ACTA ARITHMETICA
119.1 (2005)

Sommes d'exponentielles avec dérivée troisième monotone

par

O. Robert (Nancy)

1. Introduction et énoncé des résultats. Soit un entier $M \geq 10$ et soit $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ de classe C^3 vérifiant

$$|f'''(x)| \asymp \lambda, \quad 1 \leq x \leq M, \tag{1.1}$$

où λ désigne un réel positif petit. On cherche à majorer la somme

$$S = \sum_{m=1}^{M} e(f(m)), \tag{1.2}$$

avec la notation $e(x) = e^{2i\pi x}$. Le résultat classique de van der Corput sous la seule hypothèse (1.1) peut s'écrire

$$S \ll M\lambda^{1/6} \quad \text{pour } M \gg \lambda^{-2/3}, \tag{1.3}$$

ce dernier résultat ayant été amélioré récemment par Sargos [6] et Gritsenko [2] sous la forme

$$S \ll M\lambda^{1/6} \quad \text{pour } M \gg \lambda^{-1/2}, \tag{1.4}$$

un résultat efficace pour les "sommes courtes".

Mais l'exposant 1/6 n'a jamais été amélioré sans hypothèse supplémentaire, même pour les sommes "longues" (disons $M\lambda \gg 1$), et il a même été conjecturé que cela n'est pas possible :

Conjecture 1 (Sargos, [5]). *Sous l'hypothèse* (1.1) *et sous la condition* $M \gg \lambda^{-1}$, *la majoration*

$$S \ll M\lambda^{1/6+\theta} \tag{1.5}$$

n'est vérifiée en toute généralité pour aucun $\theta > 0$.

L'hypothèse supplémentaire suivante

(1.6) *La dérivée troisième de f est monotone*

se pose naturellement :

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11L07.

Conjecture 2 (Sargos, 1995). *Sous les hypothèses* (1.1) *et* (1.6), *il existe un réel* $\theta > 0$ *tel que l'on ait*

$$S \ll M\lambda^{1/6+\theta} \quad \textit{pour } M \gg \lambda^{-1}, \tag{1.7}$$

où les constantes impliquées ne dépendent que de θ *et des constantes précédemment sous-entendues.*

Le but de cet article est de démontrer la conjecture 2. Plus précisément, nous établissons le résultat suivant :

Théorème 1. *Sous les hypothèses de la conjecture* 2, *la majoration* (1.7) *est vraie avec* $\theta = 1/1354$.

Notations

- $u \ll v$ ou $u = O(v)$ signifie que u est un nombre complexe, v est un nombre positif, et qu'il existe une constante positive C qui dépend au plus des constantes impliquées précédemment, telle que $|u| \le Cv$;
- $u \ll_j v$ rappelle en outre que la constante C peut dépendre de j ;
- $u \asymp v$ signifie que l'on a à la fois $u \ll v$ et $v \ll u$.

Le symbole ■ se place à la fin d'une démonstration, ou bien à la fin d'un énoncé pour signaler que celle-ci est omise.

2. Lemmes préliminaires

2.1. *Transformation* $\widetilde{B}$ *de Bombieri et Iwaniec.* Nous énonçons ici un cas particulier du corollaire 3.5 de [6]. Soit $N \ge 1$ et $N < N_1 \ll N$. On considère une fonction $G : [N, N_1] \to \mathbb{R}$ de classe C^3 vérifiant

$$|G''(x)| \asymp \lambda N, \quad |G'''(x)| \le \lambda, \quad x \in [N, N_1], \tag{2.8}$$

où λ désigne un réel positif petit. On note

$$[R, R_1] = G'([N, N_1]), \quad z = G'^{-1} : [R, R_1] \to [N, N_1],$$
$$G^* : [R, R_1] \to [N, N_1], \quad G^*(y) = G(z(y)) - yz(y).$$

Étant donnés $a, b, q \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$q \ge 1 \quad \text{et} \quad (a, q) = 1, \tag{2.9}$$

on pose enfin

$$\widetilde{S} = \sum_{N < n \le N_1} e\Big(\frac{b}{q} n + \frac{a}{q} n^2 + G(n)\Big). \tag{2.10}$$

