ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXXVI.3 (2001)

Une nouvelle version du théorème d'extension de Hartogs pour les applications séparément holomorphes entre espaces analytiques

par Omar Alehyane (El Jadida) et Ahmed Zeriahi (Toulouse)

Abstract. This paper is concerned with the problem of extension of separately holomorphic mappings defined on a "generalized cross" of a product of complex analytic spaces with values in a complex analytic space.

The crosses considered here are inscribed in Borel rectangles (of a product of two complex analytic spaces) which are not necessarily open but are non-pluripolar and can be quite small from the topological point of view.

Our first main result says that the singular set of a given separately holomorphic mapping defined on such a cross is quite small from the pluripotential point of view in the product space in the sense that each of its projections is pluripolar.

Then for some special crosses, we deduce more precise results on the extension of separately holomorphic mappings on such crosses, giving generalizations of all the main results obtained earlier by various authors in this direction.

1. Introduction. Le but essentiel de cet article est de donner une nouvelle version du célèbre théorème de Hartogs sur l'analyticité des fonctions séparément holomorphes [Ha]. Ce théorème a fait l'objet de nombreux travaux dont il est difficile de faire la liste exhaustive. Nous nous contenterons donc ici d'en citer les principaux.

Après Hartogs, ce fût sans doute l'école japonaise, avec notamment I. Shimoda [Shim] et T. Terada [Te], qui a initié le problème de l'holomorphie des fonctions séparément holomorphes sur un produit d'ouverts en affaiblissant les hypothèses sur l'un des facteurs, obtenant ainsi une généralisation conséquente du théorème de Hartogs.

Des extensions significatives du théorème de Terada ont été obtenues par la suite par J. Siciak (cf. [Si1], [Si2]). Il faut observer que Siciak fût le premier à donner au théorème de Hartogs une formulation générale en terme de prolongement de fonctions séparément holomorphes sur des "croix" d'un

2000 *Mathematics Subject Classification*: 31C10, 32D15, 32H02.
Key words and phrases: separately holomorphic, pluripolar, Hartogs theorem.

espace hermitien produit et à obtenir les premiers résultats substantiels sur le sujet (cf. [Si1], [Si2]).

De plus il en a donné des applications à la détermination des enveloppes d'holomorphie de certains "domaines croisés" en utilisant les fonctions extrémales relatives qui sont l'analogue pluridimensionnel des mesures harmoniques en une dimension.

Les résultats de Siciak ont ensuite été généralisé par V. P. Zahariuta aux fonctions séparément holomorphes sur des "croix" d'un produit de variétés de Stein (cf. [Za2]) et des versions plus générales ont été obtenues plus tard par Nguyen Thanh Van et le second auteur avec des preuves plus simples (cf. [Ng-Ze2], [Ng-Ze3]).

Alors que Siciak avait essentiellement fait usage de la méthode d'interpolation des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Zahariuta avait utilisé la méthode abstraite des échelles hilbertiennes qui se généralise facilement aux fonctions holomorphes définies sur des variétés de Stein (cf. [Za1], [Za2]).

Pour étendre les théorèmes de Siciak et Zahariuta, Nguyen Thanh Van et le second auteur avaient utilisé des développements en série dans une base doublement orthogonale de fonctions holomorphes, construite suivant une méthode classique dûe à S. Bergman [Ber], qui est en fait une version plus simple et plus constructive de la technique abstraite des échelles hilbertiennes développée par Zahariuta [Za1].

Cette méthode avait également été utilisée indépendamment par Borchers, qui ne semblait pas connaître la littérature sur le sujet, pour déterminer les enveloppes d'holomorphie de certains domaines croisés avec des motivations provenant de la physique théorique (cf. [Bo]).

Utilisant essentiellement la même méthode que Siciak, B. Shiffman fût le premier à étendre partiellement certains résultats de Siciak et ceux de Terada aux applications séparément holomorphes à valeurs dans un espace analytique complexe (cf. [Shif2], [Shif3]).

Reprenant la méthode de [Ng-Ze2], [Ng-Ze3] et utilisant une idée de [Shif2], [Shif3], O. Alehyane a pu généraliser certains résultats de [Ng-Ze2], [Ng-Ze3], [Shif3] aux applications séparément holomorphes à valeurs dans un espace analytique complexe vérifiant la propriété de prolongement de Hartogs (cf. [Al1]).

Par ailleurs, Saint Raymond [Ra] puis Siciak [Si4] ont mis en évidence la nature "doublement pluripolaire" de l'ensemble singulier d'une fonction séparément analytique au sens réel sur un domaine d'un produit d'espaces euclidiens et ont obtenu une caractérisation élégante de ces ensembles singuliers.

Bien que la démonstration de Siciak de la condition nécessaire de ce résultat repose sur une version très simple de son théorème de prolongement des fonctions séparément holomorphes sur une croix convenable (cf. [Si1]), il n'en demeure pas moins que le lien entre ces deux résultats n'était pas direct.

Notre objectif ici est de donner un nouveau théorème d'extension de type Hartogs aussi général que possible avec des hypothèses aussi simples que possible, impliquant de manière directe tous les résultats importants cités ci-dessus et permettant en particulier de clarifier le lien entre le cas réel et le cas complexe en unifiant les deux points de vue.

En effet, nous considérons une croix inscrite dans un rectangle borelien non-pluripolaire (contenu dans un produit d'espaces analytiques complexes) d'un type assez général et une application séparément holomorphe définie sur cette croix à valeurs dans un espace analytique complexe quelconque. Nous montrons qu'alors l'ensemble singulier d'une telle application est "doublement pluripolaire".

Cette nouvelle formulation du théorème d'extension de Hartogs nous permet en particulier d'appliquer nos résultats à des fonctions séparément analytiques au sens réel et d'obtenir ainsi d'une façon directe une généralisation significative de la condition nécessaire dans le théorème de Saint Raymond et Siciak.

Enfin nous en déduisons plusieurs résultats nouveaux qui généralisent tous les résultats essentiels cités ci-dessus.

2. Préliminaires et énoncés des résultats. Ici nous rappelons les notions de base et les résultats préliminaires qui serviront dans la suite, puis nous énoncerons les résultats principaux obtenus dans ce travail.

2.1. *Définitions et résultats préliminaires.* Dans toute la suite les espaces analytiques complexes considérés seront toujours supposés réduits, irréductibles et de dimension finie. Si X est un espace analytique complexe, on désignera par X_{reg} (resp. X_{sing}) la variété analytique complexe des points réguliers de X (resp. l'ensemble singulier de X, qui est un sous-ensemble analytique de X de codimension au moins 1).

Rappelons qu'une fonction $u : X \to [-\infty, +\infty[$ est dite *fortement plurisousharmonique* sur X si au voisinage de chaque point de X, dans un plongement local de X dans un espace hermitien, u est la restriction d'une plurisousharmonique.

La fonction u est dite (faiblement) *plurisousharmonique* sur X si u est plurisousharmonique sur la variété complexe X_{reg} et localement majorée sur X. Dans cette définition, on n'impose pas que u soit semi-continue supérieurement. Pour remédier à cet inconvénient, à chaque fonction u plurisousharmonique sur X on associera une fonction semi-continue supérieurement sur X en posant

$$u^*(x) = \limsup_{y \to x,\, y \in X_{\mathrm{reg}}} u(y), \qquad x \in X.$$

La fonction u^* sera appelée la *régularisée semi-continue supérieurement* de u sur X. Notons que si u est fortement plurisousharmonique sur X alors $u = u^*$ est (faiblement) plurisousharmonique sur X. La réciproque n'a pas lieu en général (cf. [De], [Ze2]).

Une version du lemme de Hartogs pour les fonctions plurisousharmoniques sur les espaces analytiques complexes est donnée dans [Ze2].

Dans toute la suite on notera $P(X)$ le cône des fonctions (faiblement) plurisousharmoniques sur X, non identiquement égales à $-\infty$.

L'opérateur de Monge–Ampère complexe $(dd^c u)^m$ est bien défini pour une fonction u plurisousharmonique localement bornée sur la variété X_{reg} (cf. [Bed]). Il en résulte que si $u \in P(X) \cap L^\infty_{\text{loc}}(X)$, alors $(dd^c u)^m$ est un courant positif fermé de bidegré (m,m) sur X_{reg}. On peut prolonger ce courant par 0 sur X_{sing} (cf. [Bed]).

À l'aide de cet opérateur, on peut définir une capacité de la façon suivante. Rappelons tout d'abord qu'un ouvert $U \subset X$ est dit *hyperconvexe* s'il admet une fonction d'exhaustion plurisousharmonique et bornée.

Soient $U \subset X$ un domaine hyperconvexe et $K \subset U$ un compact. On définit suivant Bedford et Taylor [Bd-Ta] la capacité du “condensateur” (K, U) par la formule

$$\text{(2.1.1)} \qquad \operatorname{Cap}(K;U) := \sup\Big\{ \int_K (dd^c u)^m : u \in P(U),\ 0 \le u \le 1 \Big\}$$

et on étend cette définition de façon naturelle à tous les ensembles en définissant la capacité extérieure Cap^* (cf. [Bd-Ta]). Alors la capacité ainsi obtenue est une capacité au sens de Choquet qui caractérise les ensembles pluripolaires au sens où un sous-ensemble $E \subset U$ est pluripolaire si et seulement si $\operatorname{Cap}^*(E;U) = 0$ (cf. [Bd-Ta]).

Pour un domaine $U \subset X$ et un ensemble non vide $E \subset U$, on définit suivant Siciak ([Si2], [Si3]) la fonction extrémale relative associée au couple (E, U) par la formule suivante :

$$u_{E,U}(x) = \sup\{u(x) : u \in P(U),\ u \le 0 \text{ sur } E,\ u \le 1 \text{ sur } U\}.$$

On note $\omega(\cdot;E;U) = u^*_{E,U}$ la régularisée s.c.s. de $u_{E,U}$ qui est alors une fonction plurisousharmonique sur U qui vérifie l'équation de Monge–Ampère complexe (cf. [Be-Ta], [Bed]) :

$$(dd^c \omega(\cdot;E;U))^m = 0 \quad \text{sur } U \setminus \overline{E}.$$

Cette fonction est aussi appelée la *P-mesure* de E relative à U, par analogie à la mesure harmonique en une variable complexe (cf. [Sa]).

Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on définit l'ouvert de sous-niveau α de la fonction $\omega(.;E;U)$ par la formule suivante :

$$U(E,\alpha) := \{x \in U : \omega(x;E;U) < \alpha\}.$$

On dira que $E \subset U$ est $P(U)$-*régulier* au point $a \in \overline{E} \cap U$ si $\omega(a; E; U) = 0$. L'ensemble E est dit *plurirégulier* au point $a \in \overline{E} \cap U$ si pour tout voisinage ouvert D de a, $E \cap D$ est $P(D)$-régulier au point a, ce qui équivaut à la propriété suivante :

$$\omega(a; E \cap D; D) = 0 \quad \text{pour tout } D \in \mathfrak{V}(a)$$

où $\mathfrak{V}(a)$ est un système fondamental de voisinages ouverts du point a. On désigne par $E^* = E^*_U$ l'ensemble des points $a \in \overline{E} \cap U$ tels que E soit plurirégulier au point a. Si E est non-pluripolaire, alors d'après Bedford et Taylor ([Be-Ta], [Bed]) l'ensemble E^* est un ensemble non-pluripolaire de type $\mathcal{G}_\delta$ et $E \setminus E^*$ est pluripolaire. De plus on vérifie facilement que $(E^*)^* = E^*$.

Rappelons également que si U est hyperconvexe alors pour tout ensemble $E \subset U$ et toute suite exhaustive (U_j) d'ouverts relativement compacts de U on a la propriété de stabilité (par rapport à U) suivante (cf. [Kl]) :

$$\omega(\cdot; E; U) = \lim_{j \to +\infty} \omega(\cdot; E \cap U_j; U_j).$$

En général cette propriété de stabilité de la fonction extrémale n'est pas satisfaite si U est seulement pseudoconvexe (cf. [Al-He]).

Il est donc naturel dans notre contexte de définir une nouvelle fonction associée à (E, U) en posant

$$\widetilde{\omega}(\cdot; E; U) := \lim_{j \to +\infty} \omega(\cdot; E \cap U_j; U_j) \tag{2.1.2}$$

où (U_j) est une suite exhaustive d'ouverts relativement compacts de U. Il est facile de voir que cette limite est indépendante de la suite exhaustive choisie (cf. [Za2]).

On vérifie facilement que la nouvelle fonction possède la propriété suivante, dite *propriété de conservation* de la P-mesure :

$$\widetilde{\omega}(\cdot; E \cup S; U) \equiv \widetilde{\omega}(\cdot; E; U) \tag{2.1.3}$$

pour tout sous-ensemble pluripolaire $S \subset U$. Il en résulte que si $E \subset U$ est non-pluripolaire, on a

$$\widetilde{\omega}(\cdot; E^*; U) \equiv \widetilde{\omega}(\cdot; E; U). \tag{2.1.4}$$

À partir de cette propriété, on démontre facilement la propriété de stabilité pour la fonction $\widetilde{\omega}(\cdot; E; U)$ par rapport à la fois à U et à E. C'est pourquoi on l'appellera la *fonction plurisousharmonique extrémale* (*relative*) *stable* de (E, U). On a toujours $\omega(\cdot; E; U) \le \widetilde{\omega}(\cdot; E; U)$ avec égalité si U est relativement compact ou hyperconvexe (cf. [Kl]). On notera alors

$$\widetilde{U}(E, \alpha) := \{x \in U : \widetilde{\omega}(x; E; U) < \alpha\}. \tag{2.1.5}$$

Rappelons également que si U est un domaine hyperconvexe et $E \subset U$ est un compact non-pluripolaire, alors la mesure de Monge–Ampère relative

$\mu = \mu_{E,U} := (dd^c\omega(\cdot;E;U))^n$ possède la propriété fondamentale suivante (cf. [Ng-Ze1], [Ze2]) : pour tout ensemble borelien $A \subset E$ tel que $\mu(A) = \mu(E)$, on a

$$\omega(\cdot;A;U) \equiv \omega(\cdot;E;U). \tag{2.1.6}$$

Pour simplicité, si $E \subset X$ est un sous-ensemble non-pluripolaire de X, on dira qu'un ouvert $U' \subset X$ est un *voisinage consistant* de E si U' est un voisinage ouvert de E dont toute composante connexe rencontre E^*, ce qui revient à dire que toute composante connexe de U' rencontre E suivant un ensemble non-pluripolaire. L'intérêt de cette notion réside dans la propriété suivante : si f et g sont deux applications holomorphes sur U' telles que $f = g$ sur E, alors on a $f = g$ sur U'. On fera référence à ce résultat comme étant le *principe du prolongement analytique généralisé*.

