée par $X_G \setminus X_G^{(0)}$. En particulier, si (X_G, σ) est uniquement ergodique, son unique mesure de probabilité est portée par $X_G^{(0)}$ si, et seulement si, A est m-générique (pour une mesure de probabilité).*

Démonstration. Soit une mesure σ-invariante ϱ portée par $X_G^{(0)}$; alors, par désintégration de ϱ, il existe une mesure ergodique μ telle que $\mu(X_G^{(0)}) = 1$. Si la suite des mots A_m est m-génératrice pour une mesure μ_G, le théorème 5 montre que $\mu_G = \mu$. Soit maintenant une mesure ν, σ-invariante sur X_G. La désintégration de ν suivant les mesures ergodiques montre qu'alors, ν se décompose sous la forme indiquée dans le théorème. En particulier, pour $\nu = \varrho$, il vient $\varrho = \mu_G$, d'où l'unicité de ϱ.

Supposons enfin qu'il existe une unique mesure invariante μ sur (X_G, σ). Alors, la suite $(\mu_{[A_m]})_m$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence faible et converge donc faiblement vers μ ; la convergence est molle d'après le lemme 4, donc A est m-générique pour μ. ∎

L'exemple suivant fournit une méthode générale de construction d'un odomètre continu admettant au moins deux mesures invariantes de probabilité.

Exemple 9. Commençons par supposer avoir déterminé les m_2 (> 2) premiers termes d'une échelle G de telle manière qu'il existe un entier m_1, $0 < m_1 < m_2$, et un mot β sur l'alphabet $\mathbb{N}$ dont les lettres sont strictement inférieures à m_1 et dont les fréquences d'apparition dans $A_{m_1}m_1$ et $A_{m_2}m_2$ (les quantités $f_{A_{m_i}m_i}(\beta)$ avec les notations de la sous-section 3.1) soient respectivement b et a avec $b > a > 0$. Par exemple, les premiers termes de G sont $1, 2, 4, 5$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ et $\beta = 0$; dans ce cas, $b = 1/2$ et $a = 2/5$. Fixons maintenant une suite de nombres strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ telle que $\varepsilon_1 = b$, $\varepsilon_2 = a$ et $\sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon_n < (b-a)/3$ et définissons $a_n := \sum_{k=2}^{n+1} \varepsilon_k$ et $b_n := b - \sum_{k=3}^{n+1} \varepsilon_k$; alors, $a_1 = a$, $b_1 = b$, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante et $b_n - a_n > (b-a)/3$ pour tout n.

Nous allons construire, par récurrence sur n, une suite finie strictement croissante d'entiers $m_1 < \ldots < m_{2n-1} < m_{2n}$ et les éléments de l'échelle de numération G d'indices inférieurs ou égaux à m_{2n} de telle façon que si $F(k) := f_{A_k k}(\beta)$, alors $F(m_{2n-1}) \geq b_n$ et $F(m_{2n}) \leq a_n$.

Pour $n = 1$, la construction est celle présentée plus haut. Supposons-là effectuée à l'ordre n et considérons la suite des entiers $G_{m_{2n}+i}$ $(i \geq 1)$ déterminée par la récurrence $G_{m_{2n}+i} = G_{m_{2n}} + iG_{m_{2n-1}}$. Alors,

$$G_{m_{2n}+i} F(m_{2n} + i) = G_{m_{2n}} F(m_{2n}) + iG_{m_{2n-1}} F(m_{2n-1})\,;$$

on peut donc exhiber un entier i_n tel que $F(m_{2n} + i_n) \geq b_{n+1}$ et choisir $m_{2n+1} := m_{2n} + i_n$ en conservant les G_k construits pour $m_{2n} + 1 \leq k \leq m_{2n} + i_n$. Construisons de même $G_{m_{2n+1}+j} = G_{m_{2n+1}} + jG_{m_{2n}}$ pour $1 \leq j \leq j_n$, de manière à ce que $F(m_{2n+1} + j_n) \leq a_{n+1}$; enfin, prenons $m_{2n+2} = m_{2n+1} + j_n$, ce qui clôt la récurrence. Par ailleurs, l'échelle admet une descente T qui vérifie, pour tout $n \geq 2$, $T(m_{2n} + i) = m_{2n-1} - 1$ si $0 \leq i < i_n$ et $T(m_{2n+1} + j) = m_{2n} - 1$ si $0 \leq j < j_n$. L'odomètre de cette échelle est donc continu d'après le théorème 1. Les valeurs d'adhérences faibles respectives des suites $(\mu_{[A_{m_{2n}}]})_n$ et $(\mu_{[A_{m_{2n+1}}]})_n$ donnent alors des mesures σ-invariantes distinctes, puisqu'elles ne prennent pas la même valeur sur U_β. D'après le théorème 4, ces mesures sont à support dans $X_G^{(0)}$.

