ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
115.1 (2015)

Propriété de convergence de certaines familles de fonctions finement harmoniques et régularité du noyau de Green d'un domaine fin

par Abderrahim Aslimani et Mohamed El Kadiri (Rabat)

Abstract. We show a convergence property of certain families of finely harmonic functions in a fine domain U of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. We apply it to establish a certain regularity of the fine Green kernel of U.

1. Introduction. On se place dans un *domaine de Green* Ω de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un domaine quelconque de $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 3$, ou un domaine de complémentaire non polaire si $n = 2$. Rappelons que le *noyau* (ou *fonction*) *de Green* de Ω est une fonction symétrique G définie sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs dans $]0, \infty]$ ayant les propriétés suivantes :

(1) G est s.c.i. sur $\Omega \times \Omega$ et continue en dehors de la diagonale de $\Omega \times \Omega$.
(2) Pour tout $y \in \Omega$, la fonction $G(\cdot, y)$ est un potentiel, harmonique dans $\Omega \setminus \{y\}$.

Toute autre fonction G' sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs dans $]0, \infty]$ possédant les propriétés 1. et 2. est de la forme $G'(\cdot, y) = \varphi(y)G(\cdot, y)$ pour tout $y \in \Omega$, où φ est une fonction finie continue et > 0 sur Ω. De plus, comme G est symétrique, la fonction G' est symétrique si et seulement si φ est constante. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, alors G est donné par $G(x, y) = 1/\|x - y\|^{n-2}$ à la multiplication près par une constante > 0. La notion de fonction ou noyau de Green a été étendue au cadre général des espaces harmoniques de Brelot vérifiant l'hypothèse d'unicité par R.-M. Hervé dans [He].

Soit U un domaine fin de Ω, c'est-à-dire un domaine au sens de la topologie fine sur Ω. Rappelons que la *topologie fine*, définie par Cartan en 1940, est la moins fine des topologies sur Ω qui rendent continues les fonctions surharmoniques dans Ω (pour plus de détails sur cette topologie on renvoie

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 31C40; Secondary 31C05.
Key words and phrases: finely harmonic function, finely superharmonic function, fine potential, fine Green kernel, natural topology, compact base.

à [F1, Chapter 1] et [D]). Pour tout $y \in U$, on note $G_U(\cdot, y)$ la fonction définie sur $U \setminus \{y\}$ par $G_U(\cdot, y) = G(\cdot, y) - \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}$. Cette fonction est finement surharmonique ≥ 0 dans $U \setminus \{y\}$, et le point y est polaire, donc elle se prolonge par continuité fine à U en une fonction finement surharmonique sur U, notée encore $G_U(\cdot, y)$. La fonction $(x, y) \mapsto G_U(x, y)$ définie sur $U \times U$ est appelée un *noyau de Green fin* de U. D'après [F3, Théorème, p. 203], pour tout $y \in U$, $G_U(\cdot, y)$ est un potentiel fin dans U et tout potentiel fin dans U finement harmonique dans $U \setminus \{y\}$ est de la forme $\alpha(y)G_U(\cdot, y)$, où $\alpha(y)$ est une constante > 0 ne dépendant que de U et de y.

On peut alors se demander si le noyau de Green fin G_U de U est régulier dans le sens où G_U est s.c.i. dans $U \times U$ et finement continue en dehors de la diagonale de $U \times U$ (U étant muni de la topologie fine et $U \times U$ de la topologie produit correspondante). Dans le cas classique d'un domaine euclidien de $\mathbb{R}^n$, la propriété (2) d'un noyau de Green de Ω est une conséquence du principe de Harnack pour les fonctions harmoniques positives dans Ω. Or le principe de Harnack n'est pas satisfait par les fonctions finement harmoniques dans un domaine fin. Toutefois ces fonctions possèdent une propriété de convergence voisine. C'est cette propriété qui va nous permettre de répondre à la question soulevée ci-dessus. Plus précisément, nous établissons une propriété de convergence pour les suites et les familles de fonctions finement harmoniques uniformément finement localement bornées, et grâce à cette propriété et à l'aide d'une comparaison entre la topologie naturelle et la topologie fine de U, nous montrons que le noyau G_U est régulier.