On dira qu'un sous-ensemble $E' \subset E^*$ est *quasi-égal* à E dans X si l'ensemble $E \setminus E'$ est pluripolaire dans X.

On peut ainsi montrer que si $E \subset U$ est non-pluripolaire, alors E^* est quasi-égal à E et que l'ouvert $\widetilde{U}(\alpha, E)$ est un voisinage consistant de E^* (cf. [Ng-Ze3]).

On dira qu'une partie $S \subset X \times Y$ est *doublement pluripolaire* dans $X \times Y$ si les projections $\pi_X(S) \subset X$ et $\pi_Y(S) \subset Y$ sont pluripolaires dans X et Y respectivement.

Nous aurons besoin de la propriété de prolongement de Hartogs (PPH) introduite par Shiffman [Shif1]. Soit $p \geq 2$ un entier. Pour $r \in]0,1[$, on note $H_p(r)$ la figure de Hartogs en dimension p définie par

$$H_p(r) = \{(z', z_p) \in \Delta^p : \|z'\| < r \text{ ou } |z_p| > 1 - r\}$$

où Δ^p désigne le polydisque unité de $\mathbb{C}^p$ et $z' = (z_1, \ldots, z_{p-1})$, $\|z'\| = \max_{1 \leq j \leq p-1} |z_j|$.

Définition 2.1.1. On dira qu'un espace analytique complexe Z possède la *propriété de prolongement de Hartogs* (PPH) en dimension p si toute application holomorphe de $H_p(r)$ à valeurs dans Z se prolonge en une application holomorphe de Δ^p dans Z.

S. Ivashkovich [Iv1] a démontré que si l'espace Z possède la propriété (PPH) en dimension 2 alors il la possède en toute dimension $p \geq 2$. Nous dirons simplement que Z possède la propriété (PPH). La classe des espaces analytiques complexes possédant la propriété (PPH) contient les groupes de Lie complexes [Ad-Su-Yo], les espaces tauts [W], les variétés hermitiennes à courbures sectionnelles holomorphes négatives [Shif1] et les variétés kähleriennes holomorphiquement convexes ne contenant pas de courbe rationnelle [Iv1].

Voici une caractérisation importante de cette classe d'espaces analytiques complexes que nous utiliserons ultérieurement.

Théorème 2.1.2 ([Shif1]). *Un espace analytique complexe Z possède la propriété (PPH) (en dimension p) si et seulement si pour tout domaine D d'une variété de Stein quelconque N, toute application holomorphe de D dans Z se prolonge en une application holomorphe de l'enveloppe d'holomorphie $\widehat{D}$ de D dans Z.*

2.2. *Énoncés des résultats principaux.* Nous aurons besoin de quelques définitions pour poser le problème général de l'extension des applications séparément holomorphes et énoncer les principaux résultats obtenus.

Soient X, Y et Z des espaces analytiques complexes quelconques. Soient $K \subset X$, $L \subset Y$ des ensembles boreliens connexes non-pluripolaires, et $E \subset K$, $F \subset L$ des sous-ensembles non-pluripolaires dans X et Y respectivement. L'ensemble $W := (K \times F) \cup (E \times L)$ sera appelé la *croix* de $X \times Y$ *inscrite dans le rectangle* borelien $K \times L$ et *centrée sur le rectangle* $E \times F$. Lorsqu'il y a risque de confusion, on notera de façon plus précise $W = W(E \times F; K \times L)$.

On dira qu'une application $f : W(E \times F; K \times L) \to Z$ est *séparément holomorphe* sur W si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. pour tout $x \in E$, l'application partielle $f(x, \cdot) : L \to Z$ se prolonge en une application holomorphe d'un voisinage ouvert de L dans Y (dépendant éventuellement de x) à valeurs dans Z,

2. pour tout $y \in F$, l'application partielle $f(\cdot, y) : K \to Z$ se prolonge en une application holomorphe d'un voisinage ouvert de K dans X (dépendant éventuellement de y) à valeurs dans Z.

Lorsque $Z = \mathbb{C}$, on parlera simplement de fonction (séparément) holomorphe plutôt que d'application.

Définissons maintenant les différents types d'ensembles boreliens K et L que nous aurons à considérer. Rappelons qu'un sous-ensemble borelien $K \subset X$ est dit de *type* $\mathcal{F}_\sigma$ s'il peut s'écrire comme réunion dénombrable d'ensembles fermés de X, que l'on peut toujours choisir compacts. Un sous-ensemble $K \subset X$ est dit de *type* $\mathcal{G}_\delta$ dans X s'il peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts de X.

On dira dans la suite qu'un sous-ensemble $K \subset X$ est de *type* $\mathcal{G}_\delta^s$ s'il existe une suite décroissante $(D_j)_j$ d'ouverts de X contenant K qui converge vers K au sens suivant : pour tout ouvert D contenant K, il existe un indice j tel que $D_j \subset D$. Il est clair que tout sous-ensemble qui est réunion d'un compact et d'un ouvert de X est de type $\mathcal{G}_\delta^s$.

Récemment W. Jarnicki [Ja] nous a fait remarquer qu'en fait tout ensemble de type $\mathcal{G}_\delta^s$ est réunion d'un ouvert et d'un compact.

On notera $W^* := (K \times F^*) \cup (E^* \times L)$ la partie dite *régulière* de W.

Lorsque $W = W(E \times F; U \times V)$ est une croix inscrite dans un rectangle ouvert $U \times V \subset X \times Y$, on posera

$$\widetilde{W} = \{(x,y) \in U \times V : \widetilde{\omega}(x;E;U) + \widetilde{\omega}(y;F;V) < 1\}.$$

Il faut observer que $W^* \subset \widetilde{W}$.

Un ouvert $\Omega \subset X \times Y$ est dit *admissible* pour l'extension des applications séparément holomorphes sur W si toute composante connexe de Ω rencontre W^*.

Soit $f : W := (K \times F) \cup (E \times L) \to Z$ une application. On dira alors que f *s'étend holomorphiquement* à un ouvert admissible Ω s'il existe une application holomorphe h de Ω dans Z telle que $h = f$ sur $\Omega \cap W$. Si une telle extension holomorphe au même ouvert Ω est possible pour toutes les fonctions séparéments holomorphes sur W, on dira que Ω est un *ouvert d'extension holomorphe* de W.

Si $(a,b) \in X \times Y$, on dira que f *s'étend holomorphiquement au voisinage du point* (a,b) s'il existe un domaine $\omega = \omega_{a,b}$ de $X \times Y$ voisinage du point (a,b) tel que $\omega \cap W^* \neq \emptyset$ et tel que f s'étende holomorphiquement à ω.

On désignera par $\Omega(f)$ l'ensemble des points de $X \times Y$ au voisinage desquels l'application f s'étend holomorphiquement. Il est clair que $\Omega(f)$ est un ouvert admissible pour l'extension holomorphe des fonctions séparément holomorphes sur W. En général, l'application f ne s'étend pas en une application holomorphe sur l'ouvert $\Omega(f)$ tout entier à valeurs dans Z, même dans le cas où $Z = \mathbb{C}$. En effet, considérons la fonction définie par $f(x,y) := (x^2 + y^2)^{1/2}$ pour $(x,y) \in W := (]0,1] \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^+ \times]0,1]) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Il est clair que $f : W \to \mathbb{C}$ est une fonction séparément holomorphe sur W, que $\Omega(f) = \mathbb{C}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$ et que $S(f,W) = \{(0,0)\}$. Par contre la fonction f ne s'étend pas en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega(f)$. Ici le prolongement naturel est une fonction analytique multiforme.

Plusieurs questions naturelles se posent alors dans ce contexte général.

Q.1 : Étant donnée une application $f : W \to Z$ séparément holomorphe sur W, que peut-on dire de l'ensemble singulier de f relativement à W defini par $S(f,W) := W^* \setminus \Omega(f)$?

Q.2 : L'ouvert $\Omega(f)$ contient-il un voisinage ouvert admissible de W^* dans $X \times Y$ auquel f s'étend holomorphiquement ?

Q.3 : Soient X et Y des variétés de Stein, $U \subset X$ et $V \subset Y$ des domaines et $E \subset U$, $F \subset V$ des ensembles non-pluripolaires. Déterminer l'enveloppe d'holomorphie de W au sens de l'extension holomorphe des fonctions séparément holomorphes sur la croix $W := W(E \times F; U \times V)$, à savoir la variété de Stein admissible $H(W)$ contenant W^* à laquelle toutes les fonctions séparément holomorphes sur W s'étendent holomorphiquement.

Q.4 : Dans les hypothèses de **Q.3**, caractériser les espaces analytiques complexes Z pour lesquels toute application séparément holomorphe sur W s'étend holomorphiquement à $H(W)$.

Avant d'énoncer les résultats essentiels de ce travail, donnons un aperçu chronologique succinct des principaux résultats obtenus antérieurement sur le sujet.

Il semble que I. Shimoda [Shim] et T. Terada [Te] fûrent parmi les premiers à obtenir des résultats importants dans cette direction en considérant des fonctions séparément holomorphes sur des ensembles de la forme $W = W(E \times V; U \times V)$, i.e. une croix telle que $F = V \subset \mathbb{C}^m$ et $E \subset U \subset \mathbb{C}^n$ soit un ensemble non-pluripolaire. Ils ont démontré que de telles fonctions sont nécessairement holomorphes sur $U \times V$.

Lorsque $X = \mathbb{C}^m, Y = \mathbb{C}^n, Z = \mathbb{C}$ et $E \subset U$, $F \subset V$ sont des compacts, J. Siciak a été le premier à formuler la question **Q.3** pour une croix inscrite dans un rectangle ouvert et à démontrer que, pour certains types de domaines U et V et pour des compacts réguliers $E \subset U$ et $F \subset V$, l'enveloppe d'holomorphie de $W = W(E \times F; U \times V)$ est $H(W) = \widetilde{W}$ (cf. [Si1]–[Si3]).

Par la suite, V. P. Zahariuta a généralisé les résultats de Siciak au cas où X et Y sont des variétés de Stein, $Z = \mathbb{C}$ et $U \subset X$, $V \subset Y$ sont des domaines pseudoconvexes et $E \subset U$, $F \subset V$ sont des compacts réguliers (cf. [Za2]). Plus tard ces résultats ont été généralisés par Nguyen Thanh Van et le second auteur au cas où $U \subset \mathbb{C}^m$ et $V \subset \mathbb{C}^n$ sont des domaines bornés ou hyperconvexes et les ensembles $E \subset U$ et $F \subset V$ sont seulement non-pluripolaires avec cependant une hypothèse technique supplémentaire sur l'un des facteurs, à savoir que par exemple E est borelien et U pseudoconvexe (cf. [Ng-Ze2], [Ng-Ze3]).

Le cas des applications séparément holomorphes sur des rectangles mixtes à valeurs dans un espace analytique quelconque a été étudié plus tard par B. Shiffman (cf. [Shif1], [Shif2]). Reprenant des méthodes analogues à celles de [Ng-Ze2], [Ng-Ze3] et de [Shif1], [Shif2], O. Alehyane a généralisé ensuite les résultats de [Ng-Ze2], [Ng-Ze3] au cas des applications séparément holomorphes à valeurs dans un espace analytique complexe ayant la propriété de prolongement de Hartogs (PPH), en supprimant l'hypothèse technique sur l'un des facteurs.

Par ailleurs, Saint Raymond ([Ra]) puis J. Siciak ([Si4]) ont obtenu un résultat remarquable sur la caractérisation de l'ensemble singulier des applications séparément analytiques au sens réel sur des ouverts de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Ce résultat a ensuite été généralisé et précisé par Z. Błocki [Bł].

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats principaux de ce travail.

Théorème 2.2.1. *Soient X, Y, Z des espaces analytiques complexes, $K \subset X$, $L \subset Y$ des ensembles boreliens connexes non-pluripolaires de type $\mathcal{F}_\sigma$ et $E \subset K$, $F \subset L$ des ensembles non-pluripolaires quelconques. Soit $f : W := (K \times F) \cup (E \times L) \to Z$ une application séparément holomorphe sur W. Alors il existe un ensemble borelien $E' \subset E^*$ quasi-égal à E dans*

X et un ensemble borelien $F' \subset F^*$ quasi-égal à F dans Y tels que $W' := (K \times F') \cup (E' \times L) \subset \Omega(f)$. En particulier, l'ensemble singulier $S(f, W) := W^* \setminus \Omega(f)$ de f est doublement pluripolaire dans $X \times Y$.

Ce théorème répond clairement à la question **Q.1**. L'exemple qui suit le théorème 2.2.2 montre que l'on ne peut pas faire mieux en général.

Dans le cas d'une application séparément holomorphe sur une croix W inscrite dans un rectangle de type $\mathcal{G}^s_\delta$, on peut préciser le résultat précédent en déterminant un voisinage ouvert admissible de la croix W' donnée par le théorème précédent, auquel f s'étend en une application holomorphe.

Théorème 2.2.2. *Soient X, Y, Z des espaces analytiques complexes et $K \subset X$, $L \subset Y$ des ensembles boreliens connexes non-pluripolaires de type $\mathcal{G}^s_\delta$. Soient $E \subset K$, $F \subset L$ des ensembles non-pluripolaires dans X et Y respectivement et $f : W := (K \times F) \cup (E \times L) \to Z$ une application séparément holomorphe sur W. Alors il existe un ensemble borelien $E' \subset E^*$ quasi-égal à E dans X et un ensemble borelien $F' \subset F^*$ quasi-égal à F dans Y, et il existe un voisinage ouvert Ω de $W' := (K \times F') \cup (E' \times L)$ dans $X \times Y$ et une application $\widetilde{f}$ holomorphe de Ω dans Z tels que $\widetilde{f} = f$ sur $\Omega \cap W$.*

Donnons un exemple simple qui montre clairement que les théorèmes précédents ne peuvent guère être améliorés en géneral.

En effet, considérons l'application $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{P}_1$ définie par $f(z, w) := [(z + w)^2 : (z - w)^2]$ si $(z, w) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) := [1 : 1]$. On vérifie facilement que f est séparément holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) \cup (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$. En particulier on a $S(f, W) = \{(0, 0)\}$. Ainsi l'ensemble singulier considéré dans le théorème 2.2.1 est en général non vide et la croix W' fournie par le théorème 2.2.2 n'est pas égale à W^*.

