ACTA ARITHMETICA
127.3 (2007)

Capitulation des 2-classes d'idéaux de certains corps biquadratiques cycliques

par

Abdelmalek Azizi et Mohammed Talbi (Oujda)

1. Introduction. Soient M un corps de nombres de degré fini sur $\mathbb{Q}$, L une extension non ramifiée de M et p un nombre premier. L'extension $M^{(1)}$ de M, abélienne maximale et non ramifiée pour tous les idéaux premiers, finis et infinis, est dite le *corps de classes de Hilbert* de M. De même l'extension $M_p^{(1)}$ de M dont le degré est une puissance de p, abélienne maximale et non ramifiée pour tous les idéaux premiers, finis et infinis, est dite le *p-corps de classes de Hilbert* de M.

La recherche des idéaux de M qui *capitulent* dans L (deviennent principaux dans L) a été l'objet d'étude de plusieurs mathématiciens. En effet, Kronecker était parmi les premiers à avoir abordé des problèmes de capitulation dans le cas des corps quadratiques imaginaires. Dans le cas où L est égal au corps de classes de Hilbert $M^{(1)}$ de M, D. Hilbert avait conjecturé que toutes les classes de M capitulent dans $M^{(1)}$ (théorème de l'idéal principal). La preuve de ce dernier théorème a été réduite par E. Artin à un problème de la théorie des groupes, et c'est Ph. Furtwängler qui l'avait achevée.

Le cas où L/M est une extension cyclique et $[L:M]=p$, un nombre premier, a été traité par Hilbert. Sa réponse est le sujet du “théorème 94” qui affirme qu'il y a au moins une classe non triviale dans M qui capitule dans L. De plus, Hilbert avait trouvé le résultat suivant : Soient σ un générateur du groupe de Galois de L/M, $N_{L/M}$ la norme de L/M, E_M le groupe des unités de M, E_L celui de L et E_L^* le sous-groupe des unités de E_L dont la norme, relative à l'extension L/M, est égale à 1. Alors le groupe des classes de M qui capitulent dans L est isomorphe au groupe quotient $E_L^*/E_L^{1-\sigma} = H^1(E_L)$, le groupe cohomologique de dimension 1.

À l'aide de ce théorème et de plusieurs résultats sur les groupes cohomologiques des unités, on obtient :

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11R37, 11R29, 11R16.

A. Azizi est membre de l'Académie Hassan II des Sciences et Techniques, Maroc.

Théorème 1 (voir [10]). *Soit L/M une extension cyclique non ramifiée de degré un nombre premier. Alors le nombre des classes qui capitulent dans L/M est égal à*

$$[L:M][E_M : N_{L/M}(E_L)]. \blacksquare$$

Aussi on note les travaux suivants sur des corps ayant une 2-partie du groupe de classes de type $(2,2)$. H. Kisilevsky [13] a étudié la capitulation pour les corps de nombres ayant un 2-groupe des classes de type $(2,2)$. En utilisant un calcul sur le transfert, il a lié le problème de capitulation à la structure du groupe de Galois de $M_2^{(2)}/M$. A. Azizi [1] a étudié la capitulation des corps $M = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ où $i = \sqrt{-1}$ et d est un entier naturel sans facteurs carrés et tel que le 2-groupe de classes de M est de type $(2,2)$; en utilisant les unités, il a trouvé le nombre des classes de M qui capitulent dans les sous-extensions de $M_2^{(1)}/M$, ensuite il a déterminé la structure du groupe de Galois de $M_2^{(2)}/M$. Enfin A. Azizi et A. Mouhib [4, 5] ont étudié le même problème pour les corps $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$.

Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon\sqrt{2}})$ où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ε l'unité fondamentale de k, p et q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv \pm 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. D'après E. Brown et C. J. Parry [7], la 2-partie $C_{2,K}$ du groupe de classes de K est de type $(2,2)$, par suite $K_2^{(1)}$ contient trois extensions F_i/K, $i = 1,2,3$.

Dans ce papier, on s'intéresse au problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans F_i $(i = 1,2,3)$ et à déterminer la structure de G. En particulier, on démontre le résultat suivant (théorèmes 7–9) :

Théorème 2. *Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon\sqrt{2}})$ où ε est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, p et q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv \pm 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, Q_{K_0} l'indice des unités de K_0, $F_1 = K(\sqrt{pq})$, $F_2 = K(\sqrt{p^*})$, $F_3 = K(\sqrt{q^*})$ avec $p^* = (-1)^{(p-1)/2}p$, $q^* = (-1)^{(q-1)/2}q$ et $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. Alors :*

(1) *Si $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$, alors les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i $(i = 1,2,3)$ et le groupe G est abélien $(\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

(2) *Si $p \equiv q \equiv 1 \bmod 4$, alors on a :*

   (i) *Si $Q_{K_0} = 1$, alors les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans F_1, tandis que dans chaque F_i, $i \in \{2,3\}$, deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent et le groupe G est diédral d'ordre 2^m $(m \geq 3)$.*

(ii) *Si* $Q_{K_0} = 2$, *alors dans chaque extension* F_i, $i \in \{1,2,3\}$, *il existe exactement deux classes de* $C_{2,K}$ *qui capitulent et le groupe* G *est quaternionique d'ordre* 2^m $(m \geq 3)$.

2. Préliminaires

Définition 1. On appelle *corps de genres* d'un corps de nombres K, qu'on note $K^{(*)}$, la plus grande extension de K de la forme KL qui est non ramifiée pour tous les idéaux premiers de K, finis et infinis, et telle que L est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$.

Proposition 1 (voir [11]). *Soit* K *un corps de nombres abélien sur* $\mathbb{Q}$, *de degré* n. *Si* $n = q^s$ *où* q *est un nombre premier et* $s > 0$, *alors*

$$K^{(*)} = \Big(\prod_{p \mid D_K,\, p \neq q} L(p)\Big) K$$

où $L(p)$ *est l'unique sous-corps, de degré* $e(p)$ (*l'indice de ramification de* p *dans* K) *sur* $\mathbb{Q}$, *de* $\mathbb{Q}(\xi_p)$ (*le* p*-ième corps cyclotomique*) *et* D_K *le discriminant de* K.

Corollaire 1. *Soient* $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon\sqrt{2}})$ *où* $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ε *l'unité fondamentale de* k, p *et* q *deux nombres premiers impairs différents. Alors* $K^{(*)} = K(\sqrt{p^*}, \sqrt{q^*})$ *où* $p^* = (-1)^{(p-1)/2}p$ *et* $q^* = (-1)^{(q-1)/2}q$.

Démonstration. Comme les nombres premiers qui divisent D_K sont p, q et 2, la proposition 1 montre que $K^{(*)} = L(p)L(q)K$, où $L(p)$ (resp. $L(q)$) est l'unique sous-corps, de degré 2 sur $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}(\xi_p)$ (resp. $\mathbb{Q}(\xi_q)$), et comme $L(p) = \mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$ (resp. $L(q) = \mathbb{Q}(\sqrt{q^*})$), on a le résultat. ∎

Dans toute la suite de cette section on désigne par K un corps de nombres, C_K son groupe de classes, $C_{2,K}$ la 2-partie de C_K, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$, G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$ et G' son sous-groupe dérivé. Alors $G' \simeq \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K_2^{(1)})$ et $G/G' \simeq \mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$, et on sait par la théorie des corps de classes que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq C_{2,K}$, ainsi $G/G' \simeq C_{2,K}$.

