ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
80 (2003)

Le cône des fonctions plurisousharmoniques négatives et une conjecture de Coman

par Magnus Carlehed (Stockholm) et
Jan Wiegerinck (Amsterdam)

Dédié à Józef Siciak

Résumé. Les fonctions plurisousharmoniques négatives dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ forment un cône convexe. Nous considérons les points extrémaux de ce cône, et donnons trois exemples. En particulier, nous traitons le cas de la fonction de Green pluricomplexe. Nous calculons celle du bidisque, lorsque les pôles se situent sur un axe. Nous montrons que cette fonction ne coïncide pas avec la fonction de Lempert correspondante. Cela donne un contre-exemple à une conjecture de Dan Coman.

1. Introduction. Cet article a deux intentions : de donner quelques exemples de points extrémaux dans le cône des fonctions plurisousharmoniques négatives, et de donner des exemples de domaines convexes où la fonction de Green pluricomplexe à plusieurs pôles ne coïncide pas avec la fonction de Lempert correspondante. Les deux buts sont liés. Nos résultats sont signalés dans les prépublications [Car-Wie1] et [Car-Wie2].

Soit C un cône convexe de sommet 0 dans un espace vectoriel V. Un point $x \in C$ est contenu dans une génératrice extrémale si $x = x_1 + x_2$ où $x_1, x_2 \in C$ entraîne $x_1 = \lambda_1 x$, $x_2 = \lambda_2 x$, où $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Par abus de langage on appelle x un *point extrémal* (voir [Cho]). Si l'on munit C d'une topologie métrisable, le sous-ensemble E des points extrémaux sera un ensemble G_δ. On appelle C *cône à base compact* s'il existe un hyperplan fermé H et un compact $K \subset H$ telle que $C = \{tx : x \in K,\ t > 0\}$. On a le théorème suivant [Cho, p. 140] :

Théorème 1.1 (Choquet). *Soit C un cône convexe à base compact, métrisable. Alors pour chaque $q \in C$ il existe une mesure de probabilité μ_q,*

2000 *Mathematics Subject Classification*: 32U35, 32U05.

Key words and phrases: plurisubharmonic function, pluricomplex Green function, Lempert function, extremal function.

concentrée sur E, telle que

$$f(q) = \int_C f(x)\, d\mu_q(x)$$

pour toute fonction $f \in V'$.

En conséquence, il est intéressant de caractériser E.

Dans cet article nous considérons le cône des fonctions plurisousharmoniques négatives dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$, avec la topologie induite par celle de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Il est connu que c'est un cône à base compact : pour H on prend $\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \int_G f\, dV = -1\}$, où G est un ouvert quelconque, relativement compacte, de Ω. Voir [Hor, pp. 149 et 229]. Nous dirons qu'une fonction u plurisousharmonique négative est *extrémale* si elle est extrémale au sens de cône convexe, et *maximale* si $(dd^c u)^n = 0$. Pour un compact K dans Ω on définit la *fonction extrémale relative* comme l'enveloppe supérieure de la famille $U = \{v \in \mathrm{PSH}(\Omega) : v \le 0,\ v|K \le -1\}$. Remarquons qu'a priori cette fonction peut être non-extrémale au sens convexe, malgré le langage.

La *fonction de Green pluricomplexe* (à plusieurs pôles) appartient au cône des fonctions plurisousharmoniques négatives. Elle est introduite par Lelong [Lel] ainsi : Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, et

$$A = \{(w_1, \nu_1), \ldots, (w_k, \nu_k)\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

où $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. On appelle $w_1, \ldots, w_k$ les *pôles* et $\nu_1, \ldots, \nu_k$ les *poids.* On pose

$$U_{A,\Omega} = \{u \in \mathrm{PSH}(\Omega) : u(\zeta) - \nu_j \log|\zeta - w_j| \le C_u,\ \zeta \to w_j,\ j = 1, \ldots, k\},$$

et on définie la fonction de Green pluricomplexe par

$$g(z, A) = g_\Omega(z, A) = \sup\{u(z) : u \in U_{A,\Omega},\ u \le 0\}.$$

S'il s'agit d'un seul pôle w et le poids est égal à 1, on écrit normalement $g(z, w)$.

Le problème d'extrémalité a été étudié par Cegrell et Thorbiörnson [Ce-Th]. Soient d'abord $n = 1$ et $\Omega = D$, le disque unité. Dans ce cas ils ont montré qu'une fonction sousharmonique négative φ est extrémale si et seulement si, ou bien

$$\varphi(z) = k \log\left|\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}\right|, \qquad k \ge 0,\ z_0 \in D,$$

ou bien

$$\varphi(z) = kP(z, \xi_0), \qquad k \le 0,\ \xi_0 \in \partial D,$$

où on note P le noyau de Poisson de D.

Passons au cas $n \ge 2$. Les mêmes auteurs ont généralisé leur résultat en montrant que dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, la fonction de Green pluricomplexe *à un seul pôle* $g(\cdot, w)$ est toujours extrémale pour chaque $w \in \Omega$. Si celles-ci donnaient toutes les fonctions extrémales qui s'annulent au bord, alors le théorème de Choquet donnerait que toute fonction plurisousharmonique u négative ayant 0 pour valeur au bord pourrait être représentée de la façon suivante :

$$u(z) = \int_{\Omega} g(z, w)\, d\mu_u(w),$$

où μ_u est une mesure positive. Ce type de potentiels a été étudié par le premier auteur [Car], qui a montré que la masse de Monge–Ampère d'un potentiel borné dans la boule est toujours une mesure absolument continue. Ceci suggère que les fonctions de Green forment un très petit sous-ensemble de E.

Ici, nous montrons que si la fonction de Green à plusieurs pôles est décomposée, alors les deux parties sont également des fonctions de Green ayant les mêmes pôles, mais peut-être d'autres poids. En particulier, les fonctions suivantes sont extrémales : 1) la fonction de Green avec deux pôles de poids 1 dans la boule unité, 2) la fonction de Green avec deux pôles $(a, 0)$ et $(b, 0)$ de poids 1 dans le bidisque de $\mathbb{C}^2$. Nous profitons du fait que ces fonctions sont connues explicitement. Au vu de cela on pourrait se demander si des fonctions négatives, et maximales dans un ensemble assez grand, sont extrémales. Il est un peu surprenant que dans le cas du bidisque, les fonctions de Green avec des poids distincts ne soient pas extrémales. Nous montrons cela par un calcul explicite de ces fonctions.