Remarquons que le même phénomène se produit lorsque Z est un espace analytique contenant une courbe rationnelle.

Observons que si la croix W est inscrite dans un rectange $K \times L$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, plongé de façon naturelle dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$, avec des hypothèses convenables, on obtient de façon immédiate à partir du théorème précédent une version plus générale et plus précise de la condition nécessaire du théorème de Saint Raymond [Ra] et Siciak [Si4].

Corollaire 2.2.3. *Soient $K \subset \mathbb{R}^m$, $L \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles boreliens connexes non-pluripolaires de type $\mathcal{F}_\sigma$ et $E \subset K$, $F \subset L$ des ensembles non-pluripolaires. Soit $f : W := (K \times F) \cup (E \times L) \to \mathbb{C}$ une fonction séparément analytique au sens réel sur W. Alors l'ensemble singulier $S(f, W)$ de f est doublement pluripolaire dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$.*

Si de plus $K \subset \mathbb{R}^m$ et $L \subset \mathbb{R}^n$ sont des ensembles de type $\mathcal{G}^s_\delta$, alors il existe un sous-ensemble borelien $E' \subset E^*$ quasi-égal à E, un sous-ensemble *borelien* $F' \subset F^*$ *quasi-égal à* F *et un voisinage ouvert* Ω *de* $(E' \times L) \cup (K \times F')$ *dans* $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ *tels que la fonction* f *s'étende en une fonction holomorphe sur* Ω.

Enfin dans le cas où l'espace analytique complexe d'arrivée Z possède la propriété de prolongement de Hartogs, ce qui exclut l'exemple précédent (cf. [Iv1]), on obtient des résultats beaucoup plus précis.

Théorème 2.2.4. *Soient* X *et* Y *des variétés analytiques complexes et* Z *un espace analytique complexe possèdant la propriété de prolongement de Hartogs* (*PPH*). *Soient* $U \subset X$, $V \subset Y$ *des domaines*, $E \subset U$, $F \subset V$ *des ensembles non-pluripolaires et* $f : W := (U \times F) \cup (E \times V) \to Z$ *une application séparément holomorphe sur* W. *Alors on a les propriétés suivantes* :

1) *Si* X *et* Y *sont des variétés de Stein*, *l'application* f *s'étend en une application holomorphe sur* $\widetilde{W}$ *à valeurs dans* Z, *autrement dit l'enveloppe d'holomorphie de* W *au sens de l'extension des applications séparément holomorphes coïncide avec* $\widetilde{W}$.

2) *Dans le cas général*, *l'application* f *s'étend en une application holomorphe d'un voisinage ouvert* Ω *de* W^* *à valeurs dans* Z.

On en déduit un résultat intéressant du type "théorème de Terada" (cf. [Te]), qui constitue une généralisation d'un résultat de Shiffman ([Shif], Theorem 1) et du résultat principal de [Ku-Ha].

Corollaire 2.2.5. *Soient* X *et* Y *des variétés analytiques complexes et* Z *un espace analytique complexe possèdant la propriété de prolongement de Hartogs* (*PPH*). *Soient* $U \subset X$ *un domaine*, $L \subset Y$ *un ensemble borelien connexe de type* $\mathcal{G}^s_\delta$ *et non-pluripolaire dans* Y *et* $E \subset U$ *un ensemble non-pluripolaire dans* X. *Alors toute application* $f : W = W(E \times L; U \times L) := U \times L \to Z$ *séparément holomorphe sur* W *s'étend en une application holomorphe d'un voisinage ouvert de* $U \times L^*$ *à valeurs dans* Z.

Si de plus U *est hyperconvexe*, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un sous-ensemble borelien* $E' \subset E$ *tel que* $\mathrm{Cap}^*(E \backslash E'; U) < \varepsilon$, *et il existe un domaine* G *voisinage de* L *tels que* f *s'étende holomorphiquement à un voisinage ouvert* Ω *de* $(E' \times G) \cup (U \times L^*)$.

Le théorème 2.2.4, ainsi qu'un analogue de ce théorème pour les applications séparément méromorphes, ont été obtenus tout d'abord par Alehyane dans le cas où X et Y sont des espaces hermitiens [Al2]. Par la suite, Ivashkovich [Iv2] a donné un analogue du théorème 2.2.2 pour les applications séparément méromorphes sur une croix inscrite dans un rectangle ouvert, avec des techniques différentes. Par ailleurs nos méthodes doivent permettre de généraliser les théorèmes précédents au cas des applications séparément méromorphes (cf. [Al2] pour des résultats partiels).

Pour démontrer les résultats que nous venons d'énoncer, nous aurons besoin d'établir tout d'abord des théorèmes d'extensions du type Hartogs pour les fonctions séparément holomorphes. Dans ce cas les résultats que nous obtenons sont en fait plus précis et constituent des généralisations intéressantes de résultats obtenus notamment dans [Ng-Ze2], [Al1], [Shif1].

Les résultats concernant l'extension des fonctions séparément holomorphes seront énoncés et démontrés au paragraphe 3. Ces résultats seront ensuite utilisés au paragraphe 4 pour démontrer les théorèmes d'extension pour les applications séparément holomorphes énoncés ci-dessus.

3. Extension de fonctions séparément holomorphes. Le but essentiel de ce paragraphe est de démontrer des théorèmes d'extension pour les fonctions séparément holomorphes sur une croix inscrite dans un rectangle ouvert. Cela se fera en plusieurs étapes. L'étape essentielle consiste à montrer que si f est séparément holomorphe sur une telle croix W, alors elle se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert de W^*.

3.1. *Le système doublement orthogonal de Bergman.* Notre méthode repose sur les développements en série suivant un système doublement orthogonal utilisé dans [Ng-Ze2], [Ng-Ze3]. Soient $V \Subset Y$ un domaine et $F \subset V$ un compact non-pluripolaire. On notera H_1 l'espace de Bergman des fonctions holomorphes sur V dont le module est de carré intégrable sur V. Soit H_0 la fermeture de H_1 dans $L^2(F, d\mu)$, μ étant la mesure de Monge–Ampère associée à (F, V). On dira qu'un domaine $V \Subset Y$ est *fortement hyperconvexe* s'il existe un domaine pseudoconvexe $G \Supset V$ et une fonction $\varphi : G \to]-\infty, 0[$ plurisousharmonique continue telle que $V = \{y \in G : \varphi(y) < 0\}$. Le lemme suivant est classique et jouera un rôle fondamental (cf. [Ng-Ze2], [Ng-Ze3], [Ze3]).

LEMME 3.1.1. *Soient $V \Subset Y$ un domaine fortement hyperconvexe et $F \subset V$ un compact non-pluripolaire. Alors il existe une base $(B_j)_{j\geq 1}$ doublement orthogonale dans H_1 et H_0 telle que*

$$\|B_j\|_{H_0} = 1, \quad \forall j \geq 1, \quad \textit{et} \quad \|B_j\|_{H_1} = \mu_j \nearrow +\infty.$$

De plus pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j^{-\varepsilon} < +\infty, \tag{3.1.1}$$

$$\limsup_{j\to+\infty} \frac{\log |B_j(x)|}{\log \mu_j} \leq \omega(x; F; V), \qquad \forall x \in V. \tag{3.1.2}$$

En particulier pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout compact $K \subset V(F, \alpha)$, il existe $c(K, \alpha) > 0$ tel que

$$\|B_j\|_K \leq c(K, \alpha)\mu_j^{\alpha}, \qquad \forall j \geq 1. \tag{3.1.3}$$

La première démonstration de la condition (3.1.1) était basée sur le concept délicat de nucléarité (cf. [Mi], [Za2]). Cependant Borchers en a donné indépendamment une démonstration plus simple dans le cas où $F := \overline{V_0}$ est l'adhérence d'un domaine $V_0 \Subset V$ assez régulier, en considérant une famille à un paramètre complexe de noyaux reproduisants, interpolant convenablement les noyaux de Bergman des deux domaines V_0 et V.

Reprenant une idée analogue dont les prémisses étaient déja dans [Ber], Nguyen Than Van a donné une démonstration plus simple de la condition (3.1.1) lorsque $F := \overline{V_0}$ est l'adhérence d'un domaine $V_0 \Subset V$ assez régulier et en a déduit cette condition dans le cas général par un argument basé sur le concept de n-diamètre dû à Kolmogoroff (cf. [Ng], [Mi]).

Récemment le second auteur a donné une démonstration élémentaire et naturelle du lemme dans un cas assez général suivant les mêmes lignes que [Bo], [Ng], [Ng-Ze2], en déduisant la propriété (3.1.1) de résultats classiques de la théorie spectrale des opérateurs compacts hermitiens définis positifs, dont la construction de Bergman est en fait un cas particulier (cf. [Ze3]). Indiquons simplement les étapes essentielles de cette preuve.

Démonstration du lemme 3.1.1. Soit J l'opérateur de restriction qui à tout $h \in H_1$ fait correspondre $h_{|F} \in H_0$. L'opérateur J est injectif et le théorème de Montel implique que J est compact. Soit $\mathcal{O}(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur V avec la topologie usuelle. Comme V est fortement hyperconvexe, il existe un domaine pseudoconvexe $G \Supset V$ et une fonction $\varphi : G \to\ ]-\infty, 0[$ plurisousharmonique continue telle que $V = \{y \in G : \varphi(y) < 0\}$. Le domaine V est alors de Runge dans G, i.e. $\overline{\mathcal{O}(G)} = \mathcal{O}(V)$ et comme $\mathcal{O}(G) \subset H_1 \subset \mathcal{O}(V)$, on en déduit facilement que les injections

$$\mathcal{O}(G) \hookrightarrow H_1 \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \hookrightarrow H_0 \tag{3.1.4}$$

sont continues et à images denses.

La construction de la base orthogonale s'obtient alors en appliquant la méthode des systèmes doublement orthogonaux de S. Bergman [Ber] développée dans ce contexte dans [Ng-Ze3]. La condition (3.1.1) sur la suite (μ_j) se démontre facilement lorsque F est l'adhérence d'un domaine assez régulier contenant F et relativement compact dans V, en considérant une famille à un paramètre complexe interpolant les noyaux de Bergman des deux domaines V_0 et $V_1 := V$. Elle s'en déduit facilement dans le cas général en comparant la suite $\mu_j(F, V)$ à la suite $\mu_j(V_0, V)$ associée à un couple (V_0, V), où V_0 est un domaine assez régulier contenant F et relativement compact dans V (cf. [Ze3]).

Pour prouver l'estimation (3.1.2), on procède de la façon suivante. D'après la continuité des injections (3.1.4), on montre que la fonction définie par $u(x) := (\limsup_j (\log |B_j| / \log \mu_j))^*$ est plurisousharmonique sur V et vérifie l'inégalité $u \leq 1$ sur V. Par un raisonnement direct et simple basé sur la condition de convergence (3.1.1) (cf. [Ze3]), on montre que $u \leq 0$ μ-presque partout sur F, ce qui implique l'inégalité (3.1.2) grâce à la propriété de conservation de la P-mesure (2.1.6). Quant aux estimations (3.1.3), elles résultent immédiatement de (3.1.2) en appliquant le lemme de Hartogs (cf. [Ze2]). ∎

3.2. *Fonctions séparément holomorphes.* Le résultat suivant constitue l'étape essentielle dans les démonstrations des théorèmes sur l'extension des fonctions séparément holomorphes qui seront énoncés au paragraphe suivant.

Proposition 3.2.1. *Soient $U \Subset X$, $V \Subset Y$ des domaines et $E \subset U$, $F \subset V$ non-pluripolaires. On suppose de plus que F est compact et que V est fortement hyperconvexe. Alors si $f : W \to \mathbb{C}$ est séparément holomorphe, il existe une fonction g holomorphe sur $\widetilde{W}$ telle que $g = f$ sur $\widetilde{W} \cap W$.*

Démonstration. Cela se fait en trois étapes.

1) On suppose f continue et bornée sur $U \times F$. On pose alors

$$M := \sup_{x \in U,\, y \in F} |f(x,y)| < +\infty.$$

Soient μ la mesure de Monge–Ampère associée au couple (F, V), $H_1 := L^2(V, d\lambda) \cap \mathcal{O}(V)$ l'espace de Bergman des fonctions holomorphes dont le module est de carré intégrable sur V, et H_0 la fermeture de H_1 dans $L^2(F, d\mu)$. D'après le lemme 3.1.1, il existe une base doublement orthogonale $(B_j)_{j \geq 1}$ dans H_1 et H_0 telle que

$$\|B_j\|_{H_0} = 1, \qquad \|B_j\|_{H_1} = \mu_j \nearrow +\infty.$$

De plus $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j^{-\varepsilon} < +\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Pour chaque $x \in E$, la fonction $f_x = f(x, \cdot)$ est holomorphe sur V, il existe donc des coefficients $c_j(x)$ tels que

$$f_x(y) = f(x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j(x) B_j(y) \quad \text{pour tout } y \in V$$

avec convergence uniforme sur tout compact de V. Les coefficients c_j sont donnés par la formule

$$c_j(x) = \int_F f(x,y) \overline{B}_j(y)\, d\mu(y).$$

D'autre part, la fonction

$$U \ni x \mapsto \int_F f(x,y) \overline{B}_j(y)\, d\mu(y)$$

est holomorphe sur U, car f est continue et bornée sur $U \times F$ et $f^y = f(\cdot, y)$ est holomorphe sur U pour tout $y \in F$. Notons encore c_j cette fonction.

Alors on a les estimations suivantes :

$$|c_j(x)| \le M[\mu(F)]^{1/2}, \quad \forall x \in U,\ \forall j \ge 1, \tag{3.2.1}$$

et

$$|c_j(x)| = \frac{1}{\mu_j^2}\Big|\int\limits_V f(x,y)\overline{B}_j(y)\,d\lambda(y)\Big| \le \frac{\gamma(x)}{\mu_j}, \quad \forall x \in E,\ \forall j \ge 1, \tag{3.2.2}$$

où

$$\gamma(x) = \Big(\int\limits_V |f(x,y)|^2\,d\lambda(y)\Big)^{1/2} \quad \text{pour } x \in E.$$

Il en résulte que la suite

$$v_j := \frac{\log|c_j|}{\log \mu_j}, \quad j \ge 1,$$

est uniformément majorée sur U.

