ACTA ARITHMETICA
121.4 (2006)

Module de continuité de la fonction de répartition de $\varphi(n)/n$

par

Vincent Toulmonde (Nancy)

1. INTRODUCTION

L'objet de notre étude est le module de continuité de la fonction de répartition de $\varphi(n)/n$, que l'on note ici G de sorte que

$$G(t) := \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card} \left\{ 1 \le n \le N : \frac{\varphi(n)}{n} \le t \right\}.$$

L'étude des fonctions de répartition de fonctions arithmétiques possède un intérêt propre. Ainsi que le souligne Tenenbaum au paragraphe III.1.4 de [10], "l'une des spécificités de ces fonctions réside en effet dans la nature intrinsèquement irrégulière et erratique de leurs variations [...] La théorie probabiliste des nombres répond au désir, naturel en une telle circonstance, d'entreprendre une étude statistique".

C'est la raison pour laquelle l'étude des fonctions de répartition a suscité un intérêt auprès de mathématiciens tels que Erdős, Schoenberg, Wintner, Diamond, Rhoads. La présente étude est motivée notamment par le fait que G est historiquement la première fonction de répartition qui a été étudiée dans la littérature, par Schoenberg [8] en 1928. Par la suite, le théorème d'Erdős–Wintner (1939), exposé dans [10] en III.4.1, pendant du théorème "des trois séries" de Kolmogorov en probabilités, fournit une caractérisation des fonctions arithmétiques additives comme multiplicatives, admettant une fonction de répartition, développant ainsi la théorie générale. Nous nous proposons de complèter ici la plupart des résultats connus sur le comportement de G.

Nous montrons que l'étude du comportement de $G(t)$ en tout point se ramène à l'étude au voisinage de $t = 1$. Celle-ci est effectuée dans [12] et nous référons le lecteur à cet article.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11-XX, 11Nxx, 11K65, 11N05, 11N25, 11N60.

1.1. Résultats déjà connus. Schoenberg [8] a prouvé que la densité $G(t)$ existe pour tout réel t et que celle-ci est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et [9] strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, la fonction G est purement singulière [4], c'est-à -dire de dérivée nulle presque partout (G non dérivable) et telle que

$$\int_{\Omega} dG(t) = 1$$

pour un certain ensemble Ω de mesure de Lebesgue nulle. On a

$$G(1) = 1, \qquad G(0) = 0.$$

Les comportements de G aux voisinages respectifs de 1 et 0, étudiés par Erdős dans [5], sont donnés par le théorème suivant.

Théorème A. *On a respectivement, lorsque ε tend vers 0 par valeur supérieure*,

$$G(1) - G(1-\varepsilon) = \frac{e^{-\gamma}}{\log 1/\varepsilon} + O\left(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^2}\right), \tag{1}$$

$$\log\log \frac{1}{G(\varepsilon)} \sim \frac{e^{-\gamma}}{\varepsilon}, \tag{2}$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Erdős, par une méthode élémentaire ([3] ou [6]), puis Diamond et Rhoads, par une méthode basée sur les propriétés des fonctions "BMO" à oscillation moyenne bornée [2], fournissent une majoration, optimale dans son uniformité, du module de continuité de G.

Théorème B. *Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que l'on ait, lorsque $0 < \varepsilon < 1$,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{G(t) - G(t-\varepsilon t)\} \le \frac{C}{\log 1/\varepsilon}. \tag{3}$$

Remarque. Erdős souligne dans [6] que l'on pourrait montrer que ce résultat est vrai et optimal avec $C = e^{-\gamma} + o(1)$ lorsque ε tend vers 0 par valeur supérieure. Nous précisons ce résultat au Théorème 2. Notre méthode combine la démonstration originale d'Erdős et le Théorème C, établi dans [12] et relatif au comportement de G au voisinage de 1.

On pose

$$\mathcal{L}(t) := \exp \frac{(\log t)^{3/5}}{(\log\log t)^{1/5}} \qquad (t \ge 3),$$

et l'on définit, pour $c > 0$ fixé et $0 < \varepsilon < 1/3$, l'entier

$$N_0(\varepsilon, c) := [c(\log 1/\varepsilon)^{3/5}(\log\log 1/\varepsilon)^{-6/5}], \tag{4}$$

en notant $[x]$ la partie entière du réel x.

Nous montrons que l'étude du module de continuité de G peut se ramener à l'étude au voisinage de 1. C'est pourquoi nous ferons usage du théorème suivant établi dans [12].

Théorème C. *Il existe une suite de nombres réels* $(g_m)_{m\in\mathbb{N}^\star}$ *et une suite de fonctions bornées* $(R_N(\varepsilon))_{N\geq 2}$ *telles que l'on ait, lorsque* $0<\varepsilon<1/3$ *et* $N\geq 2$,

$$G(1)-G(1-\varepsilon)=\sum_{m=1}^{N-1}\frac{g_m}{(\log 1/\varepsilon)^m}+\frac{R_N(\varepsilon)}{(\log 1/\varepsilon)^N}. \tag{5}$$

De plus, il existe deux constantes $c>0$ *et* $C>0$ *telles que*

$$|g_m|\leq (C\log m)^m m! \qquad (m\geq 2)$$

et

$$|R_N(\varepsilon)|\leq (C\log N)^N N! \qquad (2\leq N\leq N_0(\varepsilon,c)), \tag{6}$$

et l'on a

$$g_1=e^{-\gamma},\qquad g_2=0,\qquad g_3=-e^{-\gamma}\,\frac{\pi^2}{12}.$$

En particulier, il existe une constante $c'>0$ *telle que l'on ait, uniformément pour* $0<\varepsilon<1/3$,

$$G(1)-G(1-\varepsilon)=\sum_{m=1}^{N_0(\varepsilon,c)}\frac{g_m}{(\log 1/\varepsilon)^m}+O(\mathcal{L}(1/\varepsilon)^{-c'}).$$

1.2. Résultats présentés dans cet article. Comme il est d'usage, on note $P^+(n)$ le plus grand facteur premier de n, avec la convention $P^+(1)=1$, et $P^-(n)$ son plus petit facteur premier, avec la convention $P^-(1)=+\infty$. La fonction de Möbius est désignée par μ, on note $\log_k$ la $k$ième itérée de la fonction logarithme. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des valeurs prises par $\varphi(n)/n$ lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$, soit

$$\mathcal{E}:=\{\varphi(n)/n : n\geq 1\},$$

ainsi que l'un de ses sous-ensembles $\mathcal{E}_y$ défini par

$$\mathcal{E}_y:=\{\varphi(n)/n : n\geq 1,\ P^+(n)\leq y\}.$$

Dans cet article, nous présentons trois résultats, relatifs au module de continuité de G. Le théorème suivant fournit une estimation du module de continuité de G en tout point de $\mathcal{E}$, le reliant au module de continuité en 1. Nous adaptons la méthode utilisée par Erdős [6] dans sa démonstration du Théorème B.

On définit l'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varepsilon)$ par

$$\mathcal{A} := \{\varphi(n)/n : 1 \le n \le (1/\varepsilon)^{1/8}\},$$

ainsi que, lorsque $0 \le x \le 1$, la quantité

$$K(x) := \sum_{\varphi(n)/n = x} \frac{1}{n}, \tag{7}$$

dont nous donnons une expression explicite au Lemme 2. Cette fonction a été initialement considérée par Erdős dans [6] pour la démonstration du Théorème B. Nous définissons la fonction L par

$$\mathrm{L}(t) := \exp \sqrt{\log t \log\log t} \qquad (t \ge 3). \tag{8}$$

Théorème 1. *On a, uniformément pour* $0 < \varepsilon < 1/3$ *et* $t \in \mathcal{A}(\varepsilon)$,

$$G(t) - G(t - \varepsilon t) = K(t)(G(1) - G(1-\varepsilon)) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}),$$
$$G(t(1-\varepsilon)^{-1}) - G(t) = O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}).$$

Remarque 1. Nous n'avons pas cherché à optimiser les valeurs des constantes $1/8$ et $1/5$. La méthode développée ici peut être conduite avec $1/8$ remplacé par n'importe quelle constante fixée dans $]0, 1/4[$. La constante $1/5$ apparaissant dans le terme d'erreur du Théorème 1 peut, par notre méthode, être remplacée par n'importe quelle constante $< 1/4$.

Remarque 2. En combinant ce théorème et le Théorème C, nous obtenons en particulier une estimation de $G(t) - G(t - \varepsilon t)$ en tout point t fixé de $\mathcal{E}$.

La méthode issue de la démonstration du Théorème 1 fournit une majoration de la quantité $G(t) - G(t - \varepsilon t)$, uniforme pour $0 \le t \le 1$, que nous énonçons au Lemme 9. Grâce à ce théorème et au Théorème C, nous montrons les deux théorèmes suivants, le premier constituant une évaluation de la norme infinie du module de continuité, le second fournissant une estimation de sa norme L^r. Définissons, lorsque $0 < \varepsilon < 1/3$, et pour une constante positive c_1 fixée,

$$\theta_0 := \exp\{-\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/6}\}, \qquad \theta_1 := c_1 \varepsilon (\log 1/\varepsilon)^2 \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}. \tag{9}$$

Théorème 2. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *et une constante* $c_1 > 0$ *tels que, lorsque* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *la valeur maximale de* $G(t) - G(t - \varepsilon t)$ *soit atteinte lorsque*

$$t \in \left[\frac{1}{2}(1-\theta_0), \frac{1}{2}(1+\theta_1)\right].$$

De plus, on a, lorsque $0 < \varepsilon < 1/3$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{G(t) - G(t - \varepsilon t)\} = G(1) - G(1-\varepsilon) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}).$$

Remarque. Il est connu que les fonctions de répartition de $\varphi(n)/n$ et $n/\sigma(n)$ présentent des comportements similaires. Toutefois, le module de continuité de la fonction de répartition de $n/\sigma(n)$ n'atteint pas son maximum au voisinage de 1/2, mais au voisinage de 1. Ce fait est établi à la section 10, grâce au Lemme 15 *infra*.

Définissons, lorsque $0 < \varepsilon < 1/3$, l'entier

$$N_1 := [(\log 1/\varepsilon)^{1/2}(\log\log 1/\varepsilon)^{-1/2}], \tag{10}$$

de telle façon que l'on ait, grâce à la majoration de R_N du Théorème C,

$$\frac{R_{N_1}(\varepsilon)}{(\log 1/\varepsilon)^{N_1}} \leq \frac{(C\log N_1)^{N_1}N_1!}{(\log 1/\varepsilon)^{N_1}} \ll \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-3/4}.$$

Nous considérons les deux fonctions

$$F_1(\varepsilon,\tau) := \sum_{m=1}^{N_1} \frac{g_m}{(\log 1/\tau)^m},$$

$$F_2(\varepsilon,u) := \sum_{m=1}^{N_1} g_m\Big(\frac{1}{(\log 1/(\varepsilon(1+u)))^m} - \frac{1}{(\log 1/(\varepsilon u))^m}\Big),$$

où les g_m sont définis au Théorème C. Introduisons, lorsque $r > 1$, le produit infini

$$C_r := \prod_p \Big(1 + \frac{1}{(p-1)^r}\Big), \tag{11}$$

ainsi que le moment d'ordre r du module de continuité,

$$M_r(\varepsilon) := \int_0^{+\infty} \{G(t) - G(t-\varepsilon t)\}^r \,\frac{dt}{t}.$$

Suite à une question posée par Tenenbaum en début de thèse, et à l'origine de ce travail, nous fournissons une estimation de ce moment au théorème suivant.

