ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
91.1 (2007)

Formule d'homotopie pour un domaine à bord $(q+k)$-concave d'une variété CR générique et q-concave. Applications

par Salomon Sambou et Bocar Touré (Dakar)

Abstract. We give a homotopy formula for the $\overline{\partial}_b$ operator on a domain with $(q+k)$-concave boundary. As a consequence we show that the dimension of the $\overline{\partial}_b$-cohomology groups for some CR manifolds q-concave at infinity is finite.

1. Introduction. Ce travail s'inscrit dans le cadre général de l'étude de l'équation de Cauchy–Riemann tangentielle. Plus précisement nous résolvons le $\overline{\partial}_b$ dans un domaine ω_τ d'une sous-variété CR générique de codimension k de $\mathbb{C}^n$ et q-concave. Nous définissons ω_τ comme dans le théorème 4.3 de [5] : $\omega_\tau = \{z \in M \mid |z - z_0| < \tau \text{ et } \varphi(z) < \varphi(z_0)\}$, φ étant une fonction $(q+k)$-concave sur un voisinage d'un point z_0 de M et τ un réel strictement positif assez petit pour que $\omega_\tau \subset\subset M$ (voir sous-section 3.1).

Notre résultat principal est le théorème suivant où $C_{n,r}(\omega_\tau)$ désigne l'espace des (n,r)-formes différentielles continues sur ω_τ :

Théorème 1.1. *Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de codimension réelle k de classe C^3 et q-concave $(1 \le q \le (n-k)/2)$. Pour tout z_0 dans M et tout domaine ω_τ de M défini comme précédemment il existe des opérateurs intégraux T_r de $C_{n,r}(\overline{\omega}_\tau)$ dans $C^{1/2-\varepsilon}_{n,r-1}(\omega_{\tau'})$, $0 < \tau' < \tau$, tels que pour toute forme différentielle f de bidegré (n,r) et de classe C^1 sur $\overline{\omega}_\tau$ on a, sur $\omega_{\tau'}$:*

(i) $f = \overline{\partial}_b T_r f + T_{r+1}\overline{\partial} f$ *si* $1 \le r \le q-3$,
(ii) $f = \overline{\partial}_b T_r f$ *si* $r = q-2$ *et* $\overline{\partial} f = 0$.

Le théorème 1.1 est l'équivalent en codimension supérieure du théoréme 4.3 de [5] qui traite des hypersurfaces réelles de $\mathbb{C}^n$, q-concaves-convexes avec des estimations jusqu'au bord. Par ailleurs, utilisant des estimations

2000 *Mathematics Subject Classification*: 32V20, 32F10.
Key words and phrases: homotopy formula, CR manifold, q-concave, q-concave at infinity.

holdériennes jusqu'au bord faites dans [6], nous dérivons du théorème 1.1 le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Les opérateurs* T_r *sont continus de* $C^0_{n,r}(\overline{\omega}_\tau)$ *dans* $C^{1/2-\varepsilon}_{n,r-1}(\overline{\omega}_{\tau'})$ *pour tous* $0<\varepsilon<1/2$ *et* $1\le r\le q-2$.

Enfin, moyennant une hypothèse supplémentaire de q-concavité à l'infini sur M, on déduit du théorème 1.1 une version (en codimension quelconque) dans le cas "concave" de quelques théorèmes de finitude et d'invariance de groupes de cohomologie obtenus dans [5]. Une version C^∞ des résultats de même nature a été obtenue par Ricard dans [7], à partir des solutions locales du $\overline{\partial}_b$ qui ne proviennent pas d'une formule d'homotopie.

2. Généralités. Soit M une sous-variété réelle de classe C^3 de $\mathbb{C}^n$. Soit k la codimension réelle de M $(1\le k\le n)$. Si $z\in M$, on note par $T^{\mathbb{C}}_z M$ l'espace tangent complexe à M en z.

Définition 2.1. M est dite *CR* (Cauchy–Riemann) si $\dim_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}_z M$ est indépendante de $z\in M$.

Définition 2.2. M est *CR générique* si $\dim_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}_z M = n-k$ pour tout $z\in M$.

Soient $U\subset\mathbb{C}^n$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\widehat{\varrho}_1,\dots,\widehat{\varrho}_k$ des fonctions de classe C^2 sur U telles que

$$M\cap U=\{z\in U \mid \widehat{\varrho}_1(z)=\cdots=\widehat{\varrho}_k(z)=0\}\quad\text{avec}\quad d\widehat{\varrho}_1\wedge\cdots\wedge d\widehat{\varrho}_k\neq 0.$$

La variété M est alors CR générique si et seulement si $\overline{\partial}\widehat{\varrho}_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\widehat{\varrho}_k\neq 0$ sur $M\cap U$.

Les fonctions $\widehat{\varrho}_1,\dots,\widehat{\varrho}_k$ sont appelées *fonctions définissantes* de M sur U.

Définition 2.3. Une sous-variété réelle M de $\mathbb{C}^n$, CR générique de codimension réelle k est dite *q-concave*, $1\le q\le (n-k)/2$, si pour tout $z\in M$ et tout $x=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ la forme de Levi, restreinte à $T^{\mathbb{C}}_z M$,

$$L\widehat{\varrho}_x(t)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\widehat{\varrho}_x}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}(z)t^\alpha\overline{t}^\beta,$$

où $\widehat{\varrho}_x=x_1\widehat{\varrho}_1+\cdots+x_k\widehat{\varrho}_k$, admet au moins q valeurs propres strictement négatives.

