ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
87 (2005)

Feuilletages orthogonaux du tore à feuilles fermées

par Jean-Marie Lion (Rennes)

À la mémoire de Stanisław Łojasiewicz et de René Thom

Abstract. We give examples of pairs of orthogonal vector fields with closed orbits in every homotopy class of pairs of transversal vector fields on a two-dimensional riemannian torus.

1. Introduction. On considère sur un tore $(\mathbb{T}, g)$ de dimension 2 muni d'une métrique riemannienne de classe C^k, $k = 2, \ldots, \infty, \omega$, une paire de feuilletages transverses $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ à feuilles toutes fermées. On associe à chaque feuilletage $\mathcal{F}_i$ la famille $\mathcal{X}_i$ des champs de vecteurs sans singularité dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}_i$. La famille $\mathcal{X}_i$ est bien sûr non vide et si $X \in \mathcal{X}_i$ alors $\mathcal{X}_i$ est égale à la famille des champs fX avec $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, C^k et sans zéro.

On définit la relation d'équivalence suivante. Deux paires $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ et $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2)$ sont équivalentes s'il existe une isotopie $H : [0,1] \times T \to T$ qui permet de passer de la première à la seconde paire. La classe d'équivalence d'une paire $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ est caractérisée par la classe d'isotopie d'une paire (V_1, V_2) constituée d'une feuille de chacun des deux feuilletages. Puisque $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des feuilletages non singuliers et transverses de $\mathbb{T}$, V_1 et V_2 sont homotopiquement non triviales et ne sont pas homotopes. L'objectif de ce texte est de répondre à une question de Guy Métivier en montrant qu'une paire de feuilletages transverses $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ à feuilles toutes fermées est toujours équivalente à une paire de feuilletages orthogonaux à feuilles toutes fermées.

Théorème. *Soit $(\mathbb{T}, g)$ un tore $\mathbb{T}$ muni d'une métrique g de classe C^k, $k = 2, \ldots, \infty, \omega$, et γ_1, γ_2 deux courbes fermées simples de $\mathbb{T}$, non homotopes et non homotopiquement triviales. Il existe sur $\mathbb{T}$ deux feuilletages C^k, non singuliers, orthogonaux dont les feuilles sont des courbes fermées homotopes à γ_1 ou γ_2.*

2000 *Mathematics Subject Classification*: 37C10, 57R25, 14P15.
Key words and phrases: vector field, torus, riemannian metric, analytic geometry, isothermal coordinates, closed orbit.

Ce théorème doit beaucoup à Dominique Cerveau. Il m'a parlé de la question de Guy Métivier, puis nous avons eu de nombreuses discussions qui m'ont aidé à trouver la démonstration qui suit. Je le remercie très sincèrement.

On utilise le langage classique des feuilletages qu'on peut trouver dans [Go] par exemple.

2. Preuve du théorème. Observons qu'on peut se restreindre au cas d'un tore plat. En effet, notre problème ne dépend pas totalement de la métrique g mais seulement de sa classe conforme. Or le théorème d'existence de coordonnées isothermes (Gauss dans le cas analytique, Ahlfors et Bers dans des cas plus généraux ; voir [Ha] par exemple) assure que tout tore est conformément équivalent à un tore plat. Cet argument ne vaut qu'en dimension deux.

Un tore plat est le quotient de $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne par un réseau et la classification conforme des tores plats se fait par leurs modules. Aussi, par homotopie et similitude on peut supposer :

- L'axe $\mathbb{R}\mathbf{u}$ (avec $\mathbf{u} = (1, 0)$) est une composante connexe du relevé de γ_1 dans $\mathbb{R}^2$.
- Le tore $\mathbb{T}$ est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{Z}\mathbf{u} + \mathbb{Z}\mathbf{v}$ avec $\mathbf{v} = (\lambda, \mu)$ où $0 \leq \lambda < 1$ et $\mu > 0$.
- Une composante connexe du relevé de γ_2 est la droite $\mathbb{R}(p\mathbf{u} + q\mathbf{v})$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p + \lambda q \geq 0$. La courbe γ_2 s'enroule p fois parallèlement à $\mathbf{u}$ et q fois parallèlement à $\mathbf{v}$.

On représente dans la figure 1 les traces des relevés de γ_1 et γ_2 dans un domaine fondamental.