Ensuite, nous montrons que la fonction $\max\{\log |z|, -1\}$ dans la boule unité (la fonction extrémale relative d'une boule plus petite) est extrémale. Il est tentant de conjecturer que toute fonction extrémale relative d'un compact assez régulier appartient aussi à E.

Toutes les exemples donnés jusqu'ici concernent des fonctions qui s'annulent au bord du domaine. Nous discutons brièvement des fonctions qui ne s'annulent pas sur tout le bord, et nous donnons un exemple élémentaire.

Passons à notre deuxième sujet. On introduit d'abord la fonction de Lempert. Soit D le disque unité, et Ω et A comme plus haut. Pour tout point $z \in \Omega$, on note $F_z = F_{z,A}$ la famille des applications analytiques $f : D \to \Omega$ telles que $f(0) = z$ et qu'il existe des points $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in D$ avec $f(\zeta_j) = w_j$, $j = 1, \dots, k$. On appelle ces applications, aussi bien que leurs images, des *disques analytiques ajustés à A*. Pour tout $f \in F_z$ on définie $d(f) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j \log |\zeta_j|$ et la *fonction de Lempert* $\delta(z, A) = \delta_\Omega(z, A) = \inf\{d(f) : f \in F_z\}$. On voit facilement que $\delta(\cdot, A) \geq g(\cdot, A)$ avec égalité si et seulement si δ est plurisousharmonique. Un théorème remarquable de Lempert [Lem] dit que cela est vraiment le cas si Ω est convexe et $k = 1$. Beaucoup plus tard Coman [Com] a montré que c'est aussi le cas si Ω est la boule unité, $k = 2$, et les poids sont égaux.

On définit

$$\delta^A(z) = \min_{\emptyset \neq B \subseteq A} \delta(z, B).$$

Évidemment, on a

$$\delta(\cdot, A) \geq \delta^A(\cdot) \geq g(\cdot, A).$$

Coman [Com] a conjecturé que, dans des domaines convexes bornés, la deuxième inégalité est toujours une égalité. Plus tard, Wikström [Wik] a montré que dans ces domaines, la première inégalité est toujours une égalité. En conséquence, il reformule la conjecture sous la forme $\delta(\cdot, A) = g(\cdot, A)$.

Wikström a aussi montré le théorème suivant.

Théorème 1.2 ([Wik, corollaire 2.3]). *Soit Ω un domaine borné et taut de $\mathbb{C}^n$, et soit A comme plus haut. Alors pour tout $z \in \Omega$ il existe un disque analytique f tel que $f(0) = z$, passant par un sous-ensemble (non-vide) $\{w_{j_1}, \ldots, w_{j_m}\}$ de $\{w_1, \ldots, w_k\}$, et tel que $d(f)$ soit égal à la borne inférieure dans la définition de*

$$\delta^A(z) = \delta(z, \{(w_{j_1}, \nu_{j_1}), \ldots, (w_{j_m}, \nu_{j_m})\}).$$

Motivé par ce théorème, Wikström propose la définition suivante. Si $\delta(z, A) = d(f)$ pour un disque f passant par z et par un sous-ensemble non-vide de A, alors f est appelé un *disque extrémal* pour z et A. Ensuite il caractérise les disques extrémaux dans des domains convexes, ce qui généralise un théorème de Lempert. Il fait remarquer que les poids sont invisibles dans la caractérisation, ce qui indique que la conjecture peut être problématique, ou en tous cas impossible de montrer en utilisant cette méthode.

Dans cet article nous donnons un contre-exemple à la conjecture de Coman. En effet on a le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Soit Ω le bidisque unité et soit*

$$A = \{((a, 0), 1), ((b, 0), 2)\}$$

avec $0 < |a|, |b| < 1$. Alors $\delta(z, A) \not\equiv g(z, A)$.

Il s'ensuivra un même résultat pour des domaines convexes, suffisamment proches de Ω. Le défaut de la conjecture dépend largement du fait que la fonction de Green actuelle n'est pas extrémale. Il est alors tentant de modifier la conjecture de manière à la restreindre aux fonctions de Green qui sont extrémales. Pourtant, nous estimons qu'il n'y a pas suffisamment de support pour faire une conjecture d'aucune façon.

2. La fonction de Green à plusieurs pôles. Commençons par un lemme connu [Ce-Th], [Kis].

LEMME 2.1. *Soient G une boule de $\mathbb{C}^n$, centrée à l'origine, et u une fonction plurisousharmonique négative dans G. On pose*

$$\Psi_u(z,r) := \frac{1}{\log r} \sup_{\xi \in rD} u(\xi z)$$

pour $z \in (1/r)G$ et $0 < r < 1$. Alors

1) *pour tout z fixé, $\Psi_u(z,r)$ est une fonction croissante de r (sur son domaine de définition), donc la limite*

$$\Psi_u(z) = \lim_{r \downarrow 0} \Psi_u(z,r)$$

existe,

2) *pour z fixé, ou bien $u_z : \xi \mapsto u(\xi z)$ est identiquement $-\infty$, ou bien elle est sousharmonique et $\Psi_u(z) = \Delta u_z(\{0\})$, donc $\Psi_u(z)$ est linéaire en u,*

3) *il existe une constante $\alpha \geq 0$ (le nombre de Lelong de u à l'origine) et un ensemble pluripolaire $E \subset \mathbb{C}^n$ tels que $\Psi_u(z) \equiv \alpha$ si $z \notin E$ et $\Psi_u(z) > \alpha$ si $z \in E$,*

4) *pour chaque $z \in G$ et $|\xi| < 1$ on a $u(\xi z) \leq \alpha \log |\xi|$.*

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $G = B$, la boule unité.

1) et 2) sont des résultats de la théorie du potentiel classique ; cf. par exemple [Ran, pp. 46 et 78].

3) Il résulte de 1) que

$$-\Psi_u(z) = \lim_{r \downarrow 0} -\Psi_u(z,r) = \sup_{R > r > 0} -\Psi_u(z,r) = \sup_{R > r > 0} \frac{1}{-\log r} \sup_{|\xi| = r} u(\xi z),$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ et R assez petit. Par conséquent, $(-\Psi_u)^* \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$ et comme elle est négative, elle est constante ($= -\alpha$). On pose $E = \{z \in \mathbb{C}^n : (-\Psi_u)^*(z) \neq -\Psi_u(z)\}$. Alors E et α ont les propriétés souhaitées.