Définition 2.4. Soit M une sous-variété CR générique de codimension réelle k de $\mathbb{C}^n$ et q-concave. On dit qu'une fonction φ définie sur M est *$(q+k)$-concave* (respectivement *$(q+k)$-convexe*) sur M si pour tout point p de M et pour toute extension ψ de classe C^2 de φ (respectivement $-\varphi$) à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$, la forme de Levi de ψ restreinte à l'espace tangent complexe à M en p possède au moins q valeurs propres strictement négatives.

3. Formules locales. Nous nous proposons dans cette partie de construire des opérateurs intégraux T_r en vue d'obtenir des formules locales permettant de résoudre le $\overline{\partial}_b$. Tout d'abord rappelons brièvement la construction du noyau de Barkatou–Laurent R_M.

On désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties $I \subseteq \{\pm 1, \cdots, \pm k\}$ tel que $|i| \neq |j|$ pour tous $i, j \in \mathcal{I}$ distincts. Si $I \in \mathcal{I}$, alors on note par $|I|$ le nombre d'éléments de I et par $\triangle_I$ le simplexe de $\mathbb{R}^k$ défini par

$$\triangle_I = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda = \sum_{j=1}^{|I|} \lambda_j e_j,\ \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{|I|} \lambda_j = 1 \Big\}$$

où $(e_j)_{1 \leq j \leq k}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$ avec la convention suivante : $e_{-j} = -e_j$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. Soit l un entier naturel tel que $1 \leq l \leq k$. On note par $\mathcal{I}(l)$ l'ensemble de tous les $I \in \mathcal{I}$ tels que $|I| = l$, et par $\mathcal{I}'(l)$ l'ensemble de tous les $I \in \mathcal{I}(l)$ tels que si $I = (i_1, \ldots, i_l)$ alors $|i_\nu| = \nu$ pour tout $\nu = 1, \ldots, l$. Enfin, si $I \in \mathcal{I}$ alors on pose

$$\operatorname{sgn}(I) = \begin{cases} +1 & \text{si le nombre d'éléments négatifs de } I \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si le nombre d'éléments négatifs de } I \text{ est impair.} \end{cases}$$

Fixons $z_0 \in M$. Soit $U_{z_0} \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage de z_0. Puisque M est q-concave, d'après le lemme 3.1.1 de [1] il existe une constante $C > 0$ telle que pour $j = 1, \ldots, k$ les fonctions

$$\varrho_j = \widehat{\varrho}_j + C \sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\varrho}_\nu^2, \qquad \varrho_{-j} = -\widehat{\varrho}_j + C \sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\varrho}_\nu^2$$

possèdent la propriété suivante : pour tout $I = (i_1, \ldots, i_{|I|}) \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \triangle_I$ la forme de Levi de $\lambda_{i_1} \varrho_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_{|I|}} \varrho_{i_{|I|}}$ en z_0 admet au moins $q + k$ valeurs propres strictement positives. Pour tout $I \in \mathcal{I}'(k)$, on note $\mathcal{I}'(k, *)$ l'ensemble des multi-indices $I_* = (i_1, \ldots, i_k, *)$, où $I = (i_1, \ldots, i_k)$. On pose $\varrho_* = \varrho_1 + \cdots + \varrho_k$ et $\varrho_\lambda = \lambda_1 \varrho_{i_1} + \cdots + \lambda_k \varrho_{i_k} + \lambda_* \varrho_*$ pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_*) \in \triangle_{I_*}$.

On construit alors à l'aide de ϱ_λ ainsi défini des sections de Leray $(\psi_J)_{J \in \mathcal{I}'(k,*)}$ (cf. [2]) et des noyaux K_J et C_J associés à ψ_J.

Pour $(z, \xi, \lambda) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \times \triangle_{I_*}$ avec $z \neq \xi$, on pose

$$K_{I_*}(z, \xi, \lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n} \langle \psi_{I_*}, d(\xi - z) \rangle \wedge \langle (\overline{\partial}_{\xi,z} + d_\lambda) \psi_{I_*}, d(\xi - z) \rangle^{n-1}.$$

Pour $(z,\xi)\in U_{z_0}\times U_{z_0}$ avec $z\neq\xi$, on pose

$$C_{I_*}=\int_{\lambda\in\triangle_{I_*}} K_{I_*}(z,\xi,\lambda).$$

Le *noyau de Barkatou–Laurent* est alors défini par

$$R_M=\sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\operatorname{sgn}(I)C_{I_*}.$$

Le résultat fondamental suivant est dû à Christine Laurent-Thiébaut et Moulay Y. Barkatou [2].

Théorème 3.1. *Soit ω un domaine à bord C^1 tel que $\omega\subset\subset M\cap U$, et f une (n,r)-forme de classe C^1 sur $\overline{\omega}$. Si $n-k-q+1\leq r\leq n-k$ alors on a*

$$(1)\qquad (-1)^{(n+r)(k+1)+2k(k+1)/2}f(z)=(-1)^k\int_{\xi\in\partial\omega} f(\xi)\wedge[R_M]_{n,r}(z,\xi)$$
$$+(-1)^{k+1}\int_{\xi\in\omega}\overline{\partial}_\xi f(\xi)\wedge[R_M]_{n,r}(z,\xi)$$
$$+\overline{\partial}_z\int_{\xi\in\omega} f(\xi)\wedge[R_M]_{n,r-1}(z,\xi).$$

Si $0\leq r\leq q-1$ on a

$$(2)\qquad (-1)^{(n+r)(k+1)+k(k+1)/2}f(\xi)$$
$$=(-1)^k\int_{z\in\partial\omega} f(z)\wedge[R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi)$$
$$+(-1)^{k+1}\int_{z\in\omega}\overline{\partial}_z f(z)\wedge[R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi)$$
$$+\overline{\partial}_\xi\int_{z\in\omega} f(z)\wedge[R_M]_{0,n-k-r}(z,\xi).$$

On a là une formule du type Bochner–Martinelli–Koppelman (BMK) pour variétés CR génériques q-concaves.