Posons $v := \limsup_{j\to+\infty} v_j$. Les inégalités précédentes entraînent que $v \le 0$ sur U et $v \le -1$ sur E. Soit $A := \{x \in U : v(x) < v^*(x)\}$. On a $v^* + 1 \le 0$ sur $E \setminus A$ et $v^* + 1 \le 1$ sur U. Comme v^* est faiblement plurisousharmonique sur U, il en résulte que $v^* \le \omega^*(\cdot; E\setminus A, U) - 1$ sur U. Or A est pluripolaire et $U \Subset X$ relativement compact, donc $\omega^*(\cdot; E\setminus A; U) = \omega^*(\cdot; E; U)$. Le lemme de Hartogs implique que pour tout $\alpha \in\,]0,1[$ et tout compact $K \subset U(E,\alpha)$, il existe une constante $c(K,\alpha)$ telle que

$$\|c_j\|_K \le c(K,\alpha)\mu_j^{\alpha-1} \quad \text{pour tout } j \ge 1.$$

Soit $\alpha \in\,]0,1[$ fixé ; montrons que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} c_j B_j$ converge normalement sur tout compact de $U(E,\alpha) \times V(F, 1-\alpha)$.

Soient $K \subset U(E,\alpha)$, $L \subset V(F,1-\alpha)$ des compacts. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K \Subset U(E,\alpha-\varepsilon)$ et $L \Subset V(F, 1-\alpha-\varepsilon)$. On a donc

$$\|c_j\|_K\|B_j\|_L \le c(K,\alpha-\varepsilon)c(L,1-\alpha-\varepsilon)\mu_j^{-2\varepsilon}, \quad \forall j \ge 1.$$

Comme $\sum_{j\ge 0}\mu_j^{-2\varepsilon} < +\infty$, il en résulte que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} c_j B_j$ converge normalement sur tout compact de $U(E,\alpha) \times V(F, 1-\alpha)$. Comme

$$\bigcup_{0<\alpha<1} U(E,\alpha) \times V(F,1-\alpha) = \widetilde{W},$$

on en déduit que cette série converge normalement sur tout compact de $\widetilde{W}$ vers une fonction g holomorphe sur $\widetilde{W}$. Il est clair par définition même que $g = f$ sur $\widetilde{W} \cap W$.

2) On suppose maintenant $E \Subset U$. Soit $(U_s)_{s\ge 1}$ une suite croissante de domaines tels que $E \Subset U_s \Subset U$ pour tout $s \ge 1$ et $\bigcup_{s\ge1} U_s = U$. Fixons $s \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \ge 1$, posons

$$F_k = F_{s,k} = \{y \in F : |f(x,y)| \le k,\ \forall x \in U_s\}.$$

Il est clair que $F_k \subset F_{k+1}$ et $\bigcup_{k\geq 1} F_k = F$, donc il existe $k_0 \geq 1$ tel que F_k soit non-pluripolaire pour tout $k \geq k_0$.

On démontre facilement par un argument de famille normale que l'ensemble F_k est fermé et que f est continue sur $U_s \times F_k$.

D'après la première étape, pour tout $k \geq k_0$, il existe une fonction holomorphe $g_k = g_k^s$ sur $\widetilde{W}_k$ et égale à f sur $\widetilde{W}_k \cap W_k$, où

$$W_k = W_k^s := (E \times V) \cup (U_s \times F_k).$$

On obtient alors une suite de couples $(g_k^s, \widetilde{W}_k^s)_k$ avec $\widetilde{W}_k^s \subset \widetilde{W}_{k+1}^s$, $\bigcup_{k\geq k_0} \widetilde{W}_k^s = \widetilde{W}^s$ et $g_k^s = f$ sur $\widetilde{W}_k^s \cap W_k^s$ pour tout $k \geq k_0$.

Par les mêmes arguments que dans la première étape, on montre que $g_k^s = g_{k+1}^s$ sur $\widetilde{W}_k^s \cap \widetilde{W}_{k+1}^s = \widetilde{W}_k^s$. On peut donc définir une fonction g^s sur $\widetilde{W}^s = \bigcup_{k\geq k_0} \widetilde{W}_k^s$ en posant $g^s := g_k^s$ sur $\widetilde{W}_k^s$ pour $k \geq 1$. La fonction g^s ainsi définie est holomorphe sur $\widetilde{W}^s$ et vérifie $g^s = f$ sur $\widetilde{W}^s \cap W^s$. De la même façon, on voit que les éléments (g^s, W^s) se recollent en une fonction holomorphe g sur $\widetilde{W} = \bigcup_s \widetilde{W}^s$ telle que $g = f$ sur $\widetilde{W} \cap W$.

3) Passons au cas général. On écrit alors $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$, où $(E_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles non-pluripolaires et relativement compacts dans U. L'étape 2 entraîne l'existence d'une suite de couples $(g_k, \widetilde{W}_k)_k$, où $g_k \in \mathcal{O}(\widetilde{W}_k)$ et telle que $g_k = f$ sur $\widetilde{W}_k \cap W_k$ pour tout $k \geq 1$. En recollant les diverses extensions comme précédemment, on obtient une fonction $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\widetilde{W})$ telle que $\widetilde{f} = f$ sur $\widetilde{W} \cap W$. ∎

À partir du résultat précédent on peut démontrer le théorème suivant qui est une généralisation au cas des espaces analytiques singuliers du résultat principal de [Ng-Ze2].

Proposition 3.2.2. *Soient $U \Subset X$, $V \Subset Y$ des domaines relativement compacts et $E \subset U$, $F \subset V$ des ensembles non-pluripolaires. On suppose que F est un borelien et que V est pseudoconvexe. Alors si $f : W \to \mathbb{C}$ est séparément holomorphe sur W, il existe une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur $\widetilde{W}$ telle que $\widetilde{f} = f$ sur $\widetilde{W} \cap W$.*

Démonstration. On suppose d'abord que F est de type $\mathcal{F}_\sigma$.

On peut alors écrire $F = \bigcup_{k\geq 1} F_k$ où $(F_k)_k$ est une suite croissante de compacts non-pluripolaires. En posant $W_k := (E \times V) \cup (U \times F_k)$ et en appliquant la proposition 3.2.1, on obtient une fonction g_k holomorphe sur $\widetilde{W}_k$ telle que $g_k = f$ sur $\widetilde{W}_k \cap W_k$. Comme $\bigcup_k \widetilde{W}_k = \widetilde{W}$, on en déduit comme dans la démonstration de la proposition 3.2.1 que les g_k se recollent en une fonction g holomorphe sur $\widetilde{W}$ telle que $g = f$ sur $\widetilde{W} \cap W$.

Supposons maintenant que F soit un borelien quelconque. Soit $(V_s)_s$ une suite croissante de domaines pseudoconvexes relativement compacts dans V telle que $F_s := F \cap V_s$ soit non-pluripolaire pour tout $s \geq 1$ et $\bigcup_{s\geq 1} V_s = V$.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$ fixé et soit $t \geq s$. Comme F est un borelien, d'après Bedford et Taylor [Be-Ta], il existe $F_s' \subset F_s$ de type $\mathcal{F}_\sigma$ tel que $\omega(\cdot; F_s'; V_t) = \omega(\cdot; F_s; V_t)$ sur V_t. On applique la quatrième étape avec F_s' et V_t et on recolle les morceaux pour $t \geq s$. On obtient alors une suite $(g_s, \widetilde{W}_s)_s$ vérifiant $g_s = f$ sur $\widetilde{W}_s \cap W_s$. Ensuite, en recollant les morceaux pour tous les $s \geq 1$, on obtient un prolongement $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\widetilde{W})$ de f tel que $\widetilde{f} = f$ sur $\widetilde{W} \cap W$. ∎

3.3. *Propagation de l'holomorphie.* Le but de cette section est de montrer que l'holomorphie se propage à partir d'un petit rectangle ouvert dans la direction où il y a holomorphie partielle. L'étape cruciale est la suivante.

LEMME 3.3.1. *Soient $U \subset X$ et $V_0 \subset V \Subset Y$ des domaines, et $E \subset U$ un ensemble non-pluripolaire. Soit $f : U \times V_0 \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que pour tout $x \in E$, la fonction partielle $f(x, \cdot)$ se prolonge holomorphiquement à V. Alors pour tout $a \in E^*$ et pour tout domaine $G \Subset V$ vérifiant $G \cap V_0 \neq \emptyset$, il existe un voisinage ouvert connexe U_a de a et une fonction h_a holomorphe sur $U_a \times G$ tels que $h_a = f$ sur $U_a \times (G \cap V_0)$. En particulier, f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $E^* \times V$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{D}$ une base dénombrable d'ouverts de V formée de domaines fortement hyperconvexes. Il existe alors une suite finie de domaines $D_1, \ldots, D_r \in \mathfrak{D}$ tels que $\overline{G} \subset \bigcup_{p=1}^r D_p$. On peut également choisir des domaines fortement hyperconvexes $\{G_j : 1 \leq j \leq r\}$ tels que $D_j \Subset G_j \Subset V$ pour $j = 1, \ldots, r$. Grâce à la connexité de G, quitte à permuter les ouverts D_p, on peut supposer que $V_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ et $D_p \cap \bigcup_{l=1}^{p-1} D_l \neq \emptyset$ pour $2 \leq p \leq r$. Posons $V_p = V_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_p$ pour $1 \leq p \leq r$ de sorte que les ouverts V_p sont tous connexes.

On va construire, par récurrence sur p $(0 \leq p \leq r)$, des ouverts connexes U_p contenant a et des fonctions $f_p \in \mathcal{O}(U_p \times V_p)$ tels que $f_p = f$ sur $U_p \times V_0$. Pour $p = 0$, on prend $U_0 = U$ et $f_0 = f$. Soit $1 \leq p \leq r$ et supposons construits l'ouvert U_{p-1} et la fonction $f_{p-1} \in \mathcal{O}(U_{p-1} \times V_{p-1})$ tels que $f_{p-1} = f$ sur $U_{p-1} \times V_0$.

Observons que pour tout $x \in E \cap U_{p-1}$, l'application partielle f_x se prolonge en une fonction holomorphe $\widetilde{f}_x$ sur V et qu'alors $\widetilde{f}_x(y) = f_{p-1}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E \cap U_{p-1} \subset V_{p-1}$. Posons $E_{p-1} := E \cap U_{p-1} \subset U_{p-1}$ et $F_p := D_p \cap V_{p-1} \subset G_p$. On peut donc définir une fonction h sur l'ensemble

$$W_p := (U_{p-1} \times F_p) \cup (E_{p-1} \times G_p)$$

en posant $h(x,y) := \widetilde{f}_x(y)$ si $(x,y) \in E_{p-1} \times G_p$ et $h(x,y) := f_{p-1}(x,y)$ si $(x,y) \in U_{p-1} \times F_p$.

Comme U_{p-1} est pseudoconvexe, il résulte de la proposition 3.2.2 qu'il existe une fonction $\widetilde{h}$ holomorphe sur l'ouvert

$$\widetilde{W}_p := \{(x,y) \in U_{p-1} \times G_p : \omega(x; E_{p-1}; U_{p-1}) + \omega(y; F_p; G_p) < 1\}$$

telle que $\widetilde{h} = h$ sur $\widetilde{W}_p \cap W_p$. Remarquons que $U_{p-1} \times F_p \subset \widetilde{W}_p \cap W_p$ et que donc $\widetilde{h} = h = f_{p-1}$ sur $U_{p-1} \times F_p$. Par conséquent on a $\widetilde{h} = f_{p-1}$ sur $U_{p-1} \times (D_p \cap V_{p-1})$. Comme $D_p \Subset G_p$, il en résulte qu'il existe un domaine pseudoconvexe $U_p \Subset U_{p-1}$ voisinage de a tel que $U_p \times D_p \subset \widetilde{W}_p$. Il en résulte que l'on peut donc définir une fonction f_p sur $U_p \times V_p$ en posant

$$f_p = \begin{cases} \widetilde{h} & \text{sur } U_p \times D_p, \\ f_{p-1} & \text{sur } U_p \times V_{p-1}. \end{cases}$$

Il est clair que f_p est holomorphe sur $U_p \times V_p$ et que $f_p = f$ sur $U_p \times V_0$. Ainsi pour $p = r$ on obtient une fonction f_r holomorphe sur $U_r \times V_r$ telle que $f_r = f$ sur $U_r \times V_0$. En posant $U_a := U_r$, la restriction h_a de f_r à $U_a \times G$ est la fonction cherchée. ∎

En appliquant les résultats précédents, on va montrer que si f est une fonction séparément holomorphe sur W alors elle admet une extension holomorphe au voisinage de chaque point de W^*, sans hypothèse sur les facteurs. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.2. *Soient $U \subset X$, $V \subset Y$ des domaines, $E \subset U$, $F \subset V$ des ensembles non-pluripolaires et soit $f : W \to \mathbb{C}$ une fonction séparément holomorphe sur W. Alors f se prolonge holomorphiquement au voisinage de chaque point de $W^* := (U \times F^*) \cup (E^* \times V)$.*

Démonstration. En effet, soient $a \in E^*$, $U_1 \Subset U$ un domaine quelconque contenant a et $V_1 \Subset V$ un domaine hyperconvexe tel que $F \cap V_1$ soit non-pluripolaire. Posons $E_1 := E \cap U_1$ et définissons, pour chaque $k \geq 1$, l'ensemble $F_k := \{y \in F : \sup_{x \in U_1} |f(x,y)| \leq k\}$. Alors $F = \bigcup_j F_j$ et comme F est non-pluripolaire, il existe $k_0 \geq 1$ tel que F_k soit non-pluripolaire pour tout $k \geq k_0$.

Posons $F_0 := F_{k_0}$ et soit $V_2 \Subset V_1$ un domaine fortement hyperconvexe tel que $F_1 := F_0 \cap V_2$ soit non-pluripolaire. L'ensemble $L_1 := \overline{F}_1 = \overline{F_0 \cap V_2} \subset V_1$ est alors un compact non-pluripolaire dans V_1.

