ACTA ARITHMETICA
121.1 (2006)

Unmöglichkeit guter Gitterpunktformeln

von

Klaus Langmann (Münster)

Bekannt ist, dass bei Gitterpunktproblemen wie z.B. beim Viertelkreis

$$G(t) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0^2;\ x^2 + y^2 \le t\}$$

Formeln wie etwa nachstehende Beziehung

$$(1) \qquad |G(t)| = \varphi(t) + o(t^{1/4}) \quad \text{für } t \in \mathbb{N}$$

mit $\varphi(t) := \frac{1}{4}\pi t + \sqrt{t}$ falsch sind (s. [1] oder [3]). Man könnte sich fragen, ob Formeln wie (1) richtig werden können, wenn die konkrete Funktion φ durch eine andere Funktion ersetzt wird. Dabei ist klar, dass man analytische Funktionen φ finden könnte, so dass Formel (1) sogar ohne jeden Fehler richtig ist. Von daher muss man irgendwelche Zusatzforderungen an φ stellen. Funktionen $\varphi \in C^2$, die aus rationalen Funktionen, Wurzeln und Logarithmen zusammengesetzt sind, haben die Eigenschaft, dass $\varphi'(t) = \mathcal{O}(\varphi(t)/t)$, $\varphi''(t) = \mathcal{O}(\varphi(t)/t^2)$ ist. Wir zeigen nun, dass auch mit jeder solchen Funktionen $\varphi(t)$ die obige Gitterpunktformel falsch ist. Genauer zeigen wir allgemeiner:

Satz. *Seien α, β, n natürliche Zahlen mit $n \ge 2$. Betrachte für festes $0 \le A < B \le \infty$ und für laufendes $t \in \mathbb{R}_+$ die Gitterpunktmengen*

$$(2) \qquad G(t) := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0^2;\ \alpha x^n + \beta y^n \le t,\ Ay \le x \le By\}.$$

Es gibt dann keine Funktion $\varphi \in C^2$ mit

$$(3) \qquad |G(t)| = \varphi(t) + o(t^{1/2n}) \quad \textit{für } t \in \mathbb{N},$$

$$(4) \qquad \varphi'(t) = o(\varphi(t)t^{1/2n-1}), \quad \varphi''(t) = o(\varphi(t)t^{1/2n-2}) \quad \textit{für } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist $A = 0$ oder $B = \infty$, so gibt es eine solche Funktion $\varphi \in C^2$ nicht einmal dann, wenn auf der rechten Seite von (3) bzw. (4) die Zahl $\frac{1}{2n}$ durch die größere Zahl $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$ ersetzt wird.

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 10E05.

Beweis. Mit dem Mittelwertsatz folgt aus (4), dass (3) richtig ist auch für $t \in \mathbb{R}_+$. Definiere nun, für $r \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(r) := |G(r^n)|, \qquad M := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2;\ \alpha x^n + \beta y^n \leq 1,\ Ay \leq x \leq By\}. \tag{5}$$

M ist eine "geeignete" Menge im Sinne von [4] (vergl. [4, Beispiel 1.3]). Natürlich haben wir bei $RM := \{(xR, yR) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y) \in M\}$, dass gilt

$$RM = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2;\ (\alpha x^n + \beta y^n)^{1/n} \leq R,\ Ay \leq x \leq By\}. \tag{6}$$

Sei jetzt $(x_0, y_0) \in M \cap \mathbb{R}_+^2$ ein beliebiger rationaler Punkt. Setze

$$\gamma := \alpha x_0^n + \beta y_0^n, \qquad \widetilde{\alpha} := \alpha/\gamma, \qquad \widetilde{\beta} := \beta/\gamma.$$