Pour construire nos opérateurs intégraux, nous passerons par les étapes suivantes :

(i) définition du domaine ω_τ et décomposition de son bord $\partial\omega_\tau$ en deux parties W_1 et W_2,
(ii) transformation de l'intégrale $\int_{z\in W_2} f(z)\wedge[R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi)$,
(iii) utilisation de l'opérateur de Henkin,
(iv) application du théorème 3.1.

On suppose que M est une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$, de codimension réelle k, CR générique et q-concave ($1\leq k\leq n$ et $1\leq q\leq(n-k)/2$).

3.1. *Définition de ω_τ et décomposition de $\partial\omega_\tau$.* Soit $z_0 \in M$. On considère φ une fonction de classe C^3, $(q+k)$-concave sur un voisinage de Z_0 dans M et telle que $d\varphi(z_0) \neq 0$. Posons :

$$\begin{aligned}
U_{z_0} &= \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z - z_0| < \tau\}, \qquad \tau \in \mathbb{R}_+^\star,\\
\Omega_\tau &= \{z \in U_{z_0} \mid \psi(z) < \varphi(z_0)\}\\
&\qquad \text{où } \psi \text{ est une extension de classe } C^2 \text{ de } \varphi \text{ à } U_{z_0},\\
\omega_\tau &= \Omega \cap M,\\
W_1 &= \{z \in M \mid \varphi(z) \leq \varphi(z_0) \text{ et } |z - z_0| = \tau\},\\
W_2 &= \{z \in M \mid \varphi(z) = \varphi(z_0) \text{ et } |z - z_0| \leq \tau\}.
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\partial\omega_\tau = W_1 \cup W_2, \qquad \partial W_1 = \partial W_2 = \{z \in M \mid \varphi(z) = \varphi(z_0) \text{ et } |z - z_0| = \tau\}.$$

On a donc la formule

$$\begin{aligned}
\int_{z\in\partial\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) = &\int_{z\in W_1} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi)\\
&+ \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi).
\end{aligned}$$

3.2. *Transformation de l'intégrale sur W_2.* On a établi dans [6] la relation

$$(\mathcal{R}) \qquad \overline{\partial}_{z,\xi} G_M(z,\xi) = (-1)^k (R_M(z,\xi) - S_M(z,\xi)).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_{z\in W_2} f(z) \wedge \overline{\partial}_z [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) + &\int_{z\in W_2} f(z) \wedge \overline{\partial}_\xi [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi)\\
&= (-1)^k \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi)\\
&\quad + (-1)^{k+1} \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [S_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi).
\end{aligned}$$

(Pour les définitions des noyaux G_M et S_M, voir [6].) W_2 est dans le bord de l'ouvert $\{z \in M \mid -\varphi(z) < -\varphi(z_0) \text{ et } |z - z_0| < \tau\}$. Comme φ est $(q+k)$-concave, $-\varphi$ est $(q+k)$-convexe. Par conséquent, les applications de Leray ψ_{I_*} définies dans la section 2 de [8] sont $(q+k)$-holomorphes en z. De plus, pour $0 \leq r \leq q-2$ on a $n-k-q+1 \leq n-k-r-1$. Par suite, on a les annulations $[S_M]_{0,n-k-r-1} = 0$ pour $n-k-r-1 \geq n-k-q+1$.

Par ailleurs on a aussi les formules suivantes :

$$\int_{z\in W_2} f(z) \wedge \overline{\partial}_\xi [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) = (-1)^{n+r+k+1} \overline{\partial}_\xi G^r_{W_2}(f)(\xi)$$

et

$$\int_{z\in W_2} f(z)\wedge \overline{\partial}_z[G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) = (-1)^{n+r+1}\overline{\partial}_\xi G^{r+1}_{W_2}(\partial_z f)(\xi) + (-1)^{n+r} G^{r+1}_{\partial W_2}(f)(\xi),$$

où l'on a posé (momentanément)

$$G^r_V(g) = \int_{z\in V} g(z)\wedge \overline{\partial}_\xi [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\cdot)$$

avec soit $V = W_2$, soit $V = \partial W_2$.

