ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
94.3 (2008)

Une note à propos du jacobien de n fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$

par M. Hickel (Bordeaux)

Abstract. Let $f_1, \ldots, f_n$ be n germs of holomorphic functions at the origin of $\mathbb{C}^n$, such that $f_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq n$. We give a proof based on J. Lipman's theory of residues via Hochschild homology that the jacobian of $f_1, \ldots, f_n$ belongs to the ideal generated by $f_1, \ldots, f_n$ if and only if the dimension of the germ of common zeros of $f_1, \ldots, f_n$ is strictly positive. In fact, we prove much more general results which are relative versions of this result replacing the field $\mathbb{C}$ by convenient noetherian rings $\mathbf{A}$ (Ths. 3.1 and 3.3). We then show a Łojasiewicz inequality for the jacobian analogous to the classical one by S. Łojasiewicz for the gradient.

1. Introduction. Soit $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Il est classique que si $f_1, \ldots, f_n$ sont n éléments de $\mathcal{O}_n$, ayant un zéro isolé à l'origine de $\mathbb{C}^n$, alors leur jacobien $J(f_1, \ldots, f_n) = \det(\partial f_i/\partial z_j)$ n'appartient pas à l'idéal I de $\mathcal{O}_n$ engendré par $f_1, \ldots, f_n$. Motivé par un résultat de S. Spodzieja [S] prouvant un énoncé de E. Netto ([N, p. 142]) dans le cas de polynômes homogènes, on peut se demander, comme le faisait A. Płoski [P], si la réciproque de cette assertion est vraie. Dans [Hi] nous répondions par l'affirmative à cette question. Ce faisant, nous ne faisions que redécouvrir dans ce contexte un résultat du à W. V. Vasconcelos [W1] dans le cas polynomial. Nous présentons ici dans un premier temps une preuve très simple de ce résultat comme une conséquence de la théorie des résidus de J. Lipman [L], et qui vise à montrer l'efficacité de celle-ci (comparer avec les commentaires de nature historique de [W2, p. 268, « Scheja–Storch formula »] et [W3, p. 129, « Tate formula »]). En fait la théorie des résidus de J. Lipman via l'homologie de Hochschild nous permet de démontrer des versions relatives de ces résultats (cf. th. 3.1 et 3.3) et de remplacer le corps $\mathbb{C}$ par des anneaux noethériens $\mathbf{A}$ convenables. Si $f_1, \ldots, f_n$ ont un zéro isolé à l'origine, nous montrons dans un second temps

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 13A10; Secondary 13C10, 13J07.
Key words and phrases: jacobian, residues, socle of an artinian algebra, Łojasiewicz inequalities.

que, désignant par m le rang en 0 de la matrice jacobienne $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)$ on a : si $n-m \geq 3$, alors $J(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{I^\theta}$, où θ est un nombre rationnel strictement plus grand que 1 et que si $n-m=2$ on a $J(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{I}$ où $\overline{I^\theta}$ désigne la clôture intégrale des idéaux (cf. plus bas et [H-S], [L-T] pour des rappels concernant ces notions). On améliore ainsi un résultat de B. Teissier [T1] et on prouve une inégalité de Łojasiewicz pour le jacobien, analogue à celle du gradient [Lo], [B-M], [T2]. Tout d'abord l'anneau $\mathcal{O}_n$ étant local noethérien, son complété $\widehat{\mathcal{O}}_n = \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_n$ et donc pour tout idéal $I \subset \mathcal{O}_n$, on a $I\widehat{\mathcal{O}}_n \cap \mathcal{O}_n = I$. Le passage au complété ne changeant pas les dimensions, il suffira de travailler dans $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]$. On a alors :

Théorème 1.1. *Soit $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ l'anneau des séries formelles en n variables à coefficients dans un corps k de caractéristique zéro. Pour $f_1, \ldots, f_n \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ définissant un idéal propre, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(1) $\mathrm{Dim}\, k[[X]]/(f_1, \ldots, f_n) > 0$ (*où* Dim *désigne la dimension de Krull de l'anneau considéré*).
(2) *Le jacobien $J_X(f_1, \ldots, f_n)$ est dans l'idéal $(f_1, \ldots, f_n)k[[X]]$.*

De plus, si $\dim_k k[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_n) < \infty$ (*comme k-espace vectoriel*), *i.e.* $\mathrm{Dim}\, k[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_n) = 0$, *on a*

$$J_X(f_1, \ldots, f_n)(X_1, \ldots, X_n) \subset (f_1, \ldots, f_n).$$

Autrement dit, la classe de $J_X(f_1, \ldots, f_n)$ dans $k[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_n)$ est un générateur du socle de cette algèbre Artinienne.

La dernière assertion est aussi valide lorsque k est de caractéristique positive p, et p ne divise pas $\dim_k k[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_n)$. Cette assertion est due à S. Scheja et U. Storch [S-S]. L'implication (1)⇒(2) est due à W. V. Vasconcelos dans le cas des algèbres de polynômes [W1]. Nous présentons une preuve d'une version relative de toutes ces assertions via la théorie des résidus de J. Lipman [L] (cf. th. 3.1, th. 3.3 et cor. 3.5) remplaçant le corps k par des anneaux noethériens convenables. Nous rappelons à la section 2 quelques éléments concernant cette théorie et prouvons les résultats à la section 3.

Nous prouvons ensuite le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Soient k un corps de caractéristique* 0 *et $f_1, \ldots, f_n \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ tels que $f_i(0) = 0$ et que l'idéal $I = (f_1, \ldots, f_n)$ est $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$-primaire (ainsi $J_X(f) \notin I$). Désignons par m le rang en* 0 *de la matrice jacobienne $\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(0)$.*

(1) *Si* $n-m=2$, *on a* $J_X(f_1,\dots,f_n)\in\overline{I}$.
(2) *Si* $n-m\geq 3$, *il existe un nombre rationnel* $\theta=p/q>1$ *tel que* $J_X(f_1,\dots,f_n)\in\overline{I^\theta}$ *où encore* $J_X(f_1,\dots,f_n)^q\in\overline{I^p}$.
(3) *Si* k *est muni d'une valeur absolue non triviale* $|\ |:k\to[0,\infty[$ *et si les* f_i *sont des germes de séries convergentes alors :*

- *Dans le cas* (1), *il existe* $C>0$ *tel que*

$$\|x\|\leq r\ \Rightarrow\ |J_X(f_1,\dots,f_n)(x)|\leq C\Big(\sum_{i=1}^n|f_i(x)|\Big).$$

- *Dans le cas* (2), *il existe* $C>0$ *tel que*

$$\|x\|\leq r\ \Rightarrow\ |J_X(f_1,\dots,f_n)(x)|\leq C\Big(\sum_{i=1}^n|f_i(x)|\Big)^\theta,$$

où $\theta>1$ *est un rationnel.*

Bien entendu, il n'y a pas de résultats similaires lorsque $n-m=1$, car on est alors ramené au cas où $n=1$. La conclusion de (2) n'est pas valide en général dans le cas $n-m=2$, comme nous le verrons par des exemples. Nous rappelons quelques éléments concernant la clôture intégrale des idéaux à la section 4 et y prouvons le résultat ci-dessus.

2. Quelques rappels sur la théorie des résidus de J. Lipman. On rappelle ici quelques définitions et résultats de [L, §3] ; pour d'autres précisions et applications nous renvoyons le lecteur à [L], [BO], [B-H1], [B-H2]. Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative et unitaire de morphisme structural $h:\mathbf{A}\to\mathbf{R}$. Soit $f=(f_1,\dots,f_n)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, I l'idéal qu'elle engendre, et $\widehat{\mathbf{R}}$ le complété I-adique de $\mathbf{R}$.

