ACTA ARITHMETICA
XCVI.4 (2001)

Le corps des séries de Puiseux généralisées

par

BRUNO DESCHAMPS (Saint-Etienne)

1. Corps des séries de Puiseux. Si K désigne un corps commutatif, le corps $K(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans K est un corps valué, par la valuation usuelle associée aux polynômes (valuation associée au premier X). On sait qu'alors $K(X)$ n'est pas un corps complet et que son complété est le corps $K((X))$ des séries de Laurent. $K((X))$ est alors muni d'une valuation discrète ν qui étend la valuation de $K(X)$. On définit $\nu(\sum_{k\ge k_0} a_k X^k) = k_0$ (pour $a_{k_0} \neq 0$).

Pour tout entier $n \neq 0$, on pose $K_n = K((X_n))$ (corps de séries de Laurent en la variable X_n). Pour tout couple d'entiers (n,m) tel que n divise m (disons $m = an$), on définit l'application $\varphi_{n,m} : K_n \to K_m$ de la manière suivante : à une série $\sum_{k\ge k_0} a_k X_n^k$ on associe la série $\sum_{k\ge k_0} a_k X_m^{ak}$. Les applications $\varphi_{n,m}$ sont clairement des homomorphismes de corps et la donnée des K_n et des $\varphi_{n,m}$ forme visiblement un système inductif.

Pour $n = 1$, on note plus simplement $K((X_1)) = K((X))$. Il apparaît alors que le corps K_n est un corps de rupture du polynôme $P(T) = T^n - X$ sur $K((X))$, de même si $m = an$, alors K_m est un corps de rupture du polynôme $P(T) = T^a - X$ sur K_n. Ceci justifie alors la notation $X_n = X^{1/n}$ que nous emploierons désormais. Les corps K_n sont donc des extensions finies de $K((X))$. On définit alors :

DÉFINITION. On appelle *corps des séries de Puiseux* à coefficients dans K le corps noté $\mathrm{Puis}(K)$ obtenu en prenant la limite inductive du système de corps et d'homomorphismes $(K_n, \varphi_{n,m})$.

Ainsi, le corps $\mathrm{Puis}(K)$ est une extension algébrique de $K((X))$. Par ailleurs, $\mathrm{Puis}(K)$ possède une unique valuation qui prolonge celle de $K((X))$ (puisque $K((X))$ est complet à valuation discrète). Nous continuerons à noter cette valuation ν. Si $\sum_{k\ge k_0} a_k X^{k/n}$ désigne une série de Puiseux ($a_{k_0} \neq 0$), on a alors $\nu(\sum_{k\ge k_0} a_k X^{k/n}) = k_0/n$. Le corps résiduel de $\mathrm{Puis}(K)$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 12E30; Secondary 12F20.

est alors K. Notons que ν n'est plus discrète. Dans cet article, pour tout corps k, on notera $\overline{k}$ la clôture algébrique k. L'intérêt premier de l'étude de $\mathrm{Puis}(K)$ vient du théorème suivant (voir [Ser]) :

Théorème. *Si K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, alors*

$$\overline{K((X))} = \mathrm{Puis}(K).$$

Une ombre persiste tout de même au tableau :

Proposition 1. $\mathrm{Puis}(K)$ *n'est jamais un corps complet pour ν.*

Preuve. En effet, la suite $S_n(X) = \sum_{k=1}^{n} X^{k+1/k}$ de séries de Puiseux est visiblement de Cauchy. Supposons que $(S_n)_n$ converge dans $\mathrm{Puis}(K)$, disons vers $S = \sum_{k \geq k_0} a_k X^{k/n_0}$. Considérons un nombre premier p ne divisant pas n_0 ; alors $\nu(S - S_n) \leq (p^2+1)/p$ pour tout $n \geq p$, ce qui rend impossible le fait que $\lim_n \nu(S - S_n) = +\infty$. ■

On veut donc compléter $\mathrm{Puis}(K)$. Pour cela, on va généraliser le corps des séries de Puiseux.

2. Corps des séries de Puiseux généralisées

2.1. *Construction.* On considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(\alpha_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} > \alpha_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty\}$$

des suites de rationnels strictement croissantes et tendant vers $+\infty$.