Soient $y_0 \in L_1$ et $(y_k)_k$ une suite de points de F_1, convergeant vers y_0. Considérons la suite de fonctions définie par $g_k(x) := f(x, y_k)$ pour $k \geq 1$ et $x \in U_1$. Pour tout $k \geq 1$, g_k est holomorphe sur U_1 et $|g_k| \leq c$ dans U_1. D'après le théorème de Montel, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la suite (g_k) converge vers une fonction g^{y_0} holomorphe sur U_1. Il est clair que $g^{y_0} = f(\cdot, y_0)$ sur E_1. De plus la fonction g^{y_0} ne dépend que du point y_0 mais non de la suite $(y_k)_k$ de F_1 qui converge vers y_0. En effet, soit $(w_j)_j \subset F_1$ une autre suite convergeant vers y_0 et telle que la suite de fonctions holomorphes correspondante converge vers une fonction holomorphe h^{y_0} sur U_1. Alors on aura $g^{y_0} = f(\cdot, y_0) = h^{y_0}$ sur E_1. D'après le principe du prolongement analytique généralisé on a $g^{y_0} = h^{y_0}$ sur U_1, puisque E_1 est non-pluripolaire et que U_1 est un ouvert connexe.

Soient $W_1 := (U_1 \times L_1) \cup (E_1 \times V_1)$ et $g : W_1 \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} g^y(x) & \text{si } (x,y) \in U_1 \times L_1, \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in E_1 \times V_1. \end{cases}$$

Alors g est séparément holomorphe sur W_1.

Ainsi $L_1 \subset V_1$ est un compact non-pluripolaire, V_1 est un domaine fortement hyperconvexe et g est une fonction séparément holomorphe sur W_1. D'après la proposition 3.2.1, pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une fonction g_α holomorphe sur $U_1(E_1,\alpha) \times V_1(L_1, 1-\alpha)$ telle que $g_\alpha = g$ sur $W_1 \cap (U_1(E_1,\alpha) \times V_1(L_1, 1-\alpha))$.

Ainsi la fonction g_α est holomorphe sur le rectangle $U_1(E_1,\alpha) \times V_1(L_1, 1-\alpha)$ et pour tout $x \in E_1^* \subset U_1(E_1,\alpha)$, la fonction partielle $g_\alpha(x,\cdot) = g(x,\cdot) = f(x,\cdot)$ sur $V_1(L_1, 1-\alpha)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur V. Le lemme 3.3.1 entraîne que g_α, et donc f, a une extension holomorphe au voisinage ouvert de chaque point de $E_1^{**} \times V = (E^* \cap U_1) \times V$. Comme U_1 est un voisinage d'un point arbitraire de E^*, il en résulte que f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $E^* \times V$. Par symétrie, on en déduit que f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de W^*. ∎

3.4. *Extension des fonctions séparément holomorphes.* Le but de ce paragraphe est de démontrer deux résultats importants sur l'extension des fonctions séparément holomorphes.

On dira qu'un domaine $U \subset X$ possède une *extension holomorphe pseudoconvexe* s'il existe un domaine pseudoconvexe $\widetilde{U}$ d'un espace analytique $\widetilde{X}$ tel que toute fonction holomorphe sur U se prolonge en une fonction holomorphe sur $\widetilde{U}$.

Théorème 3.4.1. *Soient X, Y des espaces analytiques complexes, $U \subset X$, $V \subset Y$ des domaines et $E \subset U$, $F \subset V$ des ensembles non-pluripolaires et $W := W(E \times F; U \times V)$. Soit $f : W \to \mathbb{C}$ une fonction séparément holomorphe sur W. Alors il existe un voisinage ouvert Ω de W^* dans $U \times V$ et une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur Ω telle que $\widetilde{f} = f$ sur $\Omega \cap W$.*

Théorème 3.4.2. *Soient X, Y des espaces analytiques complexes, $U \subset X$, $V \subset Y$ des domaines, $E \subset U$, $F \subset V$ des ensembles non-pluripolaires et $W := (U \times F) \cup (E \times V)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1) *Si* U *ou* V *possède une extension holomorphe pseudoconvexe, alors pour toute fonction* $f : W \to \mathbb{C}$ *séparément analytique sur* W, *il existe une fonction* $\widetilde{f}$ *holomorphe sur* $\widetilde{W}$ *telle que* $\widetilde{f} = f$ *sur* $\widetilde{W} \cap W$.

2) *Si de plus* X *et* Y *sont des variétés de Stein, alors l'enveloppe d'holomorphie de* W *coïncide avec la variété de Stein suivante :*

$$\widehat{W} := \{(x, y) \in \widehat{U} \times \widehat{V} : \widetilde{\omega}(x; E; \widehat{U}) + \widetilde{\omega}(y; F; \widehat{V}) < 1\}$$

où $\widehat{U}$ *et* $\widehat{V}$ *sont les enveloppes d'holomorphie de* U *et* V *respectivement.*

Le théorème 3.4.1 sera une conséquence immédiate du théorème 3.3.2 et du résultat suivant que nous avons préféré énoncer sous une forme générale de façon à l'utiliser de nouveau au paragraphe 4.

Proposition 3.4.3. *Soient* X, Y, Z *des espaces analytiques complexes,* $U \subset X$, $V \subset Y$ *des domaines,* $A \subset U$, $B \subset V$ *des ensembles non-pluripolaires. Soit* $f : \Sigma := (U \times B) \cup (A \times V) \to Z$ *une application qui s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de* Σ. *Alors, si on pose* $A' := A \cap A^*$ *et* $B' := B \cap B^*$, *il existe un voisinage ouvert* Ω *de* $\Sigma' := (U \times B') \cup (A' \times V)$ *et une application holomorphe* $\widetilde{f}$ *de* Ω *dans* Z *telle que* $\widetilde{f} = f$ *sur* $\Omega \cap \Sigma$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat se fait en plusieurs étapes.

Étape 1. On démontre tout d'abord que pour tout domaine $G \Subset V$ tel que $G \cap B^* \neq \emptyset$, il existe un voisinage consistant $U' \subset U$ de A' et une application holomorphe h sur $U' \times G$ telle que $h = f$ sur $(U' \times G) \cap \Sigma$. En effet, fixons un point $a \in A' = A \cap A^*$. D'après l'hypothèse, pour tout $b \in \overline{G}$, il existe un domaine $U^b \subset U$ voisinage de a, un domaine $V^b \subset V$ tel que $V^b \cap B^* \neq \emptyset$ voisinage de b et une application h^b holomorphe sur $U^b \times V^b$ telle que $h^b = f$ sur $(U^b \times V^b) \cap \Sigma$. Par compacité, on peut recouvrir $\overline{G}$ par un nombre fini de domaines V^{b_i} $(1 \leq i \leq m)$. En posant $U_a := \bigcap_{i=1}^m U^{b_i}$, on obtient un voisinage ouvert connexe de a tel que $h^{b_i} = f$ sur $(A \cap U_a) \times V^{b_i}$ pour chaque $i = 1, \ldots, m$. Ainsi pour i, k compris entre 1 et m, on a $h^{b_i} = h^{b_k}$ sur $(A \cap U_a) \times (V^{b_i} \cap V^{b_k})$. Soit V_a la composante connexe de l'ouvert $\bigcup_{i=1}^m V^{b_i}$ qui contient $\overline{G}$. Comme $U_a \cap A$ est non-pluripolaire et que U_a est connexe, il en résulte, grâce au principe du prolongement analytique généralisé, que les applications holomorphes h^{b_i} se recollent en une application h_a holomorphe sur $U_a \times V_a$ telle que $h_a = f$ sur $(A \cap U_a) \times G$.

Le but maintenant est de recoller les extensions holomorphes h_a de f à $U_a \times G$ obtenues précédemment. Remarquons que $h_a = f$ sur $(A \cap U_a) \times (B \cap G)$ et puisque $A \cap U_a$ est non-pluripolaire dans le domaine U_a, il résulte du théorème de prolongement analytique généralisé que $h_a = f$ sur $U_a \times (B \cap G)$. Soient maintenant $a, b \in A'$ deux points distincts tels que

$U_a \cap U_b \neq \emptyset$, où $U_a \subset U$ et $U_b \subset U$ sont des domaines voisinages de a et b respectivement tels qu'il existe des extensions holomorphes h_a et h_b de f aux ouverts $U_a \times G$ et $U_b \times G$ respectivement. Alors $h_a = f = h_b$ sur $(U_a \cap U_b) \times (B \cap G)$. Comme $B \cap G$ est non-pluripolaire et G est connexe, on en déduit que $h_a = h_b$ sur $(U_a \cap U_b) \times G$. En posant $U' := \bigcup_{a \in A'} U_a$, on obtient alors un voisinage consistant de A' et une application holomorphe h sur $U' \times G$ telle que $h = f$ sur $(U' \times G) \cap \Sigma$.

Étape 2. Passons maintenant au cas général. Pour se ramener à l'étape 1, considérons deux suites exhaustives $(U_j)_j$ et $(V_j)_j$ de domaines relativement compacts de U et V respectivement. Posons $A_j := A \cap U_j$, $B_j := B \cap V_j$ et $\Sigma_j := (U_j \times B_j) \cup (A_j \times V_j)$ pour $j \geq 1$ et désignons par f_j la restriction de f à la croix Σ_j. Il existe alors $j_0 \geq 1$ tel que A_j et B_j soit non-pluripolaires dans X et Y respectivement. D'après la première étape, pour chaque $j \geq j_0$, il existe des voisinages consistants $U'_j \subset U_j$ et $V'_j \subset V_j$ de $A'_j := A_j \cap A^*_j$ et $B'_j := B_j \cap B^*_j$ respectivement et une application h_j holomorphe sur l'ouvert $\Omega_j := (U'_j \times V_j) \cup (U_j \times V'_j)$ à valeurs dans Z telle que $h_j = f_j$ sur $\Omega_j \cap \Sigma_j$. Montrons que les applications holomorphes $h_j : \Omega_j \to Z$ se recollent en une application holomorphe h sur l'ouvert $\Omega := \bigcup_j \Omega_j$. En effet, fixons deux indices j et k tels que $k \geq j \geq j_0$, de sorte que l'on a la formule suivante :

$$\Omega_k \cap \Omega_j = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4,$$

où

$$R_1 := (U'_j \cap U'_k) \times V_j, \qquad R_2 := U'_j \times (V_j \cap V'_k),$$
$$R_3 := (U_j \cap U'_k) \times V'_j \qquad R_4 := U_j \times (V'_j \cap V'_k).$$

Remarquons que $A'_j = A_j \cap A^*_j = A \cap A^* \cap U_j$ et $B'_j = B \cap B^* \cap V_j$ de sorte que $A'_j \times B'_j$ est contenu dans chacun des rectangles R_i $(1 \leq i \leq 4)$. De plus, pour un rectangle donné $R = R_i$ avec $1 \leq i \leq 4$, l'une de ses projections est un voisinage consistant de la projection correspondante de l'ensemble $A'_j \times B'_j$ et l'on a $h_k = f = h_j$ sur $\Omega_k \cap \Omega_j \cap \Sigma_j$. Alors, en appliquant le principe du prolongement analytique généralisé aux restrictions de h_j et h_k au rectangle R par rapport à l'un des facteurs, on conclut que $h_k = h_j$ sur R.

En effet, considérons le premier rectangle $R_1 = (U'_j \cap U'_k) \times V_j$. Comme $(U'_j \cap U'_k) \times B'_j \subset \Sigma_j$, on a $h_k = f = h_j$ sur $(U'_j \cap U'_k) \times B'_j \subset R_1$. Comme $B'_j \subset V_j$ est non-pluripolaire et que V_j est connexe, il résulte du principe du prolongement analytique généralisé par rapport au second facteur que $h_k = h_j$ sur $(U'_j \cap U'_k) \times V_j$. Le même raisonnement vaut pour le rectangle R_3.

Considérons maintenant le rectangle $R_2 = U'_j \times (V_j \cap V'_k)$. Comme $A'_j \times (V_j \cap U'_j) \subset \Sigma_j$, on a $h_k = f = h_j$ sur $A'_j \times (V_j \cap U'_j) \subset R_2$. Comme U'_j est un voisinage consistant de A'_j, il résulte du principe du prolongement analytique généralisé par rapport au premier facteur que $h_k = h_j$ sur $U'_j \times (V_j \cap V'_k)$. Le même raisonnement vaut pour le rectangle R_4.

Par conséquent, les applications holomorphes h_j se recollent en une application holomorphe sur $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$ qui étend l'application f. De plus, en posant $\Sigma'_j := (A'_j \times V_j) \cup (U_j \times B'_j)$, Ω_j est un voisinage de Σ'_j et donc Ω est un voisinage de $\Sigma' = \bigcup_j \Sigma'_j$. Ceci achève la démonstration de notre résultat. ∎

Nous pouvons maintenant démontrer facilement le théorème 3.4.1.

Démonstration du théorème 3.4.1. En effet, d'après le théorème 3.3.2, f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $W^* = (U \times F^*) \cup (E^* \times V)$. En observant que $A := E^*$ et $B := F^*$ sont des ensembles non-pluripolaires dans X et Y respectivement et en posant $\Sigma := (U \times B) \cup (A \times V)$, on déduit de la proposition 3.4.3 qu'il existe un voisinage ouvert de $\Sigma' := (U \times B') \cup (A' \times V)$ auquel la fonction f s'étend holomorphiquement, où $A' := A \cap A^*$ et $B' := B \cap B^*$. Remarquons maintenant que $A' = E^*$, $B' = F^*$ et donc $\Sigma' = W^*$, ce qui prouve le résultat voulu. ∎

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.4.2.

Démonstration du théorème 3.4.2. 1) Pour démontrer la première assertion, on procède en trois étapes.

Étape 1. Supposons que $U \Subset X$ et $V \Subset Y$ sont des domaines relativement compacts et que V est pseudoconvexe. Le théorème 3.4.1 implique qu'il existe un voisinage ouvert Ω de W^* et une fonction g holomorphe sur Ω telle que $g = f$ sur $\Omega \cap W$. Comme la fonction g est séparément holomorphe sur W^* et que E^* et F^* sont des ensembles boreliens non-pluripolaires, la proposition 3.2.2 implique que g a une extension holomorphe $\widetilde{f}$ à $\widetilde{W}$.