Rappelons que f est dite *quasi-régulière* si $f\mathbf{R}=I\mathbf{R}\neq\mathbf{R}$ et si le $\mathbf{R}/I$-homomorphisme $(\mathbf{R}/I)[X_1,\dots,X_n]\to\mathrm{gr}_I(\mathbf{R})=\bigoplus_{m\geq 0}I^m/I^{m+1}$ qui à un polynôme homogène $P_m(X_1,\dots,X_n)$ de degré m fait correspondre la classe de $P_m(f_1,\dots,f_n)$ dans I^m/I^{m+1} est un isomorphisme. On suppose que $\mathbf{P}=\mathbf{R}/I\simeq\widehat{\mathbf{R}}/f\widehat{\mathbf{R}}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et l'on note $\sigma:\mathbf{R}/I\to\widehat{\mathbf{R}}$ une section $\mathbf{A}$-linéaire de la projection canonique $\widehat{\mathbf{R}}\to\widehat{\mathbf{R}}/I\widehat{\mathbf{R}}$. Tout élément r de $\widehat{\mathbf{R}}$ admet une écriture unique de la forme

$$r=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sigma(r_\alpha)f^\alpha\quad\text{ avec } r_\alpha\in\mathbf{P}.$$

Par conséquent, il existe des uniques $\gamma_\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P}):=\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})$ tels que

$$\forall p\in\mathbf{P},\qquad r\sigma(p)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sigma(\gamma_\alpha(p))f^\alpha.$$

On définit l'élément $r^\sharp \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})[[f]]$ par

$$r^\sharp = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha f^\alpha.$$

Soit ε_i le n-uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1. On considère l'élément suivant de $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})[[f]]$:

$$\frac{\partial}{\partial f_i}(r^\sharp) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} \alpha_i\gamma_\alpha f^{\alpha-\varepsilon_i}.$$

$\mathbf{P}$ étant un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, on dispose d'un opérateur trace canonique $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}),\mathbf{A})$ qui à tout élément de $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})$ fait correspondre sa trace (cf. [B1, chap. II, §4, p. 78–79]). On a alors :

Théorème 2.1 ([L, §3, corollaire 3.7]). *Soient $f = (f_1,\dots,f_n)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et $\omega = r dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n \in \bigwedge^n \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, où $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ est le $\mathbf{R}$-module des différentielles de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{R}$. Pour tout multi-indice $(m_1,\dots,m_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, posant*

$$r^\sharp \det\left(\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^\sharp)\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \delta_\alpha f^\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})[[f]],$$

on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} r dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n \\ f_1^{m_1},\dots,f_n^{m_n}\end{bmatrix} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\delta_{m_1-1,\dots,m_n-1}).$$

Ce théorème peut servir de définition, dans le cas considéré, pour le symbole résidu $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ de J. Lipman.

Corollaire 2.2 ([L, corollaire 3.8, p. 51]). *Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$, $f=(f_1,\dots,f_n)$, I et $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ comme ci-dessus. Alors pour tout $r\in\mathbf{R}$,*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} r df_1\wedge\ldots\wedge df_n \\ f_1,\dots,f_n\end{bmatrix} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(p_r),$$

où p_r est l'opérateur de multiplication par r dans $\mathbf{P}\to\mathbf{P}$, $p\mapsto \overline{r}p$.

$\mathbf{A}$ étant un anneau commutatif unitaire noethérien, considérons la situation particulière où $\mathbf{R} = \mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$ ou bien $\mathbf{A}[[X_1,\dots,X_n]]$ ou encore le localisé en un idéal premier d'un tel anneau. Désignons toujours par f une suite quasi-régulière telle que $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On a alors :

Corollaire 2.3 (cf. [BO, Chap. 1, prop. 2.2.2 p. 21, prop. 2.3.1, p. 29, prop. 4.1.2, p. 48]). *$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$ est un $\mathbf{P}$-module libre de rang 1 dont un* *générateur est l'homomorphisme résidu :*

$$r \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix}.$$

En particulier, on a la propriété de non dégénérescence suivante :

$$r \in I = (f_1, \ldots, f_n) \;\Leftrightarrow\; \forall h \in \mathbf{R},\, \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} rh dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix} = 0.$$

3. Versions relatives de 1.1. Nous pouvons à présent énoncer le résultat suivant qui est une version relative de (2)⇒(1) et de la dernière assertion de 1.1.

Théorème 3.1. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif noethérien intègre de caractéristique* $p \geq 0$. *Désignons par* $\mathbf{R}$ *l'anneau* $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ *ou* $\mathbf{A}[[X_1, \ldots, X_n]]$, *ou bien le localisé en un idéal premier d'un de ces deux anneaux. Soit* $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbf{R}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{R}$ *telle que* $I = (f_1, \ldots, f_n)\mathbf{R} \neq \mathbf{R}$. *On suppose que :*

(a) f *est quasi-régulière.*
(b) $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ *est un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini dont on note* r *le rang.*

Alors notant par $J_X(f_1, \ldots, f_n) = \det(\partial f_i/\partial X_j)$ *le jacobien de* $(f_1, \ldots, f_n)$ *on a :*

(1) $J_X(f_1, \ldots, f_n)\sqrt{I} \subset I$.
(2) *Si* r *est premier à* p (*en particulier si* $p = 0$) *alors* $J_X(f_1, \ldots, f_n) \notin I$.

Les conclusions (1) *et* (2) *sont aussi satisfaites sous les hypothèses alternatives suivantes.* $\mathbf{A}$ *est un anneau local noethérien d'égale caractéristique* p, *de dimension* 0 (*non nécessairement intègre*), (a) *est satisfaite et* (b) *est remplacée par :*

(b′) $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ *est un* $\mathbf{A}$*-module libre de type fini et la longueur du* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P}$ (*qui est nécessairement finie*) *est première à* p.

Avant de prouver le théorème notons que dans le cas particulier où $\mathbf{A}$ est un corps k infini les hypothèses (a) et (b) se réduisent à $\dim_k k[X_1, \ldots, X_n]/I < \infty$ ou $\dim_k k[[X_1, \ldots, X_n]]/I < \infty$. En effet, cette seule condition garantit la quasi-régularité de la suite $f = (f_1, \ldots, f_n)$ (cf. [Bo, appendice, prop. 3.1 et cor. 1.9]). Ceci équivaut au fait que $\mathrm{Dim}\, k[X_1, \ldots, X_n]/I = 0$ ou $\mathrm{Dim}\, k[[X_1, \ldots, X_n]]/I = 0$ et l'on retrouve les résultats de 1.1 annoncés.

Preuve du théorème 3.1. Soit $\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})$. Puisque $\mathbf{P}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, on peut trouver un entier n et un morphisme surjectif $u : \mathbf{A}^n \to \mathbf{P}$. Puisque $\mathbf{P}$ est projectif, on peut trouver un morphisme v :

$\mathbf{P} \to \mathbf{A}^n$ tel que v soit une section de u, c'est-à-dire $u \circ v = \mathrm{id}_{\mathbf{P}}$. Considérons l'endomorphisme $l_\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n)$ défini par

$$l_\sigma = v \circ \sigma \circ u.$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Soient $\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})$ et $l_\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n)$ comme ci-dessus.*

(1) *Si σ est nilpotent, l_σ est nilpotent.*
(2) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\sigma) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^n/\mathbf{A}}(l_\sigma)$.
(3) *Si σ est nilpotent*, $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\sigma) = 0$.

Preuve. (1) Supposons $\sigma^m = 0$ pour un entier m. Alors $l_\sigma^m = (v \circ \sigma \circ u) \circ \cdots \circ (v \circ \sigma \circ u)$. Comme $u \circ v = \mathrm{id}_{\mathbf{P}}$, on a $l_\sigma^m = v \circ \sigma^m \circ u$, d'où $l_\sigma^m = 0$, puisque $\sigma^m = 0$.