4) Grâce à la monotonie on a

$$\frac{1}{\log r} \sup_{|\xi| = r} u(\xi z) = \Psi_u(z,r) \geq \Psi_u(z) \geq \alpha,$$

donc

$$\sup_{|\xi| = r} u(\xi z) \leq \alpha \log |\xi|,$$

ce qui achève la preuve. ∎

Soient Ω un domaine *hyperconvexe borné* dans $\mathbb{C}^n$, et A comme dans l'introduction. Il est commode d'introduire un ordre partiel sur $(\mathbb{R}^+)^k$ défini par $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \leq (\nu_1, \ldots, \nu_k) = \nu$ si $\mu_j \leq \nu_j$, $j = 1, \ldots, k$. Les pôles étant fixés, on note g_ν la fonction de Green de poids ν_j en w_j, $j = 1, \ldots, k$, et $\nu \in (\mathbb{R}^+)^k$ (voir la définition dans l'introduction). On a le théorème suivant.

Théorème 2.2 ([Lel]). *La fonction g_ν est l'unique solution du problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} u \in C(\overline{\Omega} \setminus A) \cap \mathrm{PSH}(\Omega), \\ (dd^c u)^n = 0 \quad \textit{dans } \Omega \setminus A, \\ u(z) - \nu_j \log|z - w_j| = O(1) \quad \textit{si } z \to w_j \textit{ pour tout } j, \\ u(z) \to 0 \quad \textit{si } z \to \partial\Omega. \end{cases}$$

La proposition suivante est une généralisation d'un théorème de [Ce-Th].

Proposition 2.3. *Supposons que $g_\nu = \varphi_1 + \varphi_2$. Alors, il existe $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^k$ tel que $\lambda \le \nu$, $\varphi_1 = g_\lambda$ et $\varphi_2 = g_{\nu-\lambda}$.*

Preuve. Notons λ_j le nombre de Lelong de φ_1 et μ_j celui de φ_2 en w_j. On commence par faire une étude locale en chaque pôle w_j. Sans perte de généralité on peut supposer que $j = 1$ et $w_1 = 0$. En utilisant les 2) et 3) du lemme 2.1 on obtient $\nu_1 \equiv \Psi_{g_\nu}(z) = \Psi_{\varphi_1}(z) + \Psi_{\varphi_2}(z) \ge \lambda_1 + \mu_1$, avec égalité presque partout. Il s'ensuit que $\nu_1 = \lambda_1 + \mu_1$ et que les ensembles exceptionnels de φ_1 et φ_2 sont en fait vides. D'après le 4) du lemme 2.1, on a $\varphi_1(\xi z) \le \lambda_1 \log|\xi|$ si $|\xi| < 1$. Donc $a(z) = \varphi_1(z) - \lambda_1 \log|z|$ est bornée supérieurement au voisinage de 0, et de la même manière nous trouvons que $b(z) = \varphi_2(z) - \mu_1 \log|z|$ y est bornée supérieurement. Mais leur somme est égale à $g_\nu(z) - \nu_1 \log|z|$ qui est bornée inférieurement au voisinage de 0, alors a et b le sont aussi. Nous avons montré que φ_1 et φ_2 ont le comportement souhaité en chaque pôle, et que $\nu = \lambda + \mu$.

On a de plus,

$$0 = (dd^c g)^n = (dd^c \varphi_1)^n + (dd^c \varphi_2)^n + \dots$$

en dehors de A, où les termes du reste sont positifs, ce qui montre que $(dd^c \varphi_i)^2 = 0$, $i = 1, 2$. Le théorème 2.2 donne maintenant $\varphi_1 = g_\lambda$, et $\varphi_2 = g_\mu = g_{\nu-\lambda}$. ∎

Corollaire 2.4. *Pour démontrer que g_ν est extrémale, il suffit de démontrer que $g_\nu = g_\lambda + g_\mu$ entraîne que le vecteur λ est proportionnel à ν. En particulier, dans le cas d'un seul pôle, g_ν est toujours extrémale.*

Preuve. Soit donnée une décomposition $g_\nu = \varphi_1 + \varphi_2$. D'après la proposition, on a en fait $g_\nu = g_\lambda + g_\mu$. Par hypothèse on sait que $\lambda = c\nu$ où $0 \le c \le 1$. Comme $g_{c\nu} = c g_\nu$, g_ν est extrémale. ∎

Supposons que les pôles $A = \{w_1, \dots, w_k\}$ et les poids $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ sont fixés. Soit P le sous-ensemble de $(\mathbb{R}^+)^k$ défini par

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in P \iff g_\nu = g_\mu + g_{\nu-\mu}.$$

Alors, $\{c\nu : 0 \le c \le 1\} \subset P$ avec égalité si et seulement si g_ν est extrémal.

Proposition 2.5. *L'ensemble P est convexe.*

Preuve. Supposons que $\mu, \lambda \in P$. Alors,

$g_\nu = ag_\nu + (1-a)g_\nu = a[g_\mu + g_{\nu-\mu}] + (1-a)[g_\lambda + g_{\nu-\lambda}] = [ag_\mu + (1-a)g_\lambda] + \dots$ Maintenant il suffit de montrer que $ag_\mu + (1-a)g_\lambda = g_{a\mu+(1-a)\lambda}$. En dehors de A on a

$$\begin{aligned}(1)\qquad 0 = (dd^c g_\nu)^n &= (dd^c[g_\mu + g_{\nu-\mu}])^k \wedge (dd^c[g_\lambda + g_{\nu-\lambda}])^{n-k}\\ &= (dd^c g_\mu)^k \wedge (dd^c g_\lambda)^{n-k} + \dots,\end{aligned}$$

où les termes du reste sont positifs. Il s'ensuit que

$$(dd^c[ag_\mu + (1-a)g_\lambda])^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} (dd^c g_\mu)^k \wedge (dd^c g_\lambda)^{n-k} = 0$$

en dehors de A. Comme $ag_\mu + (1-a)g_\lambda$ a le comportement correct en chaque pôle, le théorème 2.2 termine la preuve. ∎