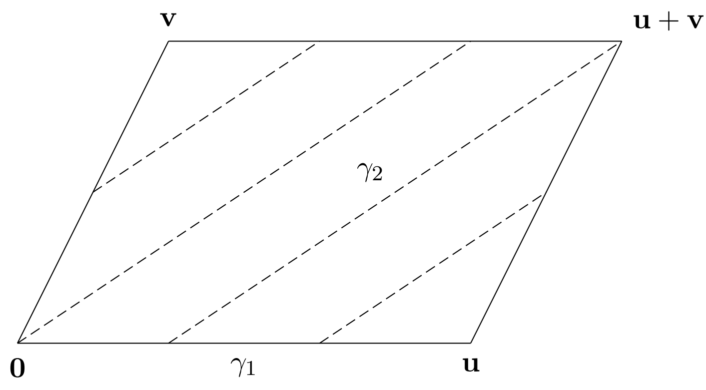

Fig. 1. Domaine fondamental, γ_1 et γ_2 avec $p = 2$ et $q = 3$

On va rechercher une solution parmi les paires de feuilletages orthogonaux sur le tore qui se relèvent en des paires de feuilletages orthogonaux de $\mathbb{R}^2$, invariants sous l'action du groupe de Lie des translations dirigées par les vecteurs de la droite $\mathbb{R}(r\mathbf{u}+\mathbf{v})$ (où $r \in \mathbb{N}$ est fixé plus loin) et invariants sous l'action des translations de vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Si $p+\lambda q = 0$ alors les feuilletages en droites horizontales et verticales induisent sur le tore une paire de feuilletages solution.

On suppose dorénavant que $p+\lambda q > 0$.

On note $\mathcal{F}$ le feuilletage affine de $\mathbb{R}^2$ en droites parallèles à $p\mathbf{u}+q\mathbf{v}$ et de pente *euclidienne* égale à $q\mu/(p+\lambda q)$. Il passe au quotient en un feuilletage $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}$ du tore dont les feuilles sont des courbes fermées homotopes à γ_2. En revanche, généralement les orbites de l'unique feuilletage orthogonal à $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}$ ne sont pas fermées.

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mu/(r+\lambda) < q\mu/(p+\lambda q)$. Soient δ^+ et δ^- les droites dirigées par $r\mathbf{u}+\mathbf{v}$ et qui passent respectivement par les points $\mathbf{v}/r$ et 0. Le feuilletage affine $\mathcal{F}$ est transverse à $r\mathbf{u}+\mathbf{v}$. On note $h : \delta^+ \to \delta^-$ l'holonomie associée à $\mathcal{F}$ qui à $x \in \delta^+$ associe l'unique point de δ^- qui est sur la même feuille de $\mathcal{F}$. C'est une translation *vers la gauche* : il existe $\tau < 0$ tel que si $(x_1, x_2) \in \delta^+$ alors $h(x) = (y_1, y_2)$ avec $y_1 = \tau + x_1$.

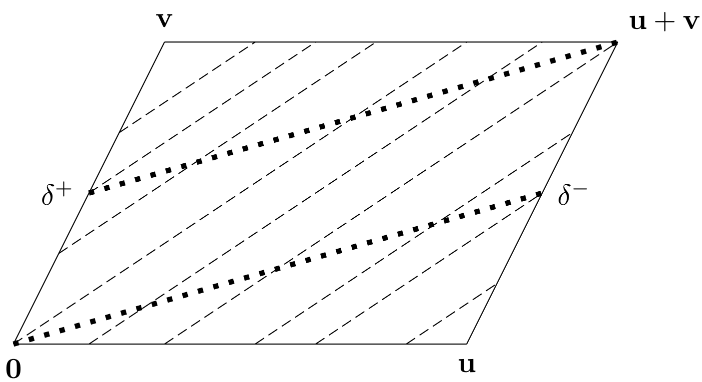

Fig. 2. Feuilles de $\mathcal{F}$ et les droites δ^+, δ^- avec $p=2$, $q=3$ et $r=2$

Nous allons construire notre exemple de la façon suivante. Le feuilletage horizontal est invariant sous l'action du groupe de Lie des translations dirigées par les vecteurs de la droite $\mathbb{R}(r\mathbf{u}+\mathbf{v})$ et des translations de vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Il passe au quotient en un feuilletage du tore dont les feuilles sont des courbes fermées homotopes à γ_1. Nous allons le déformer continûment en préservant cette invariance pour obtenir un feuilletage dont le feuilletage orthogonal aura la même holonomie que $\mathcal{F}$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, analytique, 1-périodique et qui vérifie :

(1) si $x \in [0, 1/2[\, \cup\,]1/2, 1]$, $-(r+\lambda)/\mu < f'(x) < \mu/(r+\lambda)$,

(2) $f(1/2) = 0$ et $f'(1/2) = -(r + \lambda)/\mu$.

Par exemple si $\lambda = 0$, $\mu = 2$ et $0 < p/q < r = 1$ alors $f(x) = \sin(2\pi x)/4\pi$ convient.