On considère aussi les deux ensembles suivants :

$$\mathcal{O} = \{P \subset \mathbb{Q} : P \text{ sans point d'accumulation, } \inf(P) \in \mathbb{R},\ \sup(P) = +\infty\}$$

et

$$\mathcal{O}' = \{P \subset \mathbb{Q} : \sharp P = +\infty \text{ et } \forall A \in \mathbb{R},\ \sharp(]-\infty, A[\cap P) < +\infty\}.$$

Soit alors $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (\alpha_n)_n \in \mathcal{A}, \quad \Delta((\alpha_n)_n) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Les deux lemmes qui suivent sont des conséquences immédiates du théorème de Bolzano–Weierstrass :

Lemme 1. *$\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ et Δ est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}$.*

Lemme 2. *L'ensemble $\mathcal{O}$ est stable par réunions finies.*

De même, pour la somme, on a :

Lemme 3. *Soit $P_1, P_2 \in \mathcal{O}$, alors*

$$P_1 + P_2 = \{x + y : x \in P_1,\ y \in P_2\} \in \mathcal{O}.$$

Sur $\mathcal{A}$, on définit une loi de composition interne $+$ de la manière suivante :

$$(\alpha_n)_n + (\beta_n)_n = \Delta^{-1}(\Delta((\alpha_n)_n) + \Delta((\beta_n)_n)).$$

De plus, on définit une relation binaire $\leq$ de la manière suivante :

$$\forall (\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \in \mathcal{A}, \quad (\alpha_n)_n \leq (\beta_n)_n \ \Leftrightarrow\ \Delta((\alpha_n)_n) \subset \Delta((\beta_n)_n).$$

LEMME 4. *L'ensemble* $(A, \leq)$ *est un ensemble ordonné, réticulé supérieurement* (*donc en particulier filtrant à droite*).

P r e u v e. La relation $\leq$ est clairement réflexive et transitive, le fait qu'elle soit antisymétrique provient de l'injectivité de Δ.

Soient $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux éléments de $\mathcal{A}$; alors la suite

$$(\gamma_n)_n = \Delta^{-1}(\Delta((\alpha_n)_n) \cup \Delta((\beta_n)_n))$$

est clairement la borne supérieure dans $\mathcal{A}$ de la partie $\{(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n\}$. ∎

Pour une suite $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$, on pose

$$\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n} = \{(u_{\alpha_n})_n \in K^{\mathbb{N}}\}.$$

C'est l'ensemble des suites d'éléments de K indicées par la suite $(\alpha_n)_n$. Dans la suite on notera un élément $(u_{\alpha_n})_n \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ de la manière suivante :

$$\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}.$$

Soient $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux éléments de $\mathcal{A}$ tels que $(\alpha_n)_n \leq (\beta_n)_n$. On définit une application $\Phi_{(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n} : \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n} \to \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$ en posant

$$\Phi_{(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n}\Big(\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}\Big) = \sum_{m\geq 0} u_{\beta_m} X^{\beta_m}$$

avec

$$u_{\beta_m} = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \neq \beta_m, \\ u_{\alpha_n} & \text{si } \alpha_n = \beta_m. \end{cases}$$

(Cette application est bien définie car si pour un indice $m \in \mathbb{N}$ donné, il existe un indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n = \beta_m$ alors, à cause de la stricte croissance de $(\alpha_n)_n$, cet indice est unique pour cette propriété.)

LEMME 5. *Le système d'ensembles et d'applications*

$$\{\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}, \Phi_{(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n}\}_{\mathcal{A}}$$

est un système inductif.

P r e u v e. On a établi que $(\mathcal{A}, \leq)$ était un ensemble filtrant à droite. Il est clair que pour tout $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$, $\Phi_{(\alpha_n)_n,(\alpha_n)_n} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}}$.

Soit $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ trois éléments de $\mathcal{A}$ tels que $(\alpha_n)_n \leq (\beta_n)_n \leq (\gamma_n)_n$. Posons

$$S = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n},$$

$$\Phi_{(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n}(S) = \sum_{m\geq 0} v_{\beta_m} X^{\beta_m} = S',$$
$$\Phi_{(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n}(S') = \sum_{k\geq 0} w_{\gamma_k} X^{\gamma_k},$$
$$\Phi_{(\alpha_n)_n,(\gamma_n)_n}(S) = \sum_{k\geq 0} w'_{\gamma_k} X^{\gamma_k}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; deux situations se présentent alors :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \neq \gamma_k$. Dans ces conditions, $w'_{\gamma_n} = 0$.