Remarquons que $\lim_n G_{n+1}/G_n = 1$ si l'on choisit i_n et j_n grands devant respectivement $G_{m_{2n}}$ et $G_{m_{2n+1}}$ et, qu'avec les conditions initiales données ci-dessus, on obtient une échelle basse. Il est possible de modifier cette construction (par exemple, remplacer $G_{m_{2n}}$ par $nG_{m_{2n}}$ dans la définition des $G_{m_{2n+i}}$) pour avoir $\limsup_n G_{n+1}/G_n = +\infty$. Mais, dans tous les cas,

$$\liminf_n \frac{G_{n+1}}{G_n} = 1.$$

Ce dernier point n'est pas négociable à cause du résultat suivant.

THÉORÈME 7. *Si l'échelle G vérifie :*

(i) *la suite $m \mapsto G_m \sum_{k=m}^{\infty} G_k^{-1}$ est bornée,*
(ii) $\lim_n (G_{n+1} - G_n) = +\infty$,

alors $(X_G^{(0)}, \sigma)$ est uniquement ergodique.

Démonstration. Pour tout mot β donné, notons $f_n := f_{a_1 \ldots a_n}(\beta)$ et $F_m := f_{G_m}(\beta)$. L'existence d'une mesure de probabilité invariante sur $X_G^{(0)}$ est garantie par le corollaire 2. S'il en existe deux, on peut les supposer ergodiques et, par le théorème 5, il existe un mot β sur l'alphabet $\mathbb{N}$ tel que

$$a := \liminf_n f_n < \limsup_n f_n =: b. \tag{17}$$

L'objectif est d'en tirer une contradiction, ce qui va se faire en deux étapes. Nous aurons besoin pour cela d'un lemme technique. Tout d'abord, pour $t \in \mathbb{R}$ introduisons les notations $t^+ := \max\{0, t\}$ et $t^- := -\min\{0, t\}$.

LEMME 5. *Soit β un mot fini sur $\mathbb{N}$. Soient $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que les lettres de β soient toutes strictement inférieures à m_0 et des entiers n et m tels que $G_{m_0} \leq G_m \leq n < G_{m+1}$. La division euclidienne de n par G_m donne $n = eG_m + r$ et*

(a) $f_n = (1 - r/n)F_m + (r/n)f_r$,
(b) $|F_m - f_n| \leq r/n$ *et*
(c) $-(f_n - f_r)^- \leq -(F_m - f_r)^-/2 \leq F_m - f_n \leq (F_m - f_r)^+/2 \leq (f_n - f_r)^+$.

Démonstration. Posons pour simplifier $\alpha(n) := a_1 \ldots a_n$, alors

$$\alpha(n) = (A_m m)^e \alpha(r).$$

Par hypothèse sur les lettres de β, il s'ensuit $nf_n = eG_m F_m + rf_r$, d'où (a), mais aussi $nF_m = nf_n - rf_r + rF_m \leq nf_n + r$ et, de même, $nF_m \geq nf_n - r$; d'où la majoration (b). Comme $0 \leq r/n < 1/2$ par la division euclidienne, une simple considération barycentrique donne les encadrements (c). ∎

ÉTAPE 1 : *mise en place.* Soient $\eta := (b - a)/10$ et $0 < \varepsilon < \eta/2$. Soit un entier naturel m_0 majorant strictement les lettres de β et tel que $n \geq G_{m_0}$ entraîne $a - \varepsilon < f_n < b + \varepsilon$. Utilisons l'hypothèse (ii). Soit un entier M vérifiant $M > m_0$, $G_{m_0} < \varepsilon G_M$ et $G_{m+1} - G_m \geq G_{m_0}$ pour tout $m \geq M$. Soient encore deux entiers n_1 et n_2 tels que $G_{M+1} < n_1 < n_2$, $f_{n_1} \leq a + \eta$, $f_{n_2} > b - \varepsilon$ et $f_n > a + \eta$ pour tout n, $n_1 < n \leq n_2$. L'existence de (n_1, n_2) est assurée par (17). Définissons enfin m_1 et m_2 par $G_{m_1 - 1} \leq n_1 < G_{m_1}$ et $G_{m_2} \leq n_2 < G_{m_2+1}$.