Lemme 1. *Sous les hypothèses* (2.8) *et* (2.9), *avec la notation* (2.10), *on a*

$$\begin{aligned}\widetilde{S} \ll q^{-1/2} \sum_{w\in\{0,1\}} \Bigg| \sum_{qR\le l\le qR_1} & |G''(z(l/q))|^{-1/2} \\ &\times e\biggl(G^*\Bigl(\frac{l}{q}\Bigr) - \frac{\overline{a}}{q}\Bigl(\frac{b+l}{2}\Bigr)^2 + \frac{w}{2}\, l\biggr)\Bigg| \\ &+ (q\lambda N)^{-1/2} + q^{1/2}\log(N+q),\end{aligned}$$

où $\overline{a}$ désigne une solution de la congruence $\overline{a}a \equiv 1 \bmod q$. ∎

2.2. *Calculs sur la transformation B.* Nous donnons ici une version du théorème $3'$ de [4]. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit g et $u : I \to \mathbb{R}$ respectivement de classe C^{n+1} et C^n, avec $n \ge 2$. On suppose qu'il existe trois nombres réels strictement positifs T, N et η tels que

$$\frac{T}{N^2} \le |g''(x)| \ll \frac{T}{N^2}, \qquad |g^{(3)}(x)| \ll C_3\,\frac{T}{N^2},$$
$$|g^{(j)}(x)| \ll_j \frac{T}{N^j}, \qquad 4 \le j \le n+1,$$

pour $x \in I$, où C_3 désigne une constante absolue telle que l'on ait

$$|u'(x)| \ll \eta\,\frac{T}{N}, \qquad |u''(x)| \ll \eta\,\frac{T}{N^2}, \qquad |u^{(j)}(x)| \ll_j \eta\,\frac{T}{N^j}, \qquad 3 \le j \le n+1,$$

pour $x \in I$. On suppose en outre

$$0 < \eta < \frac{1}{2(1+C_3)},$$

et on fait l'hypothèse que l'intervalle $J = (g+u)'(I) \cap g'(I)$ est non vide.

Lemme 2. *Sous les hypothèses précédentes*, *on a*

$$(g+u)^*(y) = g^*(y) + \phi_0(y)$$

où ϕ_0 vérifie

$$\phi_0^{(j)}(y) \ll_j \eta N^j T^{1-j}, \qquad 1 \le j \le n-1,$$

pour $y \in J$. ∎

2.3. *Sommation d'Abel.* Nous donnons ici une version de la sommation d'Abel avec paramètre. Soit $\mathcal{M}$ un ensemble fini et soit $N \ge 1$. On considère une famille $(a_m(n))_{m,n}$ de nombres complexes et $(b_m)_m$ une famille de fonctions de classe C^1 de $[N+1, 2N]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $D > 0$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$ on ait

$$|b_m(x)| \le D, \qquad |b_m'(x)| \le D/N \quad \text{pour } N+1 \le x \le 2N.$$

On considère la somme suivante :

$$S_0 = \sum_{m\in\mathcal{M}} \Big| \sum_{n=N+1}^{2N} a_m(n) b_m(n) \Big|.$$

Lemme 3. *Avec les notations précédentes, on a*

$$S_0 \le 2D \max_{N+1\le N_1\le 2N} \sum_{m\in\mathcal{M}} \Big| \sum_{n=N+1}^{N_1} a_m(n) \Big|. \ \blacksquare$$

3. Le lemme principal

3.1. *Énoncé du lemme*

Lemme 4. *Soit $f : [1, M] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 vérifiant* (1.1) *et* (1.6). *Alors pour tout $\theta > 0$, on a*

$$S \ll M\lambda^{1/6+\theta} + M\lambda^{1/6+1/1014} \quad \text{pour } M \gg \lambda^{-1-\theta}.$$

3.2. *Preuve du lemme principal.* Soit θ réel fixé tel que $0 < \theta \le \theta_0 = 1/1014$. On considère une constante réelle absolue fixée $\eta > 0$ suffisamment petite et on pose

$$\begin{aligned} M &= [\lambda^{-1-\theta}], & Q &= [\eta^{-1}\lambda^{-1/4-\theta/2}],\\ N &= [\lambda^{-1/2}], & Q_1 &= [\eta^{-1}\lambda^{-1/4+\theta/2}]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dans toute la suite, on supposera f''' croissante.