Théorème 3. *Soit $r > 1$ un nombre réel, et $c < \min(1/15, (r-1)/15)$ une constante fixée. On a alors, uniformément pour $0 < \varepsilon < 1/3$,*

$$M_r(\varepsilon) = C_r\Big(\int_0^{\varepsilon} F_1(\varepsilon,\tau)^r \,d\tau + \varepsilon \int_0^{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}} F_2(\varepsilon,u)^r \,du\Big) + O_r(\varepsilon\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}).$$

Définissons, pour chaque réel $r > 1$, l'intégrale

$$J_r := \int_0^{+\infty} (\log(1+1/u))^r \,du.$$

Nous connaissons la valeur $J_2 = \pi^2/3$. En évaluant les fonctions F_1 et F_2, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soit $r > 1$ un nombre réel. Il existe alors une suite doublement indexée $(\mathcal{G}_{k,n}(r))_{1\le k\le 2,\, n\ge 0}$ de nombres réels tels que l'on ait, pour chaque entier $N \ge 1$ fixé et uniformément pour* $0 < \varepsilon < 1$,

$$M_r(\varepsilon) = \varepsilon\Bigg\{ \sum_{\substack{k\in\{1,2\}\\ kr+n\le 2r+N}} \frac{\mathcal{G}_{k,n}(r)}{(\log 1/\varepsilon)^{kr+n}} + O_{r,N}\bigg(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^{2r+N}}\bigg)\Bigg\}.$$

En particulier, on a

$$M_r(\varepsilon) = C_r\, \frac{e^{-r\gamma}\varepsilon}{(\log 1/\varepsilon)^r}\,\{1 - U_r(\varepsilon)\}, \tag{12}$$

où C_r est défini en (11) *et où*

$$U_r(\varepsilon) = \frac{r}{\log 1/\varepsilon} - r\,\frac{r+1-\pi^2/12}{(\log 1/\varepsilon)^2} - \frac{J_r}{(\log 1/\varepsilon)^r} + O_r\bigg(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^{\min(r+1,3)}}\bigg).$$

Remarque. La fonction F_1 du Théorème 3 contribue aux puissances relatives à $k = 1$, et F_2 à celles correspondant à $k = 2$. Ainsi, le terme principal (12) est issu du premier terme du membre de droite du Théorème 3.

Ce travail a été réalisé durant ma thèse, à l'Université d'Évry. Je remercie le département de mathématiques de m'avoir permis de mener celle-ci dans d'excellentes conditions.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Régis de la Bretèche, directeur de ma thèse, dont cet article est extrait. Il va de soi que son encadrement a été déterminant, et il serait inutile de dire le nombre d'idées et de remarques qu'il m'a prodiguées.

2. THÉORÈMES 1, 2 ET 3 : RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

2.1. Résolution de l'équation en n : $\varphi(n)/n = x$

Lemme 1. *Si $x \in \mathcal{E}$, son écriture sous la forme $x = \prod_{p\in A}(1-1/p)$, avec* $\operatorname{card} A < \infty$, *est unique. De plus, les solutions de l'équation $\varphi(n)/n = x$ sont exactement les entiers composés des nombres premiers de l'ensemble A et uniquement de ceux-ci. Dans le cas où x n'est pas exprimable sous cette forme (i.e. $x \notin \mathcal{E}$), l'équation n'admet pas de solution.*

Démonstration. Afin de résoudre l'équation annoncée, nous devons résoudre

$$\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_n}\Big) = \Big(1-\frac{1}{q_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{q_2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{q_m}\Big)$$

où les p_i et les q_i sont des nombres premiers rangés par ordre strictement croissant. Si x en effet n'est pas exprimable sous cette forme, l'équation n'admet pas de solution.

En réduisant ces deux nombres rationnels sous la forme de fractions irréductibles, nous voyons que l'on a nécessairement $p_n = q_m$. On simplifie alors l'équation de départ par $1-1/p_n$ et on reproduit le même raisonnement, ce qui fournit $p_{n-1} = q_{m-1}$. Finalement, on obtient $n = m$ et $p_i = q_i$. ■

2.2. Expression explicite de $K(x)$ en fonction de x. On rappelle la définition (7) de la fonction K. Nous sommes à présent en mesure de donner une expression explicite de $K(x)$ en fonction de x.

LEMME 2. *Lorsque $x \in \mathcal{E}$, on définit implicitement l'ensemble A de nombres premiers par la relation $x = \prod_{p\in A}(1-1/p)$, où* $\operatorname{card} A < \infty$*. On a alors*

$$K(x) = \prod_{p\in A} \frac{1}{p-1}. \tag{13}$$

Lorsque $x \notin \mathcal{E}$, on a $K(x) = 0$. De plus, la fonction K est continue en tout point $t \notin \mathcal{E}$, et discontinue en tout point $t \in \mathcal{E}$.

Ainsi, on a par exemple $K(1/2) = K(1) = 1$, $K(2/3) = 1/2$, $K(1/4) = 0$.

Démonstration. Nous avons établi, au Lemme 1, lors de l'étude de l'équation $\varphi(n)/n = x$, que les entiers n solutions sont exactement ceux qui contiennent exactement les facteurs premiers de l'ensemble A (puisque l'écriture de x sous cette forme est unique). En notant $A = \{p_1, \ldots, p_l\}$, il vient

$$K(x) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{\nu_i=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{\nu_1} \cdots p_l^{\nu_l}} = \prod_{p\in A} \frac{1}{p-1}.$$

Maintenant, nous montrons le résultat annoncé concernant la continuité de K. Considérons $t \notin \mathcal{E}$, et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers t lorsque n tend vers l'infini. Définissons implicitement l'ensemble de nombres premiers A_n par la relation $t_n = \prod_{p\in A_n}(1-1/p)$ (si $t_n \notin \mathcal{E}$, on a $K(t_n) = 0 = K(t)$). La condition $t_n \to t$ impose alors $\operatorname{card} A_n \to +\infty$, et donc $K(t_n) \to 0$, ce qui établit la continuité de K hors de $\mathcal{E}$. La discontinuité de K sur $\mathcal{E}$ résulte du fait qu'il existe, pour chaque $t_0 \in \mathcal{E}$, des valeurs de t arbitrairement proches de t_0 telles que $K(t) = 0$. Cela termine la démonstration du Lemme 2. ■

2.3. Sommes portant sur la fonction K

LEMME 3. *On a, lorsque $r > 1$,*

$$\sum_{t\in\mathcal{E}} K(t)^r = C_r, \tag{14}$$

où C_r est le produit infini défini en (11).

Démonstration. On obtient le résultat en faisant tendre N vers l'infini dans la formule

$$\sum_{t\in\mathcal{E}_N} K(t)^r = \prod_{p\le N}\Big(1+\frac{1}{(p-1)^r}\Big),$$

obtenue grâce au Lemme 2, en développant le produit. ∎

2.4. Une minoration du module de continuité de G. Pour la démonstration du Théorème 1, nous avons besoin, au préalable, du résultat suivant.

LEMME 4. *On a, lorsque $t\in\mathcal{E}_{1/\varepsilon}$ et $t\neq 1$,*

$$G(t)-G(t-\varepsilon t) > K(t)(G(1)-G(1-\varepsilon)). \tag{15}$$

REMARQUE. Ce lemme permet de retrouver, en utilisant seulement la stricte croissance de G au voisinage gauche de 1, le fait établi dans [9] que G est strictement croissante sur $[0,1]$. Il résulte en effet du Théorème A et du Lemme 4 que G est strictement croissante au voisinage gauche de chaque point fixé de $\mathcal{E}$. La densité de $\mathcal{E}$ dans $[0,1]$ établit alors la stricte croissance de G sur $[0,1]$.

Démonstration du Lemme 4. Nous utilisons, pour la démonstration de ce lemme, la représentation probabiliste de G :

$$G(t) = \mathbb{P}\Big(\prod_p (1-1/p)^{\alpha_p}\le t\Big), \tag{16}$$

où les α_p sont des variables aléatoires indépendantes et obéissant à la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\alpha_p=1) = 1-\mathbb{P}(\alpha_p=0) = 1/p. \tag{17}$$

Cette représentation peut être établie grâce au théorème de Delange ([10, Théorème III.4.2.3]) : la fonction $g(n)=\varphi(n)/n$ vérifie $g(p^\nu)=1-1/p$ lorsque $\nu\ge 1$, et donc

$$\sum_p \frac{1-\mathrm{Re}(g(p)^{i\tau})}{p} \ll_\tau 1.$$

Il en résulte que l'on a

$$\begin{aligned} M_\tau(g) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)^{i\tau} &= \prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{g(p^\nu)^{i\tau}}{p^\nu}\\ &= \prod_p\Big(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{i\tau}\Big). \end{aligned}$$

Cette fonction de τ est continue à l'origine. Au vu du Théorème III.2.4 de [10], la représentation annoncée découle alors de l'égalité des fonctions caractéristiques

$$M_\tau(g) = \mathbb{E}\Big(\prod_p (1-1/p)^{i\tau\alpha_p}\Big),$$

que l'on obtient grâce à (17), en utilisant l'indépendance des α_p. On pourra aussi se reporter à l'Exercice III.2.2 de [11] qui établit la validité de la représentation (16) via l'écriture de G sous la forme d'un produit de convolution.

On note $t = \prod_{p\in A}(1-1/p)$, de sorte que l'hypothèse $t \in \mathcal{E}_{1/\varepsilon}$ implique $A \subset [2, 1/\varepsilon]$.

L'idée de la démonstration consiste à montrer que l'événement impliqué dans la probabilité du membre de gauche du Lemme 4 contient le sous-événement $\{\alpha_p = 1 \text{ lorsque } p \in A\}$, ce qui fournit la minoration annoncée au sens large, puis de montrer qu'il existe d'autres événements de probabilité strictement positive réalisant celui-ci. Nous avons

$$\begin{aligned}(18)\qquad & G(t) - G(t-\varepsilon t)\\ &= \mathbb{P}\bigg((1-\varepsilon)\prod_{p\in A}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) < \prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} \leq \prod_{p\in A}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\bigg)\\ &> \mathbb{P}\bigg((\forall p \in A, \alpha_p = 1)\,\&\,\Big(\prod_{p\notin A}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big)\bigg).\end{aligned}$$

Nous montrons en effet que le second événement est strictement inclus dans le premier, par densité de $\mathcal{E}$ dans $[0,1]$ et stricte croissance de la fonction G au voisinage de 1. Considérons pour cela un ensemble fini B de nombres premiers tous distincts de ceux de l'ensemble A, et satisfaisant à

$$t\sqrt{1-\varepsilon} < \prod_{p\in B}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) < t.$$

Un tel ensemble existe par densité de $\mathcal{E}$ dans $[0,1]$. Nous avons

$$\begin{aligned}(19)\qquad & G(t) - G(t-\varepsilon t)\\ &\geq \mathbb{P}\bigg((\forall p \in A, \alpha_p = 1)\,\&\,\Big(\prod_{p\notin A}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big)\bigg)\\ &\quad + \mathbb{P}\bigg((\forall p \in B, \alpha_p = 1)\,\&\,\Big(\prod_{p\notin B}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > \sqrt{1-\varepsilon}\Big)\bigg).\end{aligned}$$

Les deux précédents événements sont en effet disjoints : s'ils ne l'étaient pas, on aurait nécessairement $\alpha_p = 1$ lorsque $p \in A \cup B$. Cela impliquerait, puisque $A \cap B$ est vide,

$$\prod_p \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} < t^2 \le t(1-\varepsilon),$$

où l'on a noté que l'hypothèse du Lemme 4 implique $t \le 1-\varepsilon$. Cela fournit la contradiction requise, et démontre la minoration (19).

La dernière probabilité de (19) est strictement positive, car elle est, par indépendance des α_p, supérieure à

$$\prod_{p\in B} \frac{1}{p}\, \mathbb{P}\Big(\prod_{p\notin B}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > \sqrt{1-\varepsilon}\Big) \ge \prod_{p\in B}\frac{1}{p}\,(G(1) - G(\sqrt{1-\varepsilon})). \tag{20}$$

La stricte croissance de G au voisinage gauche de 1 établit alors la minoration stricte (18). Le minorant de (18) vaut, par indépendance des α_p,

$$\prod_{p\in A}\frac{1}{p}\,\mathbb{P}\Big(\prod_{p\notin A}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big).$$

Dans la précédente probabilité, on a en particulier $\alpha_p = 0$ lorsque $p \le 1/\varepsilon$. On en déduit

$$\mathbb{P}\Big(\prod_{p\notin A}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big) = \prod_{\substack{p\le 1/\varepsilon\\ p\notin A}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\mathbb{P}\Big(\prod_{p>1/\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big),$$

où l'on a utilisé à nouveau l'indépendance des α_p. Ainsi

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) > \prod_{p\in A}\frac{1}{p}\prod_{\substack{p\le 1/\varepsilon\\ p\notin A}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\mathbb{P}\Big(\prod_{p>1/\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big).$$

En remarquant que $A \subset [2, 1/\varepsilon]$ implique

$$\prod_{\substack{p\le 1/\varepsilon\\ p\notin A}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \prod_{p\le 1/\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{p\in A}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1},$$

on en déduit finalement

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) > K(t)\prod_{p\le 1/\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\mathbb{P}\Big(\prod_{p>1/\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big).$$

Cela fournit le résultat annoncé, en notant que

$$\begin{aligned} G(1) - G(1-\varepsilon) &= \mathbb{P}\Big(\prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big) \\ &= \prod_{p\le 1/\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\mathbb{P}\Big(\prod_{p>1/\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\alpha_p} > 1-\varepsilon\Big). \quad\blacksquare \end{aligned}$$

Lors de la démonstration du Théorème 2, nous utiliserons le résultat du lemme suivant, basé également sur la représentation probabiliste (16) de la fonction G utilisée dans le lemme précédent. Ce résultat montre que les valeurs de t réalisant le maximum de $G(t)-G(t-\varepsilon t)$ ne sont pas situées au voisinage de $t=1$.