Soient F une extension cyclique non ramifiée de K et j l'application de C_K dans C_F qui fait correspondre à la classe d'un idéal $\mathcal{A}$ de K, la classe de l'idéal engendré par $\mathcal{A}$ dans F ; et soit N la norme de F/K. Alors, on dit que l'extension F/K est :

- *de type* (A) si $|\ker j \cap N(C_F)| > 1$,
- *de type* (B) si $|\ker j \cap N(C_F)| = 1$.

Définition 2. Soient m un entier > 2, Q_m le groupe des quaternions, D_m le groupe diédral et S_m le groupe semi-diédral d'ordre 2^m. Ces groupes sont définis comme suit. Chaque groupe est engendré par deux éléments x et y tels que :

$$\begin{aligned}
Q_m &= \langle x, y\rangle \quad \text{où} \quad x^{2^{m-2}} = y^2 = a,\ a^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1},\\
D_m &= \langle x, y\rangle \quad \text{où} \quad x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1},\\
S_m &= \langle x, y\rangle \quad \text{où} \quad x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{2^{m-2}-1}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; alors $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui donne que G' est cyclique. Donc la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K s'arrête en $K_2^{(2)}$.

En plus, on sait que si G est d'ordre 2^m, $m > 1$, et $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors, soit G est isomorphe à Q_m, D_m, ou S_m $(m > 2)$, soit à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(m = 2)$. Dans tous ces cas, on a $G' = \langle x^2\rangle$ et les trois sous-groupes d'indice 2 dans G sont : $H_1 = \langle x\rangle$, $H_2 = \langle x^2, y\rangle$ et $H_3 = \langle x^2, xy\rangle$, et si $G' \neq 1$, alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et $\langle x^4\rangle$ est l'unique sous-groupe de G' d'indice 2.

Soient L le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par $\langle x^4\rangle$, F_i $(i = 1, 2, 3)$ le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par H_i, et j_i l'application j définie pour $F = F_i$.

Théorème 3. *On suppose que $G/G' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors on a :*

(i) *Si $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$, alors les corps F_i sont de type (A), $|\ker j_i| = 4$ pour $i = 1, 2, 3$ et $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
(ii) *Si $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq Q_3$, alors les corps F_i sont de type (A), $|\ker j_i| = 2$ pour $i = 1, 2, 3$ et $G \simeq Q_3$.*
(iii) *Si $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq D_3$, alors les corps F_2 et F_3 sont de type (B) et $|\ker j_2| = |\ker j_3| = 2$. De plus, si F_1 est de type (B) alors $|\ker j_1| = 2$ et $G \simeq S_m$. Si F_1 est de type (A) et $|\ker j_1| = 2$, alors $G \simeq Q_m$. Enfin, si F_1 est de type (A) et $|\ker j_1| = 4$, alors $G \simeq D_m$.*

On trouve plus d'information sur ce dernier théorème dans [13].

Corollaire 2. *Soit K tel que $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors on a trois types de capitulation :*

- *Type 1 : Les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i/K, $i = 1, 2, 3$. Ceci est possible si et seulement si $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$.*
- *Type 2 : Les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent toutes seulement dans une extension parmi les trois extensions F_i/K, $i = 1, 2, 3$. Dans ce cas le groupe G est diédral.*
- *Type 3 : Seulement deux classes capitulent dans chacune des extensions F_i/K, $i = 1, 2, 3$. Dans ce cas le groupe G est semi-diédral ou quaternionique.*

$\lvert\ker j_1\rvert$ (A/B)	$\lvert\ker j_2\rvert$ (A/B)	$\lvert\ker j_3\rvert$ (A/B)	G
4	4	4	$(2,2)$
2 A	2 A	2 A	Q_3
4	2 B	2 B	D_m, $m \geq 3$
2 A	2 B	2 B	Q_m, $m > 3$
2 B	2 B	2 B	S_m, $m \geq 3$

3. Unités de certains corps de nombres de degré 4 ou 8 sur $\mathbb{Q}$. Soient d_1 et d_2 deux entiers naturels sans facteurs carrés et premiers entre eux, $d_3 = d_1 d_2$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_3})$), $K_0 = k_1 k_2$, Q_{K_0} l'indice des unités de K_0, et N_1 (resp. N_2, N_3) la norme de K_0/k_1 (resp. K_0/k_2, K_0/k_3).

On sait d'après [14] et [15] qu'un système fondamental d'unités (**SFU**) de K_0 est, à une permutation près des indices, l'un des systèmes suivants :

(i) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$;

(ii) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ $(N_2(\varepsilon_3) = 1)$;

(iii) $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ $(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = 1)$;

(iv) $\{\varepsilon_1, \sqrt{\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ $(N_1(\varepsilon_2) = N_1(\varepsilon_3) = 1)$;

(v) $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}\}$ $(N_2(\varepsilon_3) = N_3(\varepsilon_j) = 1,\ j = 1, 2)$;

(vi) $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ $(N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = N_2(\varepsilon_3) = \pm 1)$.

Proposition 2 (voir [2]). *Soient K_0 un corps de nombres abélien réel et β un entier algébrique de K_0, positif, sans facteurs carrés. On suppose que $K = K_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension quadratique de K_0, abélienne sur $\mathbb{Q}$ et que $i = \sqrt{-1}$ n'appartient pas à K. Soit $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\}$ un* **SFU** *de K_0. On choisit, sans restreindre la géneralité, les unités ε_j positives. Alors on a :*

(1) *S'il existe une unité de K_0 de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1} \cdots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \{0, 1\}$, telle que $\beta\varepsilon$ est un carré dans K_0, alors $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un* **SFU** *de K.*

(2) *Dans le cas contraire $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\}$ est un* **SFU** *de K.* ∎

Lemme 1. *Soient $K = k_1(\sqrt{-n\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, n un entier naturel impair sans facteurs carrés et ε_1 l'unité fondamentale de k_1. Alors $\{\varepsilon_1\}$ est un* **SFU** *de K.*

Démonstration. Puisque $\{\varepsilon_1\}$ est un **SFU** de k_1 et $n\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans k_1, d'après la proposition 2, $\{\varepsilon_1\}$ est un **SFU** de K. ∎

Lemme 2 (voir [3]). *Soient d un entier relatif sans facteurs carrés et $\varepsilon = x + y\sqrt{d}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où x et y sont des entiers ou* *bien des demi-entiers. On suppose que ε est de norme 1. Alors $2(x \pm 1)$ et $2d(x \pm 1)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbb{Q}$.* ∎

Remarque 1. Soit $\varepsilon = x+y\sqrt{d}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où d est un entier relatif sans facteurs carrés. On suppose que ε est de norme 1. Alors 2ε est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ si et seulement si $x \pm 1$ est un carré dans $\mathbb{Q}$. En effet,

$$2\varepsilon = (a+b\sqrt{d})^2 \iff \begin{cases} 2x = a^2 + db^2, \\ 2y = 2ab. \end{cases}$$

Comme $x^2 - dy^2 = 1$, le dernier système est résoluble si et seulement si $x \pm 1$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Lemme 3 (voir [3]). *Soient p un nombre premier impair et $\varepsilon = x+y\sqrt{2p}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$. On suppose que ε est de norme 1. Alors $x \pm 1$ est un carré dans $\mathbb{N}$ et 2ε est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$.* ∎

Lemme 4. *Soient p, q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, et $\varepsilon = s + t\sqrt{2pq}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$. Alors $s-1$ est un carré dans $\mathbb{N}$ et 2ε est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$.*

Démonstration. Puisque ε est de norme 1, on a $(s+1)(s-1) = 2pqt^2$, et comme le plus grand commun diviseur de $s+1$ et $s-1$ divise 2, il existe α, β et γ dans $\{0,1\}$ tels que $2^\alpha p^\beta q^\gamma (s+1)$ est un carré dans $\mathbb{N}$.