3.2.1. *Étape 1.* On effectue un décalage de Weyl sur la somme (1.2) et on obtient

$$S \ll \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M-2N} \Big| \sum_{n=N+1}^{2N} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2} f''(m)n^2 + v_m(n)\Big) \Big| + N, \tag{3.12}$$

où l'on a posé

$$v_m(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(m+t)\, dt.$$

On considère maintenant

$$\begin{aligned} J_1 &= \{m = 1, \ldots, M-2N \ \mid f'''(m+N) - f(m) > N^{-3}\},\\ J_2 &= \{1, \ldots, M-2N\} \setminus J_1. \end{aligned}$$

Pour chaque $m \in J_1$, on majore la somme

$$\sum_{n=N+1}^{2N} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2} f''(m)n^2 + v_m(n)\Big)$$

à l'aide du corollaire 4.2 de [6], ce qui fournit la majoration $N\lambda^{1/6} + \lambda^{-1/3}$. En outre, on a

$$\#J_1 \le \sum_{m=1}^{M-2N} N^3(f'''(m+N) - f'''(m)) \ll 1 + N^4\lambda,$$

car f''' est croissante. Ainsi, la contribution de la somme

$$\frac{1}{N} \sum_{m\in J_1} \Big| \sum_{n} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2} f''(m)n^2 + v_m(n) \Big) \Big|$$

dans (3.12) est

$$\ll \frac{1}{N} (N^4\lambda)(N\lambda^{1/6}) \ll \lambda^{-1+1/6} \ll M\lambda^{1/6+\theta}$$

avec les choix de M et N dans (3.11).

On considère maintenant la somme

$$\frac{1}{N} \sum_{m\in J_2} \Big| \sum_{n=N+1}^{2N} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2} f''(m)n^2 + v_m(n) \Big) \Big|.$$

On a

$$v_m(x) = \frac{1}{6} f'''(m)x^3 + \varphi_m(x)$$

où l'on a posé

$$\varphi_m(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \, (f'''(m+t) - f'''(m))\, dt.$$

Or pour tout $m \in J_2$ on a

$$|\varphi_m'(x)| \ll 1/N, \qquad x \in [N+1, 2N].$$

Ainsi, en appliquant le lemme 3 avec $\mathcal{M} = J_2$,

$$a_m(n) = e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2} f''(m)n^2 + \frac{1}{6} f'''(m)n^3 \Big) \quad \text{et} \quad b_m(n) = e(\varphi_m(n)),$$

on en déduit l'existence d'un entier $N_1 \in [N+1, 2N]$ tel que l'on ait

$$\frac{1}{N} \sum_{m\in J_2} \Big| \sum_{n=N+1}^{2N} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2} f''(m)n^2 + \frac{1}{6} f'''(m)n^3 + \varphi_m(n) \Big) \Big|$$
$$\ll \frac{1}{N} \sum_{m\in J_2} \Big| \sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2} f''(m)n^2 + \frac{1}{6} f'''(m)n^3 \Big) \Big|.$$

En rajoutant les valeurs de $m \le M$ telles que $m \notin J_2$ à la nouvelle somme en m, on a donc la majoration suivante :

$$S \ll M\lambda^{1/6+\theta} + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}\Big|\sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2}\,f''(m)n^2 + \frac{1}{6}\,f'''(m)n^3\Big)\Big|.$$

3.2.2. *Étape 2.* On étudie la somme

$$S_1 = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}\Big|\sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2}\,f''(m)n^2 + \frac{1}{6}\,f'''(m)n^3\Big)\Big|.$$

Pour chaque $1 \le q \le Q$ et pour chaque $a \le q$, on pose

$$I(a,q) = \Big\{m = 1, 2, \ldots, M \;\Big|\; \Big|\Big\{\frac{1}{2}\,f''(m)\Big\} - \frac{a}{q}\Big| \le \frac{1}{qQ}\Big\} \tag{3.13}$$

et on pose

$$I(q) = \bigcup_{\substack{a\le q\\(a,q)=1}} I(a,q).$$

En utilisant le principe de Dirichlet, on a donc

$$[1, M] \cap \mathbb{Z} = \bigcup_{q=1}^{Q} I(q).$$

On considère la partition suivante de l'ensemble précédent :

$$I_1 = \bigcup_{q=1}^{Q_1} I(q), \qquad I_2 = \bigcup_{q=1+Q_1}^{Q} I(q) \tag{3.14}$$

et on cherche tout d'abord à majorer

$$S_1^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{m\in I_1}\Big|\sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2}\,f''(m)n^2 + \frac{1}{6}\,f'''(m)n^3\Big)\Big|.$$