LEMME 5. *Soit* $0<\varepsilon<1/2$. *Lorsque*

$$\frac{1}{2(1-\varepsilon)}<t<\frac{2}{1-\varepsilon},$$

on a

$$G(t)-G(t-\varepsilon t)<G\left(\frac{t}{2}\right)-G\left(\frac{t}{2}\,(1-\varepsilon)\right).$$

Démonstration. La représentation probabiliste (16) permet d'écrire

$$G(t)-G(t-\varepsilon t)=\mathbb{P}\left(t(1-\varepsilon)<\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\alpha_p}\leq t\right),$$

où les α_p obéissent à la loi de probabilité (17). En notant que l'hypothèse du Lemme 5 implique $t(1-\varepsilon)>1/2$, nous en déduisons que l'on a nécessairement $\alpha_2=0$ dans la dernière probabilité. Il suit

$$G(t)-G(t-\varepsilon t)=\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left(t(1-\varepsilon)<\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\alpha_p}\leq t\right). \tag{21}$$

D'autre part, on a, en distiguant selon les deux valeurs possibles de α_2,

$$\begin{aligned}G\left(\frac{t}{2}\right)-G\left(\frac{t}{2}\,(1-\varepsilon)\right)=\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left(t(1-\varepsilon)<\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\alpha_p}\leq t\right)&\\+\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left(\frac{t}{2}\,(1-\varepsilon)<\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\alpha_p}\leq\frac{t}{2}\right)&.\end{aligned}$$

Au vu de (21), il nous suffit à présent d'établir

$$\mathbb{P}\left(\frac{t}{2}\,(1-\varepsilon)<\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\alpha_p}\leq\frac{t}{2}\right)>0. \tag{22}$$

Notant que l'hypothèse du Lemme 5 implique $t(1-\varepsilon)/2<1$, un raisonnement semblable à celui effectué au Lemme 4, pour montrer que la dernière probabilité de (19) est strictement positive, établit alors le résultat requis. ∎

3. ÉTAPE PRINCIPALE DANS LA DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1, 2 ET 3

Les Théorèmes 1, 2 et 3 découlent essentiellement du lemme suivant, que nous établissons en nous basant sur la démonstration originale d'Erdős [6].

L'uniformité en t du Lemme 6 sera utilisée pour la démonstration des Théorèmes 2 et 3, portant sur des ensembles continus. On pourra aussi se reporter au livre d'Elliott [3], pages 207 à 213. Avant d'énoncer le lemme, nous introduisons tout d'abord certaines notations.

3.1. Définitions préalables. On définit l'ensemble $\mathcal{B}(t,x,\varepsilon)$ par

$$\mathcal{B}(t,x,\varepsilon) := \{1 \le n \le x : t(1-\varepsilon) < \varphi(n)/n \le t\}.$$

On note n un élément générique de $\mathcal{B}(t,x,\varepsilon)$ et on écrit n sous la forme $n = n_1n_2n_3$, où les facteurs premiers des entiers n_1, n_2, n_3 sont respectivement dans les intervalles $[2, \xi(\varepsilon)]$, $]\xi(\varepsilon), \sqrt{1/\varepsilon}[$ et $[\sqrt{1/\varepsilon}, +\infty[$. Ici, $\xi(\varepsilon)$ est une fonction telle que $\xi(\varepsilon)/\log 1/\varepsilon$ tende vers $+\infty$, que nous pourrons fixer ultérieurement. On considère la fonction $\ell(\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$, sous la condition $\ell(\varepsilon) = o(1/\sqrt{\varepsilon})$. Nous fixerons ultérieurement cette fonction. On introduit l'ensemble $\widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon)$ par

$$\widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon) := \mathcal{B}(t,x,\varepsilon) \cap \mathcal{C}_{1,2,3,4}$$

comme étant constitué des entiers $n = n_1n_2n_3 \in \mathcal{B}(t,x,\varepsilon)$ satisfaisant de plus aux quatre conditions :

1. $p^\nu \,\|\, n$ et $p > \xi \Rightarrow \nu = 1$,
2. $n_1 < (1/\varepsilon)^{1/8}$,
3. $n_2 = 1$,
4. $\varphi(n_3)/n_3 > 1 - 2\ell(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$.

3.2. Enonce

Lemme 6. *Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, uniformément pour $0 \le t \le 1$ et $0 < \varepsilon < 1/3$,*

$$\operatorname{card} \mathcal{B}(t,x,\varepsilon) = \operatorname{card} \widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon) + O(E_1 + E_2 + E_3), \tag{23}$$

où l'on a posé

$$E_1 := x/\xi(\varepsilon),$$
$$E_2 := x \exp\left((\log \xi)^{4/5} - \frac{\log\log \xi}{10 \log \xi} \log 1/\varepsilon \right),$$
$$E_3 := \frac{x C_1^{\ell(\varepsilon)}}{\ell(\varepsilon)!(\log 1/\varepsilon)^{\ell(\varepsilon)-1}},$$

pour toute constante $C_1 > 2\log 2$ fixée.

Démonstration. Le terme d'erreur induit par la condition 1 est $\ll E_1$. En effet, le nombre d'entiers $\le x$ divisibles par p^2 pour un certain nombre premier $p > \xi$ est

$$\sum_{\substack{mp^2 \le x \\ p>\xi}} 1 \le x \sum_{p>\xi} \frac{1}{p^2} \ll E_1.$$

Cela établit la majoration requise, concernant la taille du terme d'erreur induit par la condition 1.

Montrons que le terme d'erreur induit par la condition 2 est $\ll E_2$. Le nombre des entiers $n \le x$ ne vérifiant pas la condition 2 est, pour chaque κ strictement positif, inférieur à

$$\sum_{\substack{P^+(n_1)\le\xi \\ n_1>(1/\varepsilon)^{1/8}}} [x/n_1] \le x\varepsilon^{\kappa/8} \sum_{P^+(n_1)\le\xi} \frac{1}{n_1^{1-\kappa}},$$

par une application de la méthode de Rankin. Nous choisissons alors

$$\kappa := \frac{4\log\log\xi}{5\log\xi}.$$

Il suit

$$\sum_{P^+(n_1)\le\xi} \frac{1}{n_1^{1-\kappa}} = \prod_{p\le\xi}\Big(1-\frac{1}{p^{1-\kappa}}\Big)^{-1} \ll \exp\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p^{1-\kappa}}.$$

Nous utilisons maintenant un résultat de [1] pour majorer la somme portant sur p. Nous posons $v_\xi := (\xi^\kappa - 1)/(\kappa\log\xi)$. La deuxième égalité du Lemme 9.1 de [1] s'écrit

$$\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p^{1-\kappa}} = \log\log 2\xi + v_\xi + O\Big(\frac{v_\xi}{\log 2v_\xi}\Big).$$

Nous en déduisons, pour notre choix de κ,

$$\sum_{p\le\xi}\frac{1}{p^{1-\kappa}} \le (\log\xi)^{4/5} + O(1).$$

Cela fournit le résultat annoncé concernant la taille de E_2.

Montrons à présent que la condition 3 induit un terme d'erreur $\ll E_1$. Pour cela, considérons deux entiers distincts n et n' satisfaisant à la condition 1 et vérifiant $n_2 > 1$ et $n_2' > 1$ respectivement. Alors, ces entiers possèdent respectivement un facteur premier p et un facteur premier p' dans l'intervalle $[\xi(\varepsilon), \sqrt{1/\varepsilon}]$. Nous montrons que les nombres entiers n/p et n'/p' sont distincts. Cela est acquis si $p = p'$. Supposons donc par exemple $p > p'$ et

$$\frac{\varphi(n/p)}{n/p} = \frac{\varphi(n'/p')}{n'/p'}.$$

D'après la condition 1, p^2 et p'^2 ne peuvent respectivement pas diviser n et n'. Les entiers n/p et p d'une part et n/p' et p' d'autre part sont donc premiers entre eux. Il suit

$$\frac{\varphi(n/p)}{n/p} = \frac{\varphi(n)}{n}\,\frac{p}{p-1}, \tag{24}$$

et la même identité pour n'/p'. On en déduit

$$\frac{\varphi(n)}{n}\,\frac{n'}{\varphi(n')} = 1 + \frac{p-p'}{p(p'-1)} \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{1/\varepsilon}\,(\sqrt{1/\varepsilon}-1)} \tag{25}$$

car $p-p' \geq 2$. Mais ceci est impossible car, par définition, on a

$$\frac{\varphi(n)}{n}\,\frac{n'}{\varphi(n')} \leq t(1-\varepsilon)^{-1}\,\frac{1}{t} = (1-\varepsilon)^{-1}, \tag{26}$$

et la contradiction requise est alors déduite de l'encadrement $0 < \varepsilon < 1/3$. Ainsi, pour les n vérifiant $n_2 > 1$, les entiers n/p sont tous distincts. Les n/p étant d'autre part tous inférieurs à $x/\xi(\varepsilon)$, on en déduit le terme d'erreur annoncé.

Montrons à présent que l'ensemble des entiers $\leq x$ ne satisfaisant pas à la condition 4 est de cardinal $\ll E_3$. Considérons pour cela les entiers $\leq x$ qui ont au moins l facteurs premiers distincts dans $[2^r\sqrt{1/\varepsilon}, 2^{r+1}\sqrt{1/\varepsilon}[$ pour un certain entier $r \geq 0$. Leur nombre est inférieur à

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{mp_1p_2\cdots p_l\leq x\\ 2^r\sqrt{1/\varepsilon}\leq p_1<p_2<\cdots<p_l<2^{r+1}\sqrt{1/\varepsilon}}} 1 &\leq x\,\frac{1}{l!}\Bigg(\sum_{2^r\sqrt{1/\varepsilon}\leq p<2^{r+1}\sqrt{1/\varepsilon}}\frac{1}{p}\Bigg)^l\\ &\ll \frac{x}{l!}\bigg(\frac{C}{\log(2^r\sqrt{1/\varepsilon})}\bigg)^l,\end{aligned}$$

pour toute constante $C > \log 2$ fixée, en choisissant ε suffisamment petit. Cela découle en effet de la majoration, valable lorsque a tend vers l'infini,

$$\sum_{a\leq p<b}\frac{1}{p} \leq \frac{1+o(1)}{a}\,\frac{b}{\log b},$$

issue du théorème des nombres premiers. Il en résulte que le cardinal de l'ensemble des entiers inférieurs à x qui ont au moins l facteurs premiers distincts dans l'intervalle $[2^r\sqrt{1/\varepsilon}, 2^{r+1}\sqrt{1/\varepsilon}[$ pour au moins un entier $r \geq 0$ est

$$\begin{aligned}&\ll \frac{xC^l}{l!}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{(r\log 2+\log\sqrt{1/\varepsilon})^l} \ll \frac{x(C/\log 2)^l}{l!}\sum_{r\geq[(\log 1/\varepsilon)/(2\log 2)]}\frac{1}{r^l}\\ &\ll \frac{xC_1^l}{l!(\log 1/\varepsilon)^{l-1}},\end{aligned}$$

pour toute constante fixée $C_1 > 2\log 2$. Pour les entiers n qui ont moins de l facteurs premiers dans $[2^r\sqrt{1/\varepsilon}, 2^{r+1}\sqrt{1/\varepsilon}[$, pour tout entier $r \geq 0$, on a

$$\frac{\varphi(n_3)}{n_3} = \prod_{p|n_3}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \prod_{r=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^r\sqrt{1/\varepsilon}}\right)^l \tag{27}$$
$$> 1 - \sum_{r=0}^{+\infty}\frac{l\sqrt{\varepsilon}}{2^r} = 1 - 2l\sqrt{\varepsilon}.$$

Cela établit le résultat annoncé concernant le terme d'erreur induit par la condition 4, et finalement le Lemme 6. ∎

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Dans l'énoncé du Lemme 6, nous choisissons $\xi(\varepsilon) := \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/5}$, où L est défini en (8), et $\ell(\varepsilon) := [1/(2\varepsilon^{1/8})]$. On a alors

$$E_1 + E_2 + E_3 \ll x\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}.$$

Pour ce choix de $\xi(\varepsilon)$ et de $\ell(\varepsilon)$, on a d'après le Lemme 6, uniformément pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\operatorname{card}\mathcal{B}(t,x,\varepsilon) = \operatorname{card}\widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon) + O(x\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \tag{28}$$

Le Lemme 6 nous a permis de décrire des propriétés arithmétiques satisfaites par "presque tous" les éléments n de $\mathcal{B}(t,x,\varepsilon)$. En effet, les éléments $n = n_1n_2n_3$ de $\widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon)$ satisfont aux quatre propriétés suivantes :

1. $p^\nu \,\|\, n$ et $p > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/5} \Rightarrow \nu = 1$,
2. $n_1 < (1/\varepsilon)^{1/8}$,
3. $n_2 = 1$,
4. $\varphi(n_3)/n_3 > 1 - \varepsilon^{3/8}$.