Effectuons la division euclidienne $n_2 = eG_{m_2} + r$. Si $r < G_{m_0}$, le lemme 5(b) assure que $F_{m_2} \geq f_{n_2} - r/n_2 \geq f_{n_2} - G_{m_0}/n_2 \geq b - 2\varepsilon$. Si $r \geq G_{m_0}$, le (c) du même lemme montre que $F_{m_2} \geq f_{n_2} - (f_{n_2} - f_r)^-$. Dans cette minoration, si $f_{n_2} - f_r$ est négatif, cela implique $b - \varepsilon < f_{n_2} \leq f_r < b + \varepsilon$. De là résulte $F_{m_2} \geq f_{n_2} - 2\varepsilon \geq b - 3\varepsilon$. D'où

$$F_{m_2} \geq b - 3\varepsilon \tag{18}$$

dans tous les cas.

Effectuons de même $n_1 = eG_{m_1-1}+r$. Pour $r < G_{m_0}$, on obtient $F_{m_1-1} \leq f_{n_1} + r/n_1 \leq a + \eta + \varepsilon$; et pour $r \geq G_{m_0}$, $F_{m_1-1} \leq f_{n_1} + (f_{n_1} - f_r)^+ \leq f_{n_1} + \eta + \varepsilon \leq a + 2\eta + \varepsilon$, d'où

$$F_{m_1-1} \leq a + 2\eta + \varepsilon. \tag{19}$$

Appliquons une troisième fois le lemme 5, cette fois-ci à $G_{m_1} - 1 = eG_{m_1-1} + r$, en remarquant tout d'abord que $F_{m_1} \leq f_{G_{m_1}-1}$. Si $r < G_{m_0}$, il vient par (b) que $f_{G_{m_1}-1} \leq F_{m_1-1} + \varepsilon \leq a + 2\eta + 2\varepsilon$. Si $r \geq G_{m_0}$, (c) donne soit $f_{G_{m_1}-1} \leq F_{m_1-1} \leq a + 2\eta + \varepsilon$ lorsque $F_{m_1-1} \geq f_r$, soit

$$f_{G_{m_1}-1} \leq (F_{m_1-1} + (b+\varepsilon))/2 \leq (a+b)/2 + \eta + \varepsilon.$$

Dans tous les cas,

$$F_{m_1} \leq (a+b)/2 + \eta + \varepsilon. \tag{20}$$

La définition de (m_1, m_2) montre que $m_2 \geq m_1 - 1$. Les inégalités (18)–(20), jointes aux définitions de η et de ε, assurent en fait $F_{m_2} \neq F_{m_1-1}$ et $F_{m_2} \neq F_{m_1}$. En conséquence, $m_2 > m_1$, soit $n_1 < G_{m_1} < G_{m_2} \leq n_2$.

Minorons maintenant G_{m_2}/n_1. On a

$$\begin{aligned} A_{m_2} m_2 = A_{m_1} m_1 &\alpha(G_{m_1+1} - G_{m_1} - 1)(m_1+1) \\ &\times \alpha(G_{m_1+2} - G_{m_1+1} - 1)(m_1+2)\ldots \\ &\times \alpha(G_{m_2} - G_{m_2-1} - 1)m_2. \end{aligned} \tag{21}$$

En passant aux fréquences,

$$\begin{aligned} G_{m_2}F_{m_2} = G_{m_1}F_{m_1} &+ (G_{m_1+1} - G_{m_1})f_{G_{m_1+1}-G_{m_1}-1} \\ &+ \ldots + (G_{m_2} - G_{m_2-1})f_{G_{m_2}-G_{m_2-1}}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $f_{G_{m_1+i+1}-G_{m_1+i}} \leq b + \varepsilon$ pour tout i, $0 \leq i \leq m_2 - m_1 - 1$, d'où, en utilisant les inégalités déjà obtenues,

$$(b - 3\varepsilon)G_{m_2} \leq F_{m_2}G_{m_2} \leq \left(\frac{a+b}{2} + \eta + \varepsilon\right)G_{m_1} + (b+\varepsilon)(G_{m_2} - G_{m_1}),$$

soit

$$\frac{G_{m_2}}{n_1} > \frac{G_{m_2}}{G_{m_1}} \geq \frac{(b-a)/2 - \eta}{4\varepsilon} = \frac{\eta}{\varepsilon}\cdot \tag{22}$$