1.1) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\beta_m \neq \gamma_k$. Alors $w_{\gamma_k} = 0$.

1.2) $\beta_{m_0} = \gamma_k$. Dans cette situation on a nécessairement $\alpha_n \neq \beta_{m_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $w_{\gamma_k} = v_{\beta_{m_0}} = 0$.

2) $\alpha_{n_0} = \gamma_k$. Dans ces conditions $w'_{\gamma_k} = u_{\alpha_{n_0}}$. Mais alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_{m_0} = \alpha_{n_0}$ et donc $v_{\beta_{m_0}} = u_{\alpha_{n_0}}$ et comme $\beta_{m_0} = \gamma_k$, on a $w_{\gamma_k} = u_{\alpha_{n_0}} = w'_{\gamma_k}$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $w_{\gamma_k} = w'_{\gamma_k}$, donc
$$\Phi_{(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n} \circ \Phi_{(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n} = \Phi_{(\alpha_n)_n,(\gamma_n)_n}.$$
Le système est bien inductif. ∎

On pose alors $\Omega = \varinjlim (\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}, \Phi_{(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n})_{\mathcal{A}}$. Rappelons que Ω est l'ensemble quotient $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence suivante : $S\mathcal{R}S'$ (avec $S \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ et $S' \in \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$) si et seulement s'il existe $(\gamma_n)_n \in \mathcal{A}$ majorant $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ tel que
$$\Phi_{(\alpha_n)_n,(\gamma_n)_n}(S) = \Phi_{(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n}(S').$$

Lemme 6. *Soit* $S = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ *et* $S' = \sum_{n\geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$ *deux éléments de* $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) $S\mathcal{R}S'$.

(ii) $\forall r \in \Delta((\alpha_n)_n) \cap \Delta((\beta_n)_n)$, $u_r = v_r$; $\forall r \in \Delta((\alpha_n)_n) - \Delta((\beta_n)_n)$, $u_r = 0$ *et* $\forall r \in \Delta((\beta_n)_n) - \Delta((\alpha_n)_n)$, $v_r = 0$.

Preuve. (i)⇒(ii) : Soit $(\gamma_n)_n \in \mathcal{A}$ une suite telle que $\Phi_{(\alpha_n)_n,(\gamma_n)_n}(S) = \Phi_{(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n}(S')$. Posons
$$\Phi_{(\alpha_n)_n,(\gamma_n)_n}(S) = \sum_{n\geq 0} w_{\gamma_n} X^{\gamma_n} = \Phi_{(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n}(S').$$
Si $r \in \Delta((\alpha_n)_n) \cap \Delta((\beta_n)_n)$, alors $u_r = w_r = v_r$. Si maintenant $r \in \Delta((\alpha_n)_n) - \Delta((\beta_n)_n)$, alors $u_r = w_r = 0$ car il n'existe pas d'indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_n = r$.

(ii)⇒(i) : Si (ii) est satisfait, il est alors clair que
$$\Phi_{(\alpha_n)_n,(\gamma_n)_n}(S) = \Phi_{(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n}(S')$$
pour $(\gamma_n)_n = \sup((\alpha_n)_n, (\beta_n)_n)$. ∎

Remarque. On a alors les propriétés suivantes :

• Un élément de Ω a au maximum un représentant dans chaque $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$.

• Si $x \in \Omega$ a un représentant dans $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, alors x a un représentant dans $\mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$ pour tout $(\beta_n)_n \geq (\alpha_n)_n$.

• Si un élément x de Ω possède un représentant $\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ tel que la suite $(u_{\alpha_n})_n$ ne soit pas nulle à partir d'un certain rang, alors x possède un représentant (unique) $\sum_{n\geq 0} u_{\beta_n} X^{\beta_n}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\beta_n} \neq 0$ (on a alors $(\beta_n)_n \leq (\alpha_n)_n$) ce représentant s'appelle alors le "représentant canonique de x".