(2) Notons $\mathbf{P}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$. D'après [B1] et l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{P}^* \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P} \to \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P})$$

on peut trouver des $x_i^* \in \mathbf{P}^*$ et $y_i \in \mathbf{P}$ tels que pour tout $x \in \mathbf{P}$,

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, x_i^* \rangle y_i.$$

On a ainsi $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\sigma) = \sum_{i=1}^m \langle y_i, x_i^* \rangle$ ([B1, chap. II, §4, p. 78–79). Soit $(e_i)_{1 \le i \le n}$ la base canonique de $\mathbf{A}^n$. Posons

$$a_i = u(e_i), \qquad \sigma(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \langle a_i, x_j^* \rangle y_j, \qquad v(y_j) = \sum_{k=1}^{n} v_{j,k} e_k.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} l_\sigma(e_i) = v(\sigma(a_i)) &= \sum_{j=1}^{m} \langle a_i, x_j^* \rangle v(y_j) = \sum_{j=1}^{m} \langle a_i, x_j^* \rangle \Big(\sum_{k=1}^{n} v_{j,k} e_k \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} \langle a_i, x_j^* \rangle v_{j,k} \Big) e_k. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^n/\mathbf{A}}(l_\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} \langle a_i, x_j^* \rangle v_{j,i} \Big) = \sum_{j=1}^{m} \Big\langle \sum_{i=1}^{n} v_{j,i} a_i, x_j^* \Big\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Big\langle \sum_{i=1}^{n} v_{j,i} u(e_i), x_j^* \Big\rangle = \sum_{j=1}^{m} \Big\langle u\Big(\sum_{i=1}^{n} v_{j,i} e_i \Big), x_j^* \Big\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \langle u \circ v(y_j), x_j^* \rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle y_j, x_j^* \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\sigma). \end{aligned}$$

(3) Soient $K = \mathrm{frac}(A)$ et $l'_\sigma : K^n \to K^n$ obtenu à partir de l_σ par extension des scalaires. Notons $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $\overline{l}_\sigma$ l'extension à $\overline{K}^n$ de l'_σ. Comme σ est nilpotent, l_σ est nilpotent par (1), et donc l'_σ et $\overline{l}_\sigma$ sont nilpotents. Maintenant $\overline{l}_\sigma : \overline{K}^n \to \overline{K}^n$ étant une application linéaire nilpotente, toutes ses valeurs propres sont nulles et l'existence de la réduction des matrices carrées à coefficients dans $\overline{K}$ nous assure que $\mathrm{Tr}_{\overline{K}^n/\overline{K}}(\overline{l}_\sigma) = 0$. Mais d'après (2), $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(\sigma) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^n/\mathbf{A}}(l_\sigma) = \mathrm{Tr}_{\overline{K}^n/\overline{K}}(\overline{l}_\sigma) = 0$. ∎

Nous pouvons à présent prouver 3.1. Concernant la première affirmation, soit $k \in \sqrt{I}$. Il s'agit de voir que $J_X(f)k \in I$. Pour cela, il est équivalent par 2.3 de prouver que pour tout $h \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} kJ_X(f)hdX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix} = 0.$$

Or

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} kJ_X(f)hdX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} khdf_1 \wedge \cdots \wedge df_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix}.$$

Donc en vertu de 2.2 ce dernier résidu n'est autre que la trace de l'opérateur p_{hk} de multiplication par hk dans $\mathbf{P}$. Comme $k \in \sqrt{I}$, on a $kh \in \sqrt{I}$ et donc p_{kh} est un opérateur nilpotent. Le lemme 3.2 nous assure que sa trace est nulle et nous permet donc de conclure à la première affirmation de 3.1.

Concernant la seconde assertion, supposons que $J_X(f_1, \ldots, f_n) \in I$. Alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{A}$, désignant toujours par $J_X(f)$ la classe de $J_X(f)$ dans le localisé $\mathbf{R}_\mathfrak{m}$ de $\mathbf{R}$ en $\mathfrak{m}$, on aurait $J_X(f) \in I_\mathfrak{m}$. On aurait ainsi

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}_\mathfrak{m}/\mathbf{A}_\mathfrak{m}} \begin{bmatrix} J_X(f)dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}_\mathfrak{m}/\mathbf{A}_\mathfrak{m}} \begin{bmatrix} df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix} = 0.$$

D'après 2.2 ce dernier résidu n'est autre que la trace de l'opérateur identité de $\mathbf{P}_\mathfrak{m}$. Comme $\mathbf{P}_\mathfrak{m}$ est un $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$-module libre de rang r (cf. [B2, II, §5, p. 141]), ce résidu vaut donc r. Il ne peut donc être nul que si la caractéristique de $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$, c'est-à-dire celle de $\mathbf{A}$, divise r.

Nous indiquons maintenant comment modifier la preuve ci-dessus dans les hypothèses alternatives. La seule chose qui soit modifiée est le fait que l'on utilise des arguments différents pour faire les calculs de trace. Soient $\widehat{\mathbf{A}}$ et $\widehat{\mathbf{P}}$ les complétés $\mathfrak{m}_\mathbf{A}$-adiques de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{P}$. Comme $\mathbf{P}$ est supposé être un $\mathbf{A}$-module libre, $\widehat{\mathbf{P}}$ est un $\widehat{\mathbf{A}}$-module libre (car le morphisme $\mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}$ est fidèlement plat). Si g est un élément de $\mathbf{P}$, la matrice de l'opérateur p_g de multiplication par g comme élément de $\mathrm{End}_\mathbf{A}(\mathbf{P})$ est la même que celle de l'opérateur de multiplication $\widehat{p}_g$ comme élément de $\mathrm{End}_{\widehat{\mathbf{A}}}(\widehat{\mathbf{P}})$. Il suffit pour le voir de considérer un isomorphisme d'un $\mathbf{A}^m$ sur $\mathbf{P}$ et de tensoriser par $\widehat{\mathbf{A}}$.

Ainsi

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(p_g) = \mathrm{Tr}_{\widehat{\mathbf{P}}/\widehat{\mathbf{A}}}(\widehat{p}_g).$$

Ensuite notons $K = \mathbf{A}/\mathfrak{m}_{\mathbf{A}}$. Le théorème de structure des anneaux locaux complets d'égale caractéristique de I. Cohen nous dit que $\widehat{\mathbf{A}}$ est isomorphe à $K[[Y]]/J$, où J est un idéal (Y)-primaire puisque $\mathbf{A}$ et donc $\widehat{\mathbf{A}}$ sont de dimension 0. Ainsi $\widehat{\mathbf{P}}$ est une K-algèbre et un K-espace vectoriel de dimension finie, dimension qui n'est autre que la longueur du A-module Artinien $\mathbf{P}$. Maintenant on a (cf. [B1, chap. III, §9, p. 110, (21)])

$$\mathrm{Tr}_{\widehat{\mathbf{P}}/\widehat{\mathbf{A}}}(\widehat{p}_g) = \mathrm{Tr}_{\widehat{\mathbf{P}}/K}(\widehat{p}_g).$$

Dans le cas où p_g est nilpotente, cette trace est donc nulle, puisque $\widehat{p}_g$ est un endomorphisme nilpotent sur un K-espace vectoriel de dimension finie. Et si $g = 1$, cette trace est la classe dans K, de la longueur qui intervient dans l'ènoncé ou encore celle de $\dim_K \widehat{\mathbf{P}}$. Cette classe est non nulle puisque par hypothèse ce nombre est premier à la caractéristique de K. Ceci permet de conclure comme plus haut aux assertions (1) et (2) de 3.1. ■

Nous allons maintenant énoncer une version relative de (1)⇒(2) dans 1.1. Pour la notion d'anneau de Gorenstein nous renvoyons à [E, chap. 21, p. 525] ou [B3, §3, p. 48].