Les résultats de ce travail sont valables dans le cadre général d'un $\mathcal{P}$-espace harmonique de la théorie axiomatique de Brelot à base dénombrable qui satisfait l'axiome (D), l'hypothèse d'unicité et dans lequel la topologie fine est moins fine que la topologie fine adjointe ; pour de tels espaces on renvoie à [He]. On s'est placé dans un domaine de Green de l'espace $\mathbb{R}^n$ pour des raisons de simplicité seulement.

Notations et définitions. Dans tout ce travail on se place dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, borné si $n = 2$, et on considère un domaine fin U de Ω, c'est à-dire un domaine au sens de la topologie fine de Ω. On supposera que Ω est régulier (ce qui n'est pas une réstriction). Le noyau de Green de Ω est noté tout simplement G. Nous utilisons le mot fin (finement) pour distinguer les notions relatives à la topologie fine de celles relatives à la topologie euclidienne de U, c'est-à-dire la topologie induite sur U par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$. Pour toute partie A de U, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans Ω en topologie euclidienne et $\tilde{A}$ l'adhérence de A dans Ω en topologie fine. On note f-lim et f-lim inf la limite et la limite inférieure en topologie fine. On note aussi $\mathcal{S}(U)$ le cône convexe des fonctions finement surharmoniques ≥ 0 dans U au sens de [F1]. Si f est une fonction sur U à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on note $\widehat{f}$ la régularisée finement s.c.i. de f, c'est-à-dire la plus grande minorante finement s.c.i. de f. Le noyau de Green fin de U (associé à G plus haut) est noté G_U. Pour plus de détails sur ce noyau nous renovoyons à [F3].

2. Propriété de convergence de familles et de suites de fonctions finement harmoniques. D'après [EK1, Théorème 3.1, p. 107], il existe une résolvante absolument continue (V_λ) de noyaux boréliens sur U dont le cône des fonctions excessives finies (V_λ)-p.p. est le cône $\mathcal{S}(U)$. Il en résulte d'après [BBC, Theorem 4.4.6, p. 136] que $\mathcal{S}(U)$ est un H-cône standard de fonctions. On le munit alors de la topologie naturelle [BBC, Section 4.5, p. 141]. Rappelons que cette topologie est induite sur $\mathcal{S}(U)$ par celle d'un espace vectoriel localement convexe E dans lequel $\mathcal{S}(U)$ est un cône convexe saillant et que, pour cette topologie, si un filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(U)$ est convergent, alors on a $\lim_{\mathcal{F}} = \sup_{M\in\mathcal{F}} \widehat{\inf_{u\in M} u}$ [BBC, Theorem 4.5.2]. De plus, pour cette topologie, $\mathcal{S}(U)$ est localement compact et admet une base compacte [EK1, Corollaire 2, p. 110].

Lemme 2.1. *Soit $x_0 \in U$. Alors il existe un voisinage fin de x_0 compact* (*en topologie euclidienne*) *$V \subset U$ tel que la réstriction de toute fonction $u \in \mathcal{S}(U)$ à V est s.c.i.* (*en topologie euclidienne*).

Démonstration. Comme $\mathcal{S}(U)$ est un H-cône standard de fonctions, il existe d'après [BBC, Definition, p. 104, et Theorem 4.4.6] une suite (s_n) de fonctions de $\mathcal{S}(U)$ telle que toute fonction $s \in \mathcal{S}(U)$ est l'enveloppe supérieure d'une sous-suite croissante de (s_n). Soit $x_0 \in U$, il existe d'après [F5, Lemma, p. 114] un voisinage fin V de x_0, compact en topologie euclidienne, tel que la réstriction de toute fonction s_n à V est continue en topologie euclidienne. On en déduit donc que la réstriction de toute fonction $s \in \mathcal{S}(U)$ à V est s.c.i. en topologie euclidienne. ∎