- D'après le lemme 2, $2(s+1)$ et $pq(s+1)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbb{N}$.
- Si $\sqrt{2p(s+1)} \in \mathbb{N}$, alors il existe $(t_1,t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$s+1 = 2pt_1^2, \quad s-1 = qt_2^2, \quad t_1t_2 = t\,;$$

ainsi $2 = 2pt_1^2 - qt_2^2$, ce qui implique d'une part que $\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{2p}{q}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$, donc $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, et d'autre part que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{-q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right)$, donc $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$; ainsi $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, ce qui est impossible puisque $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$. Et de même on montre que $\sqrt{2q(s+1)} \notin \mathbb{N}$.

- Si $\sqrt{p(s+1)} \in \mathbb{N}$, alors il existe $(t_1,t_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$s+1 = pt_1^2, \quad s-1 = 2qt_2^2, \quad t_1t_2 = t\,;$$

ainsi $2 = pt_1^2 - 2qt_2^2$, ce qui implique d'une part que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{-2q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right)$, donc $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, et d'autre part que $\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$; ainsi $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, ce qui est impossible puisque $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$. Et de même on montre que $\sqrt{q(s+1)} \notin \mathbb{N}$.

Ainsi $2pq(s+1)$ est un carré dans $\mathbb{N}$, ce qui montre que $s-1$ est un carré dans $\mathbb{N}$ et ainsi 2ε est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$. ∎

Théorème 4. *Soient p, q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$, $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3)*

l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (*resp.* $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$) *et* $F_1 = K_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$. *Alors* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un* **SFU** *de* K_0 *et de* F_1.

Démonstration. On sait d'après [18] que

$$h_2(K_0) = \frac{1}{4}\, Q_{K_0} h_2(2) h_2(pq) h_2(2pq),$$

où $h_2(K_0)$, $h_2(m)$ sont respectivement la 2-partie du nombre de classes de K_0 et $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ où $m = 2, pq, 2pq$. Or $h_2(2) = h_2(pq) = 1$ et comme $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$, d'après [12] on a $h_2(2pq) = 2$; de plus, $K_0/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ est cyclique, donc $h_2(K_0) = h_2(2pq)/2 = 1$; ainsi $Q_{K_0} = 2$. D'après le lemme 4, $2\varepsilon_3$ est un carré dans k_3, donc un carré dans K_0, d'où $\sqrt{\varepsilon_3} \in K_0$ (car $\sqrt{2} \in K_0$) ; ainsi en utilisant les résultats de [15] on trouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de K_0.

Montrons que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de F_1. En effet, soient $\varepsilon_2 = x + y\sqrt{pq}$ et $\varepsilon_3 = s + t\sqrt{2pq}$ et N_i la norme de K_0 sur k_i $(i = 1, 2, 3)$; alors d'après la proposition 2, pour montrer que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de F_1, on montre que $\eta\varepsilon_1\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0, pour $\eta = \varepsilon_1'^{j_1}\varepsilon_2'^{j_2}\varepsilon_3'$ où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Alors si $\eta = \varepsilon_1$, on montre que $\varepsilon_1^2\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0 : sinon il existe $x \in K_0$ tel que $\sqrt{2} = x^2$, et comme $N_2(\sqrt{2}) = N_2(x)^2 = -2$ et $N_2(x) \in k_2$, il s'ensuit que -2 est un carré dans $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, ce qui est absurde. Si $\eta = \varepsilon_2$, on suppose qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2} = x^2$; or $N_3(\varepsilon_1) = -1$, $N_3(\varepsilon_2) = 1$ et $N_3(\sqrt{2}) = -2$, donc $N_3(\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2}) = N_3(x)^2 = 2$, et puisque $N_3(x) \in k_3$, donc 2 est un carré dans $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$, ce qui est impossible. Si $\eta = \varepsilon_1\varepsilon_2$, on suppose qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_2\sqrt{2} = x^2$; comme $N_3(\varepsilon_2) = 1$ et $N_3(\sqrt{2}) = -2$, on a $N_3(\varepsilon_2\sqrt{2}) = N_3(x)^2 = -2$, ainsi -2 est un carré dans k_3, ce qui est impossible. Pour $\eta = \sqrt{\varepsilon_3}$ (resp. $\eta = \varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_3}$) on voit que $\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_3}$ (resp. $\sqrt{2\varepsilon_3}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2\varepsilon_3}$, $\varepsilon_2\sqrt{2\varepsilon_3}$) n'est pas un carré dans K_0, sinon en utilisant la norme de K_0 sur k_2 on trouve que $\sqrt{\pm 2} \in k_2$, ce qui est absurde. Cela prouve que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de F_1. ∎

Théorème 5. *Soient* p, q *deux nombres premiers différents tel que* $p \equiv q \equiv 5 \bmod 8$, $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, ε_1 (*resp.* ε_2, ε_3) *l'unité fondamentale de* $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (*resp.* $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$) *et* $F_1 = K_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$. *Alors* K_0 *et* F_1 *ont même* **SFU** *qui est l'un des systèmes* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *ou* $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Démonstration. Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, l'unité ε_3 est de norme -1, et ε_1 l'est aussi ; ainsi, si ε_2 est de norme 1, alors comme $\sqrt{\varepsilon_2} \notin K_0$ (voir [5, lemme 1]), d'après les résultats de [15], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0. Et si ε_2 est de norme -1, alors toujours d'après les résultats de [15], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

est un **SFU** de K_0 si $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \notin K_0$, et $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0 dans le cas contraire.

Montrons que K_0 et F_1 ont même **SFU**. En effet, soient $\varepsilon_2 = x + y\sqrt{pq}$ et $\varepsilon_3 = s + t\sqrt{2pq}$ et N_i la norme de K_0 sur k_i $(i = 1, 2, 3)$.

Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0 (dans ce cas ε_1, ε_3 sont de norme -1 et ε_2 est de norme ±1), alors d'après la proposition 2, pour montrer que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de F_1, on montre que $\eta\varepsilon_1\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0 pour $\eta = \varepsilon_1'^{j_1}\varepsilon_2'^{j_2}\varepsilon_3'$ où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Alors si $\eta = \varepsilon_1$, on montre que $\varepsilon_1^2\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0 : sinon il existe $x \in K_0$ tel que $\sqrt{2} = x^2$, et comme $N_2(\sqrt{2}) = N_2(x)^2 = -2$ et $N_2(x) \in k_2$, le nombre -2 est un carré dans $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, ce qui est absurde. Si $\eta = \varepsilon_2$, on suppose qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2} = x^2$; or $N_3(\varepsilon_1) = -1$, $N_3(\varepsilon_2) = \pm1$ et $N_3(\sqrt{2}) = -2$, donc $N_3(\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2}) = N_3(x)^2 = \pm2$, et puisque $N_3(x) \in k_3$, il vient que ±2 est un carré dans $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$, ce qui est impossible. Si $\eta = \varepsilon_3$, supposons qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\varepsilon_3\sqrt{2} = x^2$; comme $N_2(\varepsilon_1) = -1$, $N_2(\varepsilon_3) = -1$ et $N_2(\sqrt{2}) = -2$, on a $N_2(\varepsilon_1\varepsilon_3\sqrt{2}) = N_2(x)^2 = -2$; ainsi -2 est un carré dans $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, ce qui n'est pas le cas. Si $\eta = \varepsilon_2\varepsilon_3$, on suppose qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{2} = x^2$; comme $N_2(\varepsilon_1) = -1$, $N_2(\varepsilon_2) = \varepsilon_2^2$, $N_2(\varepsilon_3) = -1$ et $N_2(\sqrt{2}) = -2$, on a $N_2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{2}) = N_2(x)^2 = -2\varepsilon_2^2$; ainsi -2 est un carré dans $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, ce qui est impossible. Et par des raisonnements analogues on démontre les autres cas.

Si $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0 (dans ce cas ε_1, ε_2 et ε_3 sont de norme -1), alors d'après la proposition 2, pour montrer que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de F_1, on montre que $\eta\varepsilon_1\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0 pour $\eta = \varepsilon_1'^{j_1}\varepsilon_2'^{j_2}\varepsilon_3'$ où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Alors si $\eta = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, on montre que $\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ n'est pas un carré dans K_0 : sinon il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = x^2$, et comme $N_2(\varepsilon_1) = N_2(\varepsilon_3) = -1$, $N_2(\varepsilon_2) = \varepsilon_2^2$ et $N_2(\sqrt{2}) = -2$, on a $N_2(\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = N_2(x)^2 = \mp2\varepsilon_2$; ainsi $\mp2\varepsilon_2$ est un carré dans $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, donc on a une contradiction. Pour $\eta = \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_3$, on utilise le même raisonnement que dans le cas où $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0. Si $\eta = \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, supposons qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = x^2$; alors comme $N_3(\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = N_3(x)^2 = \pm2\varepsilon_3$, on trouve que $\pm2\varepsilon_3$ est un carré dans $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$, ce qui est absurde. Si $\eta = \varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, supposons qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\varepsilon_3\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = x^2$; alors comme $N_2(\varepsilon_1\varepsilon_3\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = N_2(x)^2 = \pm2\varepsilon_2$, on trouve que $\pm2\varepsilon_2$ est un carré dans k_2, donc un carré dans K_0, ce qui est absurde. Enfin si $\eta = \varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, supposons qu'il existe $x \in K_0$ tel que $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = x^2$; alors comme $N_2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = N_2(x)^2 = \pm2\varepsilon_2^3$, on trouve que $\pm2\varepsilon_2$ est un carré dans K_0, ce qui n'est pas le cas. Ceci achève la démonstration. ∎

THÉORÈME 6. *Soient p et q deux nombres premiers impairs différents tel que $p \equiv 1 \bmod 4$, $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$) et $F_2 = K_0(\sqrt{-q\varepsilon_1\sqrt{2}})$. Alors on a :*

(i) *Si ε_3 est de norme 1, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un* **SFU** *de K_0 et de F_2.*
(ii) *Sinon, $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un* **SFU** *de K_0 et de F_2.*

Démonstration. D'après [18], on a $h_2(K_0) = \frac{1}{4}Q_{K_0}h_2(2)h_2(p)h_2(2p)$, où $h_2(K_0)$, $h_2(m)$ sont respectivement la 2-partie du nombre de classes de K_0 et de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ avec $m = 2, p, 2p$. Or d'après [4] on a $h_2(K_0) = \frac{1}{2}h_2(2p)$ et comme $h_2(2) = h_2(p) = 1$, il vient que $Q_{K_0} = 2$.

(i) Si ε_3 est de norme 1, alors d'après le lemme 3, $2\varepsilon_3$ est un carré dans k_3, et comme 2 est un carré dans K_0, il s'ensuit que ε_3 est un carré dans K_0, et puisque ε_1 et ε_2 sont de norme -1 et $Q_{K_0} = 2$, les résultats de [15] impliquent que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de K_0.

Montrons que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est aussi un **SFU** de F_2. En effet, soit N_i la norme de K_0 sur k_i ($i = 1, 2, 3$). En utilisant la proposition 2, il suffit de montrer que $q\eta\varepsilon_1\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0 pour $\eta = \varepsilon_1'^{j_1}\varepsilon_2'^{j_2}\varepsilon_3'$ où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Alors si $\eta = \varepsilon_1$, on montre que $q\varepsilon_1^2\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0 : sinon il existe $x \in K_0$ tel que $q\sqrt{2} = x^2$, ainsi $N_2(q\sqrt{2}) = N_2(x)^2 = -2q^2$, et comme $N_2(x) \in k_2$, il vient que -2 est un carré dans $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, ce qui est absurde. Si $\eta = \varepsilon_2$, supposons qu'il existe $x \in K_0$ tel que $q\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2} = x^2$, donc $N_3(q\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2}) = N_3(x)^2 = -2q^2$; ainsi -2 est un carré dans $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$, ce qui est impossible. Si $\eta = \sqrt{\varepsilon_3}$, supposons qu'il existe $x \in K_0$ tel que $q\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_3} = x^2$, donc $N_2(q\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_3}) = N_2(x)^2 = \mp 2q^2$; ainsi ∓ 2 est un carré dans $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, ce qui n'est pas le cas. Et de même on démontre les autres cas.