Donc finalement on obtient

$$(-1)^k \int_{z\in W_2} f(z)\wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) = (-1)^{n+r+k+1}\overline{\partial}_\xi G^r_{W_2}(f)(\xi) + (-1)^{n+r+1} G^{r+1}_{W_2}(\partial_\xi f)(\xi) + (-1)^{n+r} G^{r+1}_{\partial W_2}(f)(\xi).$$

3.3. *Utilisation de l'opérateur de Henkin.* Pour $U'_{z_0} = \{z \in U_{z_0} \mid |z-z_0| < \tau'\}$ avec $0 < \tau' < \tau$ on pose

$$\widetilde{P}_r f(\xi) = (-1)^{\alpha+k} \int_{z\in W_1} f(z)\wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}, \qquad \widetilde{P}_r f \in C^0_{n,r}(\omega).$$

$$\widetilde{\widetilde{P}}_r f(\xi) = (-1)^{n+r+\alpha} \int_{z\in \partial W_2} f(z)\wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi), \qquad \widetilde{\widetilde{P}}_r f \in C^0_{n,r}(\omega),$$

où $\alpha = (n+r)(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1) = \alpha(r)$. Posons $P_r f = \widetilde{P}_r f + \widetilde{\widetilde{P}}_r f$ sur U'_{z_0}. Pour $1 \le r \le q-1$, soit L_r l'opérateur de Henkin (cf. [3]) permettant de résoudre le $\overline{\partial}$ dans la boule U'_{z_0} de $\mathbb{C}^n$. Alors $L_r : C^0_{n,r}(U_{z_0}) \to C^\varepsilon_{n,r-1}(U'_{z_0})$, $0 < \varepsilon < 1$, est linéaire et continue. De plus, sur U'_{z_0}, on a

$$(\star) \qquad \overline{\partial} L_r \widetilde{P}_r f + L_{r+1}\overline{\partial}\widetilde{P}_r f = \widetilde{P}_r f.$$

On a aussi une relation analogue avec $\widetilde{\widetilde{P}}_r$. Par conséquent, $\overline{\partial} L_r P_r f + L_{r+1}\overline{\partial} P_r f = P_r f$. On déduit de ce qui précède, pour $\xi \in U'_{z_0}$, la formule

$$(3) \qquad (-1)^k \int_{z\in\partial\omega_\tau} f(z)\wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) = (-1)^\alpha \widetilde{P}_r f(\xi) + (-1)^\alpha \widetilde{\widetilde{P}}_r f(\xi) + (-1)^{n+r+k+1}\overline{\partial}_\xi \int_{z\in W_2} f(z)\wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) + (-1)^{n+r+1} \int_{z\in W_2} \overline{\partial} f(z)\wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi).$$

3.4. *Conséquence de la formule BMK pour variétés CR.* En tenant compte de (3) dans le (2) du théorème 3.1, on a, pour $\xi \in \omega_{\tau'} = \omega_\tau \cap U'_{z_0}$,

$$\begin{aligned} f(\xi) = \widetilde{P}_r f(\xi) + \widetilde{\widetilde{P}}_r f(\xi) &+ (-1)^{n+r+\alpha+k+1} \overline{\partial}_\xi \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ &+ (-1)^{n+r+\alpha+1} \int_{z\in W_2} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) \\ &+ (-1)^{\alpha+k+1} \int_{z\in\omega_\tau} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ &+ (-1)^{\alpha} \overline{\partial}_\xi \int_{z\in\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r}(z,\xi), \end{aligned}$$

ce qui entraîne encore

$$\begin{aligned} f(\xi) = \Big\{ L_{r+1}\overline{\partial} P_r f(\xi) &+ (-1)^{n+r+\alpha+1} \int_{z\in W_2} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) \\ &+ (-1)^{\alpha+k+1} \int_{z\in\omega_\tau} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \Big\} + \overline{\partial}_\xi L_r P_r f(\xi) \\ &+ (-1)^{n+r+\alpha+k+1} \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ &+ (-1)^{\alpha} \int_{z\in\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r}(z,\xi). \end{aligned}$$

On a donc

$$(\star\star) \qquad \begin{aligned} f(\xi) = \overline{\partial}_\xi \Big\{ &(-1)^{n+r+\alpha+k+1} \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ &+ (-1)^{\alpha} \int_{z\in\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r}(z,\xi) + L_r P_r f(\xi) \Big\} \\ &+ (-1)^{n+r+\alpha+1} \int_{z\in W_2} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) \\ &+ (-1)^{\alpha+k+1} \int_{z\in\omega_\tau} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ &+ L_{r+1} \overline{\partial}_\xi P_r f(\xi) \quad \text{pour } 1 \le r \le q-2 \text{ et } \xi \in \omega'. \end{aligned}$$

LEMME 3.1. *Pour* $1 \le r \le q-3$, *on a*

$$\overline{\partial} P_r f(\xi) = P_{r+1} \overline{\partial} f(\xi).$$

Démonstration. Soit f une (n,r)-forme de classe C^1 sur $\overline{\omega}_\tau$. Alors $\overline{\partial} f$ est une $(n,r+1)$-forme continue sur $\overline{\omega}_\tau$. Si $1 \le r \le q-3$ alors $1 \le r+1 \le q-2$. On a donc, en remplaçant f par $\overline{\partial} f$ dans la formule $(\star\star)$,

$$\begin{aligned}\overline{\partial} f(\xi) = \overline{\partial}(-1)^{n+r+\alpha^+ +k} \int_{z\in W_2} \overline{\partial} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) \\ + (-1)^{\alpha^+}\overline{\partial} \int_{z\in\omega_\tau} \overline{\partial} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) + \overline{\partial} L_{r+1}P_{r+1}\overline{\partial} f(\xi) \\ + L_{r+2}\overline{\partial} P_{r+1}\overline{\partial} f(\xi) \quad \text{où } \alpha^+ = \alpha(r+1).\end{aligned}$$