En remarquant que l'on a

$$\Big\|\frac{1}{2}\,f''(m) - \frac{a}{q}\Big\| \le \Big|\Big\{\frac{1}{2}\,f''(m)\Big\} - \frac{a}{q}\Big|,$$

on a donc la majoration suivante :

$$S_1^{(1)} \ll \frac{1}{N}\sum_{1\le q<Q_1}\;\sum_{\substack{a\le q\\(a,q)=1}}\;\sum_{\substack{1\le m\le M\\ \|f''(m)/2-a/q\|\le 1/(qQ)}}\Big|\sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2}\,f''(m)n^2 + \frac{1}{6}\,f'''(m)n^3\Big)\Big|. \tag{3.15}$$

Pour chaque q tel que $1 \le q \le Q_1$, on majore la somme en n correspondante à l'aide du corollaire 4.2 de [6]. La contribution des $1 \le q \le Q_1$ dans (3.15) est donc

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{1}{N} \sum_{1 \le q < Q_1} \sum_{\substack{a \le q \\ (a,q)=1}} \sum_{\substack{1 \le m \le M \\ \|f''(m)/2 - a/q\| \le 1/(qQ)}} (N\lambda^{1/6} + \lambda^{-1/3}) \\
&\ll \lambda^{1/6} \sum_{1 \le q < Q_1} \sum_{\substack{a \le q \\ (a,q)=1}} \#\{1 \le m \le M \mid \|f''(m)/2 - a/q\| \le 1/(qQ)\}.
\end{aligned}$$

Pour chaque q, a, on majore

$$\#\{1 \le m \le M \mid \|f''(m)/2 - a/q\| \le 1/(qQ)\}$$

à l'aide du lemme 3.1.2 de [3]. En sommant sur $q \le Q_1$ et sur a, on obtient alors dans (3.15) une contribution

$$\ll \lambda^{1/6}\Big(M\,\frac{Q_1}{Q} + M\lambda Q_1^2 + \lambda^{-1}\,\frac{Q_1}{Q}\Big) \ll M\lambda^{1/6+\theta}$$

avec les choix effectués pour M, Q et Q_1 en (3.11).

3.2.3. *Étape 3.* Il reste désormais à majorer la somme suivante :

$$S_2 = \frac{1}{N} \sum_{m \in I_2} \Big| \sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2}\,f''(m)n^2 + \frac{1}{6}\,f'''(m)n^3\Big)\Big|, \tag{3.16}$$

où I_2 est l'ensemble défini en (3.14). Dorénavant, on fixe $m \in I_2$, et on fixe également $q \ge Q_1$ et $a \le q$ tels que $m \in I(a,q)$, où $I(a,q)$ est défini comme en (3.13). On cherche à majorer la somme en n suivante :

$$S_3 = \sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(f'(m)n + \frac{1}{2}\,f''(m)n^2 + \frac{1}{6}\,f'''(m)n^3\Big).$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu_m = \frac{1}{6}\,f'''(m), &\qquad \alpha &= \alpha_m = \frac{1}{2}\,f''(m) - \frac{a}{q}, \\
b &= b_m = [q\{f'(m)\}], &\qquad \beta &= \beta_m = f'(m) - \frac{b}{q}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$S_3 = \sum_{n=N+1}^{N_1} e\Big(\frac{b}{q}\,n + \frac{a}{q}\,n^2 + G(n)\Big),$$

où l'on a posé

$$G(n) = \mu n^3 + \alpha n^2 + \beta n.$$

On a

$$\mu \asymp \lambda, \quad |\alpha| < 1/(Q_1 Q) \ll \eta\lambda N, \quad 0 \le \beta < 1/Q_1 \ll \eta\lambda N^2$$

et ainsi

$$G''(x) \asymp \lambda N, \quad |G'''(x)| \ll \lambda, \quad N+1 \le x \le N_1,$$

ce qui permet d'appliquer le lemme 1 à la somme S_3. On obtient alors

$$S_3 \ll q^{-1/2} \sum_{w\in\{0,1\}} \Big| \sum_{L\le l\le L_1} |G''(z(l/q))|^{-1/2} e\Big(G^*\Big(\frac{l}{q}\Big) - \frac{\overline{a}}{q}\Big(\frac{b+l}{2}\Big)^2 + \frac{w}{2}\, l\Big)\Big| \\ + (q\lambda N)^{-1/2} + q^{1/2}\log(N+q)$$

où l'on a posé

$$L = qR \quad \text{et} \quad L_1 = qR_1 \tag{3.17}$$

avec R, R_1 tels que

$$[R, R_1] = G'([N, N_1]). \tag{3.18}$$

La contribution de tous les termes $(q\lambda N)^{-1/2} + q^{1/2}\log(N+q)$ dans (3.16) est