• Si un élément $x \in \Omega$ possède un représentant canonique dans $\mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}$, alors la suite $(\gamma_n)_n$ est un plus petit élément dans l'ensemble des suites $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ telles que x admette un représentant dans $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$.

Dans la suite, si $S \in \coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, on notera $\overline{S}$ la classe de S dans Ω.

• Sur $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, on définit une loi de composition interne $+$ de la manière suivante : si $S \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ et $S' \in \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$, alors en posant

$$(\gamma_n)_n = \sup((\alpha_n)_n, (\beta_n)_n),$$

$$\Phi_{(\alpha_n)_n,(\gamma_n)_n}(S) = \sum_{n\geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}, \qquad \Phi_{(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n}(S') = \sum_{n\geq 0} v_{\gamma_n} X^{\gamma_n},$$

on définit

$$S + S' = \sum_{n\geq 0} (u_{\gamma_n} + v_{\gamma_n}) X^{\gamma_n} \in \mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}.$$

• Sur $\coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$, on définit aussi une autre loi de composition interne : si $S = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \in \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ et $S' = \sum_{n\geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n} \in \mathcal{A}_{(\beta_n)_n}$, alors en posant $(\gamma_n)_n = (\alpha_n)_n + (\beta_n)_n$, on définit

$$S \cdot S' = \sum_{n\geq 0} W_{\gamma_n} X^{\gamma_n} \in \mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}$$

avec

$$W_{\gamma_n} = \sum_{\alpha_i+\beta_j=\gamma_n} u_{\alpha_i} v_{\beta_j}$$

(cette dernière somme étant visiblement finie).

Lemme 7. *Si $S, S', T, T' \in \coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ sont tels que $\overline{S} = \overline{S'}$ et $\overline{T} = \overline{T'}$, alors*

$$\overline{S+T} = \overline{S'+T'} \quad \textit{et} \quad \overline{S\cdot T} = \overline{S'\cdot T'}.$$

Preuve. A cause de l'évidente commutativité des lois $+$ et $\cdot$, la proposition énoncée dans ce lemme équivaut à $\overline{S+T} = \overline{S'+T}$ et $\overline{S\cdot T} = \overline{S'\cdot T}$.

Posons $S+T = \sum_{n\geq 0}(u_{\gamma_n} + v_{\gamma_n}) X^{\gamma_n} \in \mathcal{A}_{(\gamma_n)_n}$ et $S'+T = \sum_{n\geq 0}(u'_{\delta_n} + v'_{\delta_n}) X^{\delta_n} \in \mathcal{A}_{(\delta_n)_n}$. On sait que les séries $\sum_{n\geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ et $\sum_{n\geq 0} u'_{\delta_n} X^{\delta_n}$ sont en relation ainsi que les séries $\sum_{n\geq 0} v_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ et $\sum_{n\geq 0} v'_{\delta_n} X^{\delta_n}$. Considérons deux indices n_0 et n_1 tels que $\gamma_{n_0} = \delta_{n_1}$; alors $u_{\gamma_{n_0}} = u'_{\delta_{n_1}}$ et $v_{\gamma_{n_0}} = v'_{\delta_{n_1}}$, donc $u_{\gamma_{n_0}} + v_{\gamma_{n_0}} = u'_{\delta_{n_1}} + v'_{\delta_{n_1}}$.

Soit maintenant $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_{n_0} \neq \delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors $u_{\gamma_{n_0}} = 0$ et $v_{\gamma_{n_0}} = 0$, c'est-à-dire $u_{\gamma_{n_0}} + v_{\gamma_{n_0}} = 0$. Les séries $S + T$ et $S' + T$ sont bien en relation.