THÉORÈME 3.3. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau local de Gorenstein, Artinien d'égale caractéristique zéro. Posons* $\mathbf{R} = \mathbf{A}[[X_1, \ldots, X_n]]$ *et soient* $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{R}$ *tels que* $(f_1, \ldots, f_n)\mathbf{R} = I\mathbf{R} \neq \mathbf{R}$. *Si* $\mathbf{R}/I$ *n'est pas Artinien alors*

$$J_X(f_1, \ldots, f_n) \in I.$$

Preuve. Remarquons d'abord que $\mathbf{A}$ étant de Gorenstein, il est de Cohen–Macaulay. Il en est de même de $\mathbf{R}$ qui est de Gorenstein et de Cohen–Macaulay. Comme la dimension de Krull de $\mathbf{R}$ est n, il s'ensuit que toute suite $(g_1, \ldots, g_n)$ qui engendre un idéal $\mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$-primaire est régulière, donc quasi-régulière puisque l'on travaille ici dans un cadre local. Par ailleurs $\mathbf{R}/(g_1, \ldots, g_n)\mathbf{R}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de type fini. En effet, $\mathbf{A}$ étant local Artinien, il est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}_{\mathbf{A}}$-adique. Par le théorème de structure de I. Cohen des anneaux locaux complets d'égale caractéristique on a $\mathbf{A} \simeq k[[Y]]/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{m}_{\mathbf{A}}$-primaire, $k \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{m}_{\mathbf{A}}$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)$. Notons $g_1(Y, X), \ldots, g_n(Y, X)$ des éléments de $k[[Y, X]]$ représentant les $g_i \in \mathbf{R} \simeq k[[Y, X]]/\mathfrak{a}$. Puisque $\mathbf{R}/(\mathfrak{m}_{\mathbf{A}}, g_1, \ldots, g_n)\mathbf{R}$ est Artinien, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} \frac{k[[X]]}{(g_1(0, X), \ldots, g_n(0, X))} &\simeq \frac{k[[Y, X]]}{(Y, g_1(Y, X), \ldots, g_n(Y, X))} \\ &\simeq \frac{\mathbf{R}}{(\mathfrak{m}_{\mathbf{A}}, g_1, \ldots, g_n)} \end{aligned}$$

est un k-espace vectoriel de dimension finie. Il en découle que $g_1(0,X),\dots,$ $g_n(0,X)$ est une suite régulière de $k[[X]] \simeq \mathbf{R}/\mathfrak{m}_{\mathbf{A}}\mathbf{R}$. Par conséquent, puisque $\mathbf{R}$ est $\mathbf{A}$-plat, le critère local de platitude (cf. [M, th. 22.5 et cor. p. 176–177]) nous assure que $\mathbf{R}/(g_1,\dots,g_n)\mathbf{R}$ est un $\mathbf{A}$-module (de type fini) plat. Puisque $\mathbf{A}$ est local, $\mathbf{R}/(g_1,\dots,g_n)\mathbf{R}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de type fini. On pourra donc appliquer 3.1 à de telles suites $(g_1,\dots,g_n)$.

Soit $(f) = (f_1,\dots,f_n)$ satisfaisant les hypothèses du théorème. Notons d'abord que le résultat est trivial si le nombre minimal de générateurs de I est strictement plus petit que n. En effet, dans cette éventualité, si $u_1,\dots,u_k$, $k < n$, est un système de générateurs de I, on a

$$f_i = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}u_j, \qquad d_X f_i = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} d_X u_j \pmod{I}, \qquad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

Ainsi $J_X(f) = 0 \pmod{I}$. On peut donc supposer sans restriction que le nombre minimal de générateurs de I est n. Notons $\mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$ l'idéal maximal de $\mathbf{R}$. Par le théorème d'intersection de Krull, on a

$$I = \bigcap_{a\in\mathbb{N}} (I + \mathfrak{m}_{\mathbf{R}}^a).$$

Il suffit donc de démontrer que $J_X(f) \in I_a := I + \mathfrak{m}_{\mathbf{R}}^a$ pour a assez grand. Fixons a et soient n_a le nombre minimal de générateurs de I_a et $g_1,\dots,g_{n_a}$ un système minimal de générateurs de I_a. Comme $\mathrm{Dim}(\mathbf{R}) = n$, les résultats de Northcott–Rees [N-R] sur la réduction des idéaux nous assurent que quitte à remplacer les g_i par n_a combinaisons linéaires des g_i à coefficients dans $\mathbb{Q}$ suffisamment généraux, on peut supposer que toute sous-famille $g_{i_1},\dots,g_{i_n}$ est telle que l'idéal $(g_{i_1},\dots,g_{i_n})$ est $\mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$-primaire. Deux éventualités peuvent se présenter.

- Soit $n_a > n$. Alors

$$f_i = \sum_{j=1}^{n_a} a_{i,j} g_j, \quad \text{donc} \quad d_X f_i = \sum_{j=1}^{n_a} a_{i,j} d_X g_j \pmod{I_a}.$$

Ainsi

$$J_X(f) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_n} A_{(i_1,\dots,i_n)} J_X(g_{i_1},\dots,g_{i_n}) \pmod{I_a}, \qquad A_{(i_1,\dots,i_n)} \in \mathbf{R}.$$

Il suffit donc de voir que chaque $J_X(g_{i_1},\dots,g_{i_n})$ est dans I_a. Soient $\underline{i} = (i_1,\dots,i_n)$ un tel multi-indice et $\mathbf{P}_{\underline{i}} = \mathbf{R}/(g_{i_1},\dots,g_{i_n})$. Notons $S_{\underline{i}}$ le socle de $\mathbf{P}_{\underline{i}}$, i.e. $S_{\underline{i}} = \{x \in \mathbf{P}_{\underline{i}} \mid \mathfrak{m}_{\underline{i}} x = 0\}$ où $\mathfrak{m}_{\underline{i}}$ est l'idéal maximal de $\mathbf{P}_{\underline{i}}$. D'après 3.1, $\overline{J}_X(g_{i_1},\dots,g_{i_n}) \in S_{\underline{i}}$ (car $g_{i_1},\dots,g_{i_n}$ est une suite régulière de $\mathbf{R}$). Maintenant on a les inclusions strictes

$$0 \subset I_a \mathbf{P}_{\underline{i}} \subset \mathbf{P}_{\underline{i}}.$$

$\mathbf{P}_{\underline{i}}$ étant Artinien, tout sous-module non trivial de $\mathbf{P}_{\underline{i}}$ contient un sous-module simple. Un sous-module simple est par le lemme de Nakayama inclus dans le socle de $\mathbf{P}_{\underline{i}}$. Maintenant, $\mathbf{R}$ étant de Gorenstein et $g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}$ une suite régulière de $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}_{\underline{i}}$ est de Gorenstein (cf. [B3, exemple 2, p. 48]) et donc son socle est simple, et c'est le seul sous-module simple de $\mathbf{P}_{\underline{i}}$. On a donc

$$\bar{J}_X(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}) \in S_{\underline{i}} \subset I_a \mathbf{P}_{\underline{i}},$$

ce que nous souhaitions.

• Soit $n_a = n$. Puisque I_a est $\mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$-primaire et $\mathbf{R}/I$ n'est pas Artinien, on a une inclusion stricte $I \subset I_a$. Par conséquent, il existe des $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ tels que

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} g_j.$$

On a nécessairement $\det(a_{i,j}) \in \mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$, sans quoi $I = I_a$. Maintenant on a

$$J_X(f) = \det(a_{i,j}) J_X(g) \pmod{I_a}.$$

On conclut alors par 3.1 puisque la suite $g_1, \ldots, g_n$ est régulière et $\det(a_{i,j}) \in \sqrt{(g_1, \ldots, g_n)} = \mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$. ∎

Exemple 3.4. (1) Si $\mathbf{A} = k$ est un corps de caractéristique zéro, on retrouve l'implication (1)⇒(2) du théorème 1.1.

(2) Soit toujours k un corps de caractéristique zéro. On peut prendre $\mathbf{A} = k[[Y_1, \ldots, Y_p]]/(h_1, \ldots, h_p)$ où $(h_1, \ldots, h_p)$ engendre un idéal (Y)-primaire. Si k est muni d'une valeur absolue non triviale, on peut prendre de la même façon $\mathbf{A} = \mathcal{O}_p/(h_1, \ldots, h_p)$ où $\mathcal{O}_p$ désigne l'anneau des germes de séries covergentes en p variables et $(h_1, \ldots, h_p)$ est un idéal primaire pour l'idéal maximal de $\mathcal{O}_p$.