(ii) Si ε_3 est de norme -1, alors comme ε_1 et ε_2 sont de norme -1 et $Q_{K_0} = 2$, en utilisant les résultats de [15] on trouve que $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de K_0. En particulier, on a ceci si $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

Le système $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est aussi un **SFU** de F_2. En effet, soit N_i la norme de K_0 sur k_i ($i = 1, 2, 3$) ; alors d'après la proposition 2, il suffit de montrer que $q\eta\varepsilon_1\sqrt{2}$ n'est pas un carré dans K_0 pour $\eta = \varepsilon_1'^{j_1}\varepsilon_2'^{j_2}\varepsilon_3'$ où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. Alors si $\eta = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, montrons que $q\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ n'est pas un carré dans K_0 : sinon il existe $x \in K_0$ tel que $q\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = x^2$, ainsi $N_2(q\varepsilon_1\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = N_2(x)^2 = \mp 2q^2\varepsilon_2$, et puisque $N_2(x) \in k_2$, on en déduit que $\mp 2\varepsilon_2$ est un carré dans k_2, ce qui est absurde. Si $\eta = \varepsilon_2$, supposons qu'il existe x dans K_0 tel que $q\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2} = x^2$; ainsi $N_3(q\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2}) = N_3(x)^2 = -2q^2$, et puisque $N_3(x) \in k_3$, il vient que -2 est un carré dans k_3, ce qui est impossible. Si $\eta = \varepsilon_3$, supposons qu'il existe x dans K_0 tel que $q\varepsilon_1\varepsilon_3\sqrt{2} = x^2$; ainsi $N_2(q\varepsilon_1\varepsilon_3\sqrt{2}) = N_2(x)^2 = -2q^2$, donc -2 est un carré dans k_2, ce qui n'est pas le cas. Si $\eta = \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, supposons que $q\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ est un carré dans K_0, donc il existe $x \in K_0$ tel que $q\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = x^2$; comme $N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = -1$ et $N_3(\varepsilon_3) = \varepsilon_3^2$, alors $N_3(q\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm N_3(q\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{N_3(2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)} = \pm 2q^2\varepsilon_3 = N_3(x)^2$, ainsi $\pm 2\varepsilon_3$ est un carré dans k_3, ce qui est absurde. Et de même on démontre les autres cas. ∎

4. Capitulation des 2-classes d'idéaux de K et structure de G

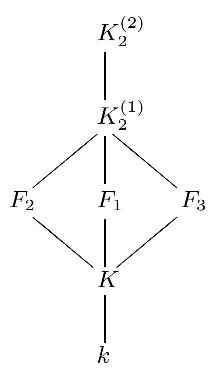
Proposition 3 (voir [17] ou [16]). *Soient L/M une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2,2)$, et L_1, L_2, L_3 ses sous-extensions quadratiques. Alors*

$$h(L) = \frac{2^{d-\kappa-2-v}q(L)h(L_1)h(L_2)h(L_3)}{h(M)^2},$$

où $q(L) = [E_L : E_1E_2E_3]$ est l'indice des unités de L/M, d le nombre des premiers infinis de M qui se ramifient dans L/M, κ est le $\mathbb{Z}$-rang du groupe E_M des unités de M, et $v = 0$ sauf si $L \subseteq M(\sqrt{E_M})$ où $v = 1$. ∎

Dans toute la suite, soient p, q deux nombres premiers différents tels que $p \equiv q \equiv \pm 1 \bmod 4$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. Alors, d'après E. Brown et C. J. Parry [7], $C_{2,K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où $K_2^{(1)}/K$ contient trois extensions F_i/K $(i = 1,2,3)$, la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K s'arrête en $K_2^{(2)}$ et on a :

- Si $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$, alors $K_2^{(1)} = K^{(*)} = K(\sqrt{-p}, \sqrt{-q})$ de sous-corps quadratiques sur K : $F_1 = K(\sqrt{pq})$, $F_2 = K(\sqrt{-p})$ et $F_3 = K(\sqrt{-q})$.
- Si $p \equiv q \equiv 1 \bmod 4$, alors $K_2^{(1)} = K^{(*)} = K(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ de sous-corps quadratiques sur K : $F_1 = K(\sqrt{pq})$, $F_2 = K(\sqrt{p})$ et $F_3 = K(\sqrt{q})$.



On va faire une étude du problème de la capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les différentes sous-extensions quadratiques F_i/K de $K_2^{(1)}/K$ (voir le diagramme), et par suite nous déterminerons la structure de G.

4.1. *Cas où* $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$

Théorème 7. *Soient* $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ *où* ε_1 *est l'unité fondamentale de* $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, p, q *deux nombres premiers différents tels que* $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$ *et* $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $F_1 = K(\sqrt{pq})$, $F_2 = K(\sqrt{-p})$ *et* $F_3 = K(\sqrt{-q})$. *Alors* $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$, $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ *est abélien et les quatre classes de* $C_{2,K}$ *capitulent dans chacune des extensions* F_i/K $(i = 1, 2, 3)$.

Démonstration. Comme F_1/k est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2, 2)$, de sous-extensions quadratiques K, $K' = k(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$ et $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, la proposition 3 montre que

$$h_2(F_1) = \frac{2^{2-1-2-0}q(F_1)h_2(K)h_2(K')h_2(K_0)}{h_2(k)^2}.$$

Et puisque $h_2(k) = 1$, $h_2(K) = 4$, d'après [6] on a $h_2(K') = 1$, et comme $p \equiv q \equiv 3 \bmod 8$, d'après [12] on a $h_2(2pq) = 2$, et comme $K_0/\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ est une extension non ramifiée et le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$ est cyclique, d'après [8] on a $h_2(K_0) = h_2(2pq)/2 = 1$, ainsi $h_2(F_1) = 2q(F_1)$.

Montrons que $q(F_1) = 1$. En effet, soient ε_1 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ε_2 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$ et ε_3 l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$; alors d'après le théorème 4, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un **SFU** de K_0 et de $F_1 = K(\sqrt{pq}) = K_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$, et comme $\{\varepsilon_1\}$ est un **SFU** de K et K', on trouve que $E_K E_{K'} E_{K_0} = E_{K_0}$, ainsi $q(F_1) = [E_{F_1} : E_{K_0}] = 1$, ainsi C_{2,F_1} est cyclique d'ordre 2, et comme $K_2^{(1)}/F_1$ est une extension non ramifiée, F_1 et $K_2^{(1)}$ ont même 2-corps de classes de Hilbert, à savoir $K_2^{(2)}$; or $h_2(F_1) = 2$, donc $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$, ainsi G est abélien ($\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i/K $(i = 1, 2, 3)$. ∎

4.2. *Cas où* $p \equiv q \equiv 1 \bmod 4$

4.2.1. *Capitulation dans* F_1/K. Soient $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$). Alors $F_1 = K(\sqrt{pq}) = K_0(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$ et d'après le théorème 5, K_0 et F_1 ont même **SFU** qui est l'un des systèmes $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ou $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Si $Q_{K_0} = 1$, donc $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est **SFU** de F_1, alors $N_{F_1/K}(E_{F_1}) \neq E_K$. D'où d'après le théorème 1, les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans F_1 $(|\ker j_1| = 4)$.

Si $Q_{K_0}=2$, $\{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un **SFU** de F_1, ainsi $N_{F_1/K}(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm\varepsilon_1$, par suite $N_{F_1/K}(E_{F_1}) = E_K$. D'où d'après le théorème 1, deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent dans F_1, ainsi $|\ker j_1| = 2$.

4.2.2. *Capitulation dans F_i/K, $i=2,3$.* Soient $K_0' = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$, ε_1 (resp. η_2, η_3) l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$). Alors $F_2 = K(\sqrt{p}) = K_0'(\sqrt{-q\varepsilon_1\sqrt{2}})$ et d'après le théorème 6, $\{\sqrt{\varepsilon_1\eta_2\eta_3}, \eta_2, \eta_3\}$ est un **SFU** de F_2.

On a $N_{F_2/K}(\sqrt{\varepsilon_1\eta_2\eta_3}) = \pm\varepsilon_1$, ainsi $N_{F_2/K}(E_{F_2}) = E_K$. D'où d'après le théorème 1, deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent dans F_2, et de même pour F_3, car p et q jouent des rôles symétriques ; ainsi $|\ker j_2| = |\ker j_3| = 2$.