Soient $S = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, $S' = \sum_{n\geq 0} u'_{\alpha'_n} X^{\alpha'_n}$ et $T = \sum_{n\geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$. Posons $S \cdot T = \sum_{n\geq 0} w_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ avec $w_{\gamma_n} = \sum_{\alpha_i+\beta_j=\gamma_n} u_{\alpha_i} v_{\alpha_j}$ et $S' \cdot T = \sum_{n\geq 0} w'_{\gamma'_n} X^{\gamma'_n}$ avec $w'_{\gamma'_n} = \sum_{\alpha'_i+\beta_j=\gamma'_n} u'_{\alpha'_i} v_{\alpha_j}$. Soit un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma'_n \neq \gamma_{n_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prenons des indices $i_0 \in \mathbb{N}$ et $j_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha_{i_0} + \beta_{j_0} = \gamma_{n_0}$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha'_i \neq \alpha_{i_0}$ car sinon il existerait $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma'_n = \alpha'_i + \beta_{j_0} = \alpha_{i_0} + \beta_{j_0} = \gamma_n$. Ainsi, $u_{\alpha_{i_0}} = 0$ et par suite $w_{\gamma_{n_0}} = \sum_{\alpha_i+\beta_j=\gamma_{n_0}} u_{\alpha_i} v_{\alpha_j} = 0$.

Soient maintenant deux indices n_0 et n_1 tels que $\gamma_{n_0} = \gamma'_{n_1} = \omega$. Posons $R = \Delta((\alpha_n)_n) \cap \Delta((\alpha'_n)_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} w_{\gamma_{n_0}} &= \sum_{\alpha_i+\beta_j=\gamma_{n_0}} u_{\alpha_i} v_{\alpha_j} = \sum_{r+\beta_j=\omega,\, r\in R} u_r v_{\alpha_j} \\ &= \sum_{r+\beta_j=\omega,\, r\in R} u'_r v_{\alpha_j} = \sum_{\alpha'_i+\beta_j=\omega} u'_{\alpha'_i} v_{\alpha_j} \\ &= \sum_{\alpha'_i+\beta_j=\gamma'_{n_1}} u'_{\alpha'_i} v_{\alpha_j} = w'_{\gamma'_n}. \end{aligned}$$

Les séries $S \cdot T$ et $S' \cdot T$ sont bien équivalentes. ∎

On vient donc d'établir que les lois $+$ et $\cdot$ sont compatibles avec $\mathcal{R}$. Elles définissent donc des lois de compositions internes sur Ω. On a alors :

Proposition–Définition. *L'ensemble* $(\Omega, +, \cdot)$ *est un corps commutatif que l'on appelle corps des séries de Puiseux généralisées. On le note* $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$.

Preuve. • $(\Omega, +)$ *est un groupe abélien.* Ce fait vient immédiatement de la structure de groupe abélien de $(K, +)$, le neutre étant par exemple représenté par la série $\sum_{n\geq 0} u_n X^n$ où $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• *La loi · est associative.* Soient R, S, T trois éléments de Ω. On choisit un $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ tel que $R = \sum_{n\geq 0} r_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, $S = \sum_{n\geq 0} s_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, $T = \sum_{n\geq 0} t_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$. Soit $(\gamma_n)_n = (\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n$. On a alors (après calcul)

$$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T) = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{\alpha_p+\alpha_q+\alpha_h=\gamma_n} r_{\alpha_p} s_{\alpha_q} t_{\alpha_h} \Big) X^{\gamma_n}.$$

• *La loi · est commutative.* C'est évident.

• La série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n X^n$ avec $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n = 0$ pour $n \geq 1$ représente visiblement un neutre de $(\Omega, \cdot)$.

• *Inversibilité.* Soit $S \in \Omega$ non nul ; on écrit $S = X^r \cdot T$ avec $T = \sum_{n\geq 0} t_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $\gamma_0 = 0$ et $t_{\gamma_0} \neq 0$.

Il existe une suite $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ telle que $(\gamma_n)_n \leq (\alpha_n)_n$ et telle que $(\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n = (\alpha_n)_n$. En effet si l'on pose $P = \Delta((\gamma_n)_n)$ et pour tout $n > 0$, $nP = P + \ldots + P$, alors la partie $Q = \bigcup_n nP$ est minorée par 0 et n'est pas majorée. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = E(\varepsilon/\gamma_1) + 1$. Si $n \geq N$ et si $x_1 + \ldots + x_n$ désigne une somme de n éléments de P dont aucun n'est nul, alors $x_1 + \ldots + x_n > \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout $n \geq N$, $nP \cap]-\infty, \varepsilon[= NP \cap]-\infty, \varepsilon[$ et par suite $Q \cap]-\infty, \varepsilon[$ est fini (lemme 3). Donc $Q \in \mathcal{O}$ et $(\alpha_n)_n = \Delta^{-1}(Q)$ vérifie bien $(\gamma_n)_n \leq (\alpha_n)_n$ et $(\alpha_n)_n + (\alpha_n)_n = (\alpha_n)_n$. Notons qu'alors $\alpha_0 = 0$.