(3) Considérons toujours $S = k[[Y_1, \ldots, Y_p]]$ ou sa version convergente $\mathcal{O}_p$ dans le cas où k est muni d'une valeur absolue non triviale. Soit Δ un opérateur différentiel à coefficients constants,

$$\Delta = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p,\, |\alpha| \le m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial Y^\alpha}.$$

Alors Δ définit un morphisme $\Delta_0 \in \mathrm{Hom}_k(S, k)$ en posant $\Delta_0(f) = \Delta(f)(0)$. Soit J l'annulateur de Δ_0, i.e.

$$J = \{a \in S \mid \forall f \in S,\ \Delta_0(af) = 0\}.$$

Alors J est un idéal primaire et $\mathbf{A} = S/J$ est un anneau de Gorenstein Artinien d'égale caractéristique zéro et le résultat s'applique. Prenant par exemple le « Laplacien » $\Delta = \sum_{i=1}^{p} \partial^2/\partial Y_i^2$, on obtient un anneau de Gorenstein qui n'est pas intersection complète et qui n'est pas du type de l'exemple (2).

Corollaire 3.5. *Soient* $\mathbf{A}$ *un anneau local de Gorenstein de dimension* 0 *d'égale caractéristique zéro*, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[[X_1, \ldots, X_n]]$ *et* $f_1, \ldots, f_n$ *des éléments* *de* $\mathbf{R}$ *tels que l'idéal* I *engendré par* $f_1, \ldots, f_n$ *soit un idéal propre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(1) $\mathrm{Dim}(\mathbf{R}/I) > 0$,

(2) $J_X(f_1, \ldots, f_n) \in I$.

Preuve. On vient de prouver (1)⇒(2). (2)⇒(1) ou de manière équivalente non (1) ⇒ non (2) découle de 3.1. Puisque $\mathbf{R}$ est de dimension n et de Cohen–Macaulay, si $(f_1, \ldots, f_n)$ ne satisfont pas (1) alors I est primaire pour l'idéal maximal de $\mathbf{R}$ et donc la suite $(f_1, \ldots, f_n)$ est régulière. On est donc dans les conditions alternatives de 3.1, comme nous l'avons mentionné plus haut. ∎

Remarque 3.6. Même dans le cas le plus simple, $\mathbf{A} = \mathbb{C}$ et $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$ ou $\mathbb{C}[[X]]$, le résultat n'est pas immédiat à prouver par des techniques purement analytiques. Nous renvoyons à [B-Y] pour de telles tentatives.

4. Preuve de 1.2 et corollaire. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons d'abord ici quelques notions essentielles pour lesquelles nos sources sont [H-I-O], [H-S], [L-T], [N-R], [R] et nous renvoyons à ces références pour de plus amples précisions. Nous donnons ensuite une preuve du critère métrique de dépendance intégrale de [L-T] qui n'utilise pas la désingularisation et permet son extension en caractéristique arbitraire ou au contexte de tout corps muni d'une valeur absolue non triviale. De même, nous prouvons que dans le contexte des anneaux locaux d'égale caractéristique le critère valuatif de dépendance intégrale peut être vérifié avec des arcs. Nous démontrons ensuite le théorème 1.2.

Proposition et Définition 4.1. *Soient* $\mathbf{R}$ *un anneau commutatif unitaire et noethérien, et* I *un idéal de* $\mathbf{R}$.

(1) *Un élément* $x \in \mathbf{R}$ *est dit* entier *sur* I *si et seulement si il satisfait une relation*

$$x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \quad \text{avec } a_i \in I^i,\ 1 \le i \le k.$$

L'ensemble de tous les éléments entiers sur I *est un idéal* $\overline{I}$ *de* $\mathbf{R}$, *appelé* clôture intégrale *de* I.

(2) *Soit* $\theta = p/q$ *un nombre rationnel positif. On dit qu'un élément* $x \in \mathbf{R}$ *est dans* $\overline{I^\theta}$ *si et seulement si* x *satisfait une relation*

$$x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \quad \text{avec } \mathrm{ord}_I(a_i)/i \ge \theta,\ 1 \le i \le k,$$

où $\mathrm{ord}_I(f) = \sup\{k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \mid f \in I^k\}$. *Il revient au même de dire que* $f^q \in \overline{I^p}$. *On remarquera que* $\overline{I^\theta}$ *est un idéal de* $\mathbf{R}$.

Lemme 4.2. *Soient* $\mathbf{R}$ *et* I *comme ci-dessus.*

(1) *Pour toute partie multiplicativement fermée* $S \subset \mathbf{R}$, $\bar{I}\mathbf{R}_S = \overline{I\mathbf{R}_S}$.

(2) *Si* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ *est un morphisme fidèlement plat d'anneaux noethériens alors*

$$\overline{I\mathbf{R}'} \cap \mathbf{R} = \overline{I}.$$

L'appartenance d'un élément f à $\overline{I}$ se vérifie souvent à l'aide du critère valuatif de dépendance intégrale.

Théorème 4.3 (Critère valuatif de dépendance intégrale [H-I-O], [H-S], [R]). *Soient* $\mathbf{R}$ *un anneau noethérien*, $I \subset \mathbf{R}$ *un idéal*, *et* $f \in \mathbf{R}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(1) $f \in \overline{I}$.

(2) *Pour toute valuation discrète* v: $\mathbf{R} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *on a*

$$v(f) \geq v(I) := \min_{x \in I} v(x).$$

De plus, *si* I *n'est contenu dans aucun des idéaux premiers minimaux de* $\mathbf{R}$, *il existe un ensemble fini de valuations discrètes* v_l, $l \in \Lambda$, *de rang* 1, *unique à l'équivalence près des valuations et minimal pour la propriété* : $f \in \overline{I}$ *si et seulement si* $v_l(f) \geq v_l(I)$ *pour tout* $l \in \Lambda$. *Cet ensemble de valuations est appelé l'*ensemble des valuations de Rees *de* I. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *les ensemble des valuations de Rees de* I *et de* I^k *coïncident* (*cf.* [H-S, chap. 10]). *De plus*, *pour tout* $\theta \in \mathbb{Q}_{>0}$ *et* $f \in \mathbf{R}$, *on a* $f \in \overline{I^\theta}$ *si et seulement si*

$$v_l(f) \geq \theta v_l(I), \qquad \forall l \in \Lambda.$$

Les valuations de Rees peuvent être construites par le procédé suivant (cf. [H-S, chap. 10, Ex. 10.6, p. 208]). C'est une « version faisceautisée » de cette construction qui est adoptée dans [L-T] dans le cadre de la géométrie analytique complexe.

Notons $\Pi' : X' \to \operatorname{Spec}(\mathbf{R})$ l'éclatement normalisé de centre I. C'est-à-dire, Π' est le composé de l'éclatement de centre I, $\Pi : X \to \operatorname{Spec}(\mathbf{R})$, $X = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{m \geq 0} I^m)$, et du morphisme de normalisation $N : X' \to X$. Posons $Z = \operatorname{Spec}(\mathbf{R}/I)$ et soit $Y' = \Pi'^{-1}(Z)$. Considérons la décomposition en composantes irréductibles de Y'_{red},

$$Y'_{\mathrm{red}} = \bigcup_{l \in \Lambda} Y'_l.$$

Puisque X' est normal, il est régulier en codimension 1. Chaque Y'_l étant irréductible de codimension 1, si on note $\mathcal{O}_{X',Y'_l}$ la fibre du faisceau structural $\mathcal{O}_{X'}$ de X' au point correspondant à l'idéal premier définissant Y'_l, chaque anneau $\mathcal{O}_{X',Y'_l}$ est un anneau régulier de dimension 1, donc un anneau de valuation discrète dont on note v_l la valuation. Pour tout $a \in \mathcal{O}_{X',Y'_l}$ on a

$$v_l(a) = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X',Y'_l}/a\mathcal{O}_{X',Y'_l})$$

où “long” désigne la longueur, ou bien encore $v_l(a) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a \in \mathfrak{m}^k_{X',Y'_l}\}$, où $\mathfrak{m}_{X',Y'_l}$ est l'idéal maximal (principal) de $\mathcal{O}_{X',Y'_l}$. On fait alors agir les v_l sur $\mathbf{R}$ via le morphisme $\Pi'^\sharp\colon \mathbf{R} \to \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_{X',Y'_l}$. On a ainsi une construction des valuations de Rees. Pour plus d'informations et une présentation dans le vocabulaire de l'algèbre de Rees nous renvoyons à [H-S, chap. 10].