Proposition 4. *Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathcal{P}$ l'idéal premier au-dessus de p dans K. Alors la classe $[\mathcal{P}]$ de $\mathcal{P}$ est d'ordre 2. De plus, $\mathcal{P}$ capitule dans $F_2 = K(\sqrt{p})$.*

Démonstration. La classe $[\mathcal{P}]$ de $\mathcal{P}$ est d'ordre 2 : en effet, comme p est inerte dans $k/\mathbb{Q}$ et p se ramifie dans $K/\mathbb{Q}$, il existe $\mathcal{P}$ un idéal premier de K tel que $\mathcal{P}^2 = (p)$. On suppose que $\mathcal{P} = (\alpha)$ pour un certain α dans K, ce qui est équivalent à $(\alpha^2) = (p)$ dans K. Il existe donc ε une unité de K telle que $p\varepsilon = \alpha^2$; or il existe a et b dans k tel que $\alpha = a + b\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}}$, ainsi $p\varepsilon = a^2 - pq\varepsilon_1 b^2\sqrt{2} + 2ab\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}}$, et comme $\{\varepsilon_1\}$ est **SFU** de K et $i=\sqrt{-1}\notin K$, on a $p\varepsilon \in k$ et par suite $a=0$ ou $b=0$. Si $b=0$, alors $p\varepsilon = a^2$; ainsi, si ε est de norme 1 (la norme dans $k/\mathbb{Q}$), p sera norme dans $k/\mathbb{Q}$, ce qui n'est pas le cas car $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$; si ε est de norme -1 on trouve que -1 est un carré dans $\mathbb{Q}$, ce qui est impossible, et de même, si $a=0$ on trouve que ± 2 est un carré dans $\mathbb{Q}$. Donc la classe de $\mathcal{P}$ est d'ordre 2.

Montrons que $\mathcal{P}$ capitule dans $K(\sqrt{p})$. Comme dans le cas précédent, le problème est de chercher β dans $K(\sqrt{p})$ tel que $(\beta^2) = (p)$ dans $K(\sqrt{p})$; or ceci est vérifié en prenant $\beta = \sqrt{p}$. Ainsi $\mathcal{P}$ capitule dans $F_2 = K(\sqrt{p})$. ∎

Proposition 5. *Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathcal{Q}$ l'idéal premier au-dessus de q dans K. Alors la classe $[\mathcal{Q}]$ est d'ordre 2. De plus, $\mathcal{Q}$ capitule dans $F_3 = K(\sqrt{q})$.*

Démonstration. Même démonstration que pour la proposition 4. ∎

Proposition 6. *Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{P}$ l'idéal premier de K au-dessus de p et $\mathcal{Q}$ celui au-dessus de q. Alors la classe $[\mathcal{PQ}]$ est d'ordre 2 dans K et $C_{2,K}$ le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes $[\mathcal{P}]$ et $[\mathcal{Q}]$. De plus, $\mathcal{PQ}$ capitule dans $K(\sqrt{pq})$.*

Démonstration. La classe de $\mathcal{PQ}$ est d'ordre 2 : sinon il existe α dans K tel que $\mathcal{PQ} = (\alpha)$, il existe donc ε une unité de K telle que $pq\varepsilon = \alpha^2$;

or il existe a et b dans k tel que $\alpha = a + b\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}}$, ainsi $pq\varepsilon = a^2 - pq\varepsilon_1 b^2\sqrt{2} + 2ab\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}}$, et comme $\{\varepsilon_1\}$ est **SFU** de K et $i = \sqrt{-1} \notin K$, on a $pq\varepsilon \in k$ et par suite $a = 0$ ou $b = 0$. Si $b = 0$, alors $pq\varepsilon = a^2$, donc $pq\varepsilon_1 = {a'}^2$ ou $pq = {a''}^2$, ce qui n'est pas possible car ε_1 est de norme -1 dans le premier cas et $\sqrt{pq} \notin k$ dans le deuxième cas. Si $a = 0$ on aura $\varepsilon = -\varepsilon_1\sqrt{2}\,b^2$; en passant à la norme on trouve que ± 2 est un carré dans $\mathbb{Q}$, ce qui est impossible. Donc la classe de $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ est d'ordre 2, ainsi $C_{2,K}$ est engendré par les classes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Montrons que $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ capitule dans $K(\sqrt{pq})$. Comme dans le cas précédent, le problème est de chercher γ dans $K(\sqrt{pq})$ tel que $(\gamma^2) = (pq)$ dans $K(\sqrt{pq})$; or ceci est vérifié en prenant $\gamma = \sqrt{pq}$. Ainsi $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ capitule dans $F_1 = K(\sqrt{pq})$. ∎

En résumé, on a le théorème suivant :

Théorème 8. *Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, p, q deux nombres premiers différents $\equiv 1 \bmod 4$ tel que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $F_1 = K(\sqrt{pq})$, $F_2 = K(\sqrt{p})$, $F_3 = K(\sqrt{q})$ et $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$. Donc :*

(i) *Si $Q_{K_0} = 1$, alors les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans F_1 et dans chaque F_i, $i \in \{2, 3\}$, deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent.*
(ii) *Si $Q_{K_0} = 2$, alors dans chaque extension F_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe exactement deux classes de $C_{2,K}$ qui capitulent.*

Dans la suite on aura besoin du résultat suivant consernant le symbole du reste normique.

Proposition 7 (voir [9]). *Soient M un corps de nombres contenant les racines m-ièmes de l'unité, L une extension finie de M, $\alpha \in M^*$ et $\beta \in L^*$. On note P un idéal premier de M, et $\mathcal{P}$ un idéal premier de L au-dessus de P. Alors*

$$\prod_{\mathcal{P}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathcal{P}}\right)_m = \left(\frac{N_{L/M}(\beta), \alpha}{P}\right)_m,$$

où le produit est pris sur tous les premiers de L qui sont au-dessus de P. ∎

Théorème 9. *Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, p et q deux nombres premiers différents $\equiv 1 \bmod 4$ tels que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, $F_1 = K(\sqrt{pq})$, $F_2 = K(\sqrt{p})$, $F_3 = K(\sqrt{q})$ et $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. Alors G est diédral ou quaternionique d'ordre 2^m $(m \geq 3)$ suivant que $Q_{K_0} = 1$ ou $Q_{K_0} = 2$.*

Démonstration. Si $Q_{K_0} = 1$, alors les quatres classes de $C_{2,K}$ capitulent dans F_1 et dans chaque F_i $(i = 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent, ainsi d'après le théorème 3, G est isomorphe à D_m $(m \geq 3)$.

Si $Q_{K_0} = 2$, alors dans chaque F_i $(i = 1, 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ les idéaux premiers de K au-dessus de p et q respectivement. Alors $\mathcal{P}$ capitule dans $F_2 = K(\sqrt{p})$, $\mathcal{Q}$ capitule dans $F_3 = K(\sqrt{q})$ et $\mathcal{PQ}$ capitule dans $F_1 = K(\sqrt{pq})$.