Inverser S revient à inverser T. On choisit un représentant

$$T = \sum_{n\geq 0} t_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$$

de T dans $\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}$ (on a $t_{\gamma_0} = t_{\alpha_0} \neq 0$) et l'on pose

$$V = \sum_{n\geq 0} s_{\alpha_n} X^{\alpha_n},$$

où la suite $(s_{\alpha_n})_n$ est définie de la manière suivante :

$$s_{\alpha_0} = t_{\alpha_0}^{-1}; \quad \forall n > 0, \quad s_{\alpha_n} = -t_{\alpha_0}^{-1} \sum_{\alpha_i + \alpha_j = \alpha_n,\, j \neq n} t_{\alpha_i} s_{\alpha_j}.$$

On a alors

$$\Big(\sum_{n\geq 0} t_{\alpha_n} X^{\alpha_n}\Big) \cdot \Big(\sum_{n\geq 0} s_{\alpha_n} X^{\alpha_n}\Big) = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{\alpha_i + \alpha_j = \alpha_n} t_{\alpha_i} s_{\alpha_j}\Big) X^{\alpha_n}.$$

Cette dernière série vaut 1 par construction et donc T est inversible.

• *La loi $\cdot$ est distributive par rapport à $+$.* C'est immédiat. ∎

2.2. *Propriétés*

Lemme 8. *L'application $\nu : \coprod \mathcal{A}_{(\alpha_n)_n} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie par*

$$\nu\Big(\sum_{n\geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}\Big) = \begin{cases} \inf\{\gamma_i : u_{\gamma_i} \neq 0\} & \text{si } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{\gamma_{n_0}} \neq 0, \\ \infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{\gamma_n} \neq 0, \end{cases}$$

passe au quotient (i.e. si $S \mathcal{R} S'$ alors $\nu(S) = \nu(S')$).

Preuve. Soient $\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ et $\sum_{n\geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$. Le lemme 6 affirme alors que $\{r \in \mathbb{Q} : u_r \neq 0\} = \{r \in \mathbb{Q} : v_r \neq 0\} = E$. On a alors

$$\nu\Big(\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}\Big) = \nu\Big(\sum_{n\geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}\Big) = \min(E). \ ∎$$

Ainsi ν définit une application de $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que nous continuerons à noter ν.

Théorème 1. *Le corps* $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$ *est une extension du corps* $\mathrm{Puis}(K)$*. L'application* ν *est une valuation réelle qui étend la valuation naturelle de* $\mathrm{Puis}(K)$*.*

L'anneau de la valuation ν *est l'anneau des "séries entières de Puiseux généralisées", constitué des séries de Puiseux généralisées admettant un représentant de la forme* $\sum_{n\geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$*, où* $(\gamma_n)_n$ *vérifie* $\gamma_0 \geq 0$*.*

Le corps résiduel de $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$ *pour* ν *est le corps* K*.*

Preuve. Considérons le sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ constitué des suites $(\alpha_n)_n$ de la forme

$$\alpha_n = \frac{n-a}{n_0}, \quad a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Le sous-système d'ensembles et d'applications $\{\mathcal{A}_{(\alpha_n)_n}, \Phi_{(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n}\}_{\mathcal{B}}$ est le même que celui qui nous a permis de définir, dans la partie 1, le corps $\mathrm{Puis}(K)$. D'où, par passage au quotient, l'extension $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)/\mathrm{Puis}(K)$.

Il est clair que pour tout $S \in \widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$, $\nu(S) = \infty \Leftrightarrow S = 0$. Soient maintenant S et T dans $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$; si l'on choisit pour représentant de S et T des séries $\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ et $\sum_{n\geq 0} v_{\beta_n} X^{\beta_n}$ telles que $u_{\alpha_0} \neq 0$ et $u_{\beta_0} \neq 0$, alors $\nu(ST) = \alpha_0 + \beta_0 = \nu(S) + \nu(T)$.