Il nous suffit ainsi d'étudier $\widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon)$. Dans cette direction, nous démontrons le lemme suivant.

LEMME 7. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathcal{A}$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si l'ensemble $\widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon)$ possède un élément $n = n_1n_2n_3$, celui-ci vérifie nécessairement*

$$\frac{\varphi(n_1)}{n_1} = t.$$

Démonstration. Il existe $n_0 \leq (1/\varepsilon)^{1/8}$ tel que $t = \varphi(n_0)/n_0$. Si l'assertion du Lemme 7 n'était pas vérifiée, il en résulterait

$$\left|\frac{\varphi(n_1)}{n_1} - t\right| \geq \frac{1}{n_0n_1} > \varepsilon^{1/4},$$

ce qui impliquerait l'une des deux inégalités suivantes :

$$\varphi(n_1)/n_1 - t > \varepsilon^{1/4} \quad \text{ou} \quad t - \varphi(n_1)/n_1 > \varepsilon^{1/4}. \tag{29}$$

La première des deux inégalités de (29) impliquerait, d'après la condition 4 et le fait que $n_2 = 1$,

$$\varphi(n)/n > (t + \varepsilon^{1/4})(1 - \varepsilon^{3/8}) > t(1 + \varepsilon^{1/4})(1 - \varepsilon^{3/8}) > t$$

pour $\varepsilon^{3/8} + \varepsilon^{1/8} < 1$. On choisit alors par exemple $\varepsilon_0 = 1/2^8$, de sorte que ceci est vérifié pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. On obtient une contradiction avec la définition des $n \in \mathcal{B}(t, x, \varepsilon)$. D'autre part, la deuxième inégalité de (29) impliquerait

$$\varphi(n_1)/n_1 < t - \varepsilon^{1/4},$$

ce qui contredirait l'inégalité

$$\varphi(n_1)/n_1 \geq \varphi(n)/n > t(1 - \varepsilon) \geq t - \varepsilon. \blacksquare$$

Nous sommes à présent en mesure d'estimer $G(t) - G(t - \varepsilon t)$, uniformément pour $t \in \mathcal{A}$. Observant que $n = n_1 n_3$, nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{card} \widetilde{\mathcal{B}}(t, x, \varepsilon) &= \operatorname{card}\{n = n_1 n_3 \leq x : \varphi(n_1)/n_1 = t,\, t(1 - \varepsilon) < \varphi(n)/n \leq t\} \\
&= \sum_{\varphi(n_1)/n_1 = t} \frac{x}{n_1} \, \frac{\operatorname{card}\{n_3 \leq x/n_1 : 1 - \varepsilon < \varphi(n_3)/n_3 \leq 1\}}{x/n_1} \\
&\leq \sum_{\varphi(n_1)/n_1 = t} \frac{x}{n_1} \, \frac{\operatorname{card}\{m \leq x/n_1 : \varphi(m)/m > 1 - \varepsilon\}}{x/n_1},
\end{aligned}$$

le dernier cardinal portant sur tous les entiers m sans restriction, tandis que le précédent ne porte que sur les n_3.

On déduit alors de l'évaluation (28), via une application du théorème de la convergence dominée,

$$\begin{aligned}
G(t) - G(t - \varepsilon t) &\leq \sum_{\varphi(n_1)/n_1 = t} \frac{1}{n_1} \, (G(1) - G(1 - \varepsilon)) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}) \\
&\leq K(t)(G(1) - G(1 - \varepsilon)) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}).
\end{aligned}$$

Il suffit à présent d'invoquer le Lemme 4 pour achever la démonstration du Théorème 1, concernant l'estimation du module de continuité de G à gauche de t.

L'estimation à droite de t peut être établie de manière analogue. On définit l'ensemble $\mathcal{B}'(t, x, \varepsilon)$ par

$$\mathcal{B}'(t, x, \varepsilon) := \mathcal{B}(t(1 - \varepsilon)^{-1}, x, \varepsilon).$$

Le Lemme 6 fournit

$$\operatorname{card} \mathcal{B}'(t, x, \varepsilon) = \operatorname{card}(\mathcal{B}'(t, x, \varepsilon) \cap \mathcal{C}_{1,2,3,4}) + O(x\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}).$$

Nous montrons ensuite, de la même façon qu'au Lemme 7, que lorsque $t \in \mathcal{A}$ et n décrit $\mathcal{B}'(t,x,\varepsilon) \cap \mathcal{C}_{1,2,3,4}$, on a $\varphi(n_1)/n_1 = t$, de sorte que l'ensemble $\mathcal{B}'(t,x,\varepsilon) \cap \mathcal{C}_{1,2,3,4}$ est vide. Cela fournit le résultat annoncé, à droite de t, et achève la démonstration du Théorème 1. ∎

5. UNE MAJORATION DU MODULE DE CONTINUITÉ DE G UNIFORME SUR $[0,1]$

Pour la démonstration des Théorèmes 2 et 3, nous avons besoin d'une telle majoration. En effet, le précédent théorème ne concerne que les valeurs de $t \in \mathcal{A} \subset \mathbb{Q}$ et est donc insuffisant pour démontrer les Théorèmes 2 et 3, portant sur des ensembles continus. Dans cette direction, nous établissons, au Lemme 9, une majoration uniforme sur $[0,1]$, après avoir établi le résultat suivant.

Lemme 8. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 \le t \le 1$, il existe α_t tel que, lorsque $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et si $\widetilde{\mathcal{B}}(t,x,\varepsilon)$ est non vide, ses éléments $n = n_1n_2n_3$ vérifient $\varphi(n_1)/n_1 = \alpha_t$. De plus, on a*

$$t(1-\varepsilon) < \alpha_t \le t(1-\varepsilon^{3/8})^{-1}.$$

Démonstration. La démonstration est semblable à celle du Lemme 7. Si l'on avait $\varphi(n_1)/n_1 > \varphi(n_1')/n_1'$ (disons), il en résulterait

$$\frac{\varphi(n_1)}{n_1} - \frac{\varphi(n_1')}{n_1'} \ge \frac{1}{n_1n_1'} > \varepsilon^{1/4}$$

d'après la condition 2 et donc, d'après la condition 4 et le fait que $n_2 = 1$,

$$\frac{\varphi(n)}{n} \le \frac{\varphi(n_1')}{n_1'} < \frac{\varphi(n_1)}{n_1} - \varepsilon^{1/4} < t(1-\varepsilon^{3/8})^{-1} - \varepsilon^{1/4} < t(1-\varepsilon),$$

dès que $\varepsilon^{1/8}+\varepsilon^{3/8}+\varepsilon^{3/4} < 1$. On choisit par exemple $\varepsilon_0 = 1/2^8$, de sorte que cette inégalité est vérifiée pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. On aboutit ainsi à une contradiction concernant la définition des entiers $n \in \mathcal{B}(t,x,\varepsilon)$. L'encadrement annoncé, relatif au réel α_t découle de

$$t(1-\varepsilon) < \alpha_t \frac{\varphi(n_3)}{n_3} = \frac{\varphi(n)}{n} \le t$$

d'où l'on déduit

$$t(1-\varepsilon) < \alpha_t \le t(1-\varepsilon^{3/8})^{-1}. \tag{30}$$

Cela établit le lemme. ∎

Nous sommes à présent en mesure d'établir la majoration annoncée, uniforme pour $0 \le t \le 1$. Celle-ci est fournie par le lemme suivant.

Lemme 9. *On a, uniformément pour* $0 \le t \le 1$,

$$G(t) - G(t - \varepsilon t) \ll \frac{K(\alpha_t)}{\log 1/\varepsilon} + \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}, \tag{31}$$

où α_t *a été défini au Lemme* 8 *et respecte donc l'encadrement* (30).

Remarque. Il résulte du Lemme 9 que l'on a, pour chaque $t \notin \mathcal{E}$ fixé, lorsque ε tend vers 0 par valeur supérieure,

$$G(t) - G(t - \varepsilon t) = o_t\Big(\frac{1}{\log 1/\varepsilon}\Big), \qquad G(t + \varepsilon t) - G(t) = o_t\Big(\frac{1}{\log 1/\varepsilon}\Big).$$

Ceci découle du fait que $\alpha_t \to t$ lorsque $\varepsilon \to 0$. La continuité de la fonction K hors de $\mathcal{E}$ établie au Lemme 2 implique alors que $K(\alpha_t) \to 0$.

Démonstration du Lemme 9. Nous effectuons un raisonnement similaire à celui utilisé lors de la démonstration du Théorème 1. Soit $0 \le t \le 1$. Nous commençons par évaluer

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \widetilde{\mathcal{B}}(t, x, \varepsilon) &= \operatorname{card}\{n = n_1 n_3 \le x : \varphi(n_1)/n_1 = \alpha_t,\ t(1-\varepsilon) < \varphi(n)/n \le t\} \\ &\le \sum_{\varphi(n_1)/n_1 = \alpha_t} \frac{x}{n_1} \frac{\operatorname{card}\{n_3 \le x/n_1 : 1 - \varepsilon^{3/8} < \varphi(n_3)/n_3\}}{x/n_1} \\ &\le \sum_{\varphi(n_1)/n_1 = \alpha_t} \frac{x}{n_1} \frac{\operatorname{card}\{m \le x/n_1 : 1 - \varepsilon^{3/8} < \varphi(m)/m\}}{x/n_1}, \end{aligned}$$

d'après la condition 4, le dernier cardinal portant sur tous les entiers m sans restriction, tandis que le précédent ne porte que sur les n_3. L'estimation

$$\operatorname{card} \mathcal{B}(t, x, \varepsilon) = \operatorname{card} \widetilde{\mathcal{B}}(t, x, \varepsilon) + O(x\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5})$$

fournit finalement, par le théorème de la convergence dominée,

$$\begin{aligned} G(t) - G(t - \varepsilon t) &\le \sum_{\varphi(n_1)/n_1 = \alpha_t} \frac{1}{n_1} \big(G(1) - G(1 - \varepsilon^{3/8})\big) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}) \\ &\ll \frac{K(\alpha_t)}{\log 1/\varepsilon} + \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}, \end{aligned}$$

où la dernière majoration résulte du comportement de G en 1 décrit au Théorème A de l'introduction. ∎

6. THÉORÈMES 2 ET 3 : RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Définissons l'ensemble $\mathcal{A}_0(\varepsilon)$ par

$$\mathcal{A}_0(\varepsilon) := \{\alpha \in \mathcal{E} : K(\alpha) > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}\}. \tag{32}$$

Il résulte immédiatement de la majoration (31) et de l'encadrement (30), qui s'écrit aussi $\alpha_t(1-\varepsilon^{3/8}) \le t < \alpha_t(1-\varepsilon)^{-1}$, que l'on a le lemme suivant (la démonstration de la contraposée est immédiate).

LEMME 10. *Lorsque $t \notin \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0}[\alpha(1-\varepsilon^{3/8}),\alpha(1-\varepsilon)^{-1}]$, on a la majoration uniforme*

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) \ll \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}.$$

Le Lemme 10 nous permet, lors de la démonstration des Théorèmes 2 et 3, de restreindre notre étude aux valeurs de t situées aux voisinages des $\alpha \in \mathcal{A}_0(\varepsilon)$. Nous montrons au lemme suivant que nous pouvons appliquer le Théorème 1 pour estimer les valeurs du module de continuité dans ces voisinages.