Étape 2. Supposons que V est pseudoconvexe. Soient $(U_j)_j$ et $(V_j)_j$ deux suites exhaustives de domaines relativement compacts de U et V respectivement telles que les domaines V_j soient pseudoconvexes. Posons $E_j := E \cap U_j$, $F_j := F \cap V_j$ et $W_j := (U_j \times F_j) \cup (E_j \times V_j)$ pour $j \geq 1$. Il existe alors $j_0 \geq 1$ tel que E_j et F_j soient non-pluripolaires pour tout $j \geq j_0$. On voit facilement que $E^* \subset \bigcup_{j \geq j_0} E_j^*$ et $F^* \subset \bigcup_{j \geq j_0} F_j^*$. D'après la première étape, pour $j \geq j_0$, il existe une fonction $\widetilde{f}_j$ holomorphe sur $\widetilde{W}_j$ telle que $\widetilde{f}_j = f$ sur $\widetilde{W}_j \cap W_j$. Remarquons que $\widetilde{W}_j \subset \widetilde{W}_{j+1}$ et que $\widetilde{f}_{j+1} = f = \widetilde{f}_j$ sur $\widetilde{W}_j \cap W_j$. D'après le principe du prolongement analytique généralisé, on en déduit aisément que $\widetilde{f}_{j+1} = \widetilde{f}_j$ sur $\widetilde{W}_j$, ce qui prouve que les fonctions $\widetilde{f}_j$ se recollent en une fonction holomorphe sur $\bigcup_j \widetilde{W}_j$ qui étend f. Posons $u_j := \omega(\cdot; E_j^*; U_j)$ pour $j \geq 1$. La suite $(u_j)_j$ décroît vers une fonction plurisousharmonique $u \leq 1$ sur U. De plus, il est clair que $u_j \leq 0$ sur E_j^* pour tout $j \geq 1$, ce qui implique que $u \leq 0$ sur E^* et par suite $u \leq \omega(\cdot; E^*; U)$. De même, si on définit $v_j := \omega(\cdot; F_j^*; V_j)$, on obtient une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques qui converge vers une fonction v plurisousharmonique sur V vérifiant $v \le \omega^*(\cdot; F^*; V)$. Par conséquent $\widetilde{W} \subset \bigcup_j \widetilde{W}_j$, ce qui démontre que f a une extension holomorphe à $\widetilde{W}^*$.

Étape 3. Si $\widehat{V}$ est une extension pseudoconvexe de V, toute fonction holomorphe sur V se prolonge en une fonction holomorphe sur $\widehat{V}$. Par conséquent la fonction f séparément holomorphe sur W se prolonge en une application séparément holomorphe sur la croix $W' := (U \times F) \cup (E \times \widehat{V})$. D'après l'étape 2, il en résulte que f s'étend holomorphiquement à l'ouvert $\widetilde{W'}$. Comme $\widetilde{W} \subset \widetilde{W'}$, le résultat cherché en découle.

2) Si X et Y sont des variétés de Stein, alors les domaines U et V ont des enveloppes d'holomorphie respectives $\widehat{U}$ et $\widehat{V}$ qui sont des variétés de Stein. Il est alors clair que f se prolonge en une application séparément holomorphe sur $W' := (\widehat{U} \times F^*) \cup (E^* \times \widehat{V})$ qui, d'après la première partie de la démonstration, s'étend holomorphiquement à $\widetilde{W'} = \widehat{W}$. Comme $\widehat{W}$ est pseudoconvexe dans la variété de Stein $\widehat{U} \times \widehat{V}$, c'est une variété de Stein, ce qui prouve notre assertion. ∎

4. Applications séparément holomorphes. Nous allons maintenant utiliser les résultats de la section 3 pour démontrer les résultats d'extension pour les applications séparément holomorphes énoncés au paragraphe 2.

4.1. *Propagation de l'holomorphie pour les applications.* Soient X, Y, Z des espaces analytiques complexes. Le résultat qui suit constitue l'étape essentielle dans la démonstration du théorème de Hartogs pour les applications séparément holomorphes. C'est l'analogue pour les applications du lemme 3.3.1.

Lemme 4.1.1. *Soient $K \subset X$, $L \subset Y$ des ensembles boreliens de type $\mathcal{F}_\sigma$, $U_0 \subset X$ et $V_0 \subset Y$ des domaines tels que $K \cap U_0$ et $L \cap V_0$ soient non-pluripolaires dans X et Y respectivement et $E \subset K \cap U_0$ un ensemble non-pluripolaire. Soient Z un espace analytique complexe et $f : U_0 \times V_0 \to Z$ une application holomorphe telle que pour chaque point $x \in E$, l'application partielle $f(x, \cdot) : L \cap V_0 \to Z$ se prolonge en une application holomorphe d'un voisinage de L dans Z. Alors il existe un ensemble borelien $E' \subset E^*$ quasi-égal à E et tel que l'application f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $E' \times L$ dans $X \times Y$.*

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes.

Étape 1. Soit $G \subset L$ un compact connexe tel que $V_0 \cap G$ soit non-pluripolaire. On va montrer qu'il existe un ensemble borelien $E' \subset E^*$ quasi-égal à E, un voisinage consistant $U' \subset U_0$ de E', un voisinage ouvert $V \subset Y$ de G et une application holomorphe h de $U' \times V$ dans Z tels que $h = f$ sur $U' \times (V \cap V_0)$. En effet, considérons une base dénombrable d'ouverts $\mathfrak{D}$

de Y et une base dénombrable d'ouverts de Z formée par des domaines de Stein $(Z_l)_{l\geq 1}$ telle que pour chaque l, il existe un plongement φ_l de Z_l sur un sous-ensemble analytique du polydisque unité de $\mathbb{C}^{N_l}$.

Pour chaque entier $r \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{H}_r$ l'ensemble des applications holomorphes h de V_0 dans Z pour lesquelles il existe des multi-indices $j := (j_1, \ldots, j_r)$, $k := (k_1, \ldots, k_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que les ouverts $D_{j_1}, \ldots, D_{j_r} \in \mathfrak{D}$ recouvrent G et il existe une application $\widetilde{h}$ holomorphe de $D_{j_1} \cup \ldots \cup D_{j_r}$ dans Z telle que $\widetilde{h}(D_{j_p}) \subset Z_{k_p}$ pour $1 \leq p \leq r$ et $\widetilde{h} = h$ sur $(D_{j_1} \cup \ldots \cup D_{j_r}) \cap V_0$. On désigne alors par E_r l'ensemble des $x \in E$ tels que $f_x \in \mathcal{H}_r$. Il est facile de vérifier à partir des hypothèses que (E_r) est une suite croissante d'ensembles tels que $E = \bigcup_{r\in\mathbb{N}^*} E_r$. Comme E est non-pluripolaire, il existe $s \geq 1$ tel que pour tout $r \geq s$, E_r soit non-pluripolaire. Fixons $r \geq s$ et $a \in E_r^*$. Choisissons des domaines D'_p tels que $D'_p \Subset D_{j_p}$ pour $1 \leq p \leq r$ et $G \subset D'_1 \cup \ldots \cup D'_r$. Par connexité de G, quitte à permuter les D'_p $(1 \leq p \leq r)$, on peut supposer que $V_0 \cap D'_1 \neq \emptyset$ et $D'_p \cap \bigcup_{1\leq j\leq p-1} D'_j \neq \emptyset$ pour $2 \leq p \leq r$. Alors pour chaque $1 \leq p \leq r$, l'ensemble défini par $V_p := V_0 \cup D'_1 \cup \ldots \cup D'_p$ est un domaine. On va construire, par récurrence sur p $(0 \leq p \leq r)$, des voisinages ouverts $U_p \subset U_0$ de a tels que f se prolonge en une application holomorphe de $U_p \times V_p$ dans Z.

Pour $p = 0$, la fonction $f_0 := f$ est holomorphe sur $U_0 \times V_0$.

Supposons que pour un entier p $(1 \leq p \leq r)$ on a construit un voisinage ouvert $U_{p-1} \subset U_0$ de a et une application holomorphe $\widetilde{f}$ de $U_{p-1} \times V_{p-1}$ dans Z telle que $\widetilde{f} = f$ sur $(E \cap U_{p-1}) \times V_0$. En choisissant un domaine $D''_p \Subset D'_p \cap V_{p-1}$, il résulte alors de la définition de E_r que $\widetilde{f}((E_r \cap U_{p-1}) \times D''_p) \subset Z_{k_p}$. Par suite, la continuité de $\widetilde{f}$ sur $U_{p-1} \times V_{p-1}$ et la compacité de $\overline{D''_p}$ impliquent qu'il existe un voisinage ouvert connexe $U'_p \subset U_{p-1}$ de a tel que $\widetilde{f}(U'_p \times D''_p) \subset Z_{k_p}$. Considérons maintenant l'application holomorphe $g := \varphi_p \circ \widetilde{f} : U'_p \times D''_p \to \mathbb{C}^{N_p}$, où φ_p est un plongement de Z_{k_p} sur un sous-ensemble analytique du polydisque unité de $\mathbb{C}^{N_p}$. Par définition de E_r, pour tout $x \in E_r \cap U'_p = E_r \cap U'_{p-1}$ l'application partielle $g(x, \cdot)$ se prolonge en une application holomorphe de D_{j_p} dans $\mathbb{C}^{N_p}$. Comme $D'_p \Subset D_{j_p}$, il résulte du lemme 3.3.1 qu'il existe un domaine $U_p \subset U'_p$ voisinage de a et une application holomorphe $\widetilde{g} : U_p \times D'_p \to \mathbb{C}^{N_p}$ telle que $\widetilde{g} = g$ sur $U_p \times D''_p$. Comme $\varphi_p(Z_{k_p})$ est un sous-ensemble analytique fermé du polydisque unité de $\mathbb{C}^{N_p}$ et que $\widetilde{g}((E_r \cap U_p) \times D''_p) = g((E_r \cap U_p) \times D_p) \subset \varphi_p(Z_{k_p})$, alors, puisque $E_r \cap U_p$ est non-pluripolaire dans le domaine U_p, le principe du prolongement analytique généralisé entraîne que $\widetilde{g}(U_p \times D'_p) \subset \varphi_p(Z_{k_p})$.

Posons $f' := \varphi_p^{-1} \circ \widetilde{g} : U_p \times D'_p \to Z_{k_p} \subset Z$. Alors d'une part f' est holomorphe sur $U_p \times D'_p$ et $f' = \widetilde{f}$ sur $U_p \times D''_p$ et donc $f' = f$ sur $(E_r \cap U_p) \times D''_p$, ce qui implique que $f' = f$ sur $(E_r \cap U_p) \times D'_p$ d'après le principe du prolongement analytique généralisé. D'autre part, $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $U_p \times V_{p-1}$ et $\widetilde{f} = f$ sur $(E_r \cap U_p) \times V_{p-1}$. Par conséquent $\widetilde{f} = f'$ sur $(E_r \cap U_p) \times D'_p \cap V_{p-1}$, ce qui implique que $\widetilde{f} = f'$ sur $U_p \times D'_p \cap V_{p-1}$ d'après le principe du prolongement analytique généralisé. On obtient donc le prolongement holomorphe f_p de f à $U_p \times V_p$ en posant $f_p := \widetilde{f}$ sur $U_p \times V_{p-1}$ et $f_p := f'$ sur $U_p \times D'_p$, ce qui achève la récurrence. Pour $p = r$ on a alors $G \subset V_r$ et f se prolonge en une application holomorphe de $U_r \times V_r$ dans Z, où U_r est un voisinage de $a \in E_r^*$ et V_r est un voisinage ouvert connexe de G.

Posons $E' := \bigcup_{r \geq s} E_r^*$. Alors $E' \subset E^*$ est un borelien tel que $E \setminus E' \subset \bigcup_{r \geq s}(E_r \setminus E_r^*)$ soit pluripolaire et f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $E' \times G$.

Étape 2. Considérons maintenant une suite croissante (G_j) de compacts telle que $L = \bigcup_j G_j$. Alors la construction précédente fournit une suite (E'_j) d'ensembles boreliens contenus dans E^* et tels que pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $E \setminus E'_j$ soit pluripolaire dans X et l'application f s'étende holomorphiquement au voisinage de chaque point de $E'_j \times G_j$. En posant $E' := \bigcap_j E'_j$, il en résulte que $E' \subset E^*$ est un ensemble borelien tel que $E \setminus E' = \bigcup_j (E \setminus E'_j)$ soit pluripolaire dans X et l'application f s'étende holomorphiquement au voisinage de chaque point de $E' \times L$. ∎

4.2. *Démonstration du théorème 2.2.1.* La démonstration du théorème 2.2.1 se fait en trois étapes.

Étape 1. On suppose d'abord que $K \subset X$ et $L \subset Y$ sont des domaines de X et Y que l'on notera U et V respectivement. Ainsi f est une application séparément holomorphe sur $(U \times F) \cup (E \times V)$ à valeurs dans Z.

Considérons une base dénombrable d'ouverts de Z formée de domaines de Stein $(Z_j)_{j \geq 1}$ telle que pour chaque $j \geq 1$, il existe un plongement φ_j de Z_j sur un sous-ensemble analytique du polydisque unité de $\mathbb{C}^{\nu_j}$. Soient $\mathcal{D} = (D_l)$ et $\mathcal{G} = (G_l)$ des basees dénombrables d'ouverts de X et Y respectivement formées de domaines de Stein relativement compacts.

Soit $y_0 \in F \cap F^*$ un point fixé. Alors pour tout $x \in E$ il existe $i = i_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x, y_0) \in Z_i$. En désignant, pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, par A_i l'ensembles des $x \in E$ tels que $f_x(y_0) := f(x, y_0) \in Z_i$, on a alors $E = \bigcup_{i \geq 1} A_i$. Désignons par I l'ensemble des indices $i \in \mathbb{N}^*$ tels que l'ensemble A_i soit non-pluripolaire. Alors l'ensemble $A' := \bigcup_{i \in I} A_i$ est un sous-ensemble de E quasi-égal à E. Fixons $i \in I$; alors par définition, pour tout $x \in A_i$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $y_0 \in G_j$ et $f_x(G_j) \subset Z_i$; on a utilisé la continuité de l'application partielle f_x au point $y_0 \in F \cap F^* \subset V$. Pour chaque $i \in I$ fixé, désignons par $B_{i,j}$ l'ensemble des $x \in A_i$ tels que $f_x(G_j) \subset Z_i$, de sorte que $A_i = \bigcup_{j \geq 1} B_{i,j}$

et $f(B_{i,j} \times G_j) \subset Z_i$. Notons, pour chaque $i \in I$, par J_i l'ensemble des indices $j \in \mathbb{N}^*$ tels que l'ensemble $B_{i,j}$ soit non-pluripolaire. Alors l'ensemble $\widetilde{E} := \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_{i,j}$ est un sous-ensemble de E quasi-égal à E.

Désormais fixons $i \in I$ et $j \in J_i$, et notons pour simplifier $B := B_{i,j}$ et $G := G_j$. Alors l'ensemble $M := F \cap G$ est non-pluripolaire puisque $y_0 \in F^*$ et que G est un voisinage de y_0. Il en résulte que $B \times M \subset B \times G \subset W$ et que $f(B \times G) \subset Z_i$.