Si l'on choisit maintenant pour représentant de S et T des séries $\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ et $\sum_{n\geq 0} v_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, on a

$$\begin{aligned}\nu(S+T) &= \min(\alpha_n : u_{\alpha_n} + v_{\alpha_n} \neq 0)\\ &\geq \inf(\min(\alpha_n : u_{\alpha_n} \neq 0); \min(\alpha_n : v_{\alpha_n} \neq 0))\\ &= \inf(\nu(S), \nu(T)),\end{aligned}$$

ce qui assure que ν est une valuation réelle sur $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$. Il est clair que la restriction de ν à $\mathrm{Puis}(K)$ est bien la valuation usuelle.

Notons A_ν l'anneau de la valuation ν et M_ν l'idéal de la valuation. Les éléments de A_ν (resp. M_ν) admettent tous des représentants de la forme $\sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$ tels que $\alpha_0 = 0$ (resp. $\alpha_0 = 0$ et $u_{\alpha_0} = 0$). Remarquons qu'alors K se plonge dans A_ν/M_ν et que si $S = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \in A_\nu$ ($\alpha_0 = 0$), alors $S - x \in M_\nu$ avec $x = u_{\alpha_0} \in K$ et donc que $A_\nu/M_\nu = K$. ■

Théorème 2. *Le corps valué* $(\widetilde{\mathrm{Puis}}(K), \nu)$ *est complet ; c'est le complété de* $\mathrm{Puis}(K)$ *pour la valuation usuelle.*

Preuve. $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$ *est complet pour* ν. En effet, soit $(S_l)_l$ une suite de Cauchy dans $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$. Pour chaque $l \in \mathbb{N}$, on associe à S_l son représentant canonique $S_l = \sum_{n\geq 0} u_{l_n} X^{l_n}$. Soit $H \in \mathbb{Z}$; il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \geq h$, $\nu(S_l - S_h) \geq H$. Soit alors $n_H = \sup\{n \in \mathbb{N} : l_n \leq H$ et $h_n \leq H\}$; on a, pour tout $n = 0, \ldots, n_H$, $l_n = h_n$ et $u_{l_n} = u_{h_n}$. Comme $\lim_{H\to+\infty} n_H = +\infty$, on obtient alors une suite $(\alpha_n)_n \in \mathcal{A}$ et une suite

$(u_{\alpha_n})_n$ d'éléments de K telles que si $S = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, alors pour tout $l \geq h$, $\nu(S - S_l) \geq H$. Ainsi $(S_l)_l$ converge vers S.

Pour toute série $S = \sum_{n\geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n}$, il existe une suite de séries de Puiseux $(S_n)_n$ qui converge vers S. En effet, il suffit de considérer pour n donné la série (finie) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\alpha_k} X^{\alpha_k}$. Il est clair que (avec les notation de la partie 1)

$$S_n \in K_{\text{p.p.c.m. des dénominateurs des}\, \alpha_k} \subset \mathrm{Puis}(K).$$

La suite $(S_n)_n$ converge bien vers S, car $\nu(S - S_n) \geq \alpha_{n+1} \to +\infty$. ■

Rappelons (voir [Ami]) que si (C, ν) est un corps valué algébriquement clos, alors son complété $(\widetilde{C}, \nu)$ est algébriquement clos. Par ailleurs, si (K, ν) est un corps local alors il existe une unique valuation sur $\overline{K}$ qui prolonge ν. On en déduit donc que si (K, ν) est un corps valué et que ν est discrète, alors le plus petit corps complet et algébriquement clos (ce que nous appellerons "la fermeture" de K) est le corps $(\widetilde{\overline{\widetilde{K}}}, \nu)$ où ν est une valuation définie sans équivoque d'après ce qui précède.

Appliquons ces quelques remarques au corps $\overline{K}(X)$ où $\overline{K}$ désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On a alors $\widetilde{\overline{K}(X)} = \overline{K}((X))$ et (cf. [Ser]), $\overline{\overline{K}((X))} = \mathrm{Puis}(\overline{K})$. D'après l'étude menée précédemment, on en déduit que la fermeture de $\overline{K}(X)$ est le corps $\widetilde{\mathrm{Puis}}(\overline{K})$.