Étape 2 : *une contradiction.* On construit dans cette seconde étape une suite $(\gamma_k)_k$ décroissante telle que, pour tout entier n,

$$n_1 < n \leq G_{m_2+k+1} \;\Rightarrow\; f_n \geq \gamma_k. \tag{23}$$

Commençons par $k = 0$. Soit n, $n_1 < n \leq G_{m_2+1}$. Si $n \leq n_2$, alors $f_n \geq a+\eta$. Si $(G_{m_2} \leq)\ n_2 < n < G_{m_2+1}$, on écrit $n = eG_{m_2} + r$. D'après le lemme 5(a), si $n_1 < r < G_{m_2}$, il s'ensuit $f_n \geq \min(F_{m_2}, f_r) \geq \min(b - 3\varepsilon, a+\eta) = a+\eta$. Si $r \leq n_1$, en tenant compte de (22) et (18), le lemme 5(a) montre que

$$f_n \geq \left(1 - \frac{r}{n}\right)F_{m_2} \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)(b - 3\varepsilon) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)(a+\eta).$$

Pour $n = G_{m_2+1}$, on a

$$F_{m_2+1} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) f_{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} < \frac{G_{m_1}}{G_{m_2}} < \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

En reprenant les minorations ci-dessus, on trouve : ou bien $f_{n-1} \ge a + \eta$ et alors $F_{m_2+1} \ge (1 - \varepsilon/\eta)(a + \eta)$, ou bien

$$f_{n-1} \ge \Big(1 - \frac{r}{n-1}\Big)(b - 3\varepsilon) \ge \Big(1 - \frac{r}{n-1}\Big)(a + \eta)$$

avec $r \le n_1$ ($< G_{m_1}$). Mais

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{r}{n-1}\Big) \ge 1 - \frac{r+1}{n-1} \ge 1 - \frac{G_{m_1}}{G_{m_2}} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

On réalise donc (23) (pour $k = 0$) en prenant

$$\gamma_0 = \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\Big)(a + \eta).$$

Supposons avoir calculé γ_{k-1}. Soit $G_{m_2+k} < n < G_{m_2+k+1}$. Effectuons encore une fois la division euclidienne $n = eG_{m_2+k} + r$. Si $r > n_1$, on a $f_n \ge \min(F_{m_2+k}, f_r) \ge \gamma_{k-1}$. Si $r \le n_1$,

$$f_n \ge \Big(1 - \frac{G_{m_1}}{G_{m_2+k}}\Big) F_{m_2+k} \ge \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \frac{G_{m_2}}{G_{m_2+k}}\Big) \gamma_{k-1}.$$

Pour $n = G_{m_2+k+1}$, on a $f_{n-1} \ge \gamma_{k-1}$, ou $f_{n-1} \ge (1 - r/(n-1))\gamma_{k-1}$ avec toujours $r \le n_1$. Comme $1 - 1/n \ge 1 - G_{m_1}/G_{m_2+k}$ et

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{r}{n-1}\Big) \ge 1 - \frac{r+1}{n-1} \ge 1 - \frac{G_{m_1}}{G_{m_2+k}},$$

tous ces calculs amènent à prendre

$$\gamma_k = \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \frac{G_{m_2}}{G_{m_2+k}}\Big) \gamma_{k-1}.$$

Le produit infini

$$u(\varepsilon) := \prod_{k=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \frac{G_{m_2}}{rG_{m_2+k}}\Big)$$

est convergent. L'inégalité $-2u < \log(1-u)$ sur $[0, 1/2]$ montre que $u(\varepsilon)$ est minoré par $\exp(-(2\varepsilon/\eta) G_{m_2} \sum_{k \ge m_2}^{\infty} G_k^{-1})$ et l'on a $f_n \ge (a + \eta)u(\varepsilon)$ pour tout entier $n > n_1$. Sous l'hypothèse (i), il existe une constante C telle que $u(\varepsilon) \ge \exp(-(2C/\eta)\varepsilon)$ pour tout ε, d'où $\lim_{\varepsilon \to 0} u(\varepsilon) = 1$, ce qui contredit (17). ∎

La conjonction des théorèmes 3, 4 et 7 entraîne le résultat suivant :

Corollaire 3. *Si τ est continue et si la condition* (i) *du théorème* 7 *est vérifiée, alors* (X_G, σ) *est strictement ergodique.*

Remarque 4. Les hypothèses du théorème 7 sont vérifiées s'il existe une constante $a > 1$ telle que $aG_n \leq G_{n+1}$ pour tout n. Comme cas particuliers, on peut mentionner les échelles données par une relation de récurrence linéaire et celles issues d'un β-shift. Le cas d'un β-shift purement périodique a été élucidé dans [GLT], qui en établit l'unique ergodicité et calcule explicitement la mesure invariante.