On déduit de (1) que le graphe de εf est transverse aux droites parallèles à $r\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et n'est jamais orthogonal à ces droites si $\varepsilon \in [0, 1[$. En revanche, le graphe de f est partout transverse aux droites parallèles à $r\mathbf{u} + \mathbf{v}$ mais il est orthogonal à la direction $r\mathbf{u} + \mathbf{v}$ en $(1/2, 0)$ d'après (2). On associe donc à la fonction analytique εf un feuilletage analytique $\mathcal{G}_\varepsilon$ de $\mathbb{R}^2$ défini de la façon suivante. Ses feuilles sont les translatés du graphe de εf parallèlement à $r\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Par passage au quotient on obtient sur le tore $\mathbb{T}$ un feuilletage analytique, non singulier $\mathcal{G}_{\mathbb{T}\varepsilon}$ dont les feuilles sont en raison de la périodicité de f des courbes fermées homotopes à γ_1. On note $\mathcal{G}_\varepsilon^\perp$ le feuilletage orthogonal à $\mathcal{G}_\varepsilon$. Le feuilletage $\mathcal{G}_{\mathbf{T}\varepsilon}^\perp$ obtenu par passage au quotient est orthogonal à $\mathcal{G}_{\mathbb{T}\varepsilon}$.

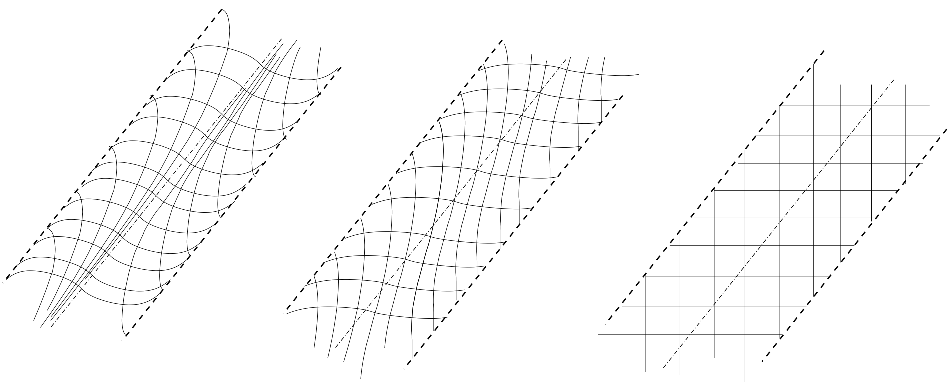

Fig. 3. Les feuilles de $\mathcal{G}_{\mathbb{T}\varepsilon}$ et $\mathcal{G}_{\mathbf{T}\varepsilon}^\perp$ entre δ^+ et δ^- lorsque $\varepsilon = 1$, $0 < \varepsilon < 1$ et $\varepsilon = 0$

Montrons qu'on peut choisir $\varepsilon \in [0, 1[$ de telle sorte que les feuilles du feuilletage $\mathcal{G}_{\mathbf{T}\varepsilon}^\perp$ soient des courbes fermées homotopes à γ_2.

D'après (1), si $\varepsilon \in [0, 1[$, le feuilletage $\mathcal{G}_\varepsilon$ n'est jamais orthogonal aux droites parallèles à $r\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et donc le feuilletage orthogonal $\mathcal{G}_\varepsilon^\perp$ est transverse à ces droites. De plus, chaque feuille de $\mathcal{G}_\varepsilon^\perp$ coupe une et une seule fois toute droite parallèle à $r\mathbf{u} + \mathbf{v}$. L'application d'holonomie $h_\varepsilon : \delta^+ \to \delta^-$ associée à $\mathcal{G}_\varepsilon^\perp$ est donc bien définie : c'est l'application qui à chaque point de δ^+ associe l'unique point de δ^- qui est sur la même feuille de $\mathcal{G}_\varepsilon^\perp$. C'est une translation car $\mathcal{G}_\varepsilon^\perp$ est invariant sous l'action de $\mathbb{R}(r\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbb{Z}\mathbf{v}/r$: il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que si $(x_1, x_2) \in \delta^+$ alors $h_\varepsilon(x) = (y_1, y_2)$ avec $y_1 = a_\varepsilon + x_1$. La fonction $\varepsilon \in [0, 1[\mapsto a_\varepsilon$ est continue, $a_0 = 0$ et en raison de (2) on a $\lim_{\varepsilon \to 1^-} a_\varepsilon = -\infty$. Ainsi a_ε décrit tout l'intervalle $] - \infty, 0]$ (et peut-être plus), lorsque ε décrit l'intervalle $[0, 1[$. On choisit ε tel que $a_\varepsilon = \tau$. Dans ce cas $h_\varepsilon = h$. Puisque $\mathcal{G}_\varepsilon^\perp$ et $\mathcal{F}$ sont invariants sous l'action de $\mathbb{R}(r\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbb{Z}\mathbf{v}/r$, les feuilles de $\mathcal{G}_{\mathbf{T}\varepsilon}^\perp$ sont homotopes à celles de $\mathcal{F}_\mathbb{T}$: ce sont des courbes fermées homotopes à γ_2.