Dann hat $\widetilde{\alpha} x^n + \widetilde{\beta} y^n = 1$ die rationale Lösung $(x_0, y_0) \in M$. Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ fest, so dass $k\widetilde{\alpha} x_0^{n-1} \in \mathbb{Z},\ k\widetilde{\beta} y_0^{n-1} \in \mathbb{Z}$. Für dieses k ist die Menge

$$\mathcal{R}_k := \{(x,y) \in \mathbb{Q}_+^2;\ \widetilde{\alpha} x^n + \widetilde{\beta} y^n = 1,\ k\widetilde{\alpha} x^{n-1} \in \mathbb{Z},\ k\widetilde{\beta} y^{n-1} \in \mathbb{Z}\}$$

aus [4, Satz 1] nicht leer. Somit ist also nach [4, Satz 1]

$$\Big| \sum_{(x,y) \in RM \cap \mathbb{N}_0^2} e(k(\widetilde{\alpha} x^n + \widetilde{\beta} y^n)^{1/n}) \Big| \geq \lambda_1 R^{1+1/2}$$

mit einer Konstanten $\lambda_1 > 0$. Also ist für $m := k\gamma^{-1/n} \in \mathbb{R}_+$ (m fest, da k fest) die Beziehung

$$\sum_{(x,y) \in RM \cap \mathbb{N}_0^2} e(m(\alpha x^n + \beta y^n)^{1/n}) = o(R^{1+1/2}) \tag{7}$$

falsch. Betrachte nun für grosses K und grosses R und für jedes $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq mKR$ die Menge

$$M_j = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}_0^2;\ \frac{j-1}{mK} < (\alpha x^n + \beta y^n)^{1/n} \leq \frac{j}{mK},\ Ay \leq x \leq By \right\}.$$

Es ist, mit der Funktion ψ aus (5),

$$|M_j| = \psi\left(\frac{j}{mK}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{mK}\right). \tag{8}$$

Weiter folgt aus (6) und (7), dass

$$\sum_{j=1}^{mKR} \sum_{(x,y) \in M_j} e(m(\alpha x^n + \beta y^n)^{1/n}) = o(R^{3/2}) \tag{9}$$

falsch ist. Wenn für $(x,y) \in M_j$ die Zahl $m(\alpha x^n + \beta y^n)^{1/n}$ durch die Zahl j/K ersetzt wird, ist der Fehler $\mathcal{O}(1/K)$. Dieser Fehler taucht $|M_j|$ mal auf.

Also folgt mit (8) und (9), dass

$$\sum_{j=1}^{mKR} e\left(\frac{j}{K}\right)\left(\psi\left(\frac{j}{mK}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{mK}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{K}\right)\sum_{j=1}^{mKR}\left(\psi\left(\frac{j}{mK}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{mK}\right)\right) + o(R^{3/2}) \tag{10}$$

falsch ist. Die Summe der rechten Seite von ist aber gleich $\psi(R) - \psi(0)$. Nach (2) bzw. (5) ist $\psi(R) = \mathcal{O}(R^2)$; somit ist also nach (10) die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{mKR} e\left(\frac{j}{K}\right)\left(\psi\left(\frac{j}{mK}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{mK}\right)\right) = \mathcal{O}(R^2K^{-1}) + o(R^{3/2}) \tag{11}$$

falsch. Angenommen, es gäbe eine Funktion φ mit (3) und (4). Nun gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{mKR} e\left(\frac{j}{K}\right)&\left[\left(\psi\left(\frac{j}{mK}\right) - \psi\left(\frac{j-1}{mK}\right)\right)\right.\\ &\qquad\left. - \left(\varphi\left(\left(\frac{j}{mK}\right)^n\right) - \varphi\left(\left(\frac{j-1}{mK}\right)^n\right)\right)\right]\\ &= \sum_{j=1}^{mKR}\left(e\left(\frac{j}{K}\right) - e\left(\frac{j+1}{K}\right)\right)\left[\psi\left(\frac{j}{mK}\right) - \varphi\left(\left(\frac{j}{mK}\right)^n\right)\right]\\ &\quad - e\left(\frac{1}{K}\right)[\psi(0) - \varphi(0)] + e\left(\frac{mKR+1}{K}\right)[\psi(R) - \varphi(R^n)]\\ &= \sum_{j=1}^{mKR}\mathcal{O}\left(\frac{1}{K}\right)o(R^{1/2}) + o(R^{1/2}) = o(R^{3/2}).\end{aligned} \tag{12}$$