Montrons que F_1 est de type (A) et que F_2 et F_3 sont de type (B). En effet, pour F_2, soit $K' = k(\sqrt{-q\varepsilon_1\sqrt{2}})$; alors on a $KK' = F_2$, $N_{K/k}(\mathcal{P}) = p$ et p est non ramifié dans K'/k ; ainsi pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans F_2/K, il suffit de montrer que p est inerte dans K'/k (théorème de translation) et pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,-q\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right)$. Puisque $p \in \mathbb{Q}$ est inerte dans $k/\mathbb{Q}$ et $-q\varepsilon_1\sqrt{2} \in k$, en utilisant la proposition 7 on trouve

$$\left(\frac{p,-q\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right) = \left(\frac{p, N_{k/\mathbb{Q}}(-q\varepsilon_1\sqrt{2})}{p}\right) = \left(\frac{p, 2q^2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = -1\,;$$

ainsi p est inerte dans K'/k, d'où $\mathcal{P}$ est inerte dans F_2/K, ainsi F_2/K est de type (B), et de même on montre que $\mathcal{Q}$ est inerte dans F_3/K, d'où F_3/K est aussi de type (B).

Pour F_1, soit $K' = k(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$; alors on a $KK' = F_1$, $N_{K/k}(\mathcal{P}) = p$ et p est non ramifié dans K'/k ; ainsi pour montrer que $\mathcal{P}$ est inerte dans F_1/K, il suffit de montrer que p est inerte dans K'/k (théorème de translation) et pour cela on calcule le symbole du reste normique $\left(\frac{p,-\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right)$. En utilisant la proposition 7, on trouve que $p \in \mathbb{Q}$ est inerte dans $k/\mathbb{Q}$ et $\varepsilon_1\sqrt{2} \in k$, ainsi

$$\left(\frac{p,-\varepsilon_1\sqrt{2}}{p}\right) = \left(\frac{p, N_{k/\mathbb{Q}}(-\varepsilon_1\sqrt{2})}{p}\right) = \left(\frac{p, 2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = -1\,;$$

ainsi p est inerte dans K'/k, d'où $\mathcal{P}$ est inerte dans F_1/K, et de même on montre que $\mathcal{Q}$ est aussi inerte dans F_1/K, d'où $\mathcal{PQ}$ est norme dans F_1/K, ainsi F_1/K est de type (A), et en utilisant le théorème 3, le groupe G est isomorphe à Q_m $(m > 3)$. ∎

Remarque 2. Comme l'extension F_1/K est de type (A), d'après [13] le 2-groupe des classes de $F_1 = K(\sqrt{pq})$ est cyclique.

Théorème 10. *Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, p et q deux nombres premiers différent $\equiv 1 \bmod 4$ tels que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, et $F_1 = K(\sqrt{pq})$. Alors C_{2,F_1}, la 2-partie du groupe de classes de F_1, est cyclique d'ordre $h_2(F_1) = 2Q_{K_0}h_2(pq)$ où $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, Q_{K_0} son indice des unités et $h_2(pq)$ est le 2-nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$.*

Démonstration. Tout d'abord d'après la remarque 2, C_{2,F_1} est cyclique, et F_1/k est une extension biquadratique normale de groupe de Galois de type $(2, 2)$, de sous-extensions quadratiques K, $K' = k(\sqrt{-\varepsilon_1\sqrt{2}})$ et K_0 ; alors d'après la proposition 3, on trouve que $h_2(F_1) = \frac{1}{2}q(F_1)h_2(K)h_2(K')h_2(K_0)$, car $d = 2$, $\kappa = 1$, $v = 0$. Or $h_2(K) = 4$, d'après [6] on a $h_2(K') = 1$, d'après [18] on a $h_2(K_0) = \frac{1}{4}Q_{K_0}h_2(2)h_2(pq)h_2(2pq)$, et comme $h_2(2) = 1$ et $h_2(2pq) = 4$ (d'après [12]), on a $h_2(K_0) = Q_{K_0}h_2(pq)$; ainsi $h_2(F_1) = 2q(F_1)Q_{K_0}h_2(pq)$. D'après le théorème 5, K_0 et F_1 on même **SFU**, donc $q(F_1) = 1$, d'où le résultat. ∎

Remarque 3. Soient $K = k(\sqrt{-pq\varepsilon_1\sqrt{2}})$ où ε_1 est l'unité fondamentale de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, p et q deux nombres premiers différent $\equiv 1 \bmod 4$ tels que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$ et $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. Alors $|G| = 4Q_{K_0}h_2(pq)$ où $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq})$, Q_{K_0} est son indice des unités et $h_2(pq)$ est le 2-nombre des classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$.

Démonstration. Soit $F_1 = K(\sqrt{pq})$; alors $K_2^{(1)}/F_1$ est une extension non ramifiée et C_{2,F_1} est cyclique, ainsi F_1 et $K_2^{(1)}$ ont même 2-corps des classes de Hilbert, à savoir $K_2^{(2)}$, donc $|G| = 2h_2(F_1) = 4Q_{K_0}h_2(pq)$. ∎

Exemples numériques

(1) Soient

$$K = k(\sqrt{-3.11(1+\sqrt{2})\sqrt{2}}), \quad k = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
$$F_1 = K(\sqrt{3.11}), \quad F_2 = K(\sqrt{-3}), \quad F_3 = K(\sqrt{-11}).$$

Comme $3 \equiv 11 \equiv -1 \bmod 4$ et $\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{11}\right) = -1$, d'après le théorème 7 on a $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i/K $(i = 1,2,3)$.

(2) Soient

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3.19(2+\sqrt{2})}),$$
$$F_1 = K(\sqrt{3.19}), \quad F_2 = K(\sqrt{-3}), \quad F_3 = K(\sqrt{-19}).$$

Comme $3 \equiv 19 \equiv -1 \bmod 4$ et $\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{19}\right) = -1$, d'après le théorème 7 on a $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i/K $(i = 1,2,3)$.

(3) Soient

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-67.83(2+\sqrt{2})}),$$
$$F_1 = K(\sqrt{67.83}), \quad F_2 = K(\sqrt{-67}), \quad F_3 = K(\sqrt{-83}).$$

Comme $67 \equiv 83 \equiv -1 \bmod 4$ et $\left(\frac{2}{67}\right) = \left(\frac{2}{83}\right) = -1$, d'après le théorème 7 le groupe G est abélien et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans chacune des extensions F_i/K $(i = 1,2,3)$.

(4) Soit $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-pq(2+\sqrt{2})})$, avec p, q deux nombres premiers tels que $p\equiv q\equiv 5 \bmod 8$, $\left(\frac{p}{q}\right)=1$, $\left(\frac{p}{q}\right)_4=-\left(\frac{q}{p}\right)_4$ et $K_0=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{pq})$.

L'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$ est de norme 1, ainsi $Q_{K_0}=1$, par suite, en utilisant le théorème 9, G est diédral et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans $F_1=K(\sqrt{pq})$, tandis que dans chacune des extensions $F_2=K(\sqrt{p})$ et $F_3=K(\sqrt{q})$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent. De plus, on sait que $h_2(pq)=2$, ainsi, en utilisant la remarque 3, on trouve que $|G|=8$, ce qui donne que $G\simeq D_3$.