Théorème 2.2. *Soit $(h_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions finement harmoniques ≥ 0 uniformément finement localement bornée dans U, et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Supposons que la famille (h_i) converge selon $\mathcal{F}$ vers une fonction $h \in \mathcal{S}(U)$ en topologie de $\mathcal{S}(U)$. Alors h est finement harmonique dans U et la famille (h_i) converge, selon $\mathcal{F}$, uniformément finement localement dans U vers h.*

Démonstration. Quitte à se placer finement localement, on peut supposer que $h_i \leq c$ dans U pour une certaine constante $c > 0$ et pour tout $i \in I$. On a $\lim_{i,\mathcal{F}} h_i = \sup_{M\in\mathcal{F}} \widehat{\inf_{i\in M} h_i} = h \in \mathcal{S}(U)$ d'après [BBC, Theorem 4.5.2]. D'autre part on a $c = c - h_i + h_i$, et $\lim_{i,\mathcal{F}} h_i = h$ dans $\mathcal{S}(U)$, donc $\lim_{i,\mathcal{F}}(c - h_i) = c - h$ dans $\mathcal{S}(U)$, ce qui montre que h est finement harmonique dans U. Soit $x_0 \in U$; alors d'après le lemme précédent et [F5, Lemma, p. 114], il existe un voisinage fin V de x_0, compact en topologie euclidienne, sur lequel les fonctions $\widehat{\inf}_{i\in M} h_i$, $M \in \mathcal{F}$, sont s.c.i. en topologie euclidienne et h est continue en topologie euclidienne. Soit $\epsilon > 0$. Comme V est compact, on peut trouver $M_0 \in \mathcal{F}$ tel que $h - \widehat{\inf}_{i\in M} h_i \le \epsilon$ dans V pour tout $M \in \mathcal{F}$ contenant M_0. On en déduit que pour tout $M \in \mathcal{F}$ contenant M_0, on a $h - h_i \le \epsilon$ dans V pour tout $i \in M$. En appliquant le même procédé aux fonctions $c - h_i$, $i \in I$, on peut trouver un voisinage fin W de x_0, compact en topologie euclidienne et contenu dans V, et un ensemble $M_1 \in \mathcal{F}$, tels que $h_i - h < \epsilon$ dans W pour tout $M \in \mathcal{F}$ contenant M_1 et tout $i \in M$. On a alors $|h - h_i| < \epsilon$ dans W pour tout $M \in \mathcal{F}$ contenant $M_0 \cup M_1$ et tout $i \in M$. Ainsi la famille h_i converge uniformément selon $\mathcal{F}$ vers h dans W. ∎

COROLLAIRE 2.3. *Soit I un ensemble ordonné et réticulé à droite, et soit $(h_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante de fonctions finement harmoniques dans U. Si (h_i) est uniformément finement localement bornée dans U, alors $h = \sup_i h_i$ est finement harmonique, et (h_i) est finement localement uniformément convergente vers h selon le filtre des sections de I.*

Démonstration. Quitte à se placer finement localement et ajouter une même constante aux fonctions h_i, on peut supposer que ces fonctions sont ≥ 0. Il est clair que $h = \sup_{i\in I} h_i$ est finement harmonique dans U. Soit $\mathcal{F}$ le filtre des sections de I. Alors (h_i) est convergente selon $\mathcal{F}$ vers la fonction h dans $\mathcal{S}(U)$. Le corollaire résulte aussitôt du théorème précédent. ∎

COROLLAIRE 2.4. *Soit (h_j) une suite uniformément finement localement bornée (i.e. au sens de la topologie fine) de fonctions finement harmoniques dans U. Alors on peut en extraire une sous-suite (h_{j_k}) qui converge uniformément finement localement vers une fonction finement harmonique h dans U.*

Démonstration. Quitte à se placer finement localement et ajouter une même constante aux fonctions h_j, $j \in \mathbb{N}$, on peut supposer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $0 \le h_j \le c$ pour tout entier j. On peut alors extraire de (h_j) une sous-suite (h_{j_k}) qui converge au sens de la topologie naturelle de $\mathcal{S}(U)$ vers une fonction finement surharmonique $h \ge 0$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 2.2 à la famille $(h_{j_k})_k$ et le filtre des voisinages de ∞ dans $\mathbb{N}$. ∎