LEMME 11. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'on ait, lorsque $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,*

$$\mathcal{A}_0(\varepsilon) \subset \mathcal{A}(2\varepsilon^{3/8}). \tag{33}$$

Démonstration. Considérons $\alpha \in \mathcal{A}_0(\varepsilon)$. Il existe un entier n tel que $\alpha = \varphi(n)/n$. D'après le Lemme 2, on a $K(\alpha) = 1/\varphi(k(n))$, en notant $k(n)$ le plus grand diviseur sans facteur carré de n. Il en résulte que l'on a $\varphi(k(n)) < \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}$. La minoration générale $\varphi(m) \gg m/\log_2 m$ fournit alors

$$\mathcal{A}_0(\varepsilon) \subset \{\varphi(n)/n : n \ge 1,\, k(n) \le \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/14}\} \subset \mathcal{A}(2\varepsilon^{3/8}), \tag{34}$$

dès que l'on a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, pour ε_0 choisi suffisamment petit. En effet, la valeur du rapport $\varphi(n)/n$ ne dépend que de $k(n)$. Cela établit le Lemme 11. ∎

Rappelons la définition (10) de l'entier N_1 et désignons par α un élément générique de l'ensemble $\mathcal{A}_0(\varepsilon)$. Nous établissons tout d'abord un lemme général, afin d'estimer $G(t) - G(t-\varepsilon t)$ lorsque $\alpha(1-\varepsilon^{3/8}) \le t \le \alpha$.

LEMME 12. *Soient $3/8 \le c \le 1$ et $c' < \sqrt{c}/5$ deux constantes fixées. On a alors, uniformément pour $0 < \varepsilon < 1/3$, $\alpha \in \mathcal{A}_0(\varepsilon)$ et $\alpha(1-\varepsilon^c) \le t \le \alpha$,*

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) = K(\alpha)F_2(\varepsilon,\theta/\varepsilon) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}),$$

où l'on définit implicitement θ par $t := \alpha(1-\theta)$ et où F_2 est la fonction définie avant le Théorème 3.

Démonstration. Nous avons

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) = \{G(\alpha) - G(\alpha(1-\theta)(1-\varepsilon))\} - \{G(\alpha) - G(\alpha(1-\theta))\}.$$

Le Théorème 1, dont l'application à gauche de α est autorisée par (33) lorsque $0 < \theta \le \varepsilon^c$, fournit, pour chaque $c' < \sqrt{c}/5$,

$$\begin{aligned}G(\alpha) &- G(\alpha(1-\theta)(1-\varepsilon)) \\ &= K(\alpha)\{G(1) - G((1-\theta)(1-\varepsilon))\} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}).\end{aligned}$$

Nous invoquons maintenant la majoration de $|R_N|$ présentée au Théorème C. Nous appliquons ce résultat à $\xi = \varepsilon + \theta - \varepsilon\theta$, et $N = 1 + N_1(\varepsilon)$. Cela fournit

$$G(\alpha) - G(\alpha(1-\theta)(1-\varepsilon)) = K(\alpha) \sum_{m=1}^{N_1} \frac{g_m}{(\log 1/(\varepsilon + \theta - \varepsilon\theta))^m} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}).$$

Nous notons maintenant que l'on a, pour les valeurs de θ annoncées, et pour $1 \le m \le N_1(\varepsilon)$,

$$(\log 1/(\varepsilon + \theta - \varepsilon\theta))^{-m} = (\log 1/(\varepsilon + \theta))^{-m}(1 + O(\varepsilon^{3/8})).$$

La majoration des coefficients $|g_m|$ fournie au Théorème C implique que l'on a, lorsque $\log 1/\xi \asymp \log 1/\varepsilon$, pour une constante absolue $C_1 > 0$,

$$\sum_{m=1}^{N_1} \frac{|g_m|}{(\log 1/\xi)^m} \ll \sum_{m=1}^{N_1} \left(\frac{C_1 N_1 \log N_1}{\log 1/\varepsilon}\right)^m \ll 1. \tag{35}$$

Nous en déduisons, en appliquant (35) à $\xi = \varepsilon + \theta$,

$$G(\alpha) - G(\alpha(1-\theta)(1-\varepsilon)) = K(\alpha) \sum_{m=1}^{N_1} \frac{g_m}{(\log 1/(\varepsilon + \theta))^m} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}).$$

Le même raisonnement fournit d'autre part

$$G(\alpha) - G(\alpha(1-\theta)) = K(\alpha) \sum_{m=1}^{N_1} \frac{g_m}{(\log 1/\theta)^m} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}).$$

Cela établit finalement le lemme. ∎

Nous établissons au lemme suivant un résultat de sommation portant sur la fonction K.

Lemme 13. *Soit $r > 1$ un réel, et $c < (r-1)/15$ une constante. On a, uniformément pour $0 < \varepsilon < 1/3$,*

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} K(\alpha)^r = C_r + O_r(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}), \tag{36}$$

où C_r est le produit infini défini en (11).

Démonstration. On écrit, grâce au Lemme 3,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} K(\alpha)^r = C_r - \sum_{\alpha \notin \mathcal{A}_0} K(\alpha)^r.$$

La méthode de Rankin fournit

$$\sum_{\alpha \notin \mathcal{A}_0} K(\alpha)^r \le \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c} \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} K(\alpha)^{r-15c} \ll_r \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c},$$

où l'on a noté que $r - 15c > 1$. Cela établit le lemme. ∎

Lors de la démonstration du Théorème 3, nous montrons que la contribution principale à $M_r(\varepsilon)$ est due aux valeurs de t situées dans certains intervalles au voisinage des $\alpha \in \mathcal{A}_0$. La démonstration repose en particulier sur le fait que ces intervalles sont disjoints. Cela est fourni par le lemme suivant.

Lemme 14. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, lorsque $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et α décrit $\mathcal{A}_0(\varepsilon)$, les intervalles $[\alpha(1-\varepsilon^{3/8}), \alpha(1-\varepsilon)^{-1}]$ soient disjoints.*

Démonstration. Soient α_1 et α_2 deux éléments distincts de l'ensemble $\mathcal{A}_0$. Il existe alors deux entiers n_1 et n_2 tels que $\alpha_1 = \varphi(k(n_1))/k(n_1)$ et $\alpha_2 = \varphi(k(n_2))/k(n_2)$. Nous déduisons alors de (34) que l'on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \frac{1}{k(n_1)k(n_2)} \geq \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/7}.$$

Cela établit le lemme. ■

7. NORME INFINIE DU MODULE DE CONTINUITÉ : PREUVE DU THÉORÈME 2

7.1. Localisation des valeurs de t réalisant le maximum. D'après le Lemme 10, il suffit de rechercher le maximum du module de continuité au voisinage de chacun des $\alpha \in \mathcal{A}_0(\varepsilon)$.

7.1.1. *Restriction aux voisinages de* $1/2$ *et* 1. Nous montrons tout d'abord que nous pouvons restreindre notre étude aux voisinages des α pour lesquels $K(\alpha) = 1$, c'est-à-dire, d'après le Lemme 2, à $\alpha \in \{1/2, 1\}$.

Soient $\alpha \in \mathcal{A}_0$ et $\alpha \leq t \leq \alpha(1-\varepsilon)^{-1}$. Effectuons le changement de variables $t = \alpha(1-\varepsilon)^{-1}(1-\tau)$. On a donc $0 \leq \tau \leq \varepsilon$. Le Théorème 1, dont l'application à droite puis à gauche de α est autorisée par (33), fournit

$$\begin{aligned} (37) \qquad G(t) - G(t-\varepsilon t) &= G(\alpha) - G(\alpha(1-\tau)) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}) \\ &= K(\alpha)\{G(1) - G(1-\tau)\} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \end{aligned}$$

Cette estimation et le Lemme 12 montrent que l'on peut restreindre l'étude aux α tels que $K(\alpha) = 1$. La valeur maximale de $G(t) - G(t-\varepsilon t)$ est donc atteinte exclusivement lorsque

$$t \in \left[\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon^{3/8}), \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)^{-1}\right] \cup [1-\varepsilon^{3/8}, 1].$$

7.1.2. *Restriction au voisinage de* $1/2$. Nous montrons à présent que l'on peut restreindre l'étude aux intervalles $\alpha(1-\varepsilon) \leq t \leq \alpha(1-\varepsilon)^{-1}$, avec $\alpha \in \{1/2, 1\}$. Lorsque les valeurs de t vérifient $\alpha(1-\varepsilon^{3/8}) \leq t \leq \alpha(1-\varepsilon)$, on note $t = \alpha(1-\theta)$ avec $\varepsilon < \theta \leq \varepsilon^{3/8}$. Grâce au Théorème 1, dont l'application à gauche de α est autorisée par (33), on obtient la majoration uniforme

$$\begin{aligned}G(t) - G(t-\varepsilon t)&\\ &= \{G(\alpha) - G(\alpha(1-\theta)(1-\varepsilon))\} - \{G(\alpha) - G(\alpha(1-\theta))\}\\ &\ll K(\alpha)\left\{\frac{1}{\log 1/(\theta+\varepsilon)} - \frac{1}{\log 1/\theta}\right\} + \frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^2} \ll \frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^2},\end{aligned}$$

où la dernière majoration découle de l'encadrement relatif à θ.

Nous pouvons donc restreindre la recherche du maximum du module de continuité à $\alpha \in \{1/2, 1\}$ et $\alpha(1-\varepsilon) \le t \le \alpha(1-\varepsilon)^{-1}$. Le Lemme 5 montre que ce maximum n'est pas atteint au voisinage de 1. Il suffit ainsi de rechercher les valeurs de t réalisant ce maximum dans l'intervalle

$$t \in \left[\tfrac12(1-\varepsilon), \tfrac12(1-\varepsilon)^{-1}\right].$$

7.1.3. *Étude au voisinage gauche de* $1/2$. Lorsque $\frac12(1-\varepsilon) \le t < \frac12$, on note $t = \frac12(1-\theta)$ avec $0 < \theta \le \varepsilon$. Avec la définition (9) de θ_0, nous montrons l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'on ait, lorsque $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\theta > \theta_0$,

$$G\left(\tfrac12\right) - G(t) > G\left(\tfrac12(1-\varepsilon)\right) - G(t(1-\varepsilon)). \tag{38}$$

Cela constitue bien l'inégalité requise. D'une part, on a, grâce au Théorème 2, dont l'application à gauche de $1/2$ est autorisée par (33),

$$G\left(\tfrac12\right) - G(t) = G(1) - G(1-\theta) + O(\mathrm{L}(1/\theta)^{-1/5}) \gg \frac{1}{\log 1/\theta}. \tag{39}$$

D'autre part, nous avons pour chaque constante $c < 1/5$, lorsque $0 < \theta \le \varepsilon$, grâce au Théorème 1,

$$\begin{aligned}G\left(\tfrac12(1-\varepsilon)\right) - G\left(\tfrac12(1-\theta)(1-\varepsilon)\right)&\\ &= \{G(1) - G((1-\theta)(1-\varepsilon))\} - \{G(1) - G(1-\varepsilon)\} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c})\\ &= \sum_{m=1}^{N_1} g_m\left(\frac{1}{(\log 1/(\varepsilon+\theta-\varepsilon\theta))^m} - \frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^m}\right) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}),\end{aligned}$$

où la dernière estimation résulte du Théorème C utilisé avec $N = 1 + N_1$.