$$\ll M\lambda^{3/8-\theta/4} \ll M\lambda^{1/6+\theta}$$

pour $\theta \le \theta_0$. En outre, en appliquant le lemme 2 à la fonction $G = g + u$ avec $g(x) = \mu x^3$ et $u(x) = \alpha x^2 + \beta x$, en choisissant I de la forme $[c_1 N, c_2 N]$ avec $0 < c_1 < c_2$ de telle sorte que $[R, R_1] \subset G'(I) \cap g'(I)$, et en choisissant $T = \mu N^3$, on obtient

$$G^*(y) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\, \mu^{-1/2} y^{3/2} + \phi_0(y), \quad y \in [R, R_1]$$

avec

$$\phi_0^{(j)}(y) \ll_j \eta\, \frac{\mu N^3}{(\mu N^2)^j}, \quad y \in [R, R_1].$$

Il en découle la majoration suivante :

$$S_3 \ll M\lambda^{1/6+\theta} + q^{-1/2} \sum_{w} \Big| \sum_{L\le l\le L_1} |G''(z(l/q))|^{-1/2} \\ \times e\Big(\mu^{-1/2}\Big(\frac{l}{q}\Big)^{3/2} + \phi_0\Big(\frac{l}{q}\Big) - \frac{\overline{a}}{q}\Big(\frac{b+l}{2}\Big)^2 + \frac{w}{2}\, l\Big)\Big|,$$

qui fournit après une sommation d'Abel l'inégalité suivante :

$$S_3 \ll M\lambda^{1/6+\theta} + q^{-1/2} \sum_{w\in\{0,1\}} \Big| \sum_{L\le l\le L_2} e\Big(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\, \mu^{-1/2}\Big(\frac{l}{q}\Big)^{3/2} \\ + \phi_0\Big(\frac{l}{q}\Big) - \frac{\overline{a}}{q}\Big(\frac{b+l}{2}\Big)^2 + \frac{w}{2}\, l\Big)\Big| \tag{3.19}$$

pour un certain $L_2 \in [L, L_1]$.

3.2.4. *Étape 4.* On étudie désormais en fixant w dans (3.19) la somme

$$S_4 = \sum_{L \le l \le L_2} e(F(l)), \tag{3.20}$$

où l'on a posé

$$F(l) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\left(\frac{l}{q}\right)^{3/2} + \phi_0\left(\frac{l}{q}\right) - \frac{\overline{a}}{q}\left(\frac{b+l}{2}\right)^2 + \frac{w}{2}\,l. \tag{3.21}$$

Compte tenu des notations et hypothèses précédentes, on a $L \asymp q$ et $L_2 \asymp q$. On pose alors $H := [L^{36/41}\lambda^{11/82}]$ et on applique le lemme A de van der Corput à la somme S_4, ce qui fournit la majoration

$$S_4^2 \ll \frac{q^2}{H} + \frac{q}{H}\sum_{h=1}^{H}\Big|\sum_{L \le l \le L_2} e(F(l+h) - F(l-h))\Big|. \tag{3.22}$$

Pour chaque h fixé dans $[1, \lambda^{-2\theta}]$, on applique à la somme

$$S_5(h) = \sum_{L \le l \le L_2} e(F(l+h) - F(l-h))$$

l'inégalité de van der Corput. La contribution de ces sommes dans (3.22) est

$$\ll \frac{q^2}{H}\,\lambda^{1/8 - 9\theta/4}.$$

Pour chaque h fixé dans $[\lambda^{-2\theta}, H]$, on a

$$\sum_{L \le l \le L_2} e(F(l+h) - F(l-h))$$
$$\ll \Big|\sum_{L \le l \le L_2} e\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\,\frac{h}{q}\left(\frac{l}{q}\right)^{1/2} + \phi_1(l) + \phi_2(l) + \phi_3(l)\Big)\Big|,$$

où ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont définies par les trois relations

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\left(\frac{l+h}{q}\right)^{3/2} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\left(\frac{l-h}{q}\right)^{3/2}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\,\frac{h}{q}\left(\frac{l}{q}\right)^{1/2} + \phi_1(l),$$

$$\phi_2(l) = \phi_0\left(\frac{l+h}{q}\right) - \phi_0\left(\frac{l-h}{q}\right), \qquad \phi_3(l) = -\left\{\frac{\overline{a}}{q}\,h\right\}l.$$