3. Régularité du noyau de Green fin. Rappelons que d'après [EK1, Corollaire 2, p. 110], le cône $\mathcal{S}(U)$ muni de la topologie naturelle admet une base compacte. Soit B une base compacte de $\mathcal{S}(U)$ et soit Φ une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{S}(U)$ définissant B, i.e. $B = \{s \in \mathcal{S}(U) :$

$\Phi(s) = 1\}$. Pour tout $y \in U$, posons $P_y = G_U(\cdot, y)/\Phi(G_U(\cdot, y))$. L'application $\varphi : U \to B$ définie par $\varphi(y) = P_y$ est injective. Nous identifions U avec son image par φ. La topologie induite sur U par celle de B sera appelée la *topolgie naturelle* de U. Cette topologie est indépendante de la base B. En effet, si B_1 et B_2 sont deux bases compactes de $\mathcal{S}(U)$, alors B_1 et B_2 sont homéomorphes, donc les topologies induites sur U par celles de B_1 et B_2 sont identiques.

Nous commençons par comparer la topologie naturelle de U avec la topologie fine. La proposition suivante et son corollaire ont été démontrés dans [EKF1].

Proposition 3.1 ([EKF1, Corollary 3.15]). *La fonction $U \ni y \mapsto P_y \in \mathcal{S}(U)$ est finement continue sur U.*

Démonstration. Soient $x_0, z \in U$, $x_0 \neq z$, et V un voisinage fin de z tel que $x_0 \notin \overline{V}$. Par le principe de Harnack, on peut trouver un voisinage ouvert euclidien W de x_0 dans Ω tel que

$$(1-\epsilon) \inf_{y \in V} G(x_0, y) \leq \inf_{y \in V} G(x, y) \leq (1+\epsilon) \inf_{y \in V} G(x_0, y)$$

pour tout $x \in W$. On en déduit que

$$(1-\epsilon) \inf_{y \in V} G(x_0, y) \leq \widehat{\inf_{y \in V}} G(x_0, y) \leq (1+\epsilon) \inf_{y \in V} G(x_0, y).$$

Comme x_0 et V sont arbitraires, il s'ensuit que f-lim $\widehat{\inf}_{y \to z} G(\cdot, y) = G(\cdot, z)$ dans $U \setminus \{z\}$, donc partout puisque $\{z\}$ est polaire.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur U plus fin que le filtre des voisinages fins de z. D'après ce qui précède, on a $\lim_{y,\mathcal{U}} G(\cdot, y) = G(\cdot, z)$ et donc

$$G(\cdot, z)|U = \lim_{y,\mathcal{U}} G(\cdot, y)|U = \lim_{y,\mathcal{U}} G_U(\cdot, y) + \lim_{y,\mathcal{U}} \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}|U$$

dans $\mathcal{S}(U)$. D'autre part, pour tout $x \in U$,

$$\Bigl(\lim_{y,\mathcal{U}} \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}\Bigr)(x) = \Bigl(\sup_{M \in \mathcal{U}} \widehat{\inf_{y \in M}} \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}\Bigr)(x) \leq \lim_{y,\mathcal{U}} \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}(x) = \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,z)}(x)$$

puisque la fonction $y \mapsto \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}(x) = \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,x)}(y)$ est finement continue sur U. On en déduit que $s = \lim_{y,\mathcal{U}} G_U(\cdot, y) \geq G_U(\cdot, z) > 0$. D'autre part on a aussi $s \leq \lim_{y,\mathcal{U}} G(\cdot, y)|U = G(\cdot, z)|U$, donc $s \in \mathcal{S}(U)$. On a également $G(\cdot, y)|U = G_U(\cdot, y) + \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}|U$ pour tout $y \in U$, d'où par passage à la limite suivant $\mathcal{U}$,

$$G(\cdot, z)|U = s + \lim_{y,\mathcal{U}} \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}|U \geq s + \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,z)}|U,$$

ce qui prouve que s est un potentiel fin finement harmonique dans $U \setminus \{z\}$, donc de la forme $\alpha G_U(\cdot,z)$ pour un certain $\alpha\in\,]0,1]$ d'après [F3, Théorème, p. 203]. Il en résulte que

$$\lim_{y,\mathcal{U}} P_y = \lim_{y,\mathcal{U}} \frac{G_U(\cdot,y)}{\Phi(G_U(\cdot,y))} = \frac{s}{\Phi(s)} = P_z.$$