Notons que $\overline{\partial} L_{r+1}P_{r+1}\overline{\partial} f(\xi) + L_{r+2}\overline{\partial} P_{r+1}\overline{\partial} f(\xi) = P_{r+1}\overline{\partial} f(\xi)$. En appliquant $\overline{\partial}$ aux deux membres de $(\star\star)$, on obtient aussi

$$\begin{aligned}\overline{\partial} f(\xi) = \overline{\partial} L_{r+1}\overline{\partial} P_r f(\xi) \\ + (-1)^{n+r+\alpha+1}\overline{\partial}_\xi \int_{z\in W_2} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) \\ + (-1)^{\alpha+k+1}\overline{\partial} \int_{z\in\omega_\tau} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi).\end{aligned}$$

Remarquons qu'à cause de $\overline{\partial}^2 = 0$, on a $\overline{\partial} L_{r+1}\overline{\partial} P_r f = \overline{\partial} P_r f$. En comparant les expressions obtenues aux deux dernières équations et en remarquant que $\alpha^+ = \alpha + k + 1$, on a alors (après simplification) le résultat annoncé. Si on tient compte du lemme 3.1 dans la formule $(\star)$, on obtient

$$\begin{aligned}f(\xi) = \overline{\partial}_\xi \Big\{ (-1)^{n+r+\alpha+k+1} \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ + (-1)^\alpha \int_{z\in\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r}(z,\xi) + L_r P_r f(\xi) \Big\} \\ + L_{r+1}P_{r+1}\overline{\partial}_\xi f(\xi) + (-1)^{n+r+\alpha+1} \int_{z\in W_2} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-2}(z,\xi) \\ + (-1)^{\alpha+k+1} \int_{z\in\omega_\tau} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi), \quad \forall \xi \in \omega_{\tau'}.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}T_r f = (-1)^{n+r+\alpha} \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\cdot) \\ + \ (-1)^\alpha \int_{z\in\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r}(z,\cdot) + L_r P_r f.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule d'homotopie :

$$f = \overline{\partial} T_r f + T_{r+1}\overline{\partial} f \quad \text{sur } \omega_{\tau'} = \omega_\tau \cap U'_{z_0} \text{ si } 1 \le r \le q-3,$$

annoncée dans le (i) du théorème 1.1.

Prouvons maintenant la partie (ii) du dit théorème. Pour $r = q-2$ la relation $(\mathcal{R})$ s'écrit

$$\begin{aligned}[R_M]_{0,n-k-q}(z,\xi) = (-1)^k [S_M]_{0,n-k-q}(z,\xi) \\ + (\overline{\partial}_z [G_M]_{0,n-k-q-1}(z,\xi) + \overline{\partial}_\xi [G_M]_{0,n-k-q}).\end{aligned}$$

Comme $n-k-q < n-k-q+1$, on n'a pas l'annulation de $[S_M]_{0,n-k-q}(z,\xi)$. Donc l'intégrale $\int_{z\in W_2} \overline{\partial}_z f(z) \wedge [S_M]_{0,n-k-q}(z,\xi)$ n'est pas nécessairement nulle (∂W_2 étant non vide) . Par conséquent, la formule ($\star\star$) n'est pas valable pour $\overline{\partial} f$. Cependant, si $\overline{\partial} f = 0$ et $r = q-2$, la formule ($\star\star$) s'écrit

$$(4)\quad f(\xi) = \overline{\partial}_\xi \Big\{ (-1)^{n+r+\alpha+k+1} \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ + (-1)^\alpha \int_{z\in\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r}(z,\xi) \Big\} + P_r f(\xi), \qquad \forall \xi \in \omega_{\tau'}.$$

En appliquant $\overline{\partial}$ aux deux membres de (4), on a $\overline{\partial} P_r f(\xi) = 0$. Et compte tenu de ($\star$), on obtient $P_r f = \overline{\partial} L_r P_r f$. Par conséquent, on a

$$f(\xi) = \overline{\partial}_\xi \Big\{ (-1)^{n+r+\alpha+k+1} \int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-k-r-1}(z,\xi) \\ + (-1)^\alpha \int_{z\in\omega_\tau} f(z) \wedge [R_M]_{0,n-k-r}(z,\xi) + L_r P_r f(\xi) \Big\} = \overline{\partial} T_r f(\xi).$$

On a donc montré que si $r = q-2$ et $\overline{\partial} f = 0$, alors $f = \overline{\partial} T_r f$ sur $\omega_{\tau'}$.

3.5. *Estimation des opérateurs T_r.* Dans la sous-section 3.4 on a construit des opérateurs T_r de $C_{n,r}(\overline{\omega}_\tau)$ dans $C_{n,r-1}(\omega_{\tau'})$. Dans cette partie nous nous proposons de les estimer jusqu'au bord. Plus précisément, nous voulons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. *Les opérateurs T_r obtenus à la fin de la sous-section* 3.4 *sont des opérateurs continus de $C_{n,r}(\overline{\omega}_\tau)$ dans $C^{1/2-\varepsilon}_{n,r-1}(\overline{\omega}_{\tau'})$ pout tous $\varepsilon > 0$ et $1 \le r \le q-2$.*

Démonstration. La régularité jusqu'au bord de l'intégrale $\int_{z\in W_2} f(z) \wedge [G_M]_{0,n-r-k}(z,\cdot)$ a déjà été étudiée dans [6]. Si $f \in C_{n,r}(\overline{\omega}_\tau)$ alors cette intégrale est dans $C^{1/2-\varepsilon}(\overline{\omega}_\tau)$ pout tout $0 < \varepsilon < 1/2$. De plus, l'opérateur de Henkin a été estimé dans [5]. Remarques :

(1) Bien que dans [6] les estimations ont été faites dans le cas où ω_τ est strictement pseudoconvexe, les noyaux R_M et G_M, dans notre travail, ont les mêmes singularités que dans [6]. Les estimations de [6] restent encore valables dans notre cas.
(2) Si f est de classe C^ℓ sur $\overline{\omega}_\tau$, alors, toujours d'après [2], $T_r f$ est de classe $C^{1/2+\ell}$ sur ω_τ.