Passons au cas de la boule unité avec $k = 2$ et des poids égaux. Comme nous avons signalé dans l'introduction, Coman [Com] a calculé la fonction de Green correspondante. Rappelons une partie importante de ce calcul. Quitte à appliquer un automorphisme approprié, on peut supposer que les pôles se situent symétriquement en $w_1 = (-\beta, 0)$ et $w_2 = (\beta, 0)$, où $\beta \in (0,1)$. Soient $z = (0,\gamma)$ et S l'ensemble des paires $(s,t) \in (0,1) \times D$ telles qu'il existe un disque analytique $f : D \to B$ avec $f(0) = z$, $f(s) = w_1$, et $f(t) = w_2$. Alors,

$$S = \{(s,t) \in (0,1) \times D : s \neq t,\ s^2 > c,\ |t|^2 > c,\ E(s,t) \geq 0\},$$

où c et d sont des constantes (qui dépendent de β et γ) et

$$E(s,t) = (s^2 - c)(|t|^2 - c)|1 - st|^2 - (1 - s^2)(1 - |t|^2)|st + d|^2.$$

Grâce à la symétrie, la fonction de Lempert est réalisée par un disque correspondant à un point de S avec t réel.

En utilisant le calcul de Coman, nous montrerons que la fonction de Green correspondante est extrémale.

THÉORÈME 2.6. *Soient $\Omega = B$ la boule unité dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, et w_1 et w_2 deux pôles donnés, avec $\nu_1 = \nu_2 = 1$. Alors, $g_{(1,1)}$ est extrémale.*

Preuve. Commençons par le cas $n = 2$. Sans perte de généralité on peut supposer que les pôles se situent symétriquement. Nous sommes alors dans le cas décrit ci-dessus. Supposons que $g_{(1,1)} = g_{(p,q)} + g_{(1-p,1-q)}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}(2)\quad g_{(1,1)} &= g_{(p,q)} + g_{(1-p,1-q)} \leq \delta_{(p,q)} + \delta_{(1-p,1-q)}\\ &= \inf\{p \log|\zeta_1| + q \log|\zeta_2|\} + \inf\{(1-p)\log|\zeta_1| + (1-q)\log|\zeta_2|\}\\ &\leq \inf\{\log|\zeta_1| + \log|\zeta_2|\} = \delta_{(1,1)} = g_{(1,1)},\end{aligned}$$

où la dernière égalité est le théorème de Coman et toutes les bornes inférieures sont prises sur la même famille de disques analytiques. En particulier, le disque extrémal de $\delta_{(1,1)}$ est extrémal pour $\delta_{(p,q)}$ et $\delta_{(1-p,1-q)}$ aussi. Donc, les fonctions $S \to \mathbb{R}$:

$$(s,t) \mapsto s|t|, \qquad (s,t) \mapsto s^p|t|^q, \qquad (s,t) \mapsto s^{1-p}|t|^{1-q}$$

sont minimales au même point $a \in \partial S$. Coman a montré que $E(a) = 0$ tandis que $\partial S \in C^1$ au voisinage de a. Alors les gradients de ces trois fonctions sont proportionnels, et $p = q$. La preuve est finie dans le cas $n = 2$.

Passons au cas général. On suppose que les pôles se situent symétriquement dans le disque $\{z \in B_n : z_2 = \ldots = z_n = 0\}$, et on note $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, z')$. Alors, la fonction de Green $g^n_{(1,1)}(z)$ n'est que la fonction de Green de la boule de dimension 2, $g^2_{(1,1)}$, évaluée au point $(z_1, \|z'\|)$ (cf. [Com, corollaire 4.6.3]). On note δ^n et δ^2 les fonctions de Lempert correspondantes. Soient $0 \le z_2 < 1$ et U une rotation unitaire dans $\mathbb{C}^{n-1}$ envoyant $(z_2, 0, \ldots, 0)$ sur z'. Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est un disque analytique appartenant à la famille qui définit $\delta^2_{(p,q)}(z_1, z_2)$, on peut produire un disque $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2)$ qui appartient à la famille qui définit $\delta^n_{(p,q)}(z_1, z')$ en posant $\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1$ et $\widetilde{\varphi}_2 = U \circ \varphi_2$. Évidemment, on peut aussi faire l'inverse. Ceci montre que $\delta^n_{(p,q)}(z_1, z') = \delta^2_{(p,q)}(z_1, \|z'\|)$. Maintenant on peut faire un calcul analogue au précédent (2) :

$$\begin{aligned}
(3) \qquad \delta^n_{(1,1)}(z_1, z') &= \delta^2_{(1,1)}(z_1, \|z'\|) = g^2_{(1,1)}(z_1, \|z'\|) = g^n_{(1,1)}(z_1, z') \\
&= g^n_{(p,q)}(z_1, z') + g^n_{(1-p,1-q)}(z_1, z') \\
&\le \delta^n_{(p,q)}(z_1, z') + \delta^n_{(1-p,1-q)}(z_1, z') \le \delta^n_{(1,1)}(z_1, z').
\end{aligned}$$

On trouve une contradiction comme plus haut. ∎

Soient maintenant $D \times D$ le bidisque de $\mathbb{C}^2$ et $a_i \in D$, $i = 1, \ldots, k$. On note

$$T_i(z_1) = \log \left| \frac{z_1 - a_i}{1 - \overline{a}_i z_1} \right|$$

la fonction de Green du disque unité. Alors la fonction de Green de pôles $w_i = (a_i, 0)$ et poids $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ est connue [Car] :

$$(4) \qquad g_{\mathbf{1}}(z) = \max \Big\{ \sum_{i=1}^{k} T_i(z_1), \log |z_2| \Big\}.$$

Généralisons cette formule. On garde la position des pôles, mais on autorise des poids différents. Sans perte de généralité on peut supposer que $1 = \nu_1 \ge \nu_2 \ge \ldots \ge \nu_k$.