À partir de là, la démonstration de cette première étape se fait en deux sous-étapes.

1) Montrons d'abord que pour tout point $a \in B \cap B^*$, il existe un domaine U'_a voisinage de a et un sous-ensemble borelien $E'_a \subset U'_a \cap B^*$ quasi-égal à $U'_a \cap B$ tels que f s'étende holomorphiquement au voisinage de chaque point de $E'_a \times V$.

En effet, pour tout $y \in M = F \cap G$, on a $f^y(a) = f(a, y) \in Z_i$ et donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \in D_k$ et $f^y(D_k) \subset Z_i$. En raisonnant comme précédemment, on obtient un ensemble non-pluripolaire $N = N_{j,k} \subset M_j$ et un voisinage ouvert $D = D_{j_k} \Subset U$ de a tels que $f(D \times N) \subset Z_i$. Posons $C := B \cap D$ et $\mathit{\Gamma} := (C \times G) \cup (D \times N) \subset W$. Alors par construction, on a $f(\mathit{\Gamma}) \subset Z_i$ et l'application $g := \varphi \circ f : \mathit{\Gamma} \to \mathbb{C}^{\nu_i}$ est séparément holomorphe sur $\mathit{\Gamma}$, où φ est un plongement holomorphe de Z_j dans un polydisque de $\mathbb{C}^{\nu_i}$. Le théorème 3.4.2 implique alors que g a une extension holomorphe $\widetilde{g}$ à l'ouvert

$$\widehat{\mathit{\Gamma}} := \{(x, y) \in D \times G : \omega(x; C; D) + \omega(y; N; G) < 1\}.$$

Le principe du prolongement analytique généralisé prouve que $\widetilde{g}(\widehat{\mathit{\Gamma}}) \subset \varphi(Z_i)$. En observant que $\widehat{\mathit{\Gamma}} = \bigcup_{k \geq 1} (O_k \times P_k)$, où

$$O_k := \{x \in D : \omega(x; C; D) < 1 - 1/k\}$$
$$P_k := \{y \in G : \omega(y; N; G) < 1/k\},$$

on en déduit que f est holomorphe sur chaque rectangle ouvert $O_k \times P_k$ et que pour tout $x \in C \cap O_k$, qui est non-pluripolaire, l'application partielle $f(x, \cdot)$ se prolonge holomorphiquement à U. Grâce au lemme 4.1.1, on en déduit qu'il existe un sous-ensemble borelien $C'_k \subset O_k \cap C^*$ quasi-égal à $C \cap O_k$ tel que f admette une extension holomorphe au voisinage de chaque point de $C'_k \times V$. Il en résulte immédiatement que $C' := \bigcup_k C'_k$ est un ensemble borelien quasi-égal à $C = B \cap D$, tel que $C' \subset C^* = D \cap B^*$ et tel que f admette une extension holomorphe au voisinage de chaque point de $C' \times V$. En posant $E'_a := C'$ et $U_a := D$, on obtient le résultat annoncé.

2) Montrons maintenant qu'il existe un sous-ensemble borelien $E' \subset E^*$ quasi-égal à E tel que l'application f admette une extension holomorphe au voisinage de chaque point de $E' \times V$.

En effet, en recouvrant $B\cap B^*$ par une famille dénombrable de voisinages du type U'_a, $a\in T$, où T est un ensemble dénombrable, et en considérant les ensembles boreliens correspondants $E'_a\subset B^*\cap U'_a$ quasi-égaux à $B\cap U'_a$, obtenus à l'étape précédente, on en déduit immédiatement que l'ensemble $E'':=\bigcup_{a\in T}E'_a$ est un borelien tel que $E''\subset B^*$ soit quasi-égal à B et que f admette une extension holomorphe au voisinage de chaque point de $E''\times V$.

Rappelons à ce stade que $B=B_{i,j}\subset E$ avec $i\in I$ et $j\in J_i$ et notons par $E''_{i,j}\subset B^*_{i,j}$ l'ensemble borelien correspondant quasi-égal à $B_{i,j}$ et tel que f admette une extension holomorphe au voisinage de chaque point de $E''_{i,j}\times V$. Posons $E':=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}E''_{i,j}$. Alors l'ensemble $E'\subset E^*$ est un borelien quasi-égal à l'ensemble $\widetilde{E}=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}B_{i,j}$, qui est quasi-égal à E, d'après le début de la preuve. Par conséquent l'ensemble $E'\subset E^*$ est un borelien quasi-égal à E et tel que f admette une extension holomorphe au voisinage de chaque point de $E'\times V$.

Comme les deux facteurs jouent des rôles symétriques dans l'énoncé du théorème, le résultat annoncé en découle.

Étape 2. On suppose que $K\subset X$ et $L\subset Y$ sont des compacts. Soit (D_j) (resp. (G_j)) une suite de domaines de X (resp. Y) qui converge vers K(resp. L). Pour chaque $j\in\mathbb{N}$, désignons par E_j (resp. F_j) l'ensemble des $x\in E$ (resp. $y\in F$) tels que $f(x,\cdot)$ (resp. $f(\cdot,y)$) se prolonge en une fonction holomorphe sur G_j (resp. D_j). Il est alors clair que $E=\bigcup_j E_j$ et $F=\bigcup_j F_j$. Il existe donc un rang $j_0>0$ tel que pour $j\geq j_0$, les ensembles E_j et F_j soient non-pluripolaires dans X et Y respectivement. De plus pour chaque $j\geq j_0$, on peut donc définir une fonction $f_j:W_j:=(E_j\times G_j)\cup(D_j\times F_j)\to\mathbb{C}$ séparément holomorphe telle que $f_j=f$ sur $(E_j\times L)\cup(K\times F_j)$. D'après la première étape, pour chaque $j\geq j_0$, il existe un ensemble borelien $E'_j\subset E^*_j$ quasi-égal à E_j et un ensemble borelien $F'_j\subset F_j$ quasi-égal à F_j tels que l'application f_j s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $(D_j\times F'_j)\cup(E'_j\times G_j)$. Il en résulte que f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $(K\times F'_j)\cup(E'_j\times L)$.

Posons $E':=\bigcup_{j\geq j_0}E'_j$ et $F':=\bigcup_{j\geq j_0}F'_j$. Alors il en résulte que $E'\subset E^*$ est un ensemble borelien quasi-égal à E et que F' est un ensemble borelien quasi-égal à F tels que que f se prolonge holomorphiquement au voisinage de chaque point de $(K\times F')\cup(E'\times L)$.

Étape 3. Passons maintenant au cas général. On écrit alors $K=\bigcup_j K_j$ et $L=\bigcup_j L_j$, où (K_j) et (L_j) forment des suites croissantes d'ensembles compacts et non-pluripolaires dans X et Y respectivement. En posant $E_j:=E\cap K_j$ et $F_j:=F\cap L_j$, on voit clairement que pour j assez grand E_j et F_j sont non-pluripolaires dans X et Y respectivement. D'après la deuxième étape, pour chaque j assez grand, il existe un ensemble borelien $E'_j\subset E^*_j$ quasi-égal à E_j et un ensemble borelien $F'_j\subset F^*_j$ quasi-égal à F_j tels que

f se prolonge holomorphiquement au voisinage de chaque point de $(K_j \times F'_j) \cup (E'_j \times L_j)$. Posons $E' := \bigcap_j E'_j$ et $F' := \bigcap_j F'_j$. Il est facile de voir que $E' \subset E^*$ est un ensemble borelien quasi-égal à E et que $F' \subset F^*$ est un ensemble borelien quasi-égal à F tels que f s'étende holomorphiquement au voisinage de chaque point de $(K_j \times F') \cup (E' \times L_j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Par suite l'application f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de $(K \times F') \cup (E' \times L)$. Pour achever la démonstration du théorème, posons $S_1 := E^* \setminus E' \subset X$ et $S_2 := F^* \setminus F' \subset Y$. Alors, par construction, les ensembles S_1 et S_2 sont pluripolaires dans X et Y respectivement et d'après ce qui précède, on a $S(f, W) \subset S_1 \times S_2$, ce qui prouve par définition que $S(f, W)$ est doublement pluripolaire dans $X \times Y$. ■

4.3. *Démonstration du théorème 2.2.2.* Pour démontrer le théorème 2.2.2, on distinguera deux cas.

Premier Cas. On suppose que $K = U \subset X$ et $L = V \subset Y$ sont des ouverts. Soit f est une application séparément holomorphe sur $W = (U \times F) \cup (E \times V)$ à valeurs dans Z. D'après le théorème 2.2.1, il existe des ensembles boreliens $A \subset E^*$ et $B \subset F^*$ quasi-égaux à E et F respectivement tels que f s'étende holomorphiquement au voisinage de chaque point de $W' := (U \times B) \cup (A \times V)$. D'après la proposition 3.4.3, il existe des ensembles boreliens $A' \subset A^*$ et $B' \subset B^*$ quasi-égaux à A et B respectivement, et il existe un voisinage ouvert Ω de $(U \times B') \cup (A' \times V)$ tels que f s'étende en une application holomorphe de Ω dans Z. Il est alors clair que $A' \subset E^*$ et $B' \subset F^*$ sont des ensembles boreliens quasi-égaux à E et F respectivement, ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.2 dans le premier cas. ■

Pour démontrer le théorème 2.2.2 dans le second cas, on aura besoin d'étendre la proposition 3.4.3 au cas d'une croix inscrite dans un rectangle de type $\mathcal{G}^s_\delta$. Cela utilise le premier cas du théorème 2.2.2 que l'on vient d'établir. Voici le résultat intermédiaire dont nous aurons besoin.

Proposition 4.3.1. *Soient X, Y, Z des espaces analytiques complexes et $K \subset X$, $L \subset Y$ des ensembles boreliens connexes non-pluripolaires de type $\mathcal{G}^s_\delta$. Soient $A \subset K$, $B \subset L$ des ensembles non-pluripolaires et $f : \Sigma := (K \times B) \cup (A \times L) \to Z$ une application qui s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de Σ. Alors il existe un ensemble borelien $A' \subset A^*$ quasi-égal à A dans X, un ensemble borelien $B' \subset B^*$ quasi-égal à B dans Y, un voisinage ouvert Ω de la croix $\Sigma' := (K \times B') \cup (A' \times L)$ et une application holomorphe $\widetilde{f} : \Omega \to Z$ telle que $\widetilde{f} = f$ sur $\Omega \cap \Sigma$.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.4.3 avec cependant une perte d'information concernant les ensembles A' et B'. En effet, soit (D_j) (resp. (G_j)) une suite décroissante de domaines de X (resp. Y) qui converge vers K (resp. L).

Alors pour chaque entier $j \geq 1$, désignons par A_j (resp. B_j) l'ensemble des points $x \in A$ (resp. $y \in B$) tels que l'application partielle $f(x, \cdot)$ (resp. $f(\cdot, y)$) se prolonge en une application holomorphe de G_{j-1} (resp. D_{j-1}) dans Z. Il en résulte immédiatement que $A = \bigcup_j A_j$ et $B = \bigcup_j B_j$, de sorte qu'il existe un $j_0 \geq 1$ tel que A_j et B_j soient non-pluripolaires pour tout $j \geq j_0$, puisque les suites d'ensembles en question sont croissantes. De plus on obtient une application séparément holomorphe f_j sur $\varSigma_j := (D_j \times B_j) \cup (A_j \times G_j)$ telle que $f_j = f$ sur $(K \times B_j) \cup (A_j \times L)$.

Fixons $j \geq j_0$. D'après le premier cas du théorème 2.2.2, il existe des ensembles boreliens $A'_j \subset A^*_j$ et $B'_j \subset B^*_j$ quasi-égaux à A_j et B_j respectivement tel que l'application f_j s'étend holomorphiquement au voisinage de $\varSigma'_j := (A'_j \times G_j) \cup (D_j \times B'_j)$. On est donc dans les hypothèses de la proposition 3.4.3. Comme $D_j \Subset D_{j-1}$ et $G_j \Subset G_{j-1}$, d'après la première étape de la démonstration de la proposition 3.4.3, il existe un voisinage consistant $D'_j \subset D_j$ de $A''_j := A'_j \cap A'^*_j$, un voisinage consistant $G'_j \subset G_j$ de $B''_j := B'_j \cap B'^*_j$ et une application h_j holomorphe sur l'ouvert $\varOmega_j := (D'_j \times G_j) \cup (D_j \times G'_j)$ telle que $h_j = f_j$ sur $(D'_j \times B''_j) \cup (A''_j \times G_j)$. En particulier on a $h_j = f$ sur $(K \times B''_j) \cup (A''_j \times L)$.

Montrons que les applications h_j se recollent. En effet, fixons deux indices $j \geq i \geq j_0$ et observons que

$$\varOmega_j \cap \varOmega_i = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &:= (D'_i \cap D'_j) \times G_j, \qquad & R_2 &:= (D'_i \cap D_j) \times G'_j, \\ R_3 &:= D'_j \times (G'_i \cap G_j), \qquad & R_4 &:= D_j \times (G'_i \cap G'_j). \end{aligned}$$

On constate comme à l'étape 2 que chaque rectangle R parmi les rectangles R_i $(1 \leq i \leq 4)$ contient l'ensemble $A''_j \times B''_j$ et que l'une des deux projections de R est un voisinage consistant de la projection correspondante de l'ensemble $A''_j \times B''_j$. On peut donc raisonner comme dans la démonstration de la proposition 3.4.3 pour conclure, grâce au principe du prolongement analytique généralisé, que $h_i = h_j$ sur $\varOmega_j \cap \varOmega_i$, ce qui prouve qu'il existe une application h holomorphe sur $\varOmega := \bigcup_j \varOmega_j$ à valeurs dans Z telle que $h = h_j$ sur $\varOmega_j$ pour tout $j \geq j_0$.

De plus il est clair que h est une extension holomorphe de f à $\varOmega$. D'autre part, l'ensemble $A' := \bigcup A''_j$ est un borelien contenu dans A^* et quasi-égal à A; de même que l'ensemble $B' := \bigcup B''_j$ est un ensemble borelien contenu dans B^* et quasi-égal à B. De plus $\varOmega$ est un voisinage de $\varSigma' := (K \times B') \cup (A' \times L)$. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.2.2 dans le second cas.