Nous notons maintenant que l'on a, pour les valeurs de θ annoncées, et pour $1 \le m \le N_1(\varepsilon)$,

$$(\log 1/(\varepsilon+\theta-\varepsilon\theta))^{-m} = (\log 1/(\varepsilon+\theta))^{-m}(1+O(\varepsilon)).$$

La majoration (35) appliquée à $\xi = \varepsilon + \theta$ fournit

$$\begin{aligned}G\left(\tfrac12(1-\varepsilon)\right) - G\left(\tfrac12(1-\theta)(1-\varepsilon)\right)&\\ &= \sum_{m=1}^{N_1} g_m\left(\frac{1}{(\log 1/(\varepsilon+\theta))^m} - \frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^m}\right) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}).\end{aligned}$$

Nous évaluons la somme ci-dessus, en notant tout d'abord que $g_2 = 0$. Nous faisons usage de la majoration $y^m - x^m \ll (y-x)m(x+y)^{m-1}$, uniforme pour $y \geq x \geq 0$, lorsque $m \geq 3$. La majoration des coefficients $|g_m|$ fournie au Théorème C implique, avec la définition (10) de l'entier N_1, que l'on a, lorsque $\log 1/\xi \asymp \log 1/\varepsilon$,

$$\sum_{m=3}^{N_1} \frac{m|g_m|}{(\log 1/\xi)^{m-1}} \asymp \frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^2}. \tag{40}$$

Il vient, en utilisant la majoration de (40) avec $\xi = \varepsilon + \theta$, pour chaque constante $c < 1/5$,

$$\begin{aligned} G\big(\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\big) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\theta)(1-\varepsilon)\big) &\ll \frac{1}{\log 1/(\varepsilon+\theta)} - \frac{1}{\log 1/\varepsilon} + \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c} \\ &\ll \frac{\theta}{\varepsilon(\log 1/\varepsilon)^2} + \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}. \end{aligned}$$

Cette majoration et la minoration (39) fournissent pour chaque constante $c < 1/5$, lorsque $\frac{1}{2}(1-\varepsilon) < t \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} &\big\{G\big(\tfrac{1}{2}\big) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\big)\big\} - \{G(t) - G(t(1-\varepsilon))\} \\ &\qquad\qquad \gg \frac{1}{\log 1/\theta}\bigg(1 + O\bigg(\frac{\theta \log 1/\theta}{\varepsilon(\log 1/\varepsilon)^2} + \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}\log 1/\theta\bigg)\bigg). \end{aligned}$$

Le minorant est donc strictement positif tant que l'on a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\theta_0 < \theta \leq \varepsilon$. Cela démontre la validité de (38).

7.1.4. *Étude au voisinage droit de* $1/2$. Posons $t = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^{-1}(1-\tau)$, avec $0 \leq \tau \leq \varepsilon$. Nous établissons que l'on a, lorsque $t > \frac{1}{2}(1+\theta_1)$ où θ_1 est défini en (9),

$$G(t) - G\big(\tfrac{1}{2}\big) < G(t(1-\varepsilon)) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\big).$$

Cela constitue bien l'inégalité requise. Le Théorème 1 à droite de $1/2$ fournit

$$G(t) - G\big(\tfrac{1}{2}\big) \ll \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}. \tag{41}$$

De plus, le Théorème 1 fournit

$$\begin{aligned} G(t(1-\varepsilon)) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\big) &= G\big(\tfrac{1}{2}(1-\tau)\big) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\big) \\ &= \{G(1) - G(1-\varepsilon)\} - \{G(1) - G(1-\tau)\} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \end{aligned}$$

Le Théorème C utilisé avec $N = N_1 + 1$ fournit

$$\begin{aligned} &G(t(1-\varepsilon)) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\big) \\ &\qquad = \sum_{m=1}^{N_1} g_m\bigg(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^m} - \frac{1}{(\log 1/\tau)^m}\bigg) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \end{aligned}$$

Nous factorisons la somme ci-dessus par son premier terme, en notant que $g_2 = 0$. Nous effectuons la majoration $y^m - x^m \ll (y-x)m(x+y)^{m-1}$, uniforme pour $y \geq x \geq 0$, lorsque $m \geq 3$. Nous déduisons de la majoration de (40) avec $\xi = \varepsilon + \tau$ que l'on a, au vu de (41),

$$\{G(\tfrac{1}{2}) - G(\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon))\} - \{G(t) - G(t(1-\varepsilon))\} \gg \frac{1}{\log 1/\varepsilon} - \frac{1}{\log 1/\tau} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \tag{42}$$

Lorsque $t > \frac{1}{2}(1+\theta_1)$, on a $0 < \tau < \varepsilon - \theta_1/2$. Il en résulte

$$\frac{1}{\log 1/\varepsilon} - \frac{1}{\log 1/\tau} \gg \frac{\theta_1}{\varepsilon(\log 1/\varepsilon)^2}.$$

En choisissant $c_1 > 0$ suffisamment grande, nous déduisons que le minorant (42) de l'expression précédente est bien strictement positif. Au vu de (38), cela établit finalement le résultat requis, relativement à la localisation des valeurs de t réalisant le maximum de $G(t) - G(t - \varepsilon t)$.

7.2. Estimation de la norme infinie du module de continuité. Soit $\frac{1}{2}(1-\theta_0) \leq t \leq \frac{1}{2}(1+\theta_1)$. La croissance de la fonction G fournit

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) \leq G\big(\tfrac{1}{2}(1+\theta_1)\big) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\theta_0)(1-\varepsilon)\big).$$

Le Théorème 1, appliqué à droite de 1/2, fournit

$$\begin{aligned} G(t) - G(t-\varepsilon t) &\leq G\big(\tfrac{1}{2}\big) - G\big(\tfrac{1}{2}(1-\theta_0)(1-\varepsilon)\big) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}) \\ &\leq G(1) - G((1-\theta_0)(1-\varepsilon)) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}), \end{aligned}$$

où la dernière majoration résulte du Théorème 1, à gauche de 1/2, et où l'on a noté que $\mathrm{L}(1/(\varepsilon+\theta_0)) \asymp \mathrm{L}(1/\varepsilon)$. Nous observons que l'on a, avec la définition (10) de N_1,

$$(\log 1/(\varepsilon + O(\theta_0)))^{-m} = (\log 1/\varepsilon)^{-m}(1 + O(\varepsilon)),$$

lorsque $m \leq N_1$. Nous appliquons le Théorème C avec $N = 1 + N_1$. La majoration (35) fournit alors

$$\begin{aligned} G(t) - G(t-\varepsilon t) &\leq \sum_{m=1}^{N_1} \frac{g_m}{(\log 1/\varepsilon)^m} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}) \\ &= G(1) - G(1-\varepsilon) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du Théorème 2. ■

8. NORME L^r DU MODULE DE CONTINUITÉ : PREUVE DU THÉORÈME 3

Le Théorème 3 découle du Théorème 1, du Théorème C et des Lemmes 10 à 13. Nous mettons en évidence une contribution des valeurs de t proches d'une valeur de $\varphi(n)/n$ à petit dénominateur n.

Estimons, pour chaque $r > 1$ fixé, l'intégrale

$$M_r(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \{G(t) - G(t - \varepsilon t)\}^r \frac{dt}{t}. \tag{43}$$

Notons dès à présent qu'il suffit en fait d'intégrer sur $[0, (1-\varepsilon)^{-1}]$, l'intégrande étant identiquement nulle hors de cet intervalle.

Nous évaluons la quantité $G(t)-G(t-\varepsilon t)$ selon les valeurs de t. Désignons par α un élément générique de $\mathcal{A}_0$. Nous définissons les intervalles

$$\begin{aligned}
I_1(\alpha) &:= [\alpha(1-\varepsilon^{3/8}), \alpha(1-\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15})],\\
I_2(\alpha) &:= [\alpha(1-\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}), \alpha(1-\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15})],\\
I_3(\alpha) &:= [\alpha(1-\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}), \alpha],\\
I_4(\alpha) &:= [\alpha, \alpha(1-\varepsilon)^{-1}(1-\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15})],\\
I_5(\alpha) &:= [\alpha(1-\varepsilon)^{-1}(1-\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}), \alpha(1-\varepsilon)^{-1}].
\end{aligned}$$

Nous posons $I_j := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} I_j(\alpha)$ lorsque $1 \leq j \leq 5$, ainsi que

$$I(\alpha) := [\alpha(1-\varepsilon^{3/8}), \alpha(1-\varepsilon)^{-1}] = \bigcup_{1\leq j\leq 5} I_j(\alpha),$$

$$I_0 := [0, (1-\varepsilon)^{-1}] \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} I(\alpha).$$

Nous définissons Q_0 la contribution de I_0 à l'intégrale (43), ainsi que la contribution $Q_j(\alpha)$ pour $1 \leq j \leq 5$ par

$$Q_j(\alpha) := \int_{I_j(\alpha)} \{G(t) - G(t-\varepsilon t)\}^r \frac{dt}{t}.$$

Introduisons la contribution Q_j de l'ensemble $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} I_j(\alpha)$ à l'intégrale (43). D'après le Lemme 13, les intervalles $I_j(\alpha)$ sont disjoints lorsque α décrit $\mathcal{A}_0(\varepsilon)$. On en déduit, lorsque $1 \leq j \leq 5$,

$$Q_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} Q_j(\alpha). \tag{44}$$

Nous montrons que Q_4 correspond à la contribution de la fonction F_1, et Q_2 à celle de F_2, la contribution complémentaire étant négligeable.

8.1. Contributions négligeables. D'après le Lemme 10, nous avons

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) \ll \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15} \qquad (t \in I_0).$$

Il en résulte

$$Q_0 \ll \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-(r-1)/15} \int_0^{(1-\varepsilon)^{-1}} \{G(t) - G(t-\varepsilon t)\} \frac{dt}{t} \ll \varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-(r-1)/15}, \tag{45}$$

où l'on a utilisé la majoration

$$\int_0^{(1-\varepsilon)^{-1}} \{G(t) - G(t-\varepsilon t)\} \frac{dt}{t} = \int_1^{(1-\varepsilon)^{-1}} G(t) \frac{dt}{t} \ll \varepsilon. \tag{46}$$

Nous utilisons maintenant le Lemme 12 dans le cas où $t \in I_1(\alpha)$. Nous avons dans ce cas $\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15} < \theta < \varepsilon^{3/8}$. Nous notons que l'on a, lorsque $1 \le m \le N_1$,

$$\frac{1}{(\log 1/(\varepsilon+\theta))^m} - \frac{1}{(\log 1/\theta)^m} \ll \frac{m}{(\log 1/\theta)^m} \frac{\varepsilon}{\theta \log 1/\varepsilon} \ll \frac{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}}{(\log 1/\theta)^m}.$$

Il résulte alors de la majoration (35) utilisée avec $\xi = \theta$ que l'on a

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) \ll \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15} \quad (t \in I_1).$$

On obtient alors, grâce à la majoration (46),

$$Q_1 \ll \varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-(r-1)/15}. \tag{47}$$

Nous exploitons le Lemme 12 pour majorer la contribution Q_3. Dans ce cas, on a $0 < \theta < \varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}$. Le Lemme 12 et la majoration (35) utilisée avec $\xi = \varepsilon$ fournissent, au vu de la minoration $K(\alpha) > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}$,

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) \ll K(\alpha) \sum_{m=1}^{N_1} \frac{|g_m|}{(\log 1/\varepsilon)^m} + \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15} \ll K(\alpha).$$

Il en résulte la majoration

$$Q_3(\alpha) \ll K(\alpha)^r \int_0^{\varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}} d\theta \ll \varepsilon K(\alpha)^r \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}.$$

Il vient, grâce à (44) et au Lemme 13,

$$Q_3 \ll \varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}. \tag{48}$$

Nous majorons la contribution Q_5. Posons $t = \alpha(1-\varepsilon)^{-1}(1-\tau)$. Le Théorème 3 appliqué à droite de α fournit

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) = G(\alpha) - G(\alpha(1-\tau)) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}).$$

Nous en déduisons, grâce au Théorème 1 à gauche de α, et à la minoration $K(\alpha) > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}$,

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) \ll K(\alpha) \quad (t \in I_5).$$

Une application du Lemme 13 fournit, au vu de (44),

$$Q_5 \ll \varepsilon \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}. \tag{49}$$

8.2. Contributions formant le développement annoncé

8.2.1. *Estimation de la contribution Q_4.* Nous évaluons Q_4. Posons $t = \alpha(1-\varepsilon)^{-1}(1-\tau)$. Les valeurs de τ vérifient donc $\varepsilon\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15} \le \tau \le \varepsilon$. Le Théorème 1, dont l'application à droite puis à gauche de α est autorisée par (33), fournit

$$\begin{aligned} G(t) - G(t-\varepsilon t) &= G(\alpha) - G(\alpha(1-\tau)) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}) \\ &= K(\alpha)\{G(1) - G(1-\tau)\} + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \end{aligned}$$

Le Théorème C, utilisé avec $N = 1 + N_1$, où N_1 est défini en (10), fournit

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) = K(\alpha)F_1(\varepsilon,\tau) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}), \tag{50}$$

où F_1 est définie au Théorème 3. Nous notons maintenant que l'on a, pour les valeurs de τ annoncées, $F_1(\varepsilon,\tau) \asymp 1/(\log 1/\tau) \asymp 1/(\log 1/\varepsilon)$. Nous déduisons de la minoration $K(\alpha) > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}$ que l'on a, pour chaque constante fixée $c < 1/15$,

$$\{G(t) - G(t-\varepsilon t)\}^r = K(\alpha)^r F_1(\varepsilon,\tau)^r (1 + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c})). \tag{51}$$