Proposition et Définition 4.4 (Fonction asymptotique de Samuel [H-S], [S], [L-T]). *Soient* $\mathbf{R}$ *et* I *comme précédemment. On appelle* fonction asymptotique de Samuel *de* I *et on note* $\overline{v}_I$ *la fonction*

$$\overline{v}_I(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{\operatorname{ord}_I(x^m)}{m} = \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{\operatorname{ord}_I(x^m)}{m}$$

qui est à valeurs dans $\mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}$. *On a*

$$\overline{v}_I(x) = \min\left\{ \frac{v_l(x)}{v_l(I)} \;\middle|\; v_l \text{ une valuation de Rees de } I \right\}.$$

Ainsi $x \in \overline{I}$ *si et seulement si* $\overline{v}_I(x) \geq 1$. *De façon plus générale, si* $\theta \in \mathbb{Q}_{>0}$, *on a* $x \in \overline{I^\theta}$ *si et seulement si* $\overline{v}_I(x) \geq \theta$.

Dans [L-T], M. Lejeune et B. Teissier ont étudié la notion de clôture intégrale des idéaux en relation avec certaines inégalités de Łojasiewicz dans le cadre de la géométrie analytique complexe. Leurs preuves utilisent l'existence de désingularisation et des propriétés topologiques de $\mathbb{C}$. Au moins deux faits importants ressortent de [L-T]. Le premier est le critère métrique de dépendance intégrale qui permet de relier la fonction asymptotique de Samuel et certains exposants de Łojasiewicz ; le second est que l'on puisse vérifier le critère valuatif uniquement à l'aide d'arcs. Nous indiquons ici comment leurs résultats se généralisent en caractéristique arbitraire et pour des corps algébriquement clos arbitraires (notamment en géométrie analytique rigide) et comment la théorie générale permet d'en donner une preuve.

L'essence du critère métrique de dépendance intégrale est le lemme suivant.

Lemme 4.5. *Soit* A *un anneau (nécessairement intègre) muni d'une valeur absolue non triviale* $|\ | : A \to [0,\infty[$. *Si* $a \in A$ *satisfait une équation*

$$a^m + \sum_{i=1}^{m} a_i a^{m-i} = 0,$$

alors $|a| \leq 2 \max |a_i|^{1/i}$.

Preuve. Soit $K = \operatorname{frac}(A)$ et $\widehat{K}$ son complété pour la topologie définie par la valeur absolue. Alors la valeur absolue $|\ |$ se prolonge de manière unique à $\widehat{K}$. De même, si on désigne par K' une clôture algébrique de $\widehat{K}$, il existe une unique extension de la valeur absolue de $\widehat{K}$ à K' (cf. [B-G-R]). On peut ainsi supposer sans perte de généralité que A est un corps algébriquement clos muni d'une valeur absolue non triviale. Le lemme est alors élémentaire. Soit en effet i_0 tel que $|a_{i_0}|^{1/i_0} = \max|a_i|^{1/i}$, et $\alpha \in k$ tel que $\alpha^{i_0} = a_{i_0}$. Alors $a' = a/\alpha$ satisfait une équation

$$(a')^m + \sum_{i=1}^{m} b_i (a')^{m-i} = 0,$$

avec $\max_{1\le i\le m} |b_i|^{1/i} \le 1$. Posons $r = |a'|$. Alors $1 \le \sum_{i=1}^{m} 1/r^i < \sum_{i=1}^{\infty} 1/r^i$. Donc nécessairement $1/r \ge 1/2$ et $r \le 2$. ∎

THÉORÈME 4.6. *Soit k un corps algébriquement clos, $\mathbf{R} = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ ou bien $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$ l'anneau des germes de séries convergentes en n variables, lorsque k est munie d'une valeur absolue non triviale $|\ | : k \to [0, \infty[$. Soit $I = (u_1, \ldots, u_m)$ un idéal de $\mathbf{R}$. Alors pour $u \in \mathbf{R}$ et tout $\theta \in \mathbb{Q}_{>0}$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) $u \in \overline{I^\theta}$.

(2) (Critère métrique de dépendance intégrale) *Si k est munie d'une valeur absolue non triviale et $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$,*

$$\exists \varepsilon, c > 0 : \quad x \in k^n \ \textit{et}\ \|x\| < \varepsilon \ \Rightarrow\ |u(x)| \le C(\max_{1\le i\le m} |u_i(x)|)^\theta.$$

(3) (k algèbriquement clos quelconque; critère valuatif par les arcs) *Pour tout arc $\varphi^* : \mathbf{R} \to k[[t]]$,*

$$\mathrm{ord}_t(\varphi^*(u)) \ge \theta \min_{1\le i\le m} \mathrm{ord}_t(\varphi^*(u_i)).$$

Il existe de plus un nombre fini d'arcs φ^{l*}, $l \in \Lambda$, tels que (3) est satisfaite si et seulement si elle satisfaite pour ces arcs φ^{l*}, $l \in \Lambda$. De plus,

$$\overline{\nu}_I(u) = \min_{l\in\Lambda} \frac{\mathrm{ord}_t(\varphi^{l*}(u))}{\min_{1\le i\le m} \mathrm{ord}_t(\varphi^{l*}(u_i))}.$$

La donnée d'un arc $\varphi^* : \mathbf{R} \to k[[t]]$, c'est-à-dire d'un morphisme nécessairement local de k-algèbres de $\mathbf{R}$ dans $k[[t]]$, est équivalente à la donnée d'un élément $\varphi(t) \in (tk[[t]]) \times \cdots \times (tk[[t]])$ qui agit par composition sur $\mathbf{R}$, et nous emploierons indifféremment les deux notations. Le fait que l'on puisse vérifier le critère valuatif à l'aide d'arcs est une spécifité due au fait que l'on travaille avec des anneaux locaux noethériens qui contiennent des corps (contexte d'égale caractéristique), contexte qui est suffisant pour nous. On peut faire des énoncés similaires en géométrie analytique rigide ou bien considérer des algèbres essentiellement de type fini sur un corps algébriquement clos.

Preuve (schéma). (1)⇒(2) par le lemme ci-dessus. (1)⇒(3) immédiat. (2)⇒(3) car le corps k contient des éléments arbitrairement petits pour la valeur absolue.

L'implication (3)⇒(1) résulte facilement de la théorie générale et du théorème de structure (I. S. Cohen) des anneaux complets réguliers d'égales caractéristiques (en imitant [L-T]). En effet, considérons toujours $\Pi' = N \circ \Pi : X' \to \mathrm{Spec}(\mathbf{R})$ l'éclatement normalisé de centre I et $Z \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbf{R})$, $Z = \mathrm{Spec}(\mathbf{R}/I)$. Soient $Y' = \Pi'^{-1}(Z)$ et $Y'_{\mathrm{red}} = \bigcup_{l\in\Lambda} Y'_l$ la décomposition en composantes irréductibles, et soit

$$m'_l = \mathrm{long}(\mathcal{O}_{Y',Y'_l}) = \mathrm{long}(\mathcal{O}_{X',Y'_l}/I\mathcal{O}_{X',Y'_l}).$$

X' étant normal et donc régulier en codimension 1, chaque $\mathcal{O}_{X',Y'_l}$ est un anneau régulier de dimension 1 et donc un anneau de valuation discrète dont on note v_l la valuation. Ces valuations sont une description des valuations de Rees comme nous l'avons mentionné plus haut. Posons $v_l(u\mathcal{O}_{X',Y'_l}) = v_l$. Notons $\mathcal{P}_l$ le sous-faisceau d'idéaux premiers définissant Y'_l. Désignant par $\widehat{\ }$ la complétion pour l'idéal maximal, le théorème de structure des anneaux réguliers complets locaux d'égales caractéristiques permet d'affirmer que si $y'_l \in \mathrm{Reg}(Y'_l) \cap \mathrm{Reg}(X')$ est un point fermé suffisamment général, on a, en désignant par $K(Y_l)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X',Y_l}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{O}}_{X',Y'_l} &\simeq K(Y'_l)[[t]],\\
I\widehat{\mathcal{O}}_{X',Y'_l} &\simeq (t)^{m'_l}K(Y'_l)[[t]],\\
\widehat{\mathcal{O}}_{X',y'_l} &\simeq k[[t,U]], \qquad U = (U_2,\dots,U_n),\\
I\widehat{\mathcal{O}}_{X',y'_l} &\simeq (t)^{m'_l}k[[t,U]],\\
u\widehat{\mathcal{O}}_{X',y'_l} &\simeq (t)^{v_l}k[[t,U]],\\
\mathcal{P}_{i',y'_l}\widehat{\mathcal{O}}_{X',y'_l} &\simeq (t)k[[t,U]].
\end{aligned}$$