Exemple 10. Qu'une échelle soit de valumètre strictement ergodique n'implique pas que le nombre de branches issues de chaque sommet de son arbre des retenues soit fini (*i.e.* que l'odomètre soit continu), comme le montre l'exemple suivant. Prenons $G_{2^n+1} = 2G_{2^n} + 1$ et $G_{m+1} = 2G_m$ pour $\log_2 m \notin \mathbb{N}$. La descente correspondante est donnée par $T_G(2^n) = -1$ et $T_G(m) = m - 1$. Par ailleurs, $X_G^{(2)} = X_G^{(3)} = \emptyset$ et les éléments de $X_G^{(1)}$ comptent, soit une fois la lettre ∞, soit une fois le mot $\infty\infty$, et ce une seule fois. Alors, le valumètre est strictement ergodique d'après les théorèmes 3 et 7 et le lemme de récurrence de Poincaré garantit que la mesure invariante μ vérifie $\mu(U_\infty) = 0$, donc $\mu(X_G^{(0)}) = 1$.

4.4. *Entropie.* Cette partie est consacrée à l'étude de l'entropie topologique $h(\mathcal{X}_G)$ du valumètre (X_G, σ) ou, ce qui revient au même, de son extension naturelle $(\widetilde{X}_G, \widetilde{\sigma})$. On examinera aussi l'entropie métrique $h_\lambda(\mathcal{K}_G)$ de l'odomètre muni d'une mesure τ-invariante λ.

Réglons tout d'abord le cas où $s = \limsup(G_{m+1} - G_m)$ est fini. La suite A se présente alors sous la forme

$$A = a_1 a_2 \ldots a_{n_0} m_0 \alpha_0 (m_0 + 1) P_1 \ldots (m_0 + k) P_k \ldots \tag{24}$$

pour un certain entier m_0, avec $n_0 = G_{m_0} - 1$, et des préfixes P_i (éventuellement vides) de A de longueur strictement inférieure à s. Alors, $\widetilde{X}_G = \widetilde{X}_G^{(3)}$. Réciproquement, si le valumètre vérifie $\widetilde{X}_G = \widetilde{X}_G^{(3)}$, la suite A n'est pas récurrente, ce qui équivaut à $(G_{m+1} - G_m)_m$ bornée (proposition 5). Précisons maintenant la structure de $\widetilde{X}_G$. Pour cela, introduisons le sous-shift bilatéral Σ_s, dit *s-multinacci*, formé des mots bi-infinis sur l'alphabet $\{\infty, 0\}$ qui ne contiennent pas le facteur 0^s. De manière évidente, un point de $\widetilde{X}_G$ appartient à $C^{\mathbb{Z}}$ (ensemble réduit à $\{\infty\}^{\mathbb{Z}}$ si $s = 1$) où C est le code suffixe $\{\infty, \infty a_1, \ldots, \infty a_1 \ldots a_{s-1}\}$. Ceci montre que $(\widetilde{X}_G, \widetilde{\sigma})$ est topologiquement isomorphe à un sous-shift de Σ_s. Rappelons que l'entropie topologique de Σ_s est égale à $\log \theta_s$, où θ_s est la plus grande racine du polynôme (irréductible) $X^s - X^{s-1} - \ldots - X - 1$. Résumons :

Proposition 10. *$\mathcal{K}_G$ est dénombrable si, et seulement si, l'extension naturelle du valumètre se réduit à la composante $\widetilde{X}_G^{(3)}$. Dans ces conditions,* *il est topologiquement isomorphe à un sous-shift du shift s-multinacci avec*

$$s = \limsup_m (G_{m+1} - G_m).$$

En particulier, $h(X_G) \le \log \theta_s$.