Remarque. Cette construction est analogue à celle des corps $\mathbb{C}_p$ (l'analogie identifiant le corps $K(X)$ au corps $\mathbb{Q}$). Bien évidemment, cette analogie, en termes arithmétiques, est moins saisissante que celle entre $\mathbb{F}_p(T)$ et $\mathbb{Q}$.

Quand K n'est pas algébriquement clos (mais reste de caractéristique 0), on ne peut pas conclure immédiatement car, dans ce cas, $\overline{K((X))}$ n'est pas un corps de séries de Puiseux (voir [Des] et le théorème suivant). On a pourtant :

Théorème 3. *Si K désigne un corps de caractéristique nulle, la fermeture de $K((X))$ est égale à* $\widetilde{\mathrm{Puis}}(\overline{K})$.

Preuve. On commence par établir le résultat suivant :

Lemme 9. *Soit K un corps de caractéristique* 0. *La clôture algébrique de $K((X))$ est le corps* $\bigcup_{L/K\, finie} \mathrm{Puis}(L)$.

Preuve. Le corps $\mathrm{Puis}(\overline{K})$ est algébriquement clos et contient $K((X))$. Soit alors $S = \sum_{k\geq k_0} a_k X^{k/n_0}$ une série de Puiseux algébrique sur $K((X))$. Supposons que le corps $L = K(a_k)_k$ soit de dimension infinie sur K. Soit I l'ensemble des K-isomorphismes de L. Comme K est de caractéristique nulle, L/K est séparable et par suite $\sharp I = +\infty$. Soit $\sigma \in I$; σ se relève en un $K((X))$-automorphisme de $\mathrm{Puis}(\overline{K})$ par action sur les coefficients des séries de Puiseux. Mais alors, si σ, τ sont deux éléments distincts de I remontés à $\mathrm{Puis}(\overline{K})$, on a $\sigma(S) \neq \tau(S)$ car la famille $(a_k)_k$ engendre L sur K. Ainsi S possède une infinité de conjugués, ce qui est absurde.

Réciproquement, si L/K est finie, alors $\mathrm{Puis}(L)/\mathrm{Puis}(K)$ est finie ; on a d'ailleurs $[\mathrm{Puis}(L) : \mathrm{Puis}(K)] = [L : K]$. Comme $\mathrm{Puis}(K)/K((X))$ est une extension algébrique, on en déduit que $\mathrm{Puis}(L)/K((X))$ en est une aussi. ■

Revenons à la preuve du théorème 3. On sait que $\widetilde{\mathrm{Puis}}(\overline{K})$ est un corps complet et algébriquement clos. Pour prouver le théorème, il suffit alors de montrer que $\widetilde{\mathrm{Puis}}(\overline{K})$ est contenu dans le complété du corps $\bigcup_{L/K \text{ finie}} \mathrm{Puis}(L)$.

Soit $S = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha_n} X^{\alpha_n} \in \widetilde{\mathrm{Puis}}(\overline{K})$; la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\alpha_k} X^{\alpha_k}$ vérifie bien $\lim_n S_n = S$ et, par ailleurs, $S_n \in \mathrm{Puis}(L)$ avec

$$L = K(u_{\alpha_0}, \ldots, u_{\alpha_n})$$

qui est un corps de dimension fini sur K. Ceci achève la preuve. ■

En paraphrasant N. Koblitz (cf. [Kob]) qui parlait des corps $\mathbb{C}_p$, nous conclurons en disant que $\widetilde{\mathrm{Puis}}(\overline{K})$ est *un merveilleux royaume où vit l'analyse* de $K((X))$.

Références

[Ami] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Presses Univ. France, 1975.

[Des] B. Deschamps, *Clôture totalement réelle des corps de nombres ordonnables*, Manuscripta Math. 100 (1999), 277–289.

[Kob] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions*, Springer, 1996.

[Ser] J. P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, 1968.

Equipe de théorie des nombres
Faculté des sciences et techniques
Université Jean Monnet
23 rue du docteur Paul Michelon
42023 Saint-Etienne, Cedex 2, France
E-mail: Bruno.Deschamps@univ-st-etienne.fr

Reçu le 6.12.1999
et révisé le 29.5.2000 (3721)