4. Applications. Nous voulons dans cette section retrouver la version C^0 et dans le cas "concave" de quelques théorèmes d'invariance de cohomologie obtenus dans [5] pour le cas des hypersurfaces réelles. La version C^∞ de ces résultats est dans [7]. Nous supposons dans cette section que M est une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$, de codimension réelle k, de classe C^3 et q-concave.

4.1. *Notations.* Soient Ω un ouvert de M et r un entier tel que $1 \leq r \leq n$. On note alors $C^{\alpha}_{n,r}(\Omega)$ (resp. $C^{\alpha}_{n,r}(\overline{\Omega})$) l'espace des (n,r)-formes différentielles continues sur Ω (resp. sur $\overline{\Omega}$) si $\alpha = 0$ et holdériennes d'ordre α si $0 < \alpha < 1$. On pose $C^{<1/2}_{n,r}(\Omega) = \bigcap_{0<\varepsilon<1/2} C^{1/2-\varepsilon}_{n,r}(\Omega)$ et on définit de même $C^{<1/2}_{n,r}(\overline{\Omega})$. On associe à ces espaces les sous-espaces suivants, pour $0 \leq \alpha < 1$:

$$Z^{\alpha}_{n,r}(\Omega) = C^{\alpha}_{n,r}(\Omega) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}_b, \qquad E^{<1/2}_{n,r}(\Omega) = Z^0_{n,r}(\Omega) \cap \overline{\partial}_b C^{<1/2}_{n,r-1}(\Omega).$$

On définit de même les sous-espaces correspondant à $\overline{\Omega}$. Enfin, on considère les espaces quotients suivants :

$$H^{n,r}_{<1/2}(\Omega) = Z^0_{n,r}(\Omega)/E^{<1/2}_{n,r}(\Omega).$$

On a de même l'espace quotient correspondant à $\overline{\Omega}$.

4.2. *Définitions*

Définition 4.1. Une *configuration affine q-convexe* pour M est la donnée d'une collection ordonnée $[U, D, \psi, \varrho_1, \dots, \varrho_k, \varrho_{-1}, \dots, \varrho_{-k}]$, où :

(1) U est un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$,
(2) $\psi, \varrho_1, \dots, \varrho_k, \varrho_{-1}, \dots, \varrho_{-k}$ sont des fonctions à valeurs réelles de classe C^2 définies sur U telles que :

  (a) $D = \{z \in U \mid \psi(z) < 0\}$ et $d\psi(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial D$,
  (b) pour $I = (i_1, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}(k)$ un multi-indice (notation voir [2], par exemple), les fonctions $\varrho_{i_1}, \dots, \varrho_{i_k}$ sont des fonctions définissantes de M sur U,
  (c) $\overline{\partial}\varrho_{i_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\varrho_{i_k} \neq 0$ sur U,
  (d) si on note $\Omega_\nu = \{z \in U \mid \varrho_\nu(z) < 0\}$, $\nu \in \{\pm 1, \dots, \pm k\} = J$, alors $M \cap U = \bigcap_{\nu \in J} \overline{\Omega}_\nu$, $U \setminus M = \bigcup_{\nu \in J} \Omega_\nu$ et $U = \bigcup_{\nu \in J} \overline{\Omega}_\nu$,
  (e) pour $1 \leq \ell \leq k$ et $i_1, \dots, i_\ell \in J$ tels que $|i_j| \neq |i_k|$ si $j \neq k$, $d\psi(z) \wedge d\varrho_{i_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\varrho_{i_\ell(z)} \neq 0$ sur $\{z \in U \mid \psi(z) = \varrho_{i_1(z)} = \cdots = \varrho_{i_\ell(z)} = 0\}$,
  (f) pour tout $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ élément d'un k-simplexe, la forme de Levi $\mathcal{L}^{\mathbb{C}^n}(\lambda_0\psi + \lambda_1\varrho_{i_1} + \cdots + \lambda_k\varrho_{i_k})$ admet au moins $q + k$ valeurs propres strictement positives en tout point de U.

Définition 4.2. Une *bosse q-concave* pour M est une collection ordonnée $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \varrho_1, \dots, \varrho_k, \varrho_{-1}, \dots, \varrho_{-k}]$ telle que :

(1) $U_0 \subset\subset U_1 \subset\subset U_2$ sont des ouverts relativement compacts dans $\mathbb{C}^n$,
(2) pour $i = 1, 2$, $D_i = \{z \in U_2 \mid \psi_i(z) < 0\}$,

(3) pour $i = 1, 2$, $[U_2, U_2 \setminus \overline{D}_i, -\psi_i, \varrho_1, \ldots, \varrho_k, \varrho_{-1}, \ldots, \varrho_{-k}]$ est une configuration q-convexe affine de M,
(4) $D_1 \subseteq D_2$ avec $D_2 \setminus D_1 \subset\subset U_0$.