Théorème 2.7. *Dans la situation décrite, si au moins deux poids sont différents, la fonction de Green est la suivante* :

$$g_\nu = g_{(1,\nu_2,\dots,\nu_k)} = \nu_k h_k(z) + \sum_{j=1}^{k-1} (\nu_j - \nu_{j+1}) h_j(z), \tag{5}$$

où $h_j = \max\{T_1(z_1)+\ldots+T_j(z_1), \log|z_2|\}$ *est la fonction de Green de* $D\times D$ *avec le poids* 1 *en* $w_1,\dots,w_j$. *Par conséquent, elle n'est pas extrémale. En revanche, si tous les poids sont égaux* (*cf. la formule* (4)), *elle est extrémale.*

Preuve. Soit $b(z)$ la somme de (5). Commençons par montrer que $g = b$. Il suffit de vérifier les quatre conditions du théorème 2.2. La première et la quatrième conditions sont triviales. On vérifie la troisième condition. Au voisinage de w_l, la fonction h_j peut s'écrire $h_j(z) = \log\|z - w_l\| + O(1)$ si $j \geq l$, et elle y est bornée si $j < l$. Il s'ensuit que

$$b(z) = \Big(\nu_k + \sum_{j=l}^{k-1} (\nu_j - \nu_{j+1})\Big) \log\|z - w_l\| + O(1) = \nu_l \log\|z - w_l\| + O(1)$$

au voisinage de w_l. Il nous reste à vérifier que b est maximale en dehors des pôles. On constate que, pour tout point excepté les pôles, il existe un voisinage U où toutes les h_j, sauf peut-être une, sont pluriharmoniques. Donc, dans U, la masse de Monge–Ampère de b est donnée par la fonction exceptionnelle et comme toutes les h_j sont maximales on conclut que $g = b$.

La formule (5) implique évidemment la non-extrémalité de g_ν dans le cas où les poids sont distincts. Finalement, supposons que $g_{\mathbf{1}} = g_\nu + g_{\mathbf{1}-\nu}$, où les ν_j sont dans un ordre décroissant. On peut écrire, en utilisant (5),

$$g_\nu = \nu_k h_k + \sum_{j=1}^{k-1} (\nu_j - \nu_{j+1}) h_j.$$

De même on a

$$g_{\mathbf{1}-\nu} = (1 - \nu_1) h_k + \sum_{j=1}^{k-1} (\nu_j - \nu_{j+1}) h'_j,$$

où h'_j est la fonction de Green associée à l'ensemble des pôles, complémentaire de celui de h_j. Cela entraîne que la fonction $h_j + h'_j$ a des pôles de poids $\mathbf{1}$ en tout w_j, $1 \leq j \leq k$. On trouve par substitution

$$(\nu_1 - \nu_k) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} (\nu_j - \nu_{j+1})(h_j + h'_j).$$

Comme pour $j < k$ on a $h_j + h'_j \leq h_k$ avec inégalité stricte quelque part dans $D\times D$, on conclut que tous les ν_k sont égales, et le théorème est démontré. ■

Remarque. Nous donnons une autre forme de la fonction de Green à poids différents :

$$g_\nu = \max\{u_1(z), \dots, u_k(z), \log|z_2|\}$$

où

$$u_1(z) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i T_i(z_1),$$

$$u_j(z) = \nu_j \log|z_2| + \sum_{i=1}^{j-1} (\nu_i - \nu_j) T_i(z_1), \qquad 2 \le j \le k.$$

Nous esquissons la preuve. Soit $a(z)$ le max. On a

$$U_1 := \{z : a(z) = u_1(z)\} = \Big\{ z : \log|z_2| \le \sum_{i=1}^{k} T_i(z_1) \Big\},$$

$$U_j := \{z : a(z) = u_j(z)\} = \Big\{ z : \sum_{i=1}^{j} T_i(z_1) \le \log|z_2| \le \sum_{i=1}^{j-1} T_i(z_1) \Big\},$$

pour $j = 2, \dots, k$, et

$$V := \{z : a(z) = \log|z_2|\} = \{z : \log|z_2| \ge T_1(z_1)\}.$$

Remarquons que ces ensembles sont invariants par changements des poids, tant que *l'ordre* des poids est inchangé.

Dans U_1, on a $h_j(z) = T_1(z_1) + \ldots + T_j(z_1)$, et dans V on a $h_j(z) = \log|z_2|$, pour tout j. Dans U_l, $l = 2, \dots, k$, on a $h_j(z) = T_1(z_1) + \ldots + T_j(z_1)$ si $1 \le j \le l-1$ et $h_j(z) = \log|z_2|$ si $j \ge l$. En utilisant cela et en considérant chaque ensemble séparément, on peut vérifier que $a = b$.

Remarque. Le théorème reste vrai pour le polydisque dans $\mathbb{C}^n$ si tous les pôles se situent dans le disque $\{z_2 = \ldots = z_n = 0\}$. Dans ce cas, il faut remplacer $\log|z_2|$ par $v(z) = \max\{\log|z_2|, \dots, \log|z_n|\}$ et on constate que v est confondue avec la fonction de Green du 2-disque ($z_1 = \sigma$, $z_2 = \alpha_2\tau$, $\dots$, $z_n = \alpha_n\tau$), ($(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \ne (0, 0, \dots, 0)$, $|\sigma| < 1$, $|\tau| < \min\{1/|\alpha_j|\}$).

3. La fonction $\max\{\log|z|, -1\}$ **dans la boule unité.** Soit $u(z) = \max\{\log|z|, -1\}$ la fonction relative extrémale du compact $B_1 = \{z : |z| \le 1/e\}$ dans la boule unité B de $\mathbb{C}^2$. On note $B_2 = B \setminus B_1$. On considère la question de l'extrémalité de u.

Théorème 3.1. *La fonction u est extrémale.*

Preuve. Supposons que $u = \varphi_1 + \varphi_2$, où φ_i est une fonction plurisousharmonique négative dans la boule B, $i = 1, 2$. Remarquons que les fonctions φ_i sont supérieurement continues et leur somme est continue : elles sont alors continues. De plus, $-1 < \varphi_i < 0$.

Dans B_1, la fonction u est pluriharmonique. Dans B_2, elle est harmonique sur chaque droite passant par l'origine. Plus précisement, pour chaque $q \in \mathbb{C}$

fixé, $z_1 \mapsto u(z_1, qz_1)$ est harmonique dans la couronne $1/(e\sqrt{1+|q|^2}) < |z_1| < 1/\sqrt{1+|q|^2}$. (De plus, $z_2 \mapsto u(0, z_2)$ est harmonique dans la couronne $1/e < |z_2| < 1$, ce qui correspond à $q = \infty$.) Par conséquent, φ_1 et φ_2 ont également toutes les propriétés mentionnées.