Nous supposons désormais que $\mathcal{K}_G$ est un ensemble de Cantor ou, de manière équivalente, que A est récurrent. Pour chaque entier $n > 0$, introduisons le facteur topologique $\pi_n : (\widetilde{\Lambda}^\omega, \widetilde{\sigma}) \to (\{0,\infty\}^{\mathbb{Z}}, \widetilde{\sigma})$ défini coordonnée à coordonnée par

$$\pi_n(\omega)_k = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le \omega_k < n, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $Y_n := \pi_n(\widetilde{X}_G)$; notons encore π_n la restriction de π_n à $\widetilde{X}_G$. Remarquons maintenant que si $\pi_n(x) = \pi_n(x')$ et $0 \le m \le n$, la proposition 1(vii) assure que $\pi_m(x) = \pi_m(x')$, ce qui permet de définir $\pi_{n,m} : (Y_n, \widetilde{\sigma}) \to (Y_m, \widetilde{\sigma})$ par $\pi_{n,m}(y) := \pi_m(x)$ pour un point x quelconque de $\widetilde{X}_G$ tel que $\pi_n(x) = y$. Il est clair que $\pi_{n,m}$ est continue, surjective, commute avec le décalage et vérifie $\pi_{n,m} \circ \pi_{m,l} = \pi_{n,l}$ si $n \ge m \ge l$. Autrement dit, l'ensemble des facteurs $\{\pi_{n,m} : n \ge m \ge 0\}$ forme un système projectif. Notons (Y_∞, S) sa limite projective et $p_n : Y_\infty \to Y_n$ les facteurs associés. Il existe alors un unique facteur $p : (\widetilde{X}_G, \widetilde{\sigma}) \to (Y_\infty, S)$ tel que $\pi_n = p_n \circ p$, qui réalise un isomorphisme entre les flots $\widetilde{X}_G$ et Y_∞. L'existence de p résulte des définitions. Il est clair que p est injective. Pour montrer la surjectivité, rappelons que si $m'\beta m''$ est un facteur de A tel que le mot β ait toutes ses lettres strictement inférieures à m' et m'', alors β est préfixe de A. Soit donc $\eta \in Y_\infty$, défini par ses projections η_n et soit $x_n \in \widetilde{X}_G$ tel que $\pi_n(x_n) = \eta_n$. Alors, toutes les positions des lettres strictement inférieures à n dans x_n sont déterminées de manière univoque. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient immédiatement un élément $\xi \in \widetilde{X}_G$, limite de la suite $(x_n)_n$, tel que $p(\xi) = \eta$; d'où la surjectivité.

Revenons à l'entropie topologique ; comme elle commute avec le passage à la limite projective, on obtient :

Proposition 11. *Pour toute échelle G telle que la suite $(G_{m+1} - G_m)_m$ est non bornée, l'entropie $h(\mathcal{X}_G)$ du valumètre est égale à* $\lim_n h(Y_n)$. *En particulier*, $h(\mathcal{X}_G) \le \log 2$.

La proposition 7 montre qu'il existe des échelles G telles que $\mathcal{K}_G$ soit de Cantor et, avec un abus de notation, $\pi_n(X_G \setminus X_G^{(0)}) = \{0,\infty\}^{\mathbb{N}}$, d'où $\pi_n(\widetilde{X}_G) = \{0,\infty\}^{\mathbb{Z}}$ pour tout $n > 0$ et donc $p(\widetilde{X}_G) = \{0,\infty\}^{\mathbb{Z}}$. Pour de telles échelles, le valumètre est donc d'entropie maximale, c'est-à-dire $\log 2$. On peut être plus précis ; pour cela, introduisons

$$\varrho_n := \min\{l \in \mathbb{N} : \exists\, k,\ \exists y \in Y_n,\ y_k = y_{k+1+l} = \infty\},$$

et $\varrho_G := \sup_n \varrho_n$. Notons que $\varrho_G = \infty$ si τ est continue.

PROPOSITION 12. *Si $\varrho_G = \varrho < \infty$, alors $h(\mathcal{X}_G) \le \log \lambda_\varrho$ où λ_ϱ est l'unique racine strictement plus grande que un du polynôme $P_\varrho(X) = X^{\varrho+1} - X^\varrho - 1$ (avec $P_0(X) = X - 2$) et si $\varrho = \infty$, alors $h(\mathcal{X}_G) = 0$.*