La fonction

$$y \mapsto -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\,\frac{h}{q}\left(\frac{y}{q}\right)^{1/2} + \phi_1(y) + \phi_2(y) + \phi_3(y)$$

est de la forme

$$y \mapsto F_1(y) = T\left(\frac{y}{L}\right)^{\sigma} + \phi(y)$$

où l'on a posé

$$T = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\,\frac{h}{q^{3/2}}\,L^{1/2}, \qquad \sigma = 1/2, \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3.$$

La fonction F_1 est semi-monomiale, i.e. elle vérifie les hypothèses de la section 3 de [1] :

$$\sigma < 1, \qquad \phi^{(j)}(y) \ll_j \eta \left| \frac{d}{dy^j}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mu^{-1/2}\,\frac{h}{q}\left(\frac{y}{q}\right)^{1/2}\right)\right|$$

où $\eta > 0$ est un réel suffisamment petit.

On se reporte ici à la section 3 de [1] concernant la théorie des paires d'exposant de Phillips. Compte tenu des hypothèses vérifiées ci-dessus par F_1, on peut appliquer à la somme

$$\sum_{L<l\le L_2} e\left(T\left(\frac{l}{L}\right)^{\sigma} + \phi(l)\right)$$

la paire d'exposants $BA^3B(0,1) = (11/30, 16, 30)$, i.e. on a la majoration

$$\sum_{L<l\le L_2} e\left(T\left(\frac{l}{L}\right)^{\sigma} + \phi(l)\right) \ll \left(\frac{T}{L}\right)^{11/30} L^{16/30}.$$

La contribution de ces sommes dans (3.20) est

$$\ll q^{4/5}\lambda^{-11/60}H^{11/30}.$$

Avec le choix effectué pour H, on a

$$S_4 \ll q^{46/41}\lambda^{-11/82}.$$

La contribution finale de ces sommes dans (3.16) est

$$\ll M\lambda^{1/6+\theta} + M\lambda^{55/328-5\theta/164}$$

ce qui fournit le résultat attendu pour $\theta \le \theta_0$. ∎

4. Preuve du théorème 1. On choisit $\theta = \theta_0 = 1/1014$. On pose $M = [\lambda^{-1}]$ et $q = [\lambda^{-\theta/(2+3\theta)}]$. On a alors

$$\sum_{m=1}^{M} e(f(m)) \ll \sum_{r=1}^{q} |S(r)|,$$

où l'on a posé

$$S(r) = \sum_{1\le l\le L} e(f(ql+r)),$$

avec $L \asymp M/q$. Pour tout r, la fonction $x \mapsto g(x) = f(qx + r)$ a une dérivée troisième monotone qui vérifie

$$g'''(x) \asymp q^3 \lambda \asymp \lambda^{2/(2+3\theta)}.$$

En outre on a

$$L(q^2\lambda)^{1+\theta} \asymp 1,$$

donc on peut appliquer le lemme 3, et pour chaque somme $S(r)$, on a

$$S(r) \ll L(q^3\lambda)^{1/6+\theta}.$$

On en déduit la majoration

$$S \ll M\lambda^{a(\theta)}$$

avec $a(\theta) = (1/6 + \theta)(2/(2 + 3\theta)) = 1/6 + 1/1354$, ce qui fournit le résultat attendu. ∎

Références

[1] S. W. Graham and G. Kolesnik, *Van der Corput's Method for Exponential Sums*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 126, Cambridge Univ. Press, 1991.

[2] S. A. Gritsenko, *On estimates for trigonometric sums with respect to the third derivative*, Mat. Zametki 60 (1996), 383–389.

[3] M. N. Huxley, *Area, Lattice Points and Exponential Sums*, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[4] M. Redouaby et P. Sargos, *Sur la transformation B de van der Corput*, Expo. Math. 17 (1999), 207–232.

[5] P. Sargos, *La méthode de Bombieri et Iwaniec pour les sommes d'exponentielles*, dans : Journées Élie Cartan 1998 et 1999, Publ. Inst. Élie Cartan 16, 118–140.

[6] —, *Points entiers au voisinage d'une courbe, sommes trigonométriques courtes et paires d'exposants*, Proc. London Math. Soc. (3) 70 (1995), 285–312.

Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré, Nancy 1
B.P. 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
E-mail: robert@iecn.u-nancy.fr

Reçu le 14.5.2003 (4539)