(Hierbei wurde $\psi(r) - \varphi(r^n) = |G(r^n)| - \varphi(r^n) = o(r^{1/2})$ nach (3) benutzt.) Somit folgt aus (11), dass die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{mKR} e\left(\frac{j}{K}\right)\left(\varphi\left(\left(\frac{j}{mK}\right)^n\right) - \varphi\left(\left(\frac{j-1}{mK}\right)^n\right)\right) = \mathcal{O}(R^2K^{-1}) + o(R^{3/2}) \tag{13}$$

falsch ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $0 \le \theta_j \le 1$, so dass die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{mKR} e\left(\frac{j}{K}\right)\left(n\left(\frac{j}{mK}\right)^{n-1}\varphi'\left(\left(\frac{j-\theta_j}{mK}\right)^n\right)\frac{1}{mK}\right) = \mathcal{O}(R^2K^{-1}) + o(R^{3/2}) \tag{14}$$

falsch ist. Für $K \to \infty$ bei noch festem grossen R ist die linke Seite von (14) aber eine Riemannsche Summe zum Integral $\int_0^R e(mt)nt^{n-1}\varphi'(t^n)\,dt$ und unterscheidet sich bei sehr grossem K von diesem Integral um weniger als $\mathcal{O}(R^{3/2})$. Damit besagt (14), dass die Beziehung

$$\int_0^R e(mt)t^{n-1}\varphi'(t^n)\,dt = o(R^{3/2}) \tag{15}$$

falsch ist. Die linke Seite von (15) wird partiell integriert. Somit ist die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi i m}\int_0^R e(mt)((n-1)t^{n-2}\varphi'(t^n) + nt^{2n-2}\varphi''(t^n))\,dt - \frac{1}{2\pi i m}e(mR)R^{n-1}\varphi'(R^n) = o(R^{3/2}) \tag{16}$$

ebenfalls falsch. Damit kann aber nicht (4) gelten, weil wegen $\varphi(t) \sim t^{2/n}$ schon nach (4)

$$\varphi'(t^n) = o(t^{5/2-n}), \qquad \varphi''(t^n) = o(t^{5/2-2n})$$

gelten würde und damit die Beziehung (16) doch richtig wäre. Damit ist unser Satz im Fall $0 < A < B < \infty$ gezeigt.

Für den Fall, dass $A = 0$ oder $B = \infty$ ist, liegt ein rationaler Punkt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ mit $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$ in der oben definierten "geeigneten" Menge M. Wie oben können wir dann annehmen, dass dann wieder $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}_k$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}$ ist. Wird m wie oben definiert, so ist also nach [4, Satz 1] analog (7)

$$\sum_{(x,y)\in RM\cap\mathbb{N}_0^2} e(m(\alpha x^n + \beta y^n)^{1/n}) = o(R^{1+(1-1/n)})$$

falsch. Die gesamte anschliessende Argumentation bleibt richtig, wenn der Exponent $1/2$ durch $1 - 1/n$ ersetzt wird, so dass damit die Behauptung auch für den Fall $A = 0$ bzw. $B = \infty$ gezeigt ist.

Unser Satz ist im Vergleich zu dem Satz von Krätzel [2, 3.17.A] in der Negativaussage allgemeiner, enthält jedoch kein Äquivalent zur Positivaussage.

Literatur

[1] G. H. Hardy, *On the expression of a number as the sum of two squares*, Quart. J. Math. 46 (1915), 263–283.

[2] E. Krätzel, *Lattice Points*, Kluwer, Dordrecht, 1988.

[3] E. Landau, *Über die Gitterpunkte in einem Kreis* (*II*), Göttinger Nachr. 1915, 161–171.

[4] K. Langmann, *Unlösbarkeit der Gleichung* $\alpha x^n + \beta y^n = z^n$ *und Gleichverteilung der Reste von* $\sqrt[n]{\alpha x^n + \beta y^n}$, Monatsh. Math. 143 (2004), 205–227.

Mathematisches Institut
Einsteinstrasse 62
D-48151 Münster, Germany
E-mail: ina.folker@math.uni-muenster.de

Eingegangen am 13.6.2005 (5009)