Démonstration. Supposons $\varrho_G = \varrho < \infty$. Alors $\varrho = \varrho_n$ pour tout n assez grand et, par définition, aucun des mots $\infty 0^k \infty$, pour $0 \le k < \varrho$, n'apparaît dans $p(\widetilde{X}_G)$. En conséquence, l'entropie topologique de $\mathcal{X}_G$ est majorée par celle du sous-shift du shift plein $(\{0,\infty\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, où seuls les mots ci-dessus sont interdits. Interprétons le nombre de mots N_n de longueur n concernés par cette interdiction comme étant le nombre de chemins de longueur n sur un graphe étiqueté adéquat. Le lecteur vérifiera ensuite que $\lim_n n^{-1} \log N_n = \log \lambda_\varrho$. La dernière partie de la proposition vient de ce que $\lim_{\varrho\to\infty} \lambda_\varrho = 1$. ∎

Considérons enfin une mesure de probabilité μ sur le valumètre et soit $\mu_n := \mu \circ \pi_n^{-1}$ son image sur Y_n. Le système dynamique (X_G, σ, μ) est, lui aussi, isomorphe à la limite projective du système $\{\pi_{n,m} : (Y_n, \sigma, \mu_n) \to (Y_m, \sigma, \mu_m)\}$, d'où, en passant aux entropies métriques :

$$h_\mu(\mathcal{X}_G) = \lim_n h_{\mu_n}(Y_n).$$

De plus, comme $h_{\mu_n}(Y_n)$ est majorée par l'entropie de la partition génératrice de $(Y_n, \widetilde{\sigma})$ formée des deux cylindres de base U_0 et U_∞, on a :

$$\begin{aligned} (25)\quad h_\mu(\mathcal{X}_G) &\le -\lim_n [\mu(U_{\bar{n}}) \log(\mu(U_{\bar{n}})) + (1 - \mu(U_{\bar{n}}) \log(1 - \mu(U_{\bar{n}}))] \\ &= -[\mu(U_\infty) \log \mu(U_\infty) + (1 - \mu(U_\infty)) \log(1 - \mu(U_\infty))]. \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de (25) la proposition suivante :

PROPOSITION 13. *Si μ est une mesure de probabilité sur X_G, σ-invariante et portée par $X_G^{(0)}$, alors $h_\mu(\mathcal{X}_G) = 0$.*

5. Mesures invariantes sur l'odomètre. Il est maintenant loisible de tirer les conséquences de l'étude métrique du valumètre sur l'odomètre. Deux points essentiels justifiaient le recours au valumètre. Il est continu et les systèmes $(X_G^{(0)} \setminus \mathcal{O}(A), \sigma)$ et $(\mathcal{K}_G \setminus \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(0^\omega), \tau)$, où $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(0^\omega) = \mathcal{O}(0^\omega) \cup \bigcup_{n>0} \tau^{-n}(0^\omega)$, sont inversibles, conjugués par une bijection continue (d'inverse continue si τ l'est). Ces systèmes sont vides si, et seulement si, la suite $(G_{n+1} - G_n)$ est bornée (cf. théorème 1 dans [BDIL]). D'autre part, l'identification précédente est aussi, d'un point de vue métrique, très satisfaisante puisque, du côté de l'odomètre, $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(0^\omega)$ est négligeable pour toutes les mesures invariantes sur l'odomètre (théorème 8(1), infra).

Le théorème suivant regroupe des résultats qui sont des corollaires immédiats de cette étude. N'ont été conservées que les hypothèses portant sur l'odomètre lui-même ou directement sur l'échelle. Mais on peut noter, par exemple, que la proposition 9 donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une mesure invariante sur $(\mathcal{K}_G, \tau)$.

Théorème 8. (a) *Toute mesure invariante sur* $(\mathcal{K}_G, \tau)$ *est diffuse.*

(b) *La correspondance* $\lambda \mapsto \lambda \circ A_G^{-1}$ *détermine une bijection entre les mesures de probabilité sur* $\mathcal{K}_G$, τ*-invariantes, et celles sur* X_G, σ*-invariantes et portées par* $X_G^{(0)}$.

(c) *Si* $\sum_n 1/G_n$ *converge, il existe au moins une mesure invariante sur* $(\mathcal{K}_G, \tau)$. *Inversement, l'existence d'une telle mesure entraîne* $\liminf m/G_m = 0$.