On en déduit finalement que $\text{f-lim}_{y\to z} P_y = P_z$, ce qui prouve bien que la fonction $U\ni y\mapsto P_y$ est finement continue. ■

Corollaire 3.2 ([EKF1, Corollary 3.15]). *La topologie naturelle de U est moins fine que la topologie fine de U.*

La proposition suivante n'est que le (a) de [EKF1, Lemma 3.14].

Proposition 3.3. *La fonction g définie sur U par $g(y)=\Phi(G_U(\cdot,y))$ est finement continue sur U.*

Démonstration. Soient $z\in U$ et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages fins de z. On a $\widehat{\liminf}_{y,\mathcal{U}} G_U(\cdot,y)(x)\le \liminf_{y,\mathcal{U}} G(x,y) = G(x,z)$ pour tout $x\in U$, donc $\widehat{\liminf}_{y,\mathcal{U}} G_U(\cdot,y)\in\mathcal{S}(U)$. Soit V un ouvert fin tel que $V\subset\overline{V}\subset U$ et $z\notin\overline{V}$. Il est clair que pour tout $y\in\complement V$, la fonction $G_U(\cdot,y)$ est finement harmonique dans V, et que la famille $(G_U(\cdot,y))_{y\in\complement V}$ est finement localement uniformément bornée dans V, donc d'après le théorème 2.2 cette famille converge uniformément finement localement vers $G_U(\cdot,z)$ dans V puisque pour tout $x\in U$, on a $\text{f-lim}_{y\to z} G_U(x,y) = G_U(x,z)$. On en déduit que $\lim_{y,\mathcal{U}} G_U(\cdot,y) = G_U(\cdot,z)$ dans $U\setminus\{z\}$, donc partout puisque $\{z\}$ est polaire. Par conséquent, $\lim_{y,\mathcal{U}}\Phi(G_U(\cdot,y)) = \Phi(G_U(\cdot,z))$ car la fonction Φ est continue. Il en résulte que $\text{f-lim}_{y\to z} g(y) = \text{f-lim}_{y\to z}\Phi(G_U(\cdot,y)) = \Phi(G_U(\cdot,z))$. Comme z est arbitraire, on en déduit que g est finement continue sur U. ■

Lemme 3.4. *Soit $\alpha>0$. Alors l'ensemble $A=\{y\in U:\Phi(G_U(\cdot,y))\ge\alpha\}$ est compact en topologie euclidienne.*

Démonstration. Pour tout $y\in A$, on a

$$\Phi(G(\cdot,y)|U) = \Phi(G_U(\cdot,y)) + \Phi(\widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y)}|U) \ge \Phi(G_U(\cdot,y)) \ge \alpha$$

et donc $A\subset\{y\in\Omega:\Phi(G(\cdot,y)|U)\ge\alpha\}$. Comme Ω est régulier, on a $\lim_{y\to z} G(x,y)=0$ pour tout $x\in\Omega$ et tout $z\in\partial\Omega$ d'après [AG, Theorem 6.8.3, p. 190], et par suite $\lim_{y\to z} G(\cdot,y)|U = 0$ dans $\mathcal{S}(U)$. Donc A est relativement compact dans Ω. Soit (y_n) une suite de points de A qui converge vers $y\in\overline{\Omega}$; alors $y\in\Omega$ d'après ce qui précède. D'autre part, $G(\cdot,y_n)|U = G_U(\cdot,y_n)+\widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y_n)}|U$ pour tout n, et on peut extraire de (y_n) une sous-suite (y_{n_k}) telle que les suites $(G_U(\cdot,y_{n_k}))$ et $(\widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y_{n_k})}|U)$ convergent dans $\mathcal{S}(U)$. On en déduit en passant à la limite quand $k\to\infty$ que $G(\cdot,y)|U = \lim_{k\to\infty} G_U(\cdot,y_{n_k}) + \lim_{k\to\infty}\widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot,y_{n_k})}|U$, donc $\lim_{k\to\infty} G_U(\cdot,y_{n_k})$