On va démontrer le théorème sous une condition supplémentaire, que φ_1 (et donc φ_2) ne dépend que de z_1 et $|z_2|$, qui sera enlevée après. D'abord φ_1 ne dépend que de z_1 dans B_1. Pour voir cela, on fixe z_1. Alors φ_1 est une fonction harmonique de z_2 dans un disque centré en 0, et ne dépend que de $|z_2|$, donc elle est constante. Il s'ensuit que la fonction suivante est bien définie : $v(z_1) = \varphi_1|_{B_1}(z_1, z_2)$ pour $|z_1| < 1/e$. On pose aussi $V(z) = \varphi_1(z)$ dans B_2. La fonction v est harmonique et continue jusqu'au bord. La fonction V coïncide avec v sur $|z| = 1/e$, elle est continue jusqu'au bord, elle s'annule sur ∂B. De plus elle est harmonique sur chaque droite complexe passant par l'origine. Ceci montre que pour chaque v donnée, V est unique si elle existe; s'il y avait deux telles fonctions, on considérerait leur différence sur les droites.

La fonction v admet la représentation

$$v(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (er)^{|n|} e^{in\theta}$$

dans le disque $|z_1| \leq 1/e$. Ici, $z_1 = re^{i\theta}$ et

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{-1+it}) e^{-int}\, dt.$$

Notons que $c_0 = v(0) = \varphi_1(0) \in (-1, 0)$. On cherche ensuite une fonction $H_t(w)$, $0 \leq t < 1/e$, qui soit harmonique dans la couronne $t < |w| < et$, avec les valeurs au bord $H_t(w) = 0$ sur le cercle $|w| = et$ et $H_t(w) = v(w)$ sur $|w| = t$. On vérifie sans peine que

$$H_t(w) = -c_0 \log\left|\frac{w}{et}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(ew)^n + c_{-n}(e\overline{w})^n)\, \frac{(et/|w|)^{2n} - 1}{e^{2n} - 1}$$

est la solution unique de ce problème.

Considérons maintenant, pour z_2/z_1 fixé, la fonction $w \mapsto V(w, (z_2/z_1)w)$. Si l'on pose $t = |z_1|/(e|z|)$, elle se confond avec H_t. Par conséquent,

$$(6)\quad V(w, (z_2/z_1)w) = -c_0 \log\left|\frac{w|z|}{z_1}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(ew)^n + c_{-n}(e\overline{w})^n)\, \frac{(|z_1|/(|z|\,|w|))^{2n} - 1}{e^{2n} - 1}.$$

En particulier, en posant $w = z_1$ on trouve

$$V(z_1, z_2) = -c_0 \log|z| + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(ez_1)^n + c_{-n}(e\overline{z}_1)^n)\, \frac{(1/|z|)^{2n} - 1}{e^{2n} - 1}.$$

Pour abréger, remplaçons $c_n e^{|n|}/(e^{2|n|} - 1)$ par b_n, $n \neq 0$, et $-c_0$ par a; la formule se ramène à

$$V(z_1, z_2) = a \log|z| + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n z_1^n + b_{-n}\overline{z}_1^n)((1/|z|)^{2n} - 1).$$

Comme V a des valeurs réelles, on obtient $b_{-n} = \overline{b}_n$, de sorte que $V(z) = a \log|z| + \operatorname{Re} f(z_1/|z|^2) - \operatorname{Re} f(z_1)$ où f est une fonction holomorphe dans le disque de rayon e (car $1/e < |z| < 1$, on a $0 \leq |z_1|/|z|^2 < e$). Posons $g(z) = f(1/z)$; g est holomorphe au dehors du disque de rayon $1/e$, et $V(z) = a \log|z| + \operatorname{Re} g(\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2/z_1) - \operatorname{Re} g(1/z_1)$.

On calcule ensuite le signe du déterminant $(dd^c h)^2$ de la matrice Hessienne de $h(z) := V(z) - a \log|z| = \operatorname{Re} g(\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2/z_1) - \operatorname{Re} g(1/z_1)$. Le dernier terme est pluriharmonique. Il suffit alors de considérer $g(\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2/z_1)$. Il est commode de faire le changement de coordonnées suivant : $w_1 = z_2/z_1$, $w_2 = z_1$. Comme il est holomorphe, le signe du déterminant ne changera pas, et

$$\begin{aligned} (7) \quad 2 \operatorname{Re} g(\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2/z_1) &= 2 \operatorname{Re} g(\overline{w}_2(1 + w_1\overline{w}_1)) \\ &= g(\overline{w}_2(1 + w_1\overline{w}_1)) + g(w_2(1 + w_1\overline{w}_1)) =: \widetilde{h}(w). \end{aligned}$$

La dernière expression étant harmonique en w_2, il est superflu de calculer $\partial^2\widetilde{h}/\partial w_1 \partial \overline{w}_1$, et le déterminant vaut

$$-\left|\frac{\partial^2 \widetilde{h}}{\partial w_1 \partial \overline{w}_2}\right|^2 = -\left|\overline{w}_1(D_1 + D_2\overline{w}_2(1 + w_1\overline{w}_1))\right|^2,$$

où D_j est la dérivée j-ième de g évaluée au point $\overline{w}_2(1 + w_1\overline{w}_1)$. On conclut que, ou bien le déterminant de la matrice Hessienne de h est négatif quelque part, ou bien $D_1 + D_2\overline{w}_2(1 + w_1\overline{w}_1)$ s'annule partout.

Si le déterminant est négatif en un point, nous allons déduire une contradiction. En effet, dans B_2,

$$(dd^c\varphi_1)^2 = (dd^c V(z))^2 = (dd^c h(z))^2 + 2a\, dd^c \log|z| \wedge dd^c h(z),$$

et

$$(dd^c\varphi_2)^2 = (dd^c(\log|z| - V(z)))^2 = (dd^c h(z))^2 - 2(1-a) dd^c \log|z| \wedge dd^c h(z).$$

Puisque $a = -c_0 \in (0, 1)$, il résulte que, au point où $(dd^c h)^2$ est négatif, ou bien $(dd^c\varphi_1)^2 < 0$, ou bien $(dd^c\varphi_2)^2 < 0$, ce qui est contradictoire.

Si, d'autre part, $D_1 + D_2\overline{w}_2(1 + w_1\overline{w}_1)$ s'annule partout, on voit, en remplaçant $\overline{w}_2(1 + w_1\overline{w}_1)$ par z, que $g'(z) + zg''(z) = 0$ partout. Mais cela est impossible lorsque g est holomorphe au voisinage de l'infini, sauf si g est constante. Alors $f \equiv 0$, $V(z) = a \log|z|$ et par continuité $\varphi_1(z) = au(z)$. Ceci achève la démonstration sous la condition supplémentaire.