(d) *Si la suite* $m \mapsto G_m \sum_{k=m}^{\infty} 1/G_k$ *est bornée et si* $\lim_n (G_{n+1} - G_n) = +\infty$, *alors* $(\mathcal{K}_G, \tau)$ *est uniquement ergodique.*

(e) *Pour toute mesure* λ, *invariante sur* $(\mathcal{K}_G, \tau)$, *l'entropie métrique du système dynamique* $(\mathcal{K}_G, \tau, \lambda)$ *est nulle.*

(f) *Si* τ *est continue, l'entropie topologique de l'odomètre est nulle.*

Démonstration. (a) Tout élément de $\mathcal{K}_G$ distinct de 0^ω admet un unique antécédent par τ. Il s'ensuit, pour λ mesure τ-invariante, que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \notin J(\mathbb{N})$. De plus, $\lambda(\{x\})$ ne dépend pas de $x \in J(\mathbb{N})$, d'où $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in J(\mathbb{N})$.

(b) L'application $A_G(\cdot)$, au vu de la proposition 2 et de (a), établit une correspondance biunivoque entre les mesures λ, τ-invariantes sur $\mathcal{K}_G$, et les mesures μ, σ-invariantes sur $X_G^{(0)}$. Explicitement, $\mu = \lambda \circ A_G^{-1}$, identifiant du point de vu métrique les systèmes dynamiques $(\mathcal{K}_G, \tau, \lambda)$ et $(X_G^{(0)}, \sigma, \mu)$.

(c) et (d). Ce sont les traductions respectives, par (b), du corollaire 2(i), (ii) et du théorème 7.

(e) Le cas où $\mathcal{K}_G$ est dénombrable est exclu par 1. Les systèmes $(\mathcal{K}_G, \tau, \lambda)$ et (X_G, σ, μ) $(\mu = \lambda \circ A_G^{-1})$ sont métriquement isomorphes d'après (b) et, par la proposition 13, leurs entropies sont nulles.

(f) Résulte de (e) et du principe variationnel (cf. [Bow]). ∎

Exemple 11. Certaines des constructions de la section 4 éclairent les hypothèses du théorème 8. Ainsi, l'exemple 6 montre que l'on peut avoir $(G_n/n)_n$ tendant vers l'infini, mais pas de mesure invariante pour l'odomètre $(\mathcal{K}_G, \tau)$. L'exemple 7 prouve, à l'inverse, qu'il peut exister au moins une mesure invariante avec $\liminf G_n/n = 1$. On peut également avoir plusieurs mesures invariantes et τ continue (exemple 9). Enfin, l'unique ergodicité n'entraîne pas la continuité de τ (exemple 10).

Références

[ABS] J.-P. Allouche, J. Bétréma et J. Shallit, *Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre*, RAIRO Inform. Théor. Appl. 23 (1989), 235–249.

[BDIL] G. Barat, T. Downarowicz, A. Iwanik et P. Liardet, *Propriétés topologiques et combinatoires des échelles de numérations*, Colloq. Math. 84/85 (2000), Part 2, 285–306.

[Bow] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. 470, Springer, 1975.

[CW] H. A. Cameron and D. Wood, *Pm numbers, ambiguity, and regularity*, RAIRO Inform. Théor. Appl. 27 (1993), 261–275.

[Dou] M. Doudekova, *Une famille d'odomètres faiblement mélangeants*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 331 (2000), 633–636.

[Fra] A. S. Fraenkel, *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 105–114.

[GLT] P. J. Grabner, P. Liardet and R. F. Tichy, *Odometers and systems of numeration*, Acta Arith. 70 (1995), 103–123.

[Mi] D. P. Milman, *Characteristics of extremal points of regularly convex spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 57 (1947), 119–122.

[SV] N. Sidorov and A. M. Vershik, *Arithmetic expansions associated with rotation of the circle and with continued fractions*, Algebra i Analiz 5 (1993), 97–115 (in Russian); English transl.: St Petersburg Math. J. 5 (1994), 1121–1136.

[So] B. Solomyak, *Substitutions, adic transformations and beta-expansions*, in: Symbolic Dynamics and its Applications, P. Walters (ed.), Contemp. Math. 135, Amer. Math. Soc., 1992, 361–372.

[Ve] A. M. Vershik, *Uniform algebraic approximation of the shift and multiplication operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 259 (1981), 526–529 (in Russian); English transl.: Soviet Math. Dokl. 24 (1981), 97–100.

20, rue Fourcroy
F-75017 Paris, France
E-mail: barat@finanz.math.tu-graz.ac.at

Université de Provence
Laboratoire ATP (UMR 6632)
39, rue Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13, France
E-mail: liardet@gyptis.univ-mrs.fr

Institute of Mathematics
Technical University of Wrocław
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław, Poland
E-mail: downar@im.pwr.wroc.pl

Reçu le 5.2.2001 (3965)