L'arc

$$\varphi^{l*} : R \overset{\Pi'^{\sharp}}{\to} \widehat{\mathcal{O}}_{X',y'_l} = k[[t,U]] \to k[[t]],$$

où la dernière flèche est $t \mapsto t$ et $U \mapsto 0$, calcule alors $v_l(I)$ (resp. $v_l(u)$) comme $\min_{\mathrm{ord}_t} \varphi^{l*}(u_j)$ (resp. $\mathrm{ord}_t(\varphi^{l*})(u)$) . Ainsi si (3) est satisfaite, la considération des arcs φ^{l*}, $l \in \Lambda$, nous assure que $v_l(u) \geq \theta v_l(I)$ pour les valuations de Rees, et donc que $u \in \overline{I^\theta}$ au vu des résultats généraux rappelés ci-dessus. Il en va de même pour le calcul de la fonction asymptotique de Samuel. ∎

Preuve de 1.2. Soit m le rang de la matrice jacobienne $\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(0)$. Alors le théorème des fonctions implicites formel nous assure qu'il existe un

k-automorphisme α^* de $k[[X_1, \dots, X_n]]$ tel que

$$\alpha^*(f_i) = X_i, \quad 1 \le i \le m, \qquad \alpha^*(f_{m+i}) = F_i, \quad 1 \le i \le n-m,$$

avec $d_{X'}F_i(0) = 0$, $1 \le i \le n-m$, où $X' = (X_{m+1}, \dots, X_n)$. Posons $g_i(X') = F_i(0, X')$, $1 \le i \le n-m$. On a $J_X(\alpha^*(f_1), \dots, \alpha^*(f_n)) = J_{X'}(g_1, \dots, g_{n-m})$. Notons

$$I = (X_1, \dots, X_m, F_1, \dots, F_{n-m}) = (X_1, \dots, X_m, g_1(X'), \dots, g_{n-m}(X')),$$
$$J = (g_1, \dots, g_{n-m}) \subset k[[X']].$$

Pour $\theta \ge 1$, on a $J_X(f) \in \overline{I^\theta}$ si et seulement si $J_{X'}(g) \in \overline{J^\theta}$. Ainsi quitte à substituer les g_i aux f_i, on pourra supposer sans perte de généralité que le rang de la matrice jacobienne $\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(0)$ est nul. Il s'agit de voir que si $n = 2$, alors $J_X(f) \in \overline{I}$, et que si $n > 2$, il existe $\theta > 1$ tel que $J_X(f) \in \overline{I^\theta}$.

Pour cela on peut supposer que k est algébriquement clos. En effet, si cela n'est pas le cas, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Le morphisme naturel $k[[X_1, \dots, X_n]] \to \overline{k}[[X_1, \dots, X_n]]$ est fidèlement plat. Ainsi si $h \in k[[X]]$ et I est un idéal, on a $h \in \overline{I^\theta}$ si et seulement si $h \in \overline{(I\overline{k}[[X]])^\theta}$. D'autre part, si k est munie d'une valeur absolue non triviale $|\ \ |$, on complète celui-ci pour la valeur absolue en un corps k' et celle-ci se prolonge de manière unique à une clôture algébrique de $\overline{k'}$ (cf. [B-G-R]). Pour les questions ayant trait aux inégalités, il suffit de vérifier celles-ci au voisinage de 0 dans $\overline{k'}^n$. Nous supposerons donc que k est algébriquement clos.

D'après les résultats mentionnés plus haut, notant $I = (f_1, \dots, f_n)$, il existe un nombre fini d'arcs $\varphi^l \in (tk[[t]]) \times \cdots \times (tk[[t]])$, $l \in \Lambda$, tels que pour tout $\theta = p/q \in \mathbb{Q}_{>0}$ et tout $h \in k[[X]]$, on a $h \in \overline{I^\theta}$ si et seulement si

$$\forall l \in \Lambda, \quad \operatorname{ord}_t(h \circ \varphi^l) \ge \theta \min_{1 \le i \le n} \operatorname{ord}_t(f_i \circ \varphi^l).$$

Fixons un tel arc φ (nous omettrons l'exposant l). On a alors

$$(f_i \circ \varphi)'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(\varphi(t))\varphi_j'(t).$$

Par les règles de Cramer, désignant par $\Delta_{i,j}$ le mineur obtenu à partir de la matrice jacobienne en rayant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, on a

$$\varphi_j'(t) J_X(f)(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(\varphi(t))(f_i \circ \varphi)'(t).$$

Comme la caractéristique de k est zéro, on a $\operatorname{ord}_t(\varphi_j') = \operatorname{ord}_t(\varphi_j) - 1$ et $\operatorname{ord}_t(f_i \circ \varphi)' = \operatorname{ord}_t(f_i \circ \varphi) - 1$. Ainsi l'identité ci-dessus fournit

$$\operatorname{ord}_t(\varphi_j) + \operatorname{ord}_t(J_X(f)(\varphi)) \ge \min_{1 \le i \le n} (\operatorname{ord}_t(\Delta_{i,j}(\varphi(t))) + \operatorname{ord}_t(f_i \circ \varphi)).$$

Fixons alors j tel que $\mathrm{ord}_t(\varphi_j) = \min_{1\le k\le n} \mathrm{ord}_t(\varphi_k) = \mathrm{ord}_t(\varphi^*(\mathfrak{m})) = \mathrm{ord}_t(\varphi)$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $k[[X]]$. Pour un tel indice j, on obtient par l'inégalité ci-dessus

$$\mathrm{ord}_t(J_X(f)(\varphi)) \ge \min_{1\le i\le n} (\mathrm{ord}_t(\Delta_{i,j}(\varphi)) - \mathrm{ord}_t(\varphi)) + \min_{1\le i\le n} \mathrm{ord}_t(f_i\circ\varphi).$$

Maintenant, puisque le rang de la matrice jacobienne de $(f_1,\ldots,f_n)$ en 0 est nul, on a $\Delta_{i,j}\in\mathfrak{m}$ si $n=2$ et $\Delta_{i,j}\in\mathfrak{m}^2$ si $n\ge 3$. Par suite, l'inégalité ci-dessus assure que $J_X(f)\in\overline{I}$ si $n=2$. Si $n\ge 3$, alors puisque $\Delta_{i,j}\in\mathfrak{m}^2$, on a

$$\mathrm{ord}_t(\Delta_{i,j}(\varphi)) - \mathrm{ord}_t(\varphi) \ge \mathrm{ord}_t(\varphi).$$

Or I est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire, donc il existe $s\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{m}^s\subset I$. D'où $s\,\mathrm{ord}_t(\varphi)\ge \min_{1\le i\le n}\mathrm{ord}_t(f_i\circ\varphi)$, ce qui permet d'obtenir

$$\mathrm{ord}_t(J_X(f)(\varphi)) \ge (1+1/s)\min_{1\le i\le n}\mathrm{ord}_t(f_i\circ\varphi).$$

Ainsi le nombre rationnel

$$\theta = \min_{l\in\Lambda} \frac{\mathrm{ord}_t(J_X(f)\circ\varphi^l)}{\min_{1\le i\le n}\mathrm{ord}_t(f_i\circ\varphi^l)} = \overline{v}_I(J_X(f))$$

est strictement plus grand que 1. Les inégalités de Łojasiewicz de 1.2 dans le cas convergent s'obtiennent par le critère métrique de dépendance intégrale mentionné plus haut. ∎

Remarque 4.7. (1) Si $n-m=2$, il n'existe pas en général de $\theta>1$ tel que $J_X(f_1,\ldots,X_n)\in\overline{I^\theta}$. Il suffit de considérer l'exemple

$$(f_1,\ldots,f_n) = (X_1,\ldots,X_{n-2},X_{n-1}^2,X_n^2).$$

On a alors $J_X(f)\in\overline{I}$, mais $J_X(f_1,\ldots,f_n)\in\overline{I^\theta}$ pour aucun $\theta>1$. En effet, ici $\overline{I}=(X_1,\ldots,X_{n-2},X_{n-1}^2,X_{n-1}X_n,X_n^2)$ et $J_X(f)=4X_{n-1}X_n$. Mais c'est à peu près le seul cas où une telle situation se produit. La même preuve que ci-dessus montre que $\overline{v}_I(J_X(f))>1$ dès que $\min\mathrm{ord}_X(f_i)\ge 3$.