DÉFINITION 4.3. $[\theta_1, \theta_2, V]$ est un *élément d'extension q-concave* dans M si θ_1 et θ_2 sont des ouverts de M à bord C^2 et V un ouvert relativement compact dans M tels que :

(1) $\theta_1 \subseteq \theta_2$,
(2) $\theta_2 \setminus \theta_1 \subset\subset V$,
(3) il existe une bosse q-concave
$$[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \varrho_1, \ldots, \varrho_k, \varrho_{-1}, \ldots, \varrho_{-k}]$$
telle que $V = U_2 \cap M$ et $\theta_i \cap V = \{z \in V \mid \psi_i(z) < 0\} = D_i \cap V$ pour $i = 1, 2$.

DÉFINITION 4.4. On dit que M est *q-concave à l'infini* si :

(1) M est q-concave,
(2) il existe une fonction φ de classe C^2 sur M, un compact K de M et une constante $C_\infty \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que :
   (a) $\varphi < 0$ sur $M \setminus K$,
   (b) $\{z \in M \mid \varphi(z) \leq c\}$ est compact pour tout $c < C_\infty$,
   (c) φ est $(q + k)$-concave en tout point de $M \setminus K$.

LEMME 4.1. *Soit $[\theta_1, \theta_2, V]$ un élément d'extension q-concave dans M. Alors l'application restriction $H^{n,r}_{<1/2}(\overline{\theta}_2) \to H^{n,r}_{<1/2}(\overline{\theta}_1)$ est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q - 2$.*

Démonstration. Soient $[\theta_1, \theta_2, V]$ un élément d'extension q-concave dans M, et $[U_0, U_1, U_2, D_1, D_2, \psi_1, \psi_2, \varrho_1, \ldots, \varrho_k, \varrho_{-1}, \ldots, \varrho_{-k}]$ une bosse q-concave associée à cet élément. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq q - 1$.

Supposons $2 \leq r \leq q - 2$. Montrons que l'application restriction définie ci-dessus est surjective. Soit $f_1 \in C^{<1/2}_{n,r}(\overline{\theta}_1)$ telle que $\overline{\partial}_b f_1 = 0$ sur θ_1. On doit trouver $f_2 \in C^{<1/2}_{n,r}(\overline{\theta}_2)$ telle que $f_1 - f_2 \in E^{<1/2}_{n,r}(\overline{\theta}_1)$. Comme $\overline{\partial}_b f_1 = 0$, d'après la formule d'homotopie du théorème 1.1 établie dans la section 3, on sait résoudre le $\overline{\partial}_b$ sur $\omega_{\tau_i} = D_i \cap U_2 \cap M$, $i = 1, 2$. Par conséquent il existe $u = T_r f_1 \in C^{<1/2}_{n,r-1}(\overline{D_1 \cap U_1 \cap M})$ tel que $\overline{\partial}_b u = f_1$ sur $D_1 \cap U_2 \cap M = D_1 \cap V = \theta_1 \cap V \subset \theta_1$. Soit alors $\chi \in C^\infty(M)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $\theta_2 \setminus \theta_1$ et $\operatorname{supp} \chi \subset\subset V$. Posons $u_1 = \chi T_r f_1$ sur θ_1 et
$$f_2 = \begin{cases} 0 & \text{sur } \overline{\theta}_2 \setminus \theta_1, \\ f_1 - \overline{\partial}_b(\chi T_r f_1) & \text{sur } \overline{\theta}_1. \end{cases}$$
On a donc $u_1 \in C^{<1/2}_{n,r-1}(\overline{\theta}_1)$ et $f_2 \in C^{<1/2}_{n,r}(\overline{\theta}_2)$ avec $f_1 - f_2 = \overline{\partial}_b u_1$.

Montrons que l'application restriction est aussi injective. Soit $f_2 \in Z^0_{n,r}(\overline{\theta}_2)$ avec $2 \leq r \leq q-2$ et telle qu'il existe $u_1 \in C^{<1/2}_{n,r}(\overline{\theta}_1)$ avec $\overline{\partial}_b u_1 = f_2$ sur θ_1. Comme $\overline{\partial}_b f_2 = 0$ sur θ_2, d'après notre formule d'homotopie il existe $v = T_r f_2 \in C^{<1/2}_{n,r-1}(\overline{\theta_2 \cap U_2})$ telle que $\overline{\partial}_b v = f_2$ sur $\theta_2 \cap U_1$. De plus, sur $U_2 \cap \theta_1 \subset U_2 \cap \theta_2$, on a $\overline{\partial}_b(v-u_1) = 0$. Par suite, $v - u_1 \in C^{<1/2}_{n,r-1}(\overline{\theta_2 \cap U_1})$ implique $v - u_1 \in Z^0_{n,r-1}(\overline{\theta_1 \cap U_2})$. Comme $2 \leq r \leq q-2$, on a $1 \leq r-1 \leq q-3$. La même formule d'homotopie nous permet de trouver $w = T_{r-1}(v-u)$ avec $w \in C^{<1/2}_{n,r-2}(\overline{\theta_1 \cap U_0})$ et telle que $\overline{\partial}_b w = v - u_1$. Si $\chi \in C^\infty(M)$ avec $\chi \equiv 1$ sur $\overline{\theta_2 \setminus \theta_1}$ et $\operatorname{supp} \chi \subset\subset V$, alors prenons $u_2 = u_1 - \overline{\partial}_b(\chi w)$ sur θ_2. On a $u_2 \in C^{<1/2}_{n,r-1}(\overline{\theta}_2)$ avec $\overline{\partial}_b u_2 = f_2$ sur $\overline{\theta}_2$.

Supposons $r = 1$. On utilise alors $v - u_1 = w$ où w est une $(n,0)$-forme CR sur $\overline{U_1 \cap \theta_1}$, et on pose alors $u_2 = u_1$ sur $\overline{\theta}_1$ et $u_2 = v + w$ sur $\theta_2 \setminus \theta_1$.