Passons au cas général. On définit

$$\Phi_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_i(z_1, z_2 e^{i\theta})\, d\theta, \qquad i = 1, 2. \tag{8}$$

Alors $g = \Phi_1 + \Phi_2$, et Φ_i ne dépend que de z_1 et $|z_2|$, $i = 1, 2$, donc le cas spécial montre qu'il existe une constante $a \geq 0$ telle que $\Phi_1(z) = au(z)$ pour tout $z \in B$. Or sur la droite complexe $z_2 = 0$, on a $\Phi_1(z) = \varphi_1(z)$, ce qui implique que $\varphi_1(z) = au(z)$ sur cette droite.

Finalement, si d est une droite complexe quelconque passant par l'origine, il existe une transformation unitaire R_d telle que $R_d^{-1}(d) = \{z_2 = 0\}$. Comme u est invariante par cette transformation, on peut évidemment remplacer φ_i par $\varphi_i \circ R_d$ dans l'argument précédent. Ceci montre que $\varphi_1(z) = a_d u(z)$ sur d, où $a_d \geq 0$. L'origine étant un point commun à toutes les droites, on obtient le résultat escompté. ∎

Remarque. Le théorème reste vrai pour $n \geq 3$, avec presque la même démonstration. Il faut d'abord supposer que les composantes ne dépendent que de z_1 et $\|z'\|$, où $z' = (z_2, \ldots, z_n)$. On conclut qu'elles sont proportionnelles à u. Ensuite, on remplace la formule (8) par

$$\Phi_i = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} \varphi_i(z_1, z_2 e^{i\theta_2}, \ldots, z_n e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \ldots d\theta_n, \qquad i = 1, 2,$$

etc.

4. Fonctions extrémales qui ne s'annulent pas sur tout le bord. Si $\sup_{z \in \Omega} u(z) = c < 0$, alors u n'est pas extrémale puisqu'elle peut être décomposée : $u(z) = h/2 + (u(z) - h/2)$, où h est une fonction plurisousharmonique avec $c < h < 0$, qui n'est pas une multiple de u. Il s'ensuit que toute fonction extrémale, continue jusqu'au bord, s'annule quelque part au bord.

D'autre part, il est facile de donner un exemple d'une fonction extrémale qui est négative sur une grande partie du bord. On prend simplement la fonction $\log|z_1|$ dans le bidisque. Supposons que $\log|z_1| = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$. Si on fixe z_2, on a $\log|\cdot| = \varphi_1(\cdot, z_2) + \varphi_2(\cdot, z_2)$. Comme le logarithme est extrémal dans le disque unité, on conclut que $\varphi_1(z) = c(z_2)\log|z_1|$. Ensuite, en fixant z_1, on trouve que $c(z_2)$ est harmonique. On calcule $(dd^c u)^2(z) = -|\partial \log|z_1|/\partial z_1|^2 |\partial c(z_2)/\partial z_2|^2 \leq 0$. Comme u est plurisousharmonique, l'expression s'annule partout. En conséquence, c est constante.

Si Ω est un domaine B-régulier (par exemple la boule), le problème de Dirichlet pour l'équation de Monge–Ampère a une solution pour toute fonction f continue sur le bord. On peut se demander pour quelles fonctions f la solution est extrémale. Il faut que l'ensemble où f s'annule soit suffisamment large, mais le problème reste mystérieux.

5. La conjecture de Coman. Les définitions utilisées dans cette section se trouvent dans l'introduction. La fonction de Green dans le bidisque, que nous avons calculée plus haut, donne un contre-exemple à la conjecture de Coman. Pour montrer cela nous utiliserons les théorèmes 1.2 et 2.7 et le résultat suivant.

Théorème 5.1 ([Wik, théorème 2.4]). *Soient Ω un domaine borné convexe de $\mathbb{C}^n$ et A comme plus haut. Alors $\delta^A(z) = \delta(z, A)$ pour tout $z \in \Omega$.*

Dans le reste de l'article nous fixons deux pôles $(a, 0)$ et $(b, 0)$ dans le bidisque, $a \neq b$ et $a, b \neq 0$, et un point $z = (0, \gamma)$, tels que $|ab| < |\gamma| < \min\{|a|, |b|\}$. On note $g_{p,q}$ la fonction de Green avec poids p en $(a, 0)$ et q en $(b, 0)$, évaluée en z, et de même $\delta_{p,q}$. Remarquons que, d'après le théorème 2.7, $g_{1,1} = \log|\gamma|$, $g_{1,0} = \log|a|$, et $g_{2,1} = g_{1,1} + g_{1,0} = \log|\gamma| + \log|a|$.

Maintenant nous pouvons démontrer notre théorème.

Démonstration du théorème 1.3. Il suffit de montrer que $\delta_{2,1} > g_{2,1}$. On sait déjà que $\delta_{2,1} \geq g_{2,1}$. Supposons que l'inégalité soit une égalité. Alors

$$\begin{aligned} g_{2,1} &= g_{1,1} + g_{1,0} \leq \delta_{1,1} + \delta_{1,0} \\ &= \inf\{\log|\zeta_1| + \log|\zeta_2|\} + \inf\{\log|\zeta_1|\} \\ &\leq \inf\{2\log|\zeta_1| + \log|\zeta_2|\} = \delta_{2,1} = g_{2,1}, \end{aligned} \tag{9}$$

où toutes les bornes inférieures sont prises sur la même famille F_z. Donc, toutes les inégalités sont en fait des égalités. En utilisant les théorèmes 1.2 et 5.1, la *dernière* borne inférieure est atteinte par un disque extrémal f qui passe par $(a, 0)$ ou $(b, 0)$ ou tous les deux. Il s'ensuit que f est également extrémal pour $\delta_{1,1}$ et $\delta_{1,0}$. Pourtant, cela est impossible, d'après le lemme suivant. La contradiction donne le théorème. ∎

Lemme 5.2. *Si $|ab| < |\gamma| < \min\{|a|, |b|\}$, il n'y a aucun disque extrémal commun à $\delta_{1,1}$ et $\delta_{1,0}$.*

Preuve. Commençons par caractériser tous les disques extrémaux pour $\delta_{1,0}$. Soit $f = (f_1, f_2) : D \to D \times D$ un tel disque. Par définition, il existe $\zeta_1 \in D$ tel que $f_1(\zeta_1) = a$ et $f_1(0) = 0$. On a $g_{1,0} = \log|a|$, et cela est égal à $\delta_{1,0}$, car cette valeur est atteinte par le disque

$$\zeta \mapsto \left(\zeta, \frac{\gamma}{a}\,\frac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}\right).$$

Donc $|\zeta_1| = |a|$. En utilisant le lemme de Schwarz on conclut qu'un disque passant par $(a,0)$ et z est extrémal pour $\delta_{1,0}$ si et seulement si il est une rotation dans la première variable.