Il vient

$$Q_4 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} K(\alpha)^r \int_{\varepsilon\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}}^{\varepsilon} F_1(\varepsilon,\tau)^r\,d\tau + O(\varepsilon\,\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}).$$

Le Lemme 13 fournit alors, pour toute constante $c' < \min((r-1)/15, 1/15)$,

$$Q_4 = C_r \int_{\varepsilon\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}}^{\varepsilon} F_1(\varepsilon,\tau)^r\,d\tau + O(\varepsilon\,\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}),$$

et la majoration $F_1(\varepsilon,\tau) \ll 1$ implique finalement

$$Q_4 = C_r \int_0^{\varepsilon} F_1(\varepsilon,\tau)^r\,d\tau + O(\varepsilon\,\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}). \tag{52}$$

8.2.2. *Estimation de la contribution Q_2.* Nous estimons à présent la contribution Q_2. Nous utilisons à cet effet le Lemme 12, en choisissant c arbitrairement proche de 1 et donc c' arbitrairement proche de 1/5. Nous effectuons le changement de variables $\theta = \varepsilon u$. Les valeurs de u vérifient donc

$$\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15} \le u \le \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}. \tag{53}$$

Nous avons, d'après le Lemme 12, pour chaque $c < 1/5$,

$$G(t) - G(t-\varepsilon t) = K(\alpha)F_2(\varepsilon,u) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}), \tag{54}$$

où F_2 est définie avant le Théorème 3. Maintenant, nous exploitons la majoration des $|g_m|$ donnée au Théorème C et l'évaluation (40). L'utilisation pour $m \geq 3$ de la majoration générale $y^m - x^m \ll (y-x)m(x+y)^{m-1}$, uniforme pour $m \geq 1$ et $y \geq x \geq 0$, fournit l'évaluation uniforme dans le domaine (53) :

$$F_2(\varepsilon, u) \sim \frac{e^{-\gamma}\log(1+1/u)}{(\log 1/\varepsilon)^2}. \tag{55}$$

Il en résulte, dans le domaine (53), que $F_2(\varepsilon,u) \gg \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}(\log 1/\varepsilon)^{-2}$. Nous invoquons alors la minoration $K(\alpha) > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}$. Il découle alors de (54) que l'on a, pour chaque constante $c < 1/15$ fixée,

$$(G(t) - G(t-\varepsilon t))^r = K(\alpha)^r F_2(\varepsilon,u)^r(1 + O_r(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c})).$$

Il suit, en invoquant l'identité (44) et l'estimation (55), que l'on a, pour chaque $c < 1/15$,

$$Q_2 = \varepsilon \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} K(\alpha)^r \int_{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}}^{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}} F_2(\varepsilon,u)^r\,du + O(\varepsilon\,\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c}).$$

Nous appliquons alors le Lemme 13 pour évaluer la somme portant sur α. Il en résulte que l'on a, pour chaque $c' < \min(1/15, (r-1)/15)$,

$$Q_2 = \varepsilon C_r \int_{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}}^{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}} F_2(\varepsilon,u)^r\,du + O(\varepsilon\,\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}).$$

La majoration $F_2(\varepsilon,u) \ll 1$ fournit finalement

$$Q_2 = \varepsilon C_r \int_0^{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}} F_2(\varepsilon,u)^r\,du + O(\varepsilon\,\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-c'}). \tag{56}$$

Les majorations (45), (47), (48) et (49) ainsi que les évaluations (52) et (56) établissent alors le Théorème 3. ■

9. DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 1

Nous estimons successivement les contributions respectives des fonctions F_1 et F_2. Nous montrons que F_1 contribue aux puissances d'ordre $r+n$ et F_2 aux puissances $2r+n$ dans le développement de l'intégrale (43) selon les puissances de $1/\log 1/\varepsilon$.

9.1. Contribution de la fonction F_1. Nous évaluons la contribution due à la fonction F_1. Pour chaque entier $n \geq 3$, nous avons, grâce à la majoration des $|g_m|$ issue du Théorème C, et la définition (10) de N_1, lorsque $0 < \tau \le \varepsilon$,

$$F_1(\varepsilon,\tau) = \frac{g_1}{\log 1/\tau}\biggl(1 + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{g_m/g_1}{(\log 1/\tau)^{m-1}} + O_n\biggl(\frac{1}{(\log 1/\tau)^{n-1}}\biggr)\biggr).$$

L'estimation

$$(57)\quad (1+x)^r = 1 + rx + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-M+1)}{M!}\,x^M + O_M(x^{M+1})$$

fournit l'existence de nombres réels $h_m^{(1)}(r)$ tels que

$$F_1(\varepsilon,\tau)^r = e^{-r\gamma}\biggl(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{h_m^{(1)}(r)}{(\log 1/\tau)^{r+m}} + O_{n,r}\biggl(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^{r+n}}\biggr)\biggr),$$

avec

$$h_0^{(1)}(r) = 1, \qquad h_1^{(1)}(r) = 0, \qquad h_2^{(1)}(r) = -r\pi^2/12.$$

L'usage du développement général, valable pour chaque $r > 0$ fixé,

$$(58)\quad \int_0^{\varepsilon} \frac{d\tau}{(\log 1/\tau)^r} = \frac{\varepsilon}{(\log 1/\varepsilon)^r} - \varepsilon\sum_{n=0}^{M}(-1)^n \frac{r(r+1)\cdots(r+n)}{(\log 1/\varepsilon)^{r+n+1}} + O_M\biggl(\frac{\varepsilon}{(\log 1/\varepsilon)^{M+r+2}}\biggr),$$

fournit alors l'existence de nombres réels $h_m^{(2)}(r)$ tels que l'on ait, pour chaque entier $n \ge 1$,

$$(59)\quad \int_0^{\varepsilon} F_1(\varepsilon,\tau)^r\,d\tau = e^{-r\gamma}\varepsilon\biggl\{\sum_{m=0}^{n-1} \frac{h_m^{(2)}(r)}{(\log 1/\varepsilon)^{r+m}} + O_{r,n}\biggl(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^{r+n}}\biggr)\biggr\},$$

avec

$$h_0^{(2)}(r) = 1, \qquad h_1^{(2)}(r) = -r, \qquad h_2^{(2)}(r) = r(r+1-\pi^2/12).$$

9.2. Contribution de la fonction F_2. Nous évaluons à présent la contribution issue de la fonction F_2. Nous notons tout d'abord que l'on a

$$(60)\quad \int_0^{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}} F_2(\varepsilon,u)^r\,du \ll \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}.$$

Nous pouvons donc estimer l'intégrale de $F_2(\varepsilon,u)^r$ lorsque les valeurs de u décrivent $\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15} \le u \le \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}$.

Nous factorisons alors la somme définissant F_2 par son premier terme, grâce à l'identité, valable pour tous réels x, y et entiers $m \ge 1$,

$$(61)\quad y^m - x^m = (y-x)(y^{m-1} + y^{m-2}x + \cdots + x^{m-1}).$$

Nous observons que

$$\frac{1}{\log 1/(\varepsilon(1+u))} - \frac{1}{\log 1/(\varepsilon u)} = \frac{\log(1+1/u)}{(\log 1/\varepsilon)^2} \, \frac{1}{\left(1 - \frac{\log(1+u)}{\log 1/\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\log u}{\log 1/\varepsilon}\right)},$$

et nous définissons

$$S_n(\varepsilon, u) := \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{g_m/g_1}{(\log 1/(\varepsilon(1+u)))^{m-j-1}(\log 1/(\varepsilon u))^j}. \tag{62}$$

Il vient

$$F_2(\varepsilon, u) = \frac{e^{-\gamma}\log(1+1/u)}{(\log 1/\varepsilon)^2} \, \frac{S_{N_1}(\varepsilon, u)}{\left(1 - \frac{\log(1+u)}{\log 1/\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\log u}{\log 1/\varepsilon}\right)}. \tag{63}$$

On a pour chaque entier $n \geq 2$, au vu de la définition (10) de l'entier N_1, et en utilisant la majoration des $|g_m|$ du Théorème C,

$$S_{N_1}(\varepsilon, u) = S_n(\varepsilon, u) + O_n\left(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^n}\right). \tag{64}$$

Nous réécrivons S_n sous la forme

$$S_n(\varepsilon, u) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{g_m/g_1}{(\log 1/\varepsilon)^{m-1}\left(1 - \frac{\log(1+u)}{\log 1/\varepsilon}\right)^{m-j-1}\left(1 - \frac{\log u}{\log 1/\varepsilon}\right)^j}. \tag{65}$$

Nous reportons l'évaluation (64) dans l'identité (63). Il vient

$$\begin{aligned} F_2(\varepsilon, u) = \frac{e^{-\gamma}\log(1+1/u)}{(\log 1/\varepsilon)^2} \, & \frac{1}{\left(1 - \frac{\log(1+u)}{\log 1/\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\log u}{\log 1/\varepsilon}\right)} \\ & \times \left\{ S_n(\varepsilon, u) + O_n\left(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^n}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{66}$$

Notant que $\log u \ll (\log 1/\varepsilon)^{2/3}$ et $\log(1+u) \ll (\log 1/\varepsilon)^{2/3}$, nous effectuons un développement de (66) selon les puissances de $1/\log 1/\varepsilon$, en développant l'expression (65) de S_n. L'usage du développement $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^M + O(x^{M+1})$, uniforme pour $|x| \leq 1/2$, fournit l'existence de nombres réels $h^{(3)}_{m,k,l}$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} F_2(\varepsilon, u) = {} & \frac{e^{-\gamma}\log(1+1/u)}{(\log 1/\varepsilon)^2} \\ & \times \left(\sum_{\substack{m,k,l \geq 0 \\ m+k+l \leq n}} h^{(3)}_{m,k,l} \, \frac{(\log(1+u))^k (\log u)^l}{(\log 1/\varepsilon)^{m+k+l}} + O_n\left(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^n}\right)\right), \end{aligned}$$

avec $h^{(3)}_{0,0,0} = 1$. L'usage du développement (57) fournit alors l'existence de nombres réels $h^{(4)}_{m,k,l}(r)$ tels que l'on ait

$$\int_{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}}^{\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15}} F_2(\varepsilon,u)^r\,du = \frac{e^{-r\gamma}}{(\log 1/\varepsilon)^{2r}} \sum_{\substack{m,k,l\geq 0\\ m+k+l\leq n-1}} h^{(4)}_{m,k,l}(r)\,\frac{J_{r,k,l}(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/15})}{(\log 1/\varepsilon)^{m+k+l}} + O_n\biggl(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^{2r+n}}\biggr),$$

avec $h^{(4)}_{0,0,0}(r) = 1$, et où l'on a posé

$$J_{r,k,l}(T) := \int_{1/T}^{T} (\log(1+1/u))^r(\log u)^k(\log(1+u))^l\,du.$$

Nous notons que l'on a, pour tout entier n,

$$J_{r,k,l}(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/5}) = J_{r,k,l} + O_n\biggl(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^n}\biggr),$$

où l'on a posé $J_{r,k,l} := J_{r,k,l}(+\infty)$. Au vu de (59) et (60), en choisissant n arbitrairement grand, cela achève la démonstration du Corollaire 1. ■

10. GÉNÉRALISATION À $n/\sigma(n)$ DES THÉORÈMES 1, 2 ET 3

Nous notons dans tout ce paragraphe G_σ la fonction de répartition de $n/\sigma(n)$. Il est établi au chapitre précédent que le Théorème C est valable également pour une certaine classe de fonctions multiplicatives, et en particulier pour la fonction $n/\sigma(n)$.

Nous généralisons le Lemme 6 à la fonction $n/\sigma(n)$. Nous établissons que celui-ci est valable pour $n/\sigma(n)$ à la condition $0 < \varepsilon < 1/4$. La démonstration de ce lemme fournit, sans aucune modification, que les termes d'erreur induits par les conditions 1 et 2 sont respectivement $\ll E_1$ et $\ll E_2$.