(5) Soient $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-5.37(2+\sqrt{2})})$ et $K_0=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5.37})$; alors comme $Q_{K_0}=1$, donc, d'après le théorème 9, G est diédral et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans $F_1=K(\sqrt{5.37})$, tandis que dans chacune des extensions $F_2=K(\sqrt{5})$ et $F_3=K(\sqrt{37})$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent. De plus, comme $\left(\frac{5}{37}\right)=-1$, on a $h_2(5.37)=2$, ainsi, en utilisant la remarque 3, on trouve que $|G|=8$, ce qui donne que $G\simeq D_3$.

(6) Soient $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-5.29(2+\sqrt{2})})$ et $K_0=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5.29})$; alors comme $Q_{K_0}=1$, G est diédral et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans $F_1=K(\sqrt{5.29})$, tandis que dans chacune des extensions $F_2=K(\sqrt{5})$ et $F_3=K(\sqrt{29})$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent, plus précisement comme $\left(\frac{5}{29}\right)_4=\left(\frac{29}{5}\right)_4=-1$, on a $h_2(5.29)=4$, ainsi $|G|=16$, ce qui donne que $G\simeq D_4$.

(7) Soient $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-5.101(2+\sqrt{2})})$ et $K_0=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5.101})$; alors comme $Q_{K_0}=1$, G est diédral et les quatre classes de $C_{2,K}$ capitulent dans $F_1=K(\sqrt{5.101})$, tandis que dans chacune des extensions $F_2=K(\sqrt{5})$ et $F_3=K(\sqrt{101})$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent ; en plus, comme $\left(\frac{5}{101}\right)_4=\left(\frac{101}{5}\right)_4=1$ et l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{5.101})$ est de norme 1, on a $4\mid h_2(5.101)$, ainsi $16\mid |G|$, ce qui donne que $G\simeq D_m$ où $m\geq 4$.

(8) Soient

$$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-5.13(2+\sqrt{2})}),\qquad K_0=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5.13}),$$
$$F_1=K(\sqrt{5.13}),\qquad F_2=K(\sqrt{5}),\qquad F_3=K(\sqrt{13}).$$

Comme $Q_{K_0}=2$, le groupe G est quaternionique et dans chacune des extensions F_i $(i=1,2,3)$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent, et comme $\left(\frac{5}{13}\right)=-1$, on a $h_2(5.13)=2$; ainsi, en utilisant la remarque 3, on trouve que $|G|=16$, ce qui donne que $G\simeq Q_4$.

(9) Soient

$$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-53.61(2+\sqrt{2})}),\qquad K_0=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{53.61}),$$
$$F_1=K(\sqrt{53.61}),\qquad F_2=K(\sqrt{53}),\qquad F_3=K(\sqrt{61}).$$

On a $Q_{K_0}=2$, ainsi G est quaternionique et dans chacune des extensions

F_i $(i = 1, 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent ; en plus, comme $\left(\frac{53}{61}\right) = -1$, alors $h_2(53.61) = 2$, ainsi, en utilisant la remarque 3, on trouve que $|G| = 16$, ce qui donne que $G \simeq Q_4$.

(10) Soient

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-13.101(2+\sqrt{2})}), \quad K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{13.101}),$$
$$F_1 = K(\sqrt{13.101}), \quad F_2 = K(\sqrt{13}), \quad F_3 = K(\sqrt{101}).$$

Alors, comme $Q_{K_0} = 2$, donc en utilisant le théorème 9, G est quaternionique et dans chacune des extensions F_i $(i = 1, 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent, et comme $\left(\frac{13}{101}\right)_4 = \left(\frac{101}{13}\right)_4 = -1$, alors $h_2(13.101) = 4$; ainsi $|G| = 32$, ce qui donne que $G \simeq Q_5$.

(11) Soient

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-29.197(2+\sqrt{2})}), \quad K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{29.197}),$$
$$F_1 = K(\sqrt{29.197}), \quad F_2 = K(\sqrt{29}), \quad F_3 = K(\sqrt{197}).$$

Comme $Q_{K_0} = 2$, d'après le théorème 9, G est quaternionique et dans chacune des extensions F_i $(i = 1, 2, 3)$ deux classes seulement de $C_{2,K}$ capitulent, et puisque $\left(\frac{29}{197}\right)_4 = \left(\frac{197}{29}\right)_4 = 1$ et l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{29.197})$ est de norme -1, donc $8 \mid h_2(29.197)$, ainsi, en utilisant la remarque 3, on a $64 \mid |G|$, ce qui donne que $G \simeq Q_m$ où $m \geq 6$.

Remarque 4. Pour les résultats concernant le calcul du 2-nombre de classes des corps quadratiques sur $\mathbb{Q}$, voir P. Kaplan [12].

Références

[1] A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, thèse, Université Laval, Québec, 1993.

[2] —, *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur* $\mathbb{Q}$, Ann. Sci. Math. Québec 23 (1999), 15–21.

[3] —, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\Bbbk = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ *où* $p \equiv -q \equiv 1 \bmod 4$, Acta Arith. 94 (2000), 383–399.

[4] A. Azizi et A. Mouhib, *Sur le rang du 2-groupe de classes de* $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ *où* $m = 2$ *ou un premier* $p \equiv 1 \bmod 4$, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 2741–2752.

[5] —, —, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ *où d est un entier naturel sans facteurs carrés*, Acta Arith. 109 (2003), 27–63.

[6] E. Brown and C. J. Parry, *The 2-class group of certain biquadratic number fields I*, J. Reine Angew. Math. 295 (1977), 61–71.

[7] —, —, *The 2-class group of biquadratic number fields II*, Pacific J. Math. 78 (1978), 11–26.

[8] G. Gras, *Sur les l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23 (1973), no. 3, 1–48, et no. 4, 1–44.

[9] H. Hasse, *Neue Begründung der Theorie des Normenrestsymbols*, J. Reine Angew. Math. 162 (1930), 134–143.

[10] F. P. Heider und B. Schmithals, *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen*, ibid. 336 (1982), 1–25.

[11] M. Ishida, *The Genus Fields of Algebraic Number Fields*, Lecture Notes in Math. 555, Springer, 1976.

[12] P. Kaplan, *Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. Reine Angew. Math. 283/284 (1976), 313–363.

[13] H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to* 4 *mod* 8 *and Hilbert's Theorem 94*, J. Number Theory 8 (1976), 271–279.

[14] T. Kubota, *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. 10 (1956), 65–85.

[15] S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Zahlkörper*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sec. I 4 (1943), 383–406.

[16] F. Lemmermeyer, *Ideal class groups of cyclotomic number fields I*, Acta Arith. 72 (1995), 347–359.

[17] —, *Kuroda's class number formula*, ibid. 66 (1994), 245–260.

[18] H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, Tokyo Univ. Fac. Sci. J. Ser. I 13 (1966), 201–209.

Département de Mathematiques
Faculté des Sciences
Université Mohammed 1
Oujda, Maroc
E-mail: abdelmalekazizi@yahoo.fr
talbimm@yahoo.fr

Reçu le 3.4.2006
et révisé le 23.11.2006 (5176)