3. Une famille explicite. On conserve les notations de la partie précédente. Les données sont donc $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda, \mu, p, q$ et un entier r tel que $\mu/(r+\lambda) < q\mu/(p+\lambda q)$. On pose $\alpha = \mu/(r+\lambda)$. On définit alors sur $\mathbb{R}^2$ les deux familles de champs de vecteurs

$$X_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\alpha^2}\cos(2\pi(x-y/\alpha))\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\varepsilon\alpha}{1+\alpha^2}\cos(2\pi(x-y/\alpha))\,\frac{\partial}{\partial y},$$

$$Y_\varepsilon = \frac{\varepsilon\alpha}{1+\alpha^2}\cos(2\pi(x-y/\alpha))\,\frac{\partial}{\partial x} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\alpha^2}\cos(2\pi(x-y/\alpha))\right)\frac{\partial}{\partial y} = X_\varepsilon^\perp$$

où $\varepsilon \in [0,1]$.

À ε fixé, ces deux champs sont orthogonaux, invariants sous l'action du groupe de Lie des translations dirigées par les vecteurs de la droite $\mathbb{R}(r\mathbf{u}+\mathbf{v})$ et invariants sous l'action des translations de vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Un petit calcul montre que si $\varepsilon \neq 1$ les champs X_ε et Y_ε sont transverses aux droites parallèles à $r\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Le champ X_1 est lui aussi transverse à ces droites. Ce n'est pas le cas du champ Y_1, qui est parallèle à la direction $r\mathbf{u}+\mathbf{v}$ le long des droites du type $\mathbb{R}(r\mathbf{u}+\mathbf{v})+k\mathbf{v}/r$, $k \in \mathbb{Z}$, qui sont Y_1-invariantes. Par passage au quotient ils définissent des paires de champs de vecteurs orthogonaux sur le tore $\mathbb{T}$. Il existe une fonction f associée à X_1 comme dans la partie précédente et pour chaque $\varepsilon \in [0,1]$ il existe une fonction f_ε associée à X_ε.

La situation est différente de celle de la partie précédente car maintenant f_ε ne s'exprime pas très facilement en fonction de f, c'est seulement X_ε qui dépend affinement de ε. Cependant, en faisant une analyse semblable à celle de la partie 2 on montre qu'il existe ε tel que la paire de feuilletages du tore associée à la paire $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ vérifie les conclusions du théorème. L'intérêt de cet exemple explicite est qu'il est intégrable. Si on se restreint au traces des solutions dans le domaine fondamental engendré par les directions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, alors les solutions appartiennent à la clôture pfaffienne [Sp] de la structure o-minimale engendrée par la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

4. Une petite question de Ludwig Bröcker. Pour finir, je mentionne une jolie question que Ludwig Bröcker a posée à la suite de mon exposé de mars 2004 au colloque RAAG de Cracovie. Il demande si on peut préciser le théorème de la façon suivante. Étant donnés $\mathbb{T}, \gamma_1, \gamma_2$, est-ce que la famille des paires $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ vérifiant les conclusions du théorème est connexe? À ma connaissance le problème reste ouvert, même si on se limite aux paires $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ qui se relèvent en des paires invariantes sous l'action du groupe de Lie des translations dirigées par les vecteurs de la droite $\mathbb{R}(r\mathbf{u}+\mathbf{v})$ (avec $r \in \mathbb{N}$ *ad hoc*) et sous l'action des translations de vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Bibliographie

[Go] C. Godbillon, *Feuilletages. Études géométriques*, Progr. Math. 98, Birkhäuser, Basel, 1991.
[Ha] P. Haïssinsky, *Définition de la quasi-conformité*, prépublication, 2001.
[Sp] P. Speissegger, *The Pfaffian closure of an o-minimal structure*, J. Reine Angew. Math. 508 (1999), 189–211.

IRMAR, UMR 6625 CNRS
Université Rennes 1
35042 Rennes Cedex, France
E-mail: jean-marie.lion@univ-rennes1.fr

Reçu par la Rédaction le 12.10.2004 (1622)