est finement harmonique ≥ 0 dans $U \setminus \{y\}$ puisque la fonction $G(\cdot, y)|U$ est finement harmonique dans $U \setminus \{y\}$. De plus, $\liminf R^{\complement U}_{G(\cdot, y_{n_k})}|U \geq \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot, y)}|U$ et donc, en régularisant, $\lim_{k\to\infty} \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot, y_{n_k})}|U \geq \widehat{R}^{\complement U}_{G(\cdot, y)}|U$ et, par conséquent, $\lim_{k\to\infty} G_U(\cdot, y_{n_k}) \leq G_U(\cdot, y)$. Donc la fonction $\lim_{k\to\infty} G_U(\cdot, y_{n_k})$ est un potentiel fin dans U, finement harmonique dans $U \setminus \{y\}$. Il résulte alors de [F3, Théorème, p. 203] que $\lim_{k\to\infty} G_U(\cdot, y_{n_k}) = \gamma G_U(\cdot, y)$ pour un certain $\gamma \in [0, 1]$. On en déduit que $\Phi(G_U(\cdot, y)) \geq \gamma\Phi(G_U(\cdot, y)) = \lim_{k\to\infty} \Phi(G_U(\cdot, y_{n_k}))$ $\geq \alpha$, ce qui prouve que $y \in A$. Donc A est compact en topologie euclidienne. ∎

Avec les notations précédentes définissons la fonction G_1 sur $U \times U$ par $G_1(x, y) = P_y(x)$.

Théorème 3.5. *La fonction G_1 est s.c.i. sur $U \times U$ et continue sur $(U \times U) \setminus D$, où U est muni de la topologie fine, $U \times U$ est muni de la topologie produit correspondante et où D est la diagonale de $U \times U$.*

Démonstration. La fonction G_1 est s.c.i. sur $U \times U$ d'après le corollaire 3.2 et [EKF1, Proposition 3.2(iii)]. Soient $(x_0, y_0) \in U \times U$ tel que $x_0 \neq y_0$ et $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \Phi(G_U(\cdot, y_0))$. Posons $U_\alpha = \{y \in U : \Phi(G_U(\cdot, y)) > \alpha\}$. Alors U_α est un ouvert fin d'après la proposition 3.3 et on a $y_0 \in U_\alpha$. On peut trouver un voisinage fin W de y_0 compact en topologie euclidienne tel que $W \subset U_\alpha$, et un voisinage V_1 de x_0 ouvert en topologie euclidienne tel que $V_1 \cap W = \emptyset$. Les fonctions $G(\cdot, y)$, $y \in W$, sont harmoniques dans $\Omega \setminus W$ et la fonction G est continue au point (x_0, y_0), on peut donc trouver, en vertu de la propriété de Harnack, un voisinage ouvert V (dans Ω) de x_0 tel que $V \subset V_1$ et dans lequel les fonctions $G(\cdot, y)/\alpha$, $y \in U_\alpha$, sont majorées par une même constante $C > 0$. D'autre part,

$$G_1(\cdot, y) = \frac{G_U(\cdot, y)}{\Phi(G_U(\cdot, y))} \leq \frac{G(\cdot, y)}{\alpha}$$

pour tout $y \in W$, donc $G_1(\cdot, y) \leq C/\alpha$ dans V pour tout $y \in W$.