Enfin, supposons $r = 0$. L'injectivité provient alors du fait que dans les variétés CR 1-concaves le principe du prolongement analytique est valable pour les formes CR. Ainsi une $(n,0)$-forme CR sur $\overline{\theta}_2$ qui s'annule sur $\overline{\theta}_1$ est nécessairement nulle sur θ_2. La surjectivité découle du fait suivant : si f est une $(n,0)$-forme sur $\overline{\theta}_1$, elle est CR sur $\overline{U_1 \cap \theta_1 \cap D_i} \subset \overline{\theta}_1$, donc admet une extension CR sur $M \cap U_0$ et donc sur $\overline{\theta}_2$ (cf. thm. 7.2.1 de [1]).

Remarquons que pour $r = q-1$, on a le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Soient M une sous-variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$, de classe C^3 et de codimension k. Soit $[\theta_1, \theta_2, V]$ un élément d'extension q-concave dans M tel que $V \subseteq B(\xi, R) \cap M$, où ξ est un point de $\overline{\theta_2 \setminus \theta_1}$. Soit $f \in C^{<1/2}_{n,q-1}(M)$ avec $\overline{\partial}_b f = 0$. Alors pour tout voisinage W dans M de $\overline{\theta_2 \setminus \theta_1}$, il existe $u_2 \in C^{<1/2}_{n,q-2}(\overline{\theta}_2)$ avec $\overline{\partial}_b u_2 = f$ sur θ_2 et $u_2 = u_1$ sur $\overline{\theta}_1 \setminus W$.*

Démonstration. On remplace le théorème 2.3.2(i) de [7] par la formule d'homotopie établie dans [2]. La preuve est alors identique à celle de [7].

Lemme 4.3. *Soit $[D, G]$ une extension strictement q-concave dans M et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $\overline{G \setminus D}$ par des ouverts de M. Alors il existe des ouverts de M : $\theta_0, \ldots, \theta_N, V_0, \ldots, V_{N-1}$ tels que :*

(1) *$\theta_0 = D$ et $\theta_N = G$,*
(2) *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, $[\theta_i, \theta_{i+1}, V_i]$ est un élément d'extension q-concave dans M,*
(3) *pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe $j_0 \in I$ tel que $V_i \subset\subset U_{j_0}$.*

On pourra se reporter à [7] pour la définition de la notion d'extension strictement q-concave et la preuve du lemme 4.3.

On déduit des lemmes 4.1 et 4.2 le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. *Soit $[D,G]$ une extension strictement q-concave dans M. Alors l'application restriction :* $H^{n,r}_{<1/2}(\overline{G}) \to H^{n,r}_{<1/2}(\overline{D})$ *est un isomorphisme si* $0 \le r \le q-2$.

On a aussi le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2. *Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$, de classe C^3 et de codimension réelle k. On suppose que M est q-concave à l'infini. Soit D un domaine de M tel que $D = K \cup \{z \in M \setminus K \mid \varphi(z) < 0\}$ où $K \subset\subset M$. Alors l'application restriction $H^{n,r}_{<1/2}(M) \to H^{n,r}_{<1/2}(\overline{D})$ est un isomorphisme pour tout r tel que $0 \le r \le q-2$, et donc* $\dim_{\mathbb{C}} H^{n,r}(M) < +\infty$ *pour un tel r. De plus, si $r = q-1$, alors elle est injective.*

Démonstration. Soient K, φ comme dans la définition 4.4. Définissons D comme dans l'énoncé du théorème 4.2. Alors, compte tenu de la formule d'homotopie du théorème 1.1, le reste de la preuve est identique à celle de la proposition 3.1, section 3, chapitre 7 de [4].

Références

[1] R. A. Airapetjan and G. M. Henkin, *Integral representations of differential forms on Cauchy–Riemann manifolds and the theory of CR-functions*, Russian Math. Surveys 39 (1984), no. 3, 41–118.

[2] M. Y. Barkatou et Ch. Laurent-Thiébaut, *Solutions fondamentales et estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy–Riemann tangentiel*, Michigan Math. J. 54 (2006), 545–586.

[3] G. M. Henkin and J. Leiterer, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Monogr. Math. 79, Birkhäuser, 1984.

[4] Ch. Laurent-Thiébaut, *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, InterEditions / CNRS Editions, 1997.

[5] Ch. Laurent-Thiébaut and J. Leiterer, *Andreotti–Grauert Theory on Real Hypersurfaces*, Quaderni, Scuola Normale, Pisa, 1995.

[6] Ch. Laurent-Thiébaut and M. C. Shaw, *Boundary Hölder and L^p estimates for local solutions of the tangential Cauchy–Riemann equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 151–177.

[7] H. Ricard, *Résolution avec régularité jusqu'au bord de l'équation de Cauchy–Riemann dans des domaines à coins et de l'équation de Cauchy–Riemann tangentielle en codimension quelconque*, thèse, Univ. de Grenoble 1, 2002.

[8] S. Sambou, *Théorème de séparation de type Andreotti–Vesentini sur les variétés CR génériques*, Ann. Mat. 185 (2006), 381–394.

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences et Techniques
Université Cheikh Anta Diop de Dakar
Dakar, Sénégal
E-mail: tourebocar@yahoo.fr, ssambou@refer.sn

Received 10.7.2006
and in final form 21.2.2007 (1688)