Nous reproduisons le même raisonnement concernant le terme d'erreur induit par la condition 3. Nous obtenons à la place de (24) l'identité

$$\frac{n/p}{\sigma(n/p)} = \frac{n}{\sigma(n)}\,\frac{p+1}{p},$$

puis, à la place de l'équation (25),

$$\frac{n}{\sigma(n)}\,\frac{\sigma(n')}{n'} = 1 + \frac{p-p'}{p'(p+1)} \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{1/\varepsilon}\,(\sqrt{1/\varepsilon}+1)}.$$

L'encadrement $0 < \varepsilon < 1/4$ fournit la contradiction à la majoration (26) valable pour $n/\sigma(n)$, la contradiction étant obtenue dès que $2\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} < 1$.

En ce qui concerne la condition 4, la minoration $n/\sigma(n) \geq \varphi(n)/n$, valable pour $n \geq 1$, fournit que $n_3/\sigma(n_3)$ est supérieur au minorant de (27). Cela établit que le Lemme 6 est valable pour la fonction $n/\sigma(n)$ sous la condition $0 < \varepsilon < 1/4$.

10.1. Généralisation du Théorème 1. Le Lemme 7 se généralise à $n/\sigma(n)$, sans aucune modification. Le point à vérifier est l'analogue du Lemme 4. La principale difficulté est que l'on ne sait pas résoudre explicitement l'équation $n/\sigma(n) = \alpha$. On contourne ce problème en faisant usage d'un résultat de Hornfeck et Wirsing [7]. Ils montrent que l'on a, pour chaque $\delta > 0$ fixé et uniformément pour $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$R(x,\alpha) := \operatorname{card}\{n \leq x : n/\sigma(n) = \alpha\} \ll_\delta x^\delta. \tag{67}$$

Nous notons

$$K_\sigma(x) := \sum_{n/\sigma(n)=x} \frac{1}{n},$$

dont l'existence est assurée par (67). Cette fonction a été initialement considérée par Erdős dans [6] pour établir la généralisation à $n/\sigma(n)$ du Théorème B. Nous observons que $n/\sigma(n) > 1-\varepsilon$ impose $P^-(n) > (1-\varepsilon)/\varepsilon$. Nous en déduisons lorsque $t \in \mathcal{E}_\sigma$, l'ensemble des valeurs prises par $n/\sigma(n)$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card}\left\{n \leq x : t(1-\varepsilon) < \frac{n}{\sigma(n)} \leq t\right\} \\
&\quad \geq \operatorname{card}\left\{n_1 n_2 \leq x : P^+(n_1) \leq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},\ \frac{n_1}{\sigma(n_1)} = t,\ \frac{n_2}{\sigma(n_2)} > 1-\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

Le théorème de la convergence dominée fournit alors, pour chaque $\delta > 0$,

$$G_\sigma(t) - G_\sigma(t-\varepsilon t) \geq K_\sigma(t)\{G_\sigma(1) - G_\sigma(1-\varepsilon)\} + O(\varepsilon^{1-\delta}),$$

où l'on a exploité la majoration (67) sous la forme

$$\sum_{\substack{P^+(n_1)>(1-\varepsilon)/\varepsilon \\ n_1/\sigma(n_1)=t}} \frac{1}{n_1} \leq \sum_{\substack{n_1>(1-\varepsilon)/\varepsilon \\ n_1/\sigma(n_1)=t}} \frac{1}{n_1} \ll \int_{1/\varepsilon}^{+\infty} \frac{dR(x,t)}{x} \ll \varepsilon^{1-\delta},$$

la dernière majoration étant obtenue par intégration par parties.

10.2. Généralisation du Théorème 2. Comme nous l'avons signalé en introduction, le module de continuité de G_σ n'atteint pas son maximum au voisinage de $1/2$, mais de 1. Avec la définition (9) de θ_0, la généralisation du Théorème 2 à la fonction $n/\sigma(n)$ se traduit par le résultat suivant.

Théorème 4. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une constante $c_1 > 0$ tels que, lorsque $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la valeur maximale de $G_\sigma(t) - G_\sigma(t - \varepsilon t)$ soit atteinte lorsque*

$$t \in [1 - \theta_0, 1].$$

De plus, on a, lorsque $0 < \varepsilon < 1/3$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{G_\sigma(t) - G_\sigma(t - \varepsilon t)\} = G(1) - G(1 - \varepsilon) + O(\mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/5}). \tag{68}$$

Les Lemmes 8 à 10 se généralisent à $n/\sigma(n)$, sans modification. Le Lemme 12 se généralise sans modification grâce à la généralisation du Théorème C établie dans [12]. Nous vérifions l'analogue du Lemme 11. Soit α un élément de $\mathcal{A}_0(\varepsilon)$. Soit N le plus petit entier tel que $\alpha = N/\sigma(N)$. La condition $K_\sigma(\alpha) > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}$ implique

$$\sum_{\substack{n\geq N\\ n/\sigma(n)=N/\sigma(N)}} \frac{1}{n} > \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{-1/15}.$$

D'autre part, la majoration (67) montre que l'on a, pour chaque $\delta > 0$,

$$\sum_{\substack{n\geq N\\ n/\sigma(n)=N/\sigma(N)}} \frac{1}{n} \ll N^{-1+\delta}.$$

Cela montre que l'inclusion $\mathcal{A}_0(\varepsilon) \subset \mathcal{A}(\xi)$, analogue à celle obtenue en (34), est bien vérifiée dans le cas de la fonction $n/\sigma(n)$ en remplaçant la condition $k(n) \leq \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/14}$ par

$$n \leq \mathrm{L}(1/\varepsilon)^{1/7}. \tag{69}$$

Au vu du paragraphe 7.1.1, le Théorème 3 découle alors du fait, établi au lemme suivant, que la valeur maximale de $K_\sigma(x)$ vaut 1 et n'est atteinte que si $x = 1$. Signalons que l'on n'a pas cherché à optimiser la valeur de la constante 0,9883 intervenant au Lemme 15.

Lemme 15. *On a $K_\sigma(1) = 1$, et*

$$K_\sigma(x) < 0{,}9883 \qquad (x \neq 1).$$

Démonstration. Dans toute la démonstration, nous écrivons un entier générique n sous la forme unique $n = ab$, où b est sans facteur carré et où les facteurs premiers de a sont de multiplicité ≥ 2, avec la condition $(a, b) = 1$. Le résultat est acquis lorsque $x = 1$. Supposons donc $x \neq 1$. Nous avons

$$K_\sigma(x) = \sum_a \frac{1}{a} \sum_{\substack{b:(a,b)=1\\ b/\sigma(b)=x\sigma(a)/a}} \frac{1}{b}. \tag{70}$$

Nous exploitons maintenant le fait que l'équation $b/\sigma(b) = \alpha$ possède pour chaque réel α une unique ou aucune solution. Nous posons

$$A(x) := \{a \in \mathbb{N} : p \,|\, a \Rightarrow p^2 \,|\, a;\ a/\sigma(a) = x\}.$$

Grâce au fait que $b/\sigma(b) \neq 1$ pour chaque $b \geq 2$, il vient

$$\begin{aligned} K_\sigma(x) &\leq \sum_{a \in A(x)} \frac{1}{a} + \frac{1}{3} \sum_{\substack{a \notin A(x) \\ a \text{ pair}}} \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a \notin A(x) \\ a \text{ impair}}} \frac{1}{a} \\ &\leq \sum_{a \in A(x)} \frac{1}{a} + \frac{1}{3} \sum_{a \notin A(x)} \frac{1}{a} + \frac{1}{6} \sum_{a \text{ impair}} \frac{1}{a} = \frac{4}{9} C + \frac{2}{3} \sum_{a \in A(x)} \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$C := \sum_a \frac{1}{a} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2 - p}\right) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1{,}9435964\ldots.$$

Notant $\mathcal{M}_0 = \{a/\sigma(a) \,:\, a \leq 100\}$, nous avons, lorsque $x \notin \mathcal{M}_0$,

$$\sum_{a \in A(x)} \frac{1}{a} \leq \sum_{x \notin \mathcal{M}_0} \sum_{a/\sigma(a) = x} \frac{1}{a} \leq C - \sum_{a \leq 100} \frac{1}{a}.$$

Il en résulte, lorsque $x \notin \mathcal{M}_0$,

$$K_\sigma(x) \leq \frac{10}{9} C - \frac{2}{3} \sum_{a \leq 100} \frac{1}{a} = 0{,}98826\ldots < 0{,}9883.$$

Il nous reste ainsi à démontrer le résultat annoncé pour les 13 éléments de $\mathcal{M}_0$. Nous utilisons l'identité (70). Soit $x = a'/\sigma(a') \in \mathcal{M}_0$. Un calcul direct des $a/\sigma(a)$ pour $a = 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100$ montre que les éléments de $\mathcal{M}_0$ sont deux à deux distints. Il en résulte que, dans la sommation, on a $b \geq 2$ lorsque $a \leq 100$, sauf si $a = a'$. De plus, les éléments de $\mathcal{M}_0$ sont distincts des rationnels $b/\sigma(b)$ lorsque $b \leq 6$ est sans facteur carré. Nous en déduisons

$$K_\sigma(x) \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{a'} + C',$$

où l'on a posé

$$C' := \sum_{4 \leq a \leq 100} \frac{1}{a \min(b \geq 2 : (a,b) = 1)} + \sum_{a > 100} \frac{1}{a} = 0{,}47224127\ldots.$$

Il en résulte que l'on a, lorsque $x \in \mathcal{M}_0$ et $x \neq 1$,

$$K_\sigma(x) \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + 0{,}47224127\ldots < 0,866.$$

Cela établit le résultat requis. ∎

10.3. Généralisation du Théorème 3. Pour généraliser le Théorème 3 à la fonction $n/\sigma(n)$, nous faisons à nouveau usage de la majoration (67). Nous avons, lorsque $r > 1$,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{E}_\sigma} K_\sigma(\alpha)^r \le \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\sum_{\substack{m\ge n\\ m/\sigma(m)=n/\sigma(n)}} \frac{1}{m}\Bigg)^r. \tag{71}$$

Une intégration par parties fournit grâce à (67), pour chaque $\delta > 0$ fixé,

$$\sum_{\substack{m\ge n\\ m/\sigma(m)=n/\sigma(n)}} \frac{1}{m} \ll \int_n^{+\infty} \frac{R(t, n/\sigma(n))}{t^2}\,dt + n^{-1+\delta} \ll n^{-1+\delta}.$$

Il en résulte, en choisissant $0 < \delta < 1-1/r$, que la précédente série en n converge. Le Lemme 13 se généralise à $n/\sigma(n)$ sans modification, en remplaçant le produit infini par la série du membre de gauche de (71).

D'autre part, la majoration (69) établit la généralisation du Lemme 14. Cela établit finalement que les trois théorèmes annoncés et le Corollaire 1 se généralisent à $n/\sigma(n)$. ∎

Références

[1] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, *Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications*, Invent. Math. 159 (2005), 531–588.

[2] H. G. Diamond and D. Rhoads, *The modulus of continuity of the distribution function of $\Phi(n)/n$*, dans : Topics in Classical Number Theory, Vol. I, II (Budapest, 1981), Colloq. Math. Soc. János Bolyai 34, North-Holland, Amsterdam, 1984, 335–353.

[3] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory I. Mean-value Theorems*, Grundlehren Math. Wiss. 239, Springer, New York, 1979.

[4] P. Erdős, *On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions*, Amer. J. Math. 61 (1939), 722–725.

[5] —, *Some remarks about additive and multiplicative functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 527–537.

[6] —, *On the distribution of numbers of the form $\sigma(n)/n$ and on some related questions*, Pacific J. Math. 52 (1974), 59–65.

[7] B. Hornfeck und E. Wirsing, *Über die Häufigkeit vollkommener Zahlen*, Math. Ann. 133 (1957), 431–438.

[8] I. J. Schoenberg, *Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod* 1, Math. Z. 28 (1928), 171–199.

[9] —, *On asymptotic distributions of arithmetical functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936), 315–330.

[10] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés 1, Soc. Math. France, 1995, xv + 457 pp.

[11] G. Tenenbaum, en collaboration avec J. Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés 2, Soc. Math. France, 1996, xiv + 251 pp.

[12] V. Toulmonde, *Comportement au voisinage de* 1 *de la fonction de répartition de* $\varphi(n)/n$, 2004, 44 pages.

ATER à l'Institut Élie Cartan
Université Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex, France
E-mail: vincent.toulmonde@iecn.u-nancy.fr

Reçu le 20.6.2005
et révisé le 24.8.2005 (5012)