Soit $\mathcal{V}$ le filtre des voisinages fins de y_0. Alors d'après la proposition 3.1, on a $\lim_{\mathcal{V}} G_1(\cdot, y) = G_1(\cdot, y_0)$ dans $\mathcal{S}(U)$. En vertu du théorème 2.2 et ce qui précède on a $\lim_{\mathcal{V}} G_1(\cdot, y) = G_1(\cdot, y_0)$ uniformément dans un voisinage fin V_2 de x_0 contenu dans $U \setminus W$. On en déduit que pour $\epsilon > 0$ donné, on a

$$\begin{aligned}
&|G_1(x, y) - G_1(x_0, y_0)| \\
&\qquad \leq |G_1(x, y) - G_1(x, y_0)| + |G_1(x, y_0) - G_1(x_0, y_0)| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

dans le produit $U_1 \times U_2$ d'un voisinage fin de x_0 et d'un voisinage fin de y_0. Il en résulte bien que la fonction G_1 est continue en (x_0, y_0). ∎

Corollaire 3.6. *La fonction G_U est s.c.i. sur $U \times U$ et continue sur $(U \times U) \setminus D$, où U est muni de la topologie fine, $U \times U$ est muni de la topologie produit correspondante et où D est la diagonale de $U \times U$.*

Démonstration. En effet, on a $G_U(x, y) = \Phi(G_U(\cdot, y))G_1(x, y)$ pour tout $(x, y) \in U \times U$. La fonction $(x, y) \mapsto \Phi(G_U(\cdot, y))$ est continue sur $U \times U$ d'après la proposition 3.3. Donc G_U possède les propriétés requises d'après le théorème 3.5. ∎

Remarque 3.7. Le noyau de Green fin G_U de U est finement continu sur $U \times U$ en tant qu'ouvert fin de $\mathbb{R}^{2n}$. En effet, la fonction G_U est séparément finement surharmonique ≥ 0, il résulte alors de [EK2, théorème 4.5] que G_U est finement surharmonique sur $U \times U$, donc finement continue sur $U \times U$.

Références

[AG] D. H. Armitage and S. J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer, London, 2001.

[BBC] N. Boboc, Gh. Bucur and A. Cornea, *Order and Convexity in Potential Theory: H-cones*, Lecture Notes in Math. 853, Springer, 1981.

[CC] C. Constantinescu and A. Cornea, *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer, Berlin, 1972.

[DM] C. Dellacherie and P.-A. Meyer, *Probabilités et Potentiel. Chapitres XII–XVI*, Hermann, Paris, 1987.

[D] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, Springer, Berlin, 2001.

[EK1] M. El Kadiri, *Sur la décomposition de Riesz et la représentation intégrale des fonctions finement surharmoniques*, Positivity 4 (2000), 105–114.

[EK2] M. El Kadiri, *Fonctions séparément finement surharmoniques*, Positivity 7 (2003), 245–256.

[EKF1] M. El Kadiri and B. Fuglede, *Martin boundary of a fine domain and a Fatou–Naïm–Doob theorem for finely superharmonic functions*, arXiv:1403.0857 (2014).

[EKF2] M. El Kadiri and B. Fuglede, *Sweeping at the Martin boundary of a fine domain*, arXiv:1409.7098 (2014).

[F1] B. Fuglede, *Finely Harmonic Functions*, Lecture Notes in Math. 289, Springer, Berlin, 1972.

[F2] B. Fuglede, *Localization in fine potential theory and uniform approximation by subharmonic functions*, J. Funct. Anal. 49 (1982), 57–72.

[F3] B. Fuglede, *Sur la fonction de Green pour un domaine fin*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25 (1975), no. 3–4, 201–206.

[F4] B. Fuglede, *Représentation intégrale des potentiels fins*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 300 (1985), 129–132.

[F5] B. Fuglede, *Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 2 (1976), 113–127.

[He] R.-M. Hervé, *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 12 (1962), 415–571.

[M] G. Mokobodzki, *Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15 (1965), 103–112.

Abderrahim Aslimani, Mohamed El Kadiri
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohammed V
B.P. 1014, Rabat, Maroc
E-mail: slimonier.math.@gmail.com
elkadiri@fsr.ac.ma

Received 24.1.2015
and in final form 20.4.2015 (3610)