Second Cas. On suppose que $K \subset X$ et $L \subset Y$ sont des ensembles de type $\mathcal{G}^s_\delta$. Soit f est une application séparément holomorphe sur $W = (K \times F) \cup (E \times L)$ à valeurs dans Z. D'après le théorème 2.2.1, il existe des ensembles boreliens $A \subset E^*$ et $B \subset F^*$ quasi-égaux à E et F respectivement tels que f s'étende holomorphiquement au voisinage de chaque point de la croix $W' := (K \times B) \cup (A \times L)$. D'après la proposition 4.3.1, il existe des ensembles boreliens $A' \subset A^*$ et $B' \subset B^*$ quasi-égaux à A et B respectivement, et il existe un voisinage ouvert Ω de $(K \times B') \cup (A' \times B)$ tels que f s'étende en une application holomorphe de Ω dans Z. Il est alors clair que $A' \subset E^*$ et $B' \subset F^*$ sont des ensembles boreliens quasi-égaux à E et F respectivement, ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.2. ∎

4.4. *Démonstration du théorème 2.2.4 et du corollaire 2.2.5.* Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents pour démontrer le théorème 2.2.4 et le corollaire 2.2.5.

Démonstration du théorème 2.2.4. 1) Supposons d'abord que X et Y sont des variétés de Stein. Alors le théorème 2.2.4 est une conséquence immédiate du théorème 3.4.2 et du théorème 2.1.2 de Shiffman.

2) Supposons maintenant que X et Y sont des variétés complexes. Dans ce cas, la démonstration se fait en deux étapes.

Étape 1. On suppose que $U \subset X$ est un domaine de Stein, $E \subset U$ est un ensemble non-pluripolaire, $F = V$ est un domaine quelconque de Y. Nous allons montrer que si $f : W = W(E \times V; U \times V) \to Z$ est séparément holomorphe sur W alors elle est holomorphe sur $U \times V$.

En effet, soit $G \Subset V$ un domaine de Stein quelconque. Alors la restriction g de f à la croix $W(E \times G; U \times G) = U \times G$ est séparément holomorphe. Comme elle est inscrite dans le rectangle $U \times G$, qui est une variété de Stein produit, alors d'après le premier cas g s'étend en une application holomorphe $\widetilde{g}$ sur l'enveloppe d'holomorphie de $W(E \times G; U \times G)$, qui n'est autre que le domaine de Stein $U \times G$. Il en résulte que f est holomorphe sur $U \times G$ et comme $G \subset V$ est un domaine de Stein quelconque, on en déduit que f est holomorphe sur $U \times V$.

Étape 2. Dans le cas général, on va utiliser un résultat de J. E. Fornæss et E. Stout pour se ramener au premier cas et ensuite utiliser le résultat de la première étape pour conclure grâce à la proposition 3.4.3.

En effet, d'après [Fo-St], si m est la dimension de X, il existe un biholomorphisme local $\phi : \Delta^m \to X$ du polydisque unité Δ^m de $\mathbb{C}^m$ sur X. De même il existe un biholomorphisme local $\psi : \Delta^n \to Y$, où n est la dimension de Y. Posons $D := \phi^{-1}(U)$, $A := \phi^{-1}(E)$, $G := \psi^{-1}(V)$, $B := \psi^{-1}(F)$. Alors l'application définie par $h(z, w) := f(\phi(z), \psi(w))$ est séparément holomorphe sur la croix $\Sigma := (D \times B) \cup (A \times G) \subset \Delta^m \times \Delta^n$ à valeurs dans

Z. D'après le premier cas, h s'étend en une application $\widetilde{h}$ holomorphe sur l'enveloppe d'holomorphie $\widetilde{\Sigma}$ de Σ à valeurs dans Z. Il est facile de vérifier que $A^* = \phi^{-1}(E^*)$ et $B^* = \psi^{-1}(F^*)$.

Montrons que f s'étend holomorphiquement au voisinage de chaque point de W^*. En effet, soient $(x_0, y_0) \in E^* \times L$ et $(z_0, w_0) \in A^* \times G$ tels que $\phi(z_0) = x_0$ et $\psi(w_0) = y_0$. Comme $(z_0, w_0) \in \widetilde{\Sigma}$, il existe alors un domaine $D_0 \subset \Delta^m$ voisinage de z_0 et un domaine $G_0 \subset \Delta^n$ voisinage de w_0 tel que $G_0 \cap F^* \neq \emptyset$ et que $D_0 \times G_0 \subset \widetilde{\Sigma}$. Par suite l'application $\widetilde{h}$ est holomorphe sur $D_0 \times G_0$. On peut toujours choisir D_0 assez petit pour que ϕ induise un biholomorphisme de D_0 sur le domaine $U_0 := \phi(D_0)$. Alors pour chaque $y \in \psi(G_0)$, en prenant $\zeta \in G_0$ tel que $\psi(\zeta) = y$, on en déduit que $f(\phi(z), y) = \widetilde{h}(z, \zeta)$ pour tout $z \in D_0 \cap A^*$. Comme ϕ est un biholomorphisme de D_0 sur U_0, il en résulte que l'application $x \mapsto f^y(x) := f(x, y)$, définie sur $\phi(D_0 \cap A^*) = U_0 \cap E^*$, se prolonge en une application $\widetilde{f^y}$ holomorphe sur U_0. D'autre part, si $x \in U_0 \cap E^*$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est holomorphe sur G_0. Ainsi l'application $g := ((U_0 \cap E^*) \times V_0) \cup (U_0 \times V_0) \to Z$ définie par $g(x, y) := \widetilde{f^y}(x)$ pour $(x, y) \in U_0 \times V_0$ est séparément holomorphe sur la croix $((U_0 \cap E^*) \times V_0) \cup (U_0 \times V_0)$ à valeurs dans Z. Maintenant nous sommes ramenés à la première étape, ce qui implique que g est holomorphe sur $U_0 \times V_0$. Par conséquent, l'application f s'étend holomorphiquement à l'ouvert $U_0 \times V_0$, qui est un voisinage admissible du point (x_0, y_0). Ainsi l'application f s'étend holomorphiquement à un voisinage admissible de chaque point de $E^* \times V$. Par symétrie, il en résulte que f s'étend holomorphiquement à un voisinage de chaque point de W^*. On conclut alors en utilisant la proposition 3.4.3. ∎

Il nous reste maintenant à démontrer le corollaire 2.2.5.

Démonstration du corollaire 2.2.5. Soit $(G_j)_j$ une suite décroissante de domaines de Y qui converge vers L. Notons E_j l'ensemble des $x \in E$ tels que l'application $f_x : L \to Z$ se prolonge en une application holomorphe $g_{x,j}$ sur l'ouvert G_j. Alors (E_j) est une suite croissante d'ensembles tels que $E = \bigcup_j E_j$. Il en résulte que pour tout j assez grand, E_j est non-pluripolaire. Par conséquent, l'application $f_j : W_j := W(E_j \times G_j; U \times L) \to Z$, donnée par $f_j(x, y) := g_{x,j}(y)$ pour $(x, y) \in E_j \times G_j$ et $f_j(x, y) := f(x, y)$ pour $(x, y) \in U \times L$, est bien définie et est séparément holomorphe sur W_j. D'après le théorème 2.2.3, l'application f_j s'étend holomorphiquement à un voisinage ouvert Ω_j de $W_j^* = (E_j^* \times G_j) \cup (U \times L^*)$, qui contient $U \times L^*$.

Supposons de plus que U est hyperconvexe et posons $A := \bigcup_j E_j^*$. Notons que $E \setminus A \subset \bigcup_j (E_j \setminus E_j^*)$ est pluripolaire dans U et donc $\mathrm{Cap}^*(E \setminus A; U) = 0$. Comme $E \setminus A = \bigcap_j (E \setminus E_j^*)$ et que la suite $(E \setminus E_j^*)$ est décroissante, il en résulte que pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver j assez grand tel que

$\mathrm{Cap}^*(E \setminus E_j^*; U) < \varepsilon$. D'après ce qui précède, f s'étend holomorphiquement à l'ouvert Ω_j, voisinage de $(E_j^* \times G_j) \cup (U \times L^*)$. En posant $E' := E_j^*$ et $G := G_j$, on obtient le résultat souhaité. ■

Remerciements. Ce travail a bénéficié d'un large soutien dans le cadre de l'Action Integrée Franco-Marocaine d'Analyse Complexe et Géométrie (no. 180MA99) ainsi que du Programme d'Aide à la Recherche Scientifique (PARS) financé par la Direction Marocaine de la Recherche Scientifique. Nous tenons à remercier les institutions concernées pour leur aide ainsi que le Professeur Bensalem Jennane de la Faculté des Sciences de Rabat, responsable scientifique de ces programmes, pour son accueil chaleureux lors de nos différents séjours à Rabat.

Références

[A-S-Y] K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, *Continuation of holomorphic mappings with values in a complex Lie group*, Pacific J. Math. 47 (1973), 1–4.

[Al1] O. Alehyane, *Une extension du théorème de Hartogs pour les applications séparément holomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 324 (1997), 149–152.

[Al2] —, *Applications séparément méromorphes dans les espaces analytiques*, prépublication du Laboratoire E. Picard, UFR MIG, Univ. Paul Sabatier, Toulouse no. 79 (1996).

[Al-He] O. Alehyane et J. M. Hecart, *Propriétés de stabilité de la fonction extrémale relative*, préprint, 1999.

[Bed] E. Bedford, *The operator $(dd^c)^n$ on complex spaces*, dans : Séminaire d'analyse Lelong–Skoda, Lecture Notes in Math. 919, Springer, 1981, 294–324.

[Be-Ta] E. Bedford and B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1–40.

[Ber] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Math. Surveys 5, Amer. Math. Soc., 1950.

[Bl] Z. Błocki, *Singular sets of separately analytic functions*, Ann. Polon. Math. 56 (1992), 219–225.

[Bo] H. J. Borchers, *The generalized three circle and other convexity theorems with applications to the construction of envelopes of holomorphy*, Ann. Inst. H. Poincaré 27 (1977), 31–60.

[De] J. P. Demailly, *Mesures de Monge–Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines*, Mém. Soc. Math. France 19 (1985).

[Fo-St] J. E. Fornæss and E. L. Stout, *Spreading polydiscs on complex manifolds*, Amer. J. Math. 99 (1977), 933–960.

[Ha] F. Hartogs, *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Ann. 62 (1906), 1–88.

[Iv1] S. M. Ivashkovich, *The Hartogs phenomenon for holomorphically convex Kähler manifolds*, Math. USSR-Izv. 29 (1987), 225–232.

[Iv2] —, *An example concerning extension and separate analyticity properties of meromorphic mappings*, Amer. J. Math. 121 (1999), 97–130.

[Ja] W. Jarnicki, communication personnelle.

[Kl] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Oxford Univ. Press, 1991.

[Mi] B. Mityagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), 59–127.

[Ng] Nguyen Thanh Van, *Note on doubly orthogonal systems of Bergman*, Linear Topol. Spaces Complex Anal. 3 (1997), 157–159.

[Ng-Ze1] Nguyen Thanh Van et A. Zeriahi, *Familles de polynômes presque partout bornées*, Bull. Sci. Math. 107 (1983), 81–91.

[Ng-Ze2] —, —, *Une extension du théorème de Hartogs sur les fonctions séparément analytiques*, dans : Analyse Complexe Multivariable : Récents Développements, (Guadeloupe, 1988), Alex Meril (éd.), EditEl, Rende, 1991, 183–194.

[Ng-Ze3] —, —, *Systèmes doublement orthogonaux de fonctions holomorphes et applications*, dans : Topics in Complex Analysis, Banach Center Publ. 31, Inst. Math., Polish Acad. Sci., Warszawa, 1995, 281–297.

[Ku-Ha] Nguyen Van Khue and Lee Mau Hai, *Separately holomorphic mappings on compact subsets*, preprint of the Pedagogical Institute of Hanoi, 1999.

[Ra] J. Saint Raymond, *Fonctions séparément analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (1990), 79–101.

[Sa] A. Sadullaev, *Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds*, Russian Math. Surveys 36 (1981), 61–119.

[Shif1] B. Shiffman, *Extension of holomorphic maps into Hermitian manifolds*, Math. Ann. 194 (1971), 249–258.

[Shif2] —, *On separate analyticity and Hartogs theorem*, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), 943–957.

[Shif3] —, *Hartogs theorem for separately holomorphic mappings into complex spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris 310 (1990), 89–94.

[Shim] I. Shimoda, *Notes on the functions of two complex variables*, J. Gakugei Tokushima Univ. 8 (1957), 1–3.

[Si1] J. Siciak, *Analyticity and separate analyticity of functions defined on lower dimensional subsets of* $\mathbb{C}^n$, Zeszyty Nauk. Univ. Jagielloń. Prace Mat. 13 (1969), 53–70.

[Si2] —, *Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of* $\mathbb{C}^n$, Ann. Polon. Math. 22 (1970), 145–171.

[Si3] —, *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$, ibid. 34 (1981), 175–211.

[Si4] —, *Singular sets of separately analytic functions*, Colloq. Math. 60–61 (1990), 281–290.

[Te] T. Terada, *Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A 2 (1967), 383–396.

[W] H. Wu, *Normal families of holomorphic mappings*, Acta Math. 119 (1967), 193–233.

[Za1] V. P. Zahariuta, *Fonctions plurisousharmoniques extrémales, échelles hilbertiennes et isomorphismes d'espaces de fonctions analytiques de plusieurs variables*, *I*, *II*, Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen. 19 (1974), 133–157 et 21 (1974), 65–83 (en russe).

[Za2] —, *Separately holomorphic functions, generalisations of Hartogs theorem and envelopes of holomorphy*, Math. USSR-Sb. 30 (1976), 51–76.

[Ze1] A. Zeriahi, *Bases de Schauder et isomorphismes d'espaces de fonctions holomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris 310 (1990), 691–694.

[Ze2] A. Zeriahi, *Fonction de Green pluricomplexe à pôle à l'infini sur un espace de Stein parabolique et applications*, Math. Scand. 69 (1991), 89–126.

[Ze3] —, *Comportement asymptotique des systèmes doublement orthogonaux de Bergman : Une approche élémentaire*, préprint du Laboratoire de Mathématiques Emile Picard de l'UPS-Toulouse, 2000.

Département de Mathématiques
Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences, B.P. 20
El Jadida, Maroc
E-mail: alehyane@ucd.ac.ma

Laboratoire de Mathématiques Emile Picard
UMR-CNRS 5580
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
F-31062 Toulouse, France
E-mail: zeriahi@picard.ups-tlse.fr

Reçu par la Rédaction le 5.5.2000
Révisé le 26.2.2001 (1168)