(2) Bien entendu, le cas de $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le premier qui se présente. Mais on peut considérer aussi le cas où $\mathbf{R}$ est un corps réel clos et prendre pour k le corps des séries de Puiseux à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}=\mathbf{R}+i\mathbf{R}$, i.e. $k=\bigcup_{q\in\mathbb{N}^*}\mathbf{R}((X^{1/q}))$ ou $k=\bigcup_{q\in\mathbb{N}^*}\mathbf{C}((X^{1/q}))$. De tels corps sont naturellement munis d'une valeur absolue ultramétrique non triviale $|a|=e^{-\mathrm{ord}_X(a)}$. Les inégalités de Łojasiewicz de 1.2 sont valables pour les séries convergentes à coefficients dans de tels corps.

(3) Un célèbre résultat de S. Łojasiewicz affirme que si f est un germe de série convergente en n variables réelles, et $f(0)=0$, alors il existe un nombre rationnel $\theta>1$ tel que au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on ait $|f(x)|\le C\big(\sum_{1\le i\le n}\big|\frac{\partial f}{\partial X_i}(x)\big|\big)^\theta$. Pour des preuves très différentes les unes des autres nous renvoyons respectivement à [B-M, prop. 6.8, p. 35], [T2, complément 1])

et [Lo]. Ce résultat peut être étendu au cas d'un corps de caractéristique zéro muni d'une valeur absolue non triviale en procédant comme ci-dessus. Les inégalités de 1.2 qui nous ont été inspirées par [T1] sont les analogues pour le jacobien de ces inégalités.

Signalons pour terminer le corollaire immédiat.

COROLLAIRE 4.8. *Soient k un corps algébriquement clos, de caractéristique zéro, muni d'une valeur absolue non triviale $|\ | : k \to [0, \infty[$ et $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes de séries convergentes en n variables $(z_1, \ldots, z_n)$.*

(1) *Soit $f \in \mathcal{O}_n$ et $f(0) = 0$. Alors f est à singularité isolée à l'origine si et seulement si son Hessien $H_Z(f)$ n'appartient pas à l'idéal jacobien de f.*
(2) *Soit $f \in \mathcal{O}_n$ et $f(0) = 0$ à singularité isolée à l'origine. Alors f est, à changement de variables près, égale à une singularité du type $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^k$, $k \geq 2$, si et seulement si son idéal jacobien est intégralement clos.*

Preuve. (1) est la traduction directe au cas considéré des résultats du §3.

(2) Les singularités du type considéré ont bien évidemment un idéal jacobien intégralement clos. Réciproquement, soit $\mathcal{H}_Z(f)$ la matrice hessienne de f. Soit m le rang de $\mathcal{H}_Z(f)$ en 0. Si $n - m \geq 2$, alors $H_Z(f)$ est dans la clôture intégrale de l'idéal $(\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n)$. Par conséquent, si celui-ci était intégralement clos, on aurait $H_Z(f) \in (\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n)$. Ceci est absurde en vertu du (1) et de l'hypothèse de singularité isolée. Donc la seule possibilité pour que l'idéal jacobien de f soit intégralement clos est que le rang m de $\mathcal{H}_Z(f)$ en zéro satisfasse $n-m < 2$. Par suite, $m \geq n-1$. Ceci implique que f est du type proposé, en vertu du lemme de Morse à paramètres (cf. [A-G-V, p. 187]). ∎

Références

[A-G-V] V. I. Arnol'd, S. M. Guseĭn-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, *Vol. 1*, Monogr. Math. 82, Birkhäuser, 1985.
[B-Y] C. A. Berenstein and A. Yger, *Analytic residue theory in the non-complete intersection case*, J. Reine Angew. Math. 527 (2000), 203–235.
[B-M] E. Bierstone and P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Publ. Math. I.H.E.S. 67 (1988), 1–42.
[B1] N. Bourbaki, *Algèbre*, *Chap. 1 à 3*, nouvelle édition, Hermann, 1970.
[B2] —, *Algèbre commutative*, *Chap. 1 à 7*, Hermann, 1961.
[B3] —, *Algèbre commutative*, *Chap. 10*, Masson, 1998.
[B-G-R] S. Bosch, U. Gerritzen and R. Remmert, *Archimedian Analysis. A systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*, Grundlehren Math. Wiss. 261, Springer, 1984.

[Bo] J. Y. Boyer, *Comparaison de différentes approches des résidus et applications*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, 1999.

[B-H1] J. Y. Boyer et M. Hickel, *Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus*, Bull. Soc. Math. France 125 (1997), 315–335.

[B-H2] —, —, *Extension dans un cadre algébrique d'une formule de Cauchy–Weil*, Manuscripta Math. 98 (1999), 195–223.

[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math. 150, Springer, 1995.

[H-I-O] M. Herman, S. Ikeda and U. Orbanz, *Equimultiplicity and Blowing up. An Algebraic Study*, with an appendix by B. Moonen, Springer, 1988.

[Hi] M. Hickel, *Une remarque à propos du Jacobien de n fonctions holomorphes à l'origine de* $\mathbb{C}^n$, accepté pour publication à Ann. Polon. Math. 20 mars 2000, retiré de la publication par l'auteur en juin 2000.

[H-K] R. Huebl and E. Kunz, *Integration of differential forms on schemes*, J. Reine Angew. Math. 410 (1990), 53–83.

[H-S] C. Huneke and I. Swanson, *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 336, Cambridge Univ. Press, 2006.

[L-T] M. Lejeune et B. Teissier, *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité*, Séminaire Lejeune-Teissier, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Publ. Univ. Scientifique et Médicale de Grenoble, 1974.

[L] J. Lipman, *Residues and Traces of Differential Forms via Hochschild Homology*, Contemp. Math. 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[Lo] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, preprint, I.H.E.S., 1964.

[M] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Stud. Math. 8, Cambridge Univ. Press, 1986.

[N] E. Netto, *Vorlesungen über Algebra, vol. 2*, Teubner, Leipzig, 1900.

[N.R] D. G. Northcott and D. Rees, *Reduction of ideals in local rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 50 (1954), 145–158.

[P] A. Płoski, Question orale lors du colloque *Effectivity Problems: Algebraic and Analytic Methods*, Univ. of Calabria, 22–28 juin, 1998.

[R] D. Rees, *Lectures on the Asymptotic Theory of Ideals*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 113, Cambridge Univ. Press, 1988.

[S-S] G. Scheja und U. Storch, *Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten*, J. Reine Angew. Math. 278/279 (1975), 174–190.

[S] S. Spodzieja, *On some property of the jacobian of a homogeneous polynomial mapping*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 39 (1989), no. 5, 1–5.

[T1] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisque 7-8 (1973), 285–362.

[T2] —, *Sept compléments au séminaire Lejeune-Teissier*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, à paraître.

[W1] W. V. Vasconcelos, *The top of a system of equations*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 37 (1992), 549–556.

[W2] —, *Arithmetic of Blowup Algebra*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 195, Cambridge Univ. Press, 1994.

[W3] —, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Algorithms Comput. Math. 2, Springer, 1997.

Équipe d'Analyse et Géométrie
Université Bordeaux 1, I.M.B.
et
Département Informatique
I.U.T. Bordeaux 1
33405 Talence Cedex, France
E-mail: hickel@math.u-bordeaux1.fr

Received 4.2.2008
and in final form 11.7.2008 (1853)