Fixons maintenant un tel disque $\zeta \mapsto (\alpha\zeta, f_2(\zeta))$, où $|\alpha| = 1$, et supposons qu'il est extrémal pour $\delta_{1,1}$. D'après le théorème 1.2 il y a deux possibilités. Soit le disque passe par un seul pôle, ce qui est fatalement $(a,0)$, soit par tous les deux pôles. Dans le premier cas, $(a,0)$ serait l'image de $\zeta_1 = a/\alpha$ et on calculerait $\delta_{1,1} = \log|a/\alpha| = \log|a|$. D'autre part, si le disque passait par les deux pôles, ceux-ci seraient les images de $\zeta_1 = a/\alpha$ et $\zeta_2 = b/\alpha$ respectivement. Alors $\delta_{1,1} = \log|a/\alpha| + \log|b/\alpha| = \log|ab|$ dans ce cas.

Pour conclure la preuve, on va montrer que $\delta_{1,1} = g_{1,1} = \log|\gamma|$, ce qui exclut les deux possibilités. On a $|\gamma| < |a| < |a/b|$, donc $|\gamma b/a| < 1$. Pareillement on obtient $|\gamma a/b| < 1$. Par conséquent, on peut choisir $\zeta_1 \in D$ tel que $\zeta_1^2 = \gamma a/b$. Posons $\zeta_2 = \gamma/\zeta_1$ et $\beta = a/\zeta_1$. Alors $\zeta_2 \in D$ car $|\zeta_2|^2 = |\gamma b/a|$, et $\beta \in D$ car $|\beta|^2 = |ab/\gamma|$. Maintenant on définit un disque analytique par

$$f : \zeta \mapsto \left(\beta\zeta, \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \overline{\zeta}_1\zeta}\,\frac{\zeta - \zeta_2}{1 - \overline{\zeta}_2\zeta}\right).$$

Il est facile de vérifier qu'il envoie ζ_1 sur $(a,0)$, ζ_2 sur $(b,0)$, et 0 sur $(0,\gamma)$. On calcule $d(f) = \log|\zeta_1| + \log|\zeta_2| = \log|\gamma|$, ce qui termine la preuve du lemme. ∎

THÉORÈME 5.3. *Soit A comme plus haut. Il existe des domaines strictement convexes, lisses, contenus dans le bidisque, tels que $g(z,A) \not\equiv \delta(z,A)$.*

Preuve. Soit $(\Omega_j \subset D \times D)_j$ une suite croissante de domaines convexes, lisses, avec $\bigcup_j \Omega_j = D \times D$. On a $\delta_{\Omega_j}(z,A) \geq \delta(z,A)$, parce que pour Ω_j la borne inférieure est prise par rapport à une plus petite famille F_z.

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit. Quand Ω_j est si grand que $G_\varepsilon = \{z : g(z,A) < -\varepsilon\} \subset \Omega_j$, alors $g(z,A) + \varepsilon$ est la fonction de Green de G_ε. Par conséquent $g_{\Omega_j}(z,A) \leq g(z,A) + \varepsilon$. Ceci montre en notre cas le fait connu que, pour z fixé, la valeur $g_\Omega(z,A)$ varie continûment avec Ω croissant. On a, avec $z = (0,\gamma)$,

$$\delta_{\Omega_j}(z,A) \geq \delta(z,A) > g(z,A) \geq g_{\Omega_j}(z,A) - \varepsilon.$$

Le théorème s'ensuit. ∎

Remerciements. Ce travail a commencé lors de notre visite au Laboratoire E. Picard, Université Paul Sabatier, Toulouse. Nous remercions ses membres pour leur hospitalité et des discussions intéressantes. De plus, nous remercions Urban Cegrell, qui nous a inspiré pour travailler sur ce genre de problèmes. Magnus Carlehed a reçu l'aide de l'Institut Suédois, la Fondation de Wenner-Gren et la Fondation en mémoire de Lars Hierta.

Références

[Car] M. Carlehed, *Potentials in pluripotential theory*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 8 (1999), 439–469.

[Car-Wie1] M. Carlehed et J. Wiegerinck, *Exemples de points extrémaux dans le cône des fonctions plurisousharmoniques négatives*, prépublication, Laboratoires de Mathématiques Émile Picard, Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1999.

[Car-Wie2] —, —, *The Lempert function and the pluricomplex Green function are not equal in the bidisc*, prépublication électronique, http://preprint.beta.uva.nl/server/bp_search.standard, Univ. d'Amsterdam, 1999.

[Ce-Th] U. Cegrell and J. Thorbiörnson, *Extremal plurisubharmonic functions*, Ann. Polon. Math. 63 (1996), 63–69.

[Cho] G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Vol. II, Benjamin, 1969.

[Com] D. Coman, *The pluricomplex Green function with two poles of the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Pacific J. Math. 194 (2000), 257–283.

[Hör] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Birkhäuser, 1994.

[Kis] C. Kiselman, *Densité des fonctions plurisousharmoniques*, Bull. Soc. Math. France 107 (1979), 295–304.

[Lel] P. Lelong, *Fonction de Green pluricomplexe et lemme de Schwarz dans les espaces de Banach*, J. Math. Pures Appl. 68 (1989), 319–347.

[Lem] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 427–474.

[Ran] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[Wik] F. Wikström, *Non-linearity of the pluricomplex Green function*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 1051–1056.

Bondegatan 81, 4 tr
116 34 Stockholm, Sweden
E-mail: magnus.carlehed@foreningssparbanken.se

Korteweg–de Vries Institute
for Mathematics
University of Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV, Amsterdam
The Netherlands
E-mail: janwieg@wins.uva.nl

Reçu par la Rédaction le 